Univ.-Prof. Dr. Wilhelm Rödder
Dr. André Ahuja
Dr. Heinz Peter Rademacher
Prof. Dr. Elmar Reucher

Modul 31811
Planen mit mathematischen Modellen

Kurs 00512
Planungs- und Entscheidungstechniken
Kurs 00844
Computergestützte Optimierung
Kurs 00859
Stochastische Simulation

LESEPROBE

Fakultät für
**Wirtschafts-
wissenschaft**

FernUniversität in Hagen

Gliederung
Kurs 00512 Planen mit mathematischen Modellen

Leseprobe

1. Planungs- und Entscheidungstechniken im Unternehmen

[...]

Der Kurs Planungs- und Entscheidungstechniken ist als Einführung und Motivation zum späteren vertiefenden Studium des Operations Research (OR) zu verstehen. Grundlagenwissen des OR wird ebenso vermittelt wie Erfahrungen des Autors im Umgang mit OR-Methoden in der Unternehmenspraxis.

Kapitel 2 des Kurses ist eine Einführung in die Projektplanungsmethode "Netzplantechnik" (NPT). Hierzu werden Grundlagen der NPT vermittelt und Netzplanberechnungen bei vorgangsorientierten Netzen durchgeführt. Hinweise auf die Kapazitäts- und Kostenanalyse schließen sich an.

Kapitel 3 ist überschrieben mit "Lineare Planungsrechnung" und stellt klassische lineare Modelle der Mengen- und Kostenplanung aus dem Bereich der Produktion vor.

In Kapitel 4 wird ein Algorithmus vorgestellt, mit dem lineare Optimierungsaufgaben gelöst werden können. Das Verständnis dieses Lösungsverfahrens ist wichtig, um gängige LP-Software sinnvoll einsetzen zu können.

Kapitel 5 behandelt die Planung von Transporten und Güterströmen. Ferner wird aufgezeigt, wie das Werkzeug der Linearen Planungsrechnung auch erfolgreich auf von Natur aus nicht lineare Aufgaben angewandt werden kann.

Heuristiken sind Gegenstand des Kapitels 6. Es sind Verfahren, die gute Lösungen mit vertretbarem Rechenaufwand selbst bei sehr schwierigen Planungs- und Optimierungsaufgaben liefern. Im Bereich komplexer kombinatorischer Entscheidungsprobleme werden in jüngster Zeit die optimierenden durch heuristische Methoden dominiert.

In allen Kapiteln wurde der Versuch unternommen, die Grundideen der Verfahren so weit wie möglich am Beispiel zu entwickeln. Die Vermittlung exakten Methodenwissens muss also zugunsten anschaulicher Anwendungen zurückstehen; für den bloßen Benutzer von Planungs- und Entscheidungstechniken also ein so viel wie nötig und so wenig wie möglich.

[…]

3.1 Mathematische Charakterisierung von Produktionsprozessen

lineare Limitationalität

Der folgende Spezialfall der **Linearen Limitationalität** wird uns im Kapitel "Lineare Planungsrechnung" ausschließlich beschäftigen.

$$r_i = a_{ij} x_j \qquad (i = 1,...,m) \tag{3.2}$$

Hier sind die Faktorverbräuche r_i proportional zu der produzierten Produktmenge x_j des Produktes P_j. Man nennt dann die a_{ij} Produktionskoeffizienten und ihre Reziprokwerte $\frac{1}{a_{ij}} = \frac{x_j}{r_i}$ Produktivität.

lineare Substitionalität

Weiterhin wird der folgende Spezialfall der **Linearen Substitutionalität** studiert. Sind wie oben Produkte P_1, ..., P_n linear limitational aus den Faktoren R_1, ..., R_m herstellbar,

$$r_i = a_{ij}\, x_j \qquad (i = 1,...,m; j = 1,...,n) \tag{3.3}$$

und sind diese Produkte in ihrer Funktionsfähigkeit gleich,

$$x = x_1 + ... + x_n \tag{3.4}$$

so sagt man: Die Menge x des einheitlichen Produktes kann über verschiedene Prozesse j auf den Niveaus x_j hergestellt werden. Diese Prozesse sind linear substituierbar, so lange nur (3.4) gilt !

Wir werden einige der eingeführten Begriffe jetzt an Beispielen erläutern.

Beispiel 3.1

Hergestellt werden in einem Unternehmen Tische vom Typ "Rustikus" (P_1) und vom Typ "Elegance" (P_2). Ersterer zeichnet sich durch 4 Beine und eine Eichenplatte, letzterer durch 3 Beine und eine Platte aus Edelholz aus.

Jedes der vier Beine wird mit je zwei Messingwinkeln beim Rustikus und jedes der drei Beine mit je einem anderen (!) Messingwinkel beim Elegance befestigt. Wir bezeichnen mit x_1, x_2 die Mengen produzierter Tische beider Typen und mit r_{1i} bzw. r_{2i} die Faktormengen:

r_{11}, r_{12}, r_{13}	Platten, Beine, Winkel für Rustikus
r_{21}, r_{22}, r_{23}	Platten, Beine, Winkel für Elegance.

Die zugehörige Produktionsfunktion ist

$$x_1 = \min\left(r_{11}, \frac{1}{4} r_{12}, \frac{1}{8} r_{13}\right)$$

$$x_2 = \min\left(r_{21}, \frac{1}{3} r_{22}, \frac{1}{3} r_{23}\right).$$

Die Verbrauchsfunktion lautet

$$\begin{aligned} r_{11} &= x_1, & r_{21} &= x_2, \\ r_{12} &= 4x_1, & r_{22} &= 3x_2, \\ r_{13} &= 8x_1, & r_{23} &= 3x_2. \end{aligned}$$

Die Zahlen 1, 4, 8 bzw. 1, 3, 3 sind die konstanten Produktionskoeffizienten. Die mit den Produktivitäten $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ bzw. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ multiplizierten Faktormengen limitieren die Ausbringungsmengen.

Aufgrund einer Rationalisierungsmaßnahme sind nun die Messingwinkel für Rustikus und Elegance identisch, ihre Menge sei mit r_3 bezeichnet. Die Verbrauchsfunktion ist nun

$$\begin{aligned} r_{11} &= x_1, & r_{21} &= x_2, \\ r_{12} &= 4x_1, & r_{22} &= 3x_2 \quad \text{und} \quad r_3 = 8x_1 + 3x_2. \end{aligned}$$

Selbst wenn man die Zuordnung "Winkel für Rustikus" und "Winkel für Elegance" $r_3 = r_{13} + r_{23}$ beibehält, ist der in der Verbrauchsfunktion dargestellte Gesamtzusammenhang nicht nach (x_1, x_2) auflösbar und damit nicht als eine Produktionsfunktion explizit darstellbar.

[…]

3.2.1 Die einstufige Produktionsplanung

Beispiel 3.3 (Fortsetzung von 3.1)

Im Rahmen einer erneuten Rationalisierung sind jetzt auch die Beine einheitlich für "Rustikus" und "Elegance" verwendbar; ihre Gesamtzahl sei mit r_2 bezeichnet. Der Verkaufspreis von "Rustikus" betrage 980,-- €, der von "Elegance" 680,-- €.

Die Faktorpreise oder Preise vorgefertigter Teile sowie ihre Verfügbarkeiten pro Periode entnehmen Sie der Tabelle 3.2.

	Einstandspreis [€/Stck]	Verfügbarkeit [Stck]
Platte Eiche	100,--	18
Platte Edelholz	150,--	12
Bein	50,--	90
Winkel	10,--	150

Tab. 3.2: Preise und Verfügbarkeiten für Tischproduktion

Die Stückdeckungsbeiträge errechnen sich zu

$$c_1 = 980 - (100 + 4 \cdot 50 + 8 \cdot 10) = 600,\text{-- €} \qquad \text{und}$$

$$c_2 = 680 - (150 + 3 \cdot 50 + 3 \cdot 10) = 350,\text{-- €}.$$

Die Deckungsbeitragsmaximierung wird also durch folgende Lineare Optimierungsaufgabe gelöst:

$$\max\ 600x_1 + 350x_2$$

unter den Nebenbedinungen

$$\begin{array}{rrl}
1 \cdot x_1 & & \leq 18 \\
 & 1 \cdot x_2 & \leq 12 \\
4 \cdot x_1 & + 3 \cdot x_2 & \leq 90 \\
8 \cdot x_1 & + 3 \cdot x_2 & \leq 150 \\
x_1 & , x_2 & \geq 0.
\end{array}$$

Unter der zusätzlichen Annahme, dass unsere wunderschönen Tische unbegrenzten Absatz finden, sollte man $x_1 = 15$ Stück Rustikus und $x_2 = 10$ Stück Elegance herstellen. Der Deckungsbeitrag beträgt dann 12.500,-- €. Die Lösung wurde mit LP-Software ermittelt.

[…]

5.1.2 Kostenminimaler Fluss

Ab jetzt repräsentieren die Kanten des ungerichteten Graphen Transportwege und die Knoten Orte, an denen Angebot oder Nachfrage eines Gutes besteht bzw. nur umgeschlagen werden. Genauer sei die Menge der Orte V in drei disjunkte Teilmengen zerlegbar $V = V_1 + V_2 + V_3$.

Quelle

V_1 bezeichne die Menge solcher Orte, an denen (von außen) das zu transportierende Gut ins System eingespeist wird; sogenannte **Quellen**.

Senke

V_3 bezeichne die Menge solcher Orte, an denen (von außen) das zu transportierende Gut aus dem System entnommen wird; sogenannte **Senken**.

Umschlagort

V_2 sind entsprechend reine **Umschlagorte** mit ausgeglichener Flussbilanz: Input = Output.

Fluss
Güterstrom
Wegekapazität

Konkreter wollen wir annehmen, dass in einem Quellort $i \in V_1$[1] maximal a_i Gütereinheiten pro Zeiteinheit eingespeist werden können und aus einem Ort $i \in V_3$ mindestens b_i Gütereinheiten entnommen werden sollen. $x_{ij} \geq 0$ bezeichne den **Fluss** oder **Güterstrom** in Kante $<i, j>$ von i nach j; dieser Strom sei durch eine **Wegekapazität** κ_{ij} [Gütereinheiten/Zeiteinheit] beschränkt. Ferner verursache der Gütertransport von i nach j $c_{ij} > 0$ Geldeinheiten Transportkosten pro Gütereinheit.

transportkosten-minimaler Güterstrom

Die Aufgabe, einen **transportkostenminimalen Güterstrom** im System zu finden, formulieren wir jetzt als Lineare Optimierungsaufgabe

$$\min\ x_o = \sum_{i \in V} \sum_{j \in N(i)} c_{ij} x_{ij} \tag{5.1}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j \in N(i)} x_{ij} - \sum_{\ell \in N(i)} x_{\ell i} \begin{cases} \leq & a_i & \textit{für} & i \in V_1 \\ = & 0 & \textit{für} & i \in V_2 \\ \leq & -b_i & \textit{für} & i \in V_3 \end{cases}$$

$0 \leq x_{ij} \leq \kappa_{ij}$ für alle (i, j).

Hierbei bezeichnet $N(i) = \{j | <i, j> \in E\}$ die Menge aller Nachbarknoten von i.

Die erste Gruppe von Nebenbedingungen liest sich: Aus einem Quellknoten kann nicht mehr herausfließen, als in ihn hineinfließt plus als in ihn von außen eingespeist wird. Lesen Sie die beiden anderen Gruppen analog ! Achten Sie darauf, dass unser Modell (5.1) in jeder Kante Flüsse in beiden Richtungen zulässt! Sie heben sich teilweise gegeneinander auf, das Resultat nennt man Nettofluss. Natürlich müssen nicht unbedingt Kosten $c_{ij} = c_{ji}$ und Kapazitäten $\kappa_{ij} = \kappa_{ji}$ symmetrisch sein !

---

[1] Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, schreibt man oft vereinfachend $i \in V_1$ statt $v_i \in V_1$.

(5.1) heißt in der Literatur das **Minimum-Fluss-Problem**. Als lineares Optimierungsproblem lässt es sich selbstverständlich mit jeder LP-Software lösen (siehe Beispiel 5.1 weiter unten).

Minimum-Fluss-Problem

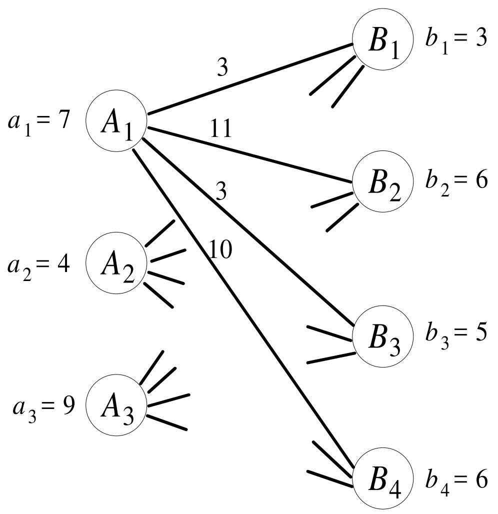
[…]

5.1.3. Transport- und Zuordnungsproblem

[…]

Beispiel 5.2

Der folgende bipartite Graph stellt ein einfaches Transportproblem dar. Drei Anbieter, jetzt zur besseren Kenntlichmachung mit A_1, A_2, A_3 bezeichnet, beliefern vier Nachfrager B_1, B_2, B_3, B_4. Angebots- und Bedarfsmengen sind an den Knoten notiert; die Zahlen an den Kanten sind die Einheitstransportkosten in GE.



<u>Legende:</u> Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind die übrigen Transportwege nur angedeutet.

Ihre Einheitskostensätze sind

$j =$	1	2	3	4
$i = 2$	1	9	2	8
$i = 3$	7	4	10	5

Abb. 5.3: Ein konkretes Transportproblem

Natürlich ist Abb. 5.3 nur eine abstrahierende Darstellung der Lage der Anbieter und Nachfrager zueinander. Auf einer Landkarte hat man sich die Transportkosten z. B. als den Abständen proportional vorzustellen.

[…]

Lösungen zu den Übungsaufgaben

Gliederung
Kurs 00844 Computergestützte Optimierung

Leseprobe

[…]

2. Optimierungsprobleme

[…]

2.4 Anwendung: Herstellung von Müsli

2.4.1 Problembeschreibung

Müslihersteller ‚Feinkost' stellt die 4 Müslisorten Schokoladenmüsli (M_1), Früchtemüsli (M_2), Standardmüsli (M_3) und Honigmüsli (M_4) in 250 Gramm-Packungen her. Zur Herstellung dieser Müslisorten benötigt er die Zutaten Haferflocken (Z_1), Schokoladenstreusel (Z_2), Trockenobst (Z_3), Zucker (Z_4) und Honig (Z_5), die nur begrenzt zur Verfügung stehen. Der Vorrat an Haferflocken beträgt 8 kg, außerdem sind 1 kg Schokoladenstreusel, 1,8 kg Trockenobst, 600 Gramm Zucker und 100 Gramm Honig vorhanden. Nach seinem Rezept benötigt der Hersteller ‚Feinkost' folgende Mengen in Gramm dieser Zutaten zur Herstellung von 100 Gramm jeder Müslisorte:

in g / 100 g	M_1	M_2	M_3	M_4
Z_1	70	65	75	70
Z_2	25	5	10	5
Z_3	0	25	10	15
Z_4	5	5	5	3
Z_5	0	0	0	7

Tab.2.3: Menge der Zutaten in Gramm für jedes Müsli

Die Verkaufspreise je Packung betragen für das Schokoladenmüsli 3,50 € und für das Früchtemüsli 3,70 €, das Standardmüsli kostet 2,90 € und das Honigmüsli 4,20 €. Für die kommende Woche soll die Anzahl herzustellender Packungen für die vier Müslisorten so bestimmt werden, dass der Gesamtumsatz maximiert wird.

2.4.2 Modellierung

Zunächst soll die herzustellende Menge jedes Müslis ermittelt werden. Die Entscheidungsvariablen dieses Problems bilden daher die Mengen x_i in Kilogramm, die von jeder Müslisorte M_i erstellt werden sollen. Der Vorrat für jede Zutat Z_j ($1 \leq j \leq 5$) in Kilogramm werde durch b_j bezeichnet, die Menge an Zutat Z_j in Prozent zur Herstellung von der Müslisorte M_i wird durch die Koeffizienten a_{ij}

angegeben, p_i ($1 \le i \le 4$) seien die Verkaufspreise pro Packung. In Tab. 2.4sind diese Parameter in folgenden Zellen angegeben:

\$D\$44:\$G\$44	$(p_1, ..., p_4)$
\$K\$47:\$K\$51	$(b_1, ..., b_5)^t$
\$D\$54:\$G\$54	$(x_1, ..., x_4)$
\$D\$47:\$G\$51	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} \end{pmatrix}$

Bedeutung einiger Zellen:

\$I\$44	Umsatz	$4 \cdot \sum_{i=1..4} x_i \cdot p_i$
\$I\$47:\$I\$51	Bedarf der Zutaten	$\sum_i x_i \cdot a_{ij}$ ($1 \le j \le 5$)

	C	D	E	F	G	H	I	J	K
43		M_1	M_2	M_3	M_4				
44	Preis/ Pack.:	3,50 €	3,70 €	2,90 €	4,20 €		157,37 €		
45									
46	in %	M_1	M_2	M_3	M_4		Bedarf		Vorrat
47	Z_1	70 %	65 %	75 %	70 %		8,000		8,000
48	Z_2	25 %	5 %	10 %	5 %		1,000		1,000
49	Z_3	0 %	25 %	10 %	15 %		1,800		1,800
50	Z_4	5 %	5 %	5 %	3 %		0,544		0,600
51	Z_5	0 %	0 %	0 %	7 %		0,100		1,000
52	Gesamt	100 %	100 %	100 %	100 %				
53									
54	in kg	1,044	4,591	4,380	1,429				

Tab.2.4: Modell zum ‚Müsliproblem'

Zellen	Formel	Kopiere zu
\$I\$44	{=4*MMULT(D44:G44;MTRANS(D54:G54))}	
\$I\$47	=SUMMENPRODUKT(D47:G47;\$D\$54:\$G\$54)	\$I\$48:\$I\$51

2.4.3 Lösung des Optimierungsproblems

Das lineare Optimierungsproblem stellt sich nun wie folgt dar:

Maximiere Umsatz	$4 \cdot \sum_{i=1..4} x_i \cdot p_i$		\$I\$44
Variable	$x_1,..., x_4$		\$D\$54:\$G\$54
Bedarf ≤ Vorrat	$\sum_i x_i \cdot a_{ij} \le b_j$	$(1 \le j \le 5)$	\$I\$47:\$I\$51<= K\$47:\$K\$51
Mengen ≥ 0	$x_i \ge 0$	$(1 \le i \le 4)$	\$D\$54:\$G\$54 >= 0

Dieses lineare Modell wird nun in das Solver-Menü durch die Angabe der Zellreferenzen eingegeben:

Zielzelle:	$I$44
Zielwert:	Max
Veränderbare Zellen:	$D$54:$G$54
Nebenbedingungen:	$D$54:$G$54 >= 0
	$I$47:$I$51 <= $K$47:$K$51
	linear

[…]

Aufgabe 15.5

In einem Holzzuschneidebetrieb sollen für einen bestimmten Auftrag Holzleisten $L_1,..., L_5$ verschiedener Längen erstellt werden (siehe Tab. 15.6). Diese Holzleisten werden aus zwei verschieden langen Rohleisten mit den Längen 160 cm und 90 cm erstellt. Die Beschaffungskosten sowie die Längen dieser Leisten sind in Tab 15.5 aufgelistet.

Werden durch den Zuschnittplan mehr Holzleisten eine Typs erstellt als bestellt wurden, so werden die überschüssigen Leisten für spätere Aufträge gelagert und intern bewertet. Die Bewertungen pro Stück befinden sich in Tab 15.6.

	C	D	E
16	Typ	Länge	Kosten
17	R1	160 cm	5,00 €
18	R2	90 cm	3,00 €

Tab.15.5: Längen und Beschaffungskosten der Rohleisten

	C	D	E	F	G	H
22	Typ	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5
23	Länge	90 cm	75 cm	60 cm	35 cm	25 cm
24	Bestellung	21	37	30	18	22
25	Bewertung	1,50 €	1,20 €	1,00 €	0,50 €	0,40 €

Tab.15.6: Länge und Auftragsmenge der zu erstellenden Holzleisten

Erstellen Sie einen Zuschneideplan, so dass

- der Auftrag laut Tab. 15.6 erfüllt wird und
- die Beschaffungskosten der benötigten Rohleisten abzüglich der gesamten Bewertung für die Überproduktion minimiert werden.

[…]

Lösungen zu den Übungsaufgaben

Lösung zu 15.5

In Tab. L.13 sind sämtliche Schnittmuster für beide Rohleisten aufgelistet. Die Zellen dieser Tabelle haben folgende Bedeutung:

\$C\$48:\$C\$72	Bezeichnung der Schnittmuster
\$E\$48:\$I\$72	Anzahl der resultierenden Holzleisten L_1, ..., L_5 für jedes Schnittmuster
\$D\$48:\$D\$72	Anzahl der Rohleisten, die nach Schnittmuster R1.01 bis R2.06 zersägt werden
\$J\$48:\$J\$72	Gesamtlänge der Holzleisten, die aus einer Rohleiste geschnitten werden
\$K\$48:\$K\$72	Verschnitt für jedes Schnittmuster
\$E\$74:\$I\$74	Bei aktuellem Zuschnittplan (Zellen \$D\$48:\$D\$72) produzierte Holzleisten
\$E\$75:\$I\$75	Überproduktion in Abhängigkeit des gegebenen Auftrags (Zellen \$D\$24:\$H\$24)
\$K\$74	Gesamter Verschnitt

[…]

Gliederung
Kurs 00859 Stochastische Simulation - Techniken und Anwendungen

[...]

1.1 Der Einsatz von Simulationsverfahren in der Praxis

"Simulationen können in allen Bereichen eingesetzt werden, die die Formulierung quantitativer Methoden erlauben" RUNZHEIMER [16] (Seite 275).
Eine Definition nach der VDI Richtlinie 3633 von 1993 lautet:

> *"Simulation ist das Nachbilden eines dynamischen Prozesses in einem System mit Hilfe eines experimentierfähigen Modells, um zu Erkenntnissen zu gelangen, die auf die Wirklichkeit übertragbar sind."*

[...]

2.2 Stichprobentheorie

Die Stichprobentheorie ist ein wesentliches Element der Wahrscheinlichkeitstheorie. Stichproben dienen dazu, Parameter, wie beispielsweise den Mittelwert, von Grundgesamtheiten zu ermitteln. Eine exakte Definition für eine Stichprobe lautet.

