Univ.-Prof. Dr. Andreas Kleine
Prof. Dr. Jochen Schwarze
Überarbeitung:
Prof. Dr. Hermann Singer
Dipl.-Stat. Anja Bittner

Modul 31101
Grundlagen der Wirtschaftsmathematik und Statistik

Kurs 40600: Grundlagen der Analysis und Linearen Algebra
Kurs 40601: Grundlagen der Statistik

LESEPROBE

Fakultät für
Wirtschaftswissenschaft

FernUniversität in Hagen

Kurs 40600

Grundlagen der Analysis und Linearen Algebra

Fakultät für
**Wirtschafts-
wissenschaft**

FernUniversität in Hagen

Kurseinheit 1: Folgen, Reihen und finanzmathematische Grundlagen

1 Folgen, Reihen und ökonomische Anwendungen

Vorbemerkungen

In vielen Bereichen der Wirtschaftswissenschaften dienen quantitative Daten, d.h. numerische Werte bzw. Zahlen, als Grundlage für vertiefende Untersuchungen. Es lassen sich zahlreiche Beispiele für entsprechende betriebswirtschaftliche und volkswirtschaftliche Kennziffern finden. Exemplarisch seien etwa der Umsatz, die Kosten, der Gewinn, der Deckungsbeitrag und die Produktivität genannt. Wie diese numerischen Größen definiert und zu interpretieren sind, ist unter anderem Gegenstand des Moduls „Einführung in die Wirtschaftswissenschaft“ (Modul 31001). Da sich die Daten vielfach nicht zufällig ergeben, sondern sich durch spezielle Regeln bzw. Berechnungsvorschriften bestimmen lassen, bietet sich eine mathematische Darstellung der ökonomischen Kennziffern an. Diese Abbildungsvorschriften stehen im Mittelpunkt der Grundlagen der Wirtschaftsmathematik. Zu diesen Abbildungen zählen unter anderem Funktionen, aber auch Folgen. Die Folgen stehen in diesem ersten Kapitel im Fokus der Betrachtungen, mit Funktionen beschäftigen sich die nachfolgenden Kapitel.

Die Abschnitte 1.1 und 1.2 führen die Begriffe der Folgen und Reihen ein. Die Eigenschaften von Folgen und Reihen werden an kleinen numerischen Beispielen sowie an unterschiedlichen Abschreibungsmethoden in den Abschnitten 1.1.3 und 1.2.2 illustriert. Von besonderer Bedeutung für die weiteren Betrachtungen ist der Begriff des Grenzwertes, der daher in den Abschnitten 1.1.4 und 1.2.4 detailliert dargestellt wird. Aus ökonomischer Sicht ist die Zinsrechnung eine wichtige Anwendung von Folgen und Reihen. Der Abschnitt 1.3 stellt entsprechende Grundlagen der Finanzmathematik vor.

1.1 Folgen

Zahlenfolge, Folge

Da sich ökonomische Daten unterschiedlich entwickeln können, bietet es sich an, entsprechende Folgen bzw. Sequenzen von Zahlen zu erfassen. Dies führt zum Begriff einer Zahlenfolge.

Definition 1.1 ***(Zahlenfolge)***

*a) Eine Abbildung, die jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ (bzw. $\mathbb{N}_0$) eine reelle Zahl a_n zuordnet, heißt **unendliche** reelle **Zahlenfolge** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ oder kurz **Folge** $\{a_n\}$.*

*b) Eine Abbildung, die den Zahlen $n \in \{1{,}2,\ldots,m\}$ eine reelle Zahl a_n zuordnet, heißt **endliche** reelle **Zahlenfolge** $\{a_n\}_{n=1}^{m}$ oder kurz **endliche Folge** $\{a_n\}^m$.*

In einer Zahlenfolge mit $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet a_1 das erste Folgenglied, a_2 das zweite Folgenglied und allgemein a_n das n-te Folgenglied. Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist a_0 der Startwert. Zahlenfolgen können unterschiedliche Eigenschaften aufweisen.

Eine Folge heißt

- ▷ **monoton wachsend**, wenn jedes Folgenglied größer oder gleich als sein Vorgänger ist: $a_{n+1} \geq a_n$ für alle n,
- ▷ **streng monoton wachsend**, wenn jedes Folgenglied größer als sein Vorgänger ist: $a_{n+1} > a_n$ für alle n,
- ▷ **monoton fallend**, wenn jedes Folgenglied kleiner oder gleich als sein Vorgänger ist: $a_{n+1} \leq a_n$ für alle n,
- ▷ **streng monoton fallend**, wenn jedes Folgenglied kleiner als sein Vorgänger ist: $a_{n+1} < a_n$ für alle n,
- ▷ **nach oben beschränkt**, wenn es eine obere Schranke S_o gibt, die von keinem Folgenglied überschritten wird: $a_n \leq S_o$ für alle n,
- ▷ **nach unten beschränkt**, wenn es eine untere Schranke S_u gibt, die von keinem Folgenglied unterschritten wird: $a_n \geq S_u$ für alle n,
- ▷ **beschränkt**, wenn sie nach unten und nach oben beschränkt ist.

Das folgende Beispiel illustriert einige Eigenschaften endlicher Zahlenfolgen.

Beispiel 1.1
Ein Handelsunternehmen plant in den nächsten Monaten für vier unterschiedliche Produkte A, B, C und D mit folgenden Umsätzen (Angaben in Tausend Euro = TEur).

	Jan. (Monat 1)	Feb. (Monat 2)	März (Monat 3)	April (Monat 4)
Umsatz Produkt A	120	130	125	128
Umsatz Produkt B	50	55	55	62
Umsatz Produkt C	Umsatz steigt um monatl. 5 TEur			
Umsatz Produkt D	Umsatz fällt um monatlich 20 %			

Während die Umsätze der beiden Produkte A und B in der Tabelle explizit angegeben sind, wird für die Produkte C und D die monatliche Veränderung beschrieben, aus denen sich die Umsätze in den Monaten ergeben. Ausgehend von einem Umsatz von 78 TEur für Produkt C und 156,25 TEur für Produkt D im Dezember des Vorjahres resultieren die Folgenglieder:

	Jan. (Monat 1)	Feb. (Monat 2)	März (Monat 3)	April (Monat 4)
Umsatz Produkt C	$a_1 = 83$	$a_2 = 88$	$a_3 =$____	$a_4 = 98$
Umsatz Produkt D	$a_1 = 125$	$a_2 = 100$	$a_3 =$____	$a_4 = 64$

Geben Sie jeweils den Umsatz a_3 der Produkte C und D im Monat März an!

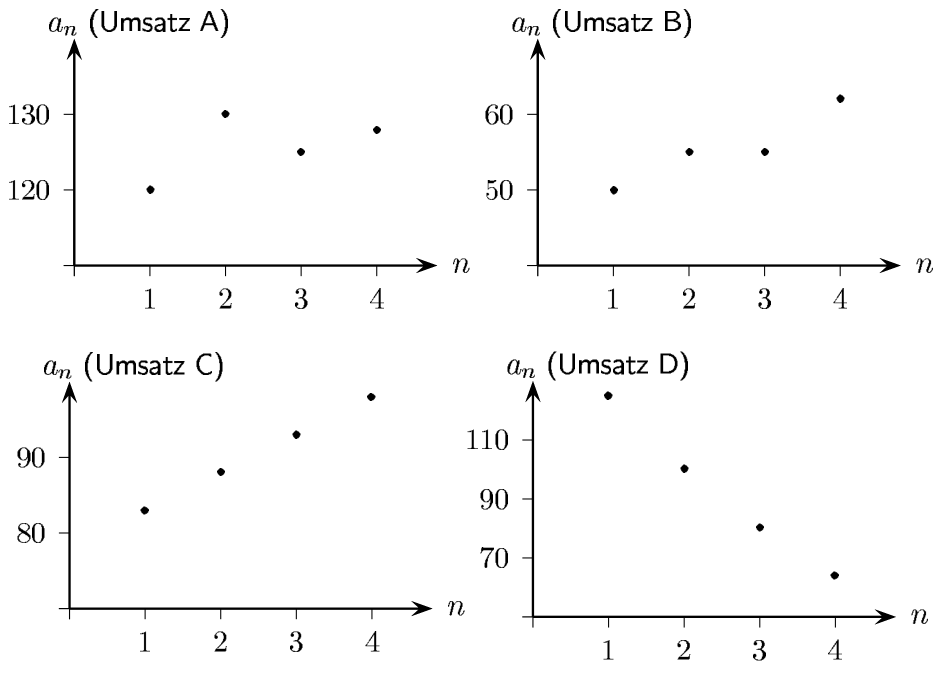
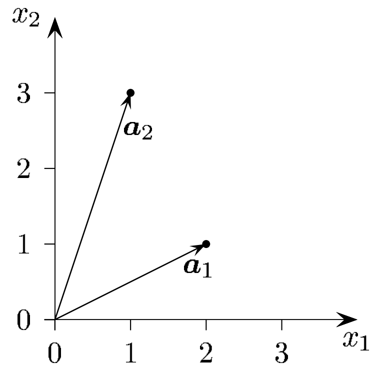
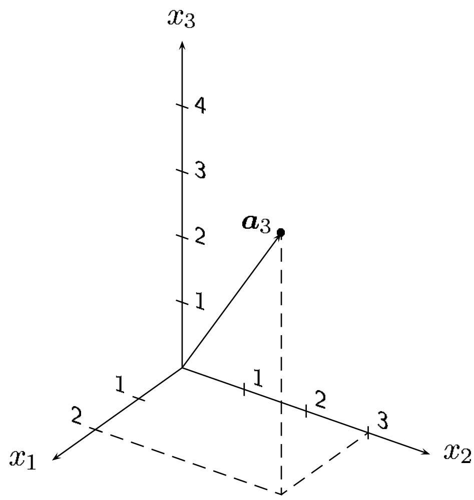


Abbildung 1.1: Umsatz der Produkte A, B, C und D für den Monat n

Die Umsätze in den vier Zahlenfolgen sind – wie auch Abbildung 1.1 veranschaulicht – durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet:

Kurseinheit 5:
Lineare Algebra & Optimierung





Zeichnen Sie in die linke Abbildung den Vektor $\boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ *und in die rechte* $\boldsymbol{a}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Zwei- und dreidimensionale Vektoren lassen sich im Koordinatensystem als Pfeile darstellen. Die im Koordinatenursprung beginnenden Vektoren sind durch ihre Endpunkte • eindeutig gekennzeichnet und werden als Ortsvektoren bezeichnet. Vektoren können auch an beliebigen Punkten aufsetzen. Jedoch ist bei ökonomischen Anwendungen in der graphischen Darstellung eines Vektors, d.h. des Ortsvektors, vielfach die Abbildung des Endpunkts ausreichend, so dass ein Vektor hierbei auf einen Punkt des $\mathbb{R}^n$ reduziert wird.

Ortsvektor

Bei der Schreibweise der Vektoren ist – wie in Beispiel 5.1 – zu berücksichtigen, dass ein j-ter Vektor $\boldsymbol{a}_j$ sich aus den Komponenten a_i zusammensetzt ($i = 1, \ldots, n$). In bestimmten Fällen kann es sinnvoll oder sogar notwendig sein, die Komponenten eines Vektors in einer Zeile aufzulisten. Dieser Vektor $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ heißt Zeilenvektor. Jeder Spaltenvektor lässt sich in einen Zeilenvektor transponieren und umgekehrt. Der obere Index T – oder auch $'$ – bringt zum Ausdruck, dass es sich um einen transponierten Vektor handelt.

Zeilenvektor

transponierter Vektor

Transponierter Vektor: $\boldsymbol{a}^T = \boldsymbol{a}' = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^T = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Geben Sie zu dem Vektor $\boldsymbol{a}_1$ *aus Beispiel 5.1 die transponierten Vektoren* $\boldsymbol{a}_1^T$ *sowie* $(\boldsymbol{a}_1^T)^T$ *an.*

Es gibt zudem Vektoren, die durch spezielle Eigenschaften gekennzeichnet sind. So enthält der so genannte Nullvektor $\boldsymbol{o}$ ausschließlich Komponenten mit dem Wert null. Ein (kanonischer) Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_i$ ist ein Vektor, dessen i-te Kom-

Nullvektor

Einheitsvektor

Beispiel 5.26
Ein Unternehmen stellt weiße und blaue Farbe her, die auf einer Maschine gemischt und anschließend in jeweils einem Tank gelagert wird. Der Tank für die weiße Farbe hat ein Fassungsvermögen von 20 Tonnen, der für die blaue Farbe von 15 Tonnen. Die Maschine zur Herstellung (Mischung) der Farben hat im Betrachtungszeitraum eine Kapazität von bis zu 25 Tonnen – Rüstzeiten seien zu vernachlässigen.

Wie viele Tonnen soll das Unternehmen von den beiden Farben herstellen, wenn der Gewinn der weißen Farbe 4 TEur je Tonne und der blauen Farbe 5 TEur je Tonne beträgt?

Es werden zwei Entscheidungsvariablen benötigt:

x_1: herzustellende Menge weiße Farbe [in Tonnen],
x_2: herzustellende Menge blaue Farbe [in Tonnen].

Die zu maximierende Zielfunktion gibt den Gesamtgewinn an, der sich mit dem Verkauf der weißen und der blauen Farbe erzielen lässt: $z(x_1,x_2) = 4x_1 + 5x_2$. Das begrenzte Fassungsvermögen der beiden Tanks führt zu den beiden Nebenbedingungen: $x_1 \leq 20$ und $x_2 \leq 15$. Die Maschine hat eine Kapazität von 25 Tonnen. Die gesamte Produktionsmenge darf diese Kapazität nicht überschreiten: $x_1 + x_2 \leq 25$. Das lineare Programm lautet in diesem Beispiel unter Beachtung der Nichtnegativitätsbedingungen:

$$\begin{array}{lrcrcll}
\max & 4x_1 & + & 5x_2 & & & \text{(Gewinn)} \\
\text{u.d.N.} & x_1 & & & \leq & 20 & \text{(Tank für weiße Farbe)} \\
 & & & x_2 & \leq & 15 & \text{(Tank für blaue Farbe)} \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 25 & \text{(Maschinenkapazität)} \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0 & \text{(Nichtnegativitätsbedingungen)}
\end{array}$$

oder in Matrixschreibsweise

$$\max\left\{ \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \;\middle|\; \begin{array}{r} \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{o} \end{array} \right\} \text{ mit } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Angenommen, von der blauen Farbe sind 5 Tonnen zu produzieren. Geben Sie Beispiele für zwei Produktionsprogramme (zwei Kombinationen aus blauer und weißer Farbe) an, die alle Restriktionen erfüllen.

zulässige Lösung

Das obige Beispiel macht bereits deutlich, dass ein lineares Programm zumeist eine Vielzahl von zulässigen Lösungen aufweist. Das Unternehmen kann zum Beispiel von der weißen Farbe 20 Tonnen und von der blauen Farbe 5 Tonnen (Produktionsprogramm $\boldsymbol{x} = (20,\, 5)^T$) oder von beiden Farben jeweils 12 ½ Tonnen (Produktionsprogramm $\boldsymbol{x} = (12\,½,\, 12\,½)^T$) herstellen. Ebenso könnte das Unternehmen überlegen, keine Produkte herzustellen. Diese so genannte

Unterlassensalternative

Unterlassensalternative $\boldsymbol{x} = (0,\, 0)^T$ ist ebenfalls zulässig. Neben den genannten

Kurs 40601

Grundlagen der Statistik

Fakultät für
**Wirtschafts-
wissenschaft**

FernUniversität in Hagen

Inhaltsverzeichnis

2.3 Streuungsmaße eindimensionaler Verteilungen

Im vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, dass die Lagemaße die zentrale Tendenz einer Verteilung beschreiben. Zur weiteren Charakterisierung einer Verteilung werden zusätzlich Kenngrößen benötigt, welche Aussagen über die **Streuung** einer Verteilung machen. Von Interesse ist dabei abzuschätzen, inwieweit die Stichprobenwerte um den Mittelwert verteilt sind bzw. streuen.

Streuung

Beispiel 2.3.1:

Nachstehende Abbildung verdeutlicht, dass Verteilungen mit gleicher Lage eine unterschiedliche Gestalt besitzen können. Die Verteilung C zeigt einen viel engeren Wertebereich als die Verteilungen A und B, d.h. die Werte der Verteilung C streuen weniger bzw. die Verteilung C hat eine geringere Streuung als die Verteilungen A und B.

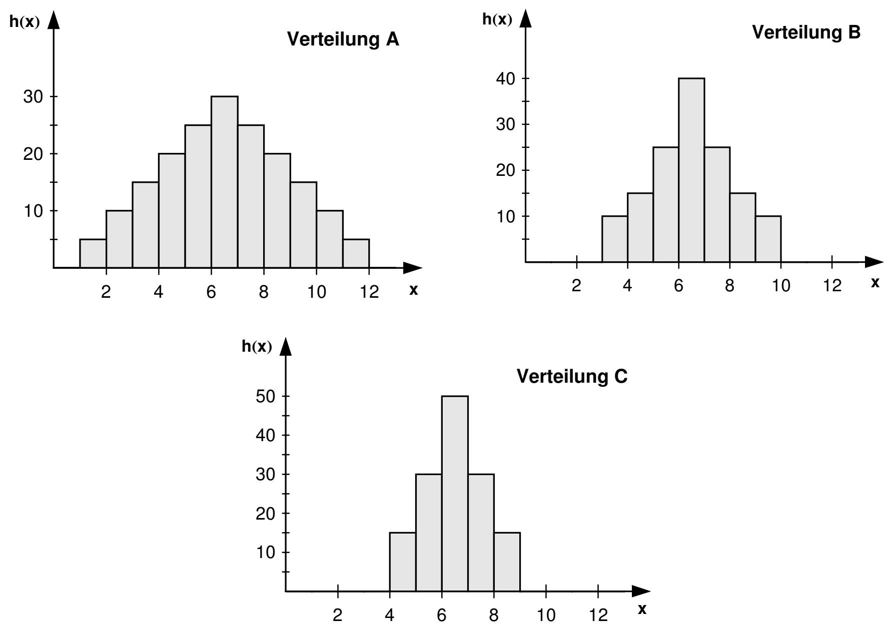


Abbildung 2.3.1: *Verteilungen mit gleicher Lage und unterschiedlicher Streuung*

Im Folgenden werden die wichtigsten **Streuungsmaße**, wie die Spannweite, die Varianz, die Standardabweichung und der Variationskoeffizient, eingeführt. Ein weiteres Streuungmaß, die mittlere absolute Abweichung, wurde bereits im vorherigen Kapitel kurz erwähnt.

Streuungsmaße

2.3.1 Spannweite

Von den Streuungsmaßen ist die Spannweite am einfachsten zu berechnen.

Spannweite

Die **Spannweite w** ist als Differenz der beiden Extremwerte, dem kleinsten und dem größten vorkommenden Beobachtugswert, definiert:

$$w = \max_i x_i - \min_i x_i .$$

$\max_i x_i$: größter x_i-Wert für alle i (Maximum über alle x_i),
$\min_i x_i$: kleinster x_i-Wert für alle i (Minimum über alle x_i).

Beispiel 2.3.2:

Gegeben sind folgende Beobachtungswerte:

27 4 8 3 12 10 26 6 19 16

Die Spannweite beträgt $27 - 3 = 24$.

Quartilsabstand

Da die Spannweite nur den kleinsten und den größten Wert der Verteilung berücksichtigt, ist dieses Maß nicht besonders aussagekräftig. Abbildung 2.3.2 verdeutlicht, dass die Spannweite nicht robust gegenüber Ausreißern ist. Alternativ kann der **Quartilsabstand $x_{0.75} - x_{0.25}$** als Streuungsmaß gewählt werden.

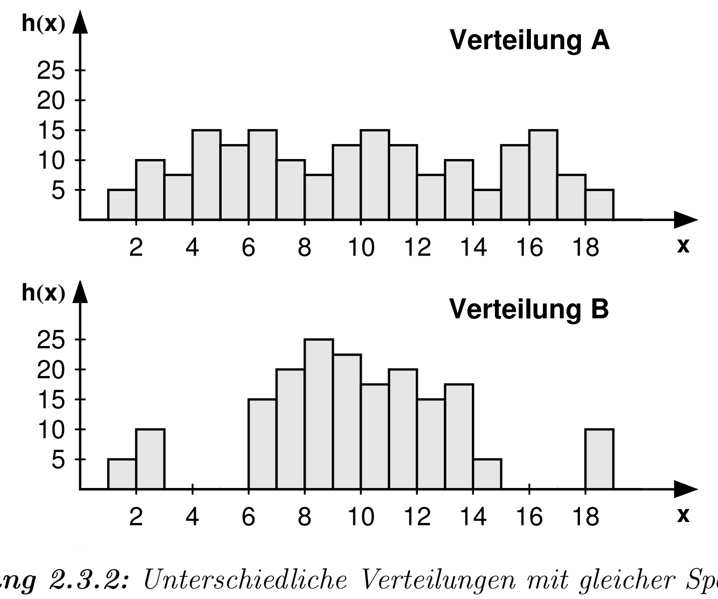


Abbildung 2.3.2: *Unterschiedliche Verteilungen mit gleicher Spannweite*

2.3.2 Varianz und Standardabweichung

Das am häufigsten verwendete Streuungsmaß ist die sogenannte Varianz $\tilde{s}^2$ bzw. die Quadratwurzel daraus, die Standardabweichung $\tilde{s}$.

Diese Maße berücksichtigen die quadratischen Abweichungen aller Beobachtungswerte vom arithmetischen Mittel, so dass größere Abstände zum Mittelwert stärker berücksichtigt werden.

Die empirische **Varianz $\tilde{s}^2$** ist die **mittlere quadratische Abweichung** der Beobachtungswerte $x_i (i = 1, ..., n)$ vom arithmetischen Mittel $\overline{x}$.

$$\tilde{s}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2$$

Für eine Häufigkeitsverteilung gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{s}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} (x_j - \overline{x})^2 h_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} x_j^2 h_j - \overline{x}^2 \\ &= \sum_{j=1}^{m} (x_j - \overline{x})^2 f_j = \sum_{j=1}^{m} x_j^2 f_j - \overline{x}^2. \end{aligned}$$

Bei klassierten Werten sind die x_j die Klassenmitten.

Varianz

Das arithmetische Mittel besitzt hier die gleiche Eigenschaft wie der Median bei der mittleren absoluten Abweichung, d.h. $\sum_{i=1}^{n} (x_i - c)^2$ wird für $c = \overline{x}$ minimal (Beweis s. Abschnitt 2.2.3).

Die empirische **Standardabweichung $\tilde{s}$** ist die Quadratwurzel aus der Varianz $\tilde{s}^2$.

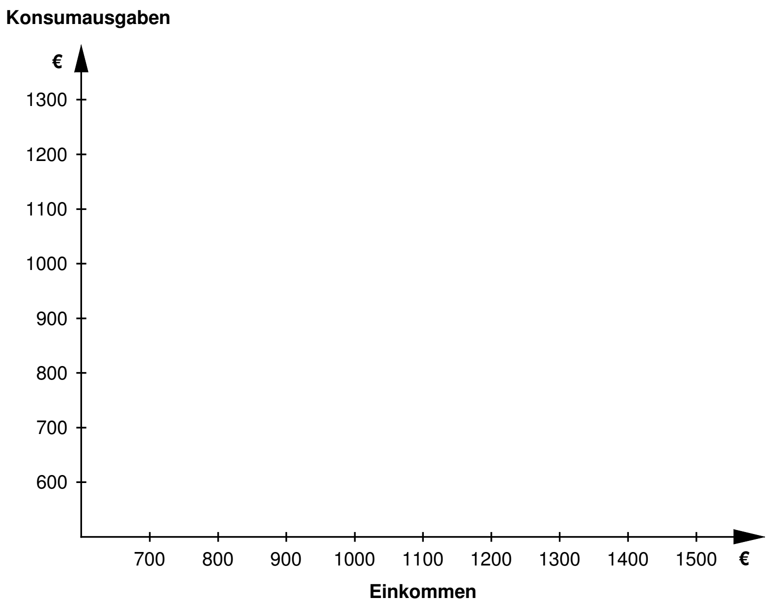
$$\tilde{s} = \sqrt{\tilde{s}^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$$

$$\tilde{s} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} (x_j - \overline{x})^2 h_j} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} (x_j - \overline{x})^2 f_j}$$

Standard-abweichung

Werden für verschiedene Variablen (X, Y, ...) die Varianzen bzw. Standardabweichungen berechnet, werden diese mit $\tilde{s}_x^2$, $\tilde{s}_y^2$, ... bzw. $\tilde{s}_x$, $\tilde{s}_y$, ... bezeichnet.

b) Zeichnen Sie ein Streudiagramm.



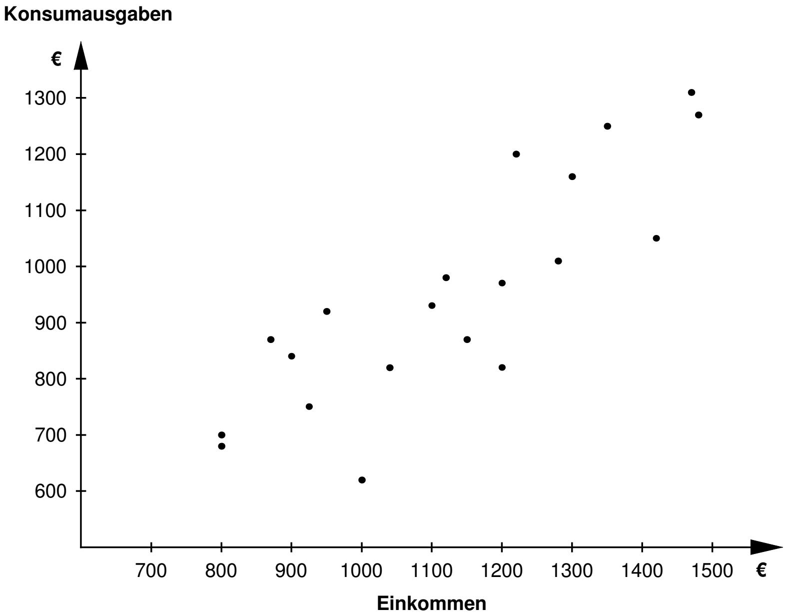
Übungsaufgabe 3.4:

Gegeben sei die folgende zweidimensionale Verteilung absoluter Häufigkeiten:

Y	X: 1	2	3	4	5	$\sum$
1	3	5	10	8	4	
2	5	8	20	20	7	
6	9	15	50	40	6	
8	3	12	20	12	3	
$\sum$						

Bestimmen Sie die Randverteilungen.

b)



Lösung 3.4:

Y \ X	1	2	3	4	5	$\sum$
1	3	5	10	8	4	30
2	5	8	20	20	7	60
6	9	15	50	40	6	120
8	3	12	20	12	3	50
$\sum$	20	40	100	80	20	260

Lösung 3.5:

	Alter				
Einkommen	(0;30]	(30;40]	(40;50]	(50;60]	(60;70]
[0;1000]	14.29%	13.33%	7.69%	11.11%	16.67%
(1000;1500]	28.57%	26.67%	30.77%	33.33%	16.67%
(1500;2000]	42.86%	40%	46.15%	33.33%	33.33%
>2000	14.29%	20%	15.38%	22.22%	33.33%