Prof. Dr. Friedrich Breyer

Modul 32571
Ökonomische Theorie der Politik

Kurs 930
Kurseinheit 1:
Theorie der direkten Demokratie: Grundlagen

LESEPROBE

Fakultät für
**Wirtschafts-
wissenschaft**

FernUniversität in Hagen

2.4 Mehrheitsregel und widersprüchliche Gruppenentscheidungen

2.4.1 Das Problem zyklischer Mehrheiten

Condorcet-Paradoxon

Ein weiteres Problem von Mehrheitsabstimmungen ist, daß sich durch sie eine widersprüchliche Präferenzordnung einer Gruppe ergeben kann, selbst wenn alle Gruppenmitglieder rational handeln. Ein einfaches Beispiel mag dieses Paradoxon, das sogenannte Condorcet-Paradoxon, das bereits im 18. Jahrhundert vom Marquis DE CONDORCET entdeckt wurde, verdeutlichen. Angenommen, eine Gruppe von drei Personen H_i $(i = 1, 2, 3)$ habe zwischen drei Alternativen a_0, a_1 und a_2 zu entscheiden. Die Präferenzen der Gruppenmitglieder seien durch Tabelle 2.2 wiedergegeben. Dabei wird eine Alternative um so höher eingeschätzt, je weiter oben sie steht.

Tabelle 2.2: Einfaches Beispiel für ein Condorcet-Paradoxon

Wähler	H_1	H_2	H_3
Rangordnung der Alternativen	$\boldsymbol{a_0}$	$\boldsymbol{a_1}$	$\boldsymbol{a_2}$
	$\boldsymbol{a_1}$	$\boldsymbol{a_2}$	$\boldsymbol{a_0}$
	$\boldsymbol{a_2}$	$\boldsymbol{a_0}$	$\boldsymbol{a_1}$

Man erkennt aus Tabelle 2.2, daß z. B. für H_3 $a_2\, P_3\, a_0\, P_3\, a_1$ gilt, wobei das Symbol „P_i“ hier als „... wird von H_i gegenüber ... vorgezogen“ zu lesen ist. Werden nun Mehrheitsabstimmungen zwischen je zwei Alternativen vorgenommen, so gilt offenbar für die Gruppe $a_0\, P\, a_1$, da für eine Mehrheit, nämlich für H_1 und H_3, $a_0\, P_i\, a_1$ gilt. Entsprechend erhält man für die Gruppe durch eine weitere Abstimmung $a_1\, P\, a_2$, so daß bei Transitivität der Präferenzordnung der Gruppe auch $a_0\, P\, a_2$ gelten müßte. Wird jedoch eine Mehrheitsabstimmung auch zwischen a_0 und a_2 vorgenommen, so stimmen H_2 und H_3 für a_2, so daß für die Gruppe $a_2\, P\, a_0$ ist. Es ergibt sich also ein logischer Widerspruch, der sich durch das Gesamtergebnis aller Abstimmungen wie folgt ausdrücken läßt:

(2.8) $$a_0\; P\; a_1\; P\; a_2\; P\; a_0\ .$$

Zyklische Mehrheiten

Dieses Ergebnis ist recht bedeutsam. Es zeigt, daß mit Hilfe demokratischer Entscheidungen Probleme keineswegs immer widerspruchsfrei gelöst werden können. Welche Alternative von der Gruppe letztlich beschlossen wird, hängt bei paarweiser Abstimmung über die Vorschläge von der Reihenfolge ab, in der die Vorschläge eingebracht werden. Bezeichnet a_0 den Status quo und wird diesem zunächst a_1 als Alternative gegenübergestellt und danach eine Abstimmung

Abhängigkeit des Abstimmungsergebnisses von der Abstimmungsreihenfolge zwischen dem erfolgreichen Vorschlag, a_0, und der dritten Alternative, a_2, durchgeführt, so wird schließlich a_2 beschlossen. Wird dagegen zunächst a_2 eingebracht und setzt es sich gegen a_0 durch und kommt es dann zu einer Abstimmung zwischen a_2 und a_1, so behält a_1 am Ende die Oberhand.