Definition 2.7 (mathematische) Stichprobe, Stichprobenraum Gegeben sei eine Grundgesamtheit, in der ein interessierendes Merkmal X die Verteilung F habe. Ein n-dimensionaler Zufallsvektor $(X_1, ..., X_n)$ in dem alle X_i gleich und unabhängig voneinander sind, heißt (mathematische) Stichprobe vom Umfang n.
Jede Realisierung $(x_1, ..., x_n)$ heißt (konkrete) Stichprobe. Die Gesamtheit aller möglichen Stichproben bildet den Stichprobenraum. Hierzu folgende Übungsaufgabe: *Stichprobe* *Stichprobenraum*

Übungsaufgabe 2.1

Bestimmen Sie die Dimension des Stichprobenraums bei dem Experiment: n-maliges Werfen eines fairen sechsseitigen Würfels.

[...]

3.2 Die Monte-Carlo-Methode

Bei der Monte-Carlo-Methode handelt es sich um ein numerisches Verfahren, bei dem zuerst ein stochastisches Modell zu einem gegebenen Problem aufgestellt wird und dann die Zufallsgrößen in dem Modell mit Hilfe von Zufallsvariablen realisiert werden. Die Kernidee der Methode liegt darin, mittels eines Zufallszahlengenerators (kurz: *Zufallsgenerator*) eine Vielzahl von Zufallszahlen zu erzeugen und sie dem Simulationsprozess zur Verfügung zu stellen, vgl. RUNZENHEIMER (Seite 261).

Zufalls generator

[...]

4.1.1 Einführung

In verschiedenen Bereichen treten immer dann Warteschlangen auf, wenn an einer Bedienstation mehr Elemente eintreffen, als im gleichen Zeitraum bedient werden können. Beispiele hierfür sind schnell gefunden:

- Im Transportwesen: Beladung von LKWs mit Frachtgütern. Die Bedienstation ist die Laderampe, die ankommenden Elemente sind die LKWs und die Warteschlange bildet eine Kolonne auf die Beladung wartender LKWs.
- In der Produktion: Fertigung von Aufträgen auf Maschinen. Erst wenn ein Maschinenauftrag abgeschlossen ist, kann der nächste Auftrag bearbeitet werden.
- Beim Einkauf: Kunden bezahlen an einer Kassenstation. Ist eine Kasse frei, kann ein Kunde direkt bedient werden, der danach die Kasse verlässt und sie damit für den nächsten Kunden frei macht. Ist die Kasse besetzt, stellt sich ein ankommender Kunde an und verweilt in der Warteschlange so lange, bis er an der Reihe ist.

[...]

4.1.2 Begriffsbezeichnungen zu Warteschlangenmodellen

Für Warteschlangenmodelle sind folgende Größen interessant:

- Die *Bedienzeit* ist die Zeit, während der ein Element an der Bedienstation abgefertigt wird. Die *Bedienzeit* beginnt mit der Ankunft des Elements an der Bedienstation und endet mit dem Verlassen der Bedienstation. *Bedienzeit*
- Die *Leerzeit* beschreibt die Zeit, während der sich kein Element in der Bedienstation befindet (und diese besetzt ist). *Leerzeit*
- Die *Zwischenankunftszeit* ist der zeitliche Abstand zwischen den Ankunftszeitpunkten in Folge eintreffender Elemente. *Zwischenankunftszeit*
- Die *Ankunftsrate* α gibt an, wieviele Elemente pro Zeiteinheit in das System einlaufen und die *Bedienrate* β misst die Anzahl pro Zeiteinheit bedienter Elemente. *Ankunftsrate* *Bedienrate*

$$\begin{aligned}
\text{Ankunftsrate } \alpha &= \frac{\text{Anzahl der Ankünfte}}{\text{Zeiteinheit}} \\
\text{Bedienrate } \beta &= \frac{\text{Anzahl bedienter Elemente}}{\text{Zeiteinheit}}.
\end{aligned}$$

[...]