Nachteile des Verfahrens:

Das Verfahren ist in jedem Falle unbefriedigend, und zwar aus mehreren Gründen:

– Manipulationsmöglichkeit:

Zum einen ist es möglich, das Ergebnis durch Manipulation der Geschäftsordnung einer beschlußfassenden Versammlung zu beeinflussen.

– Keine Auswahl bester Alternativen:

Zweitens wird bei Vorliegen der in Tabelle 2.2 angenommenen Präferenzen letztlich immer ein Vorschlag beschlossen, den eine Mehrheit von Wählern für schlechter hält als die in der ersten Abstimmung verworfene Alternative.

– Taktische Abstimmung lohnend:

Drittens lohnt sich bei der betrachteten Prozedur für mindestens einen Wähler eine taktische Stimmabgabe. Wird etwa zunächst zwischen a_0 und a_1 abgestimmt, so kann H_1 entgegen seinen wahren Präferenzen für a_1 stimmen, da a_1 in der zweiten Runde bessere Aussichten hat, sich gegen die von ihm am wenigsten geschätzte Alternative a_2 durchzusetzen, als a_0. Somit kann er das zu erwartende Endergebnis bei dieser Abstimmungsreihenfolge zu seinen Gunsten beeinflussen.

Gefahr bei taktischem Abstimmungsverhalten

Taktisches Wählerverhalten bedeutet jedoch, daß die wahren Präferenzen nicht offenbart werden. Verhalten sich mehrere Wähler taktisch, so kann es zu einem für alle schlechteren Resultat kommen.

Aufgaben zu diesem Unterabschnitt finden Sie im Übungskurs 00533.

2.4.2 Bedingungen für die Vermeidung zyklischer Mehrheiten

Wir haben an dem Beispiel der Tabelle 2.2 gesehen, daß die Anwendung der Mehrheitsregel zu zyklischen Gruppenpräferenzen führen kann, d. h. zu einer Verletzung der Anforderungen

– der Transitivität von R, wie sie für eine SWF erfüllt sein muß, und sogar

– der Azyklizität von R, die für eine SDF erfüllt sein muß.

Damit kann die Mehrheitsregel zu einer Gruppenpräferenz R führen, die nicht für jede Teilmenge S von Alternativen eine nichtleere Auswahlmenge $C(R, S)$ erzeugt.

Aus dem Arrow-Unmöglichkeitstheorem wissen wir, daß keine SWF existiert, die die Bedingungen U, P, I und D erfüllt. Die Mehrheitsregel erfüllt offensichtlich die Bedingungen P und D und bei paarweisem Vergleich auch die Bedingung I. Die Frage ist daher, wie stark man die Bedingung U lockern – d. h. den

Definitionsbereich einschränken – muß, damit sie eine SWF oder zumindest eine SDF darstellt:

Annahmen über Präferenzen der Gruppenmitglieder zur Vermeidung zyklischer Mehrheiten

Gibt es plausible Annahmen über die Präferenzen der Individuen in der Gesellschaft, die sicherstellen, daß zyklische Mehrheiten nicht auftreten? Diese Frage soll zunächst für endliche Mengen (diskreter) Alternativen beantwortet werden, später dann für Mengen mit unendlich vielen Alternativen (z. B. Teilmengen aus euklidischen Räumen).

Aufgaben zu diesem Unterabschnitt finden Sie im Übungskurs 00533.

2.4.2.1 Eingipfligkeit und die Existenz eines Condorcet-Gewinners

Condorcet-Gewinner

Da es uns zunächst nur auf die Existenz eines **besten Elements** ankommt, definieren wir zunächst den Begriff des Condorcet-Gewinners und geben anschließend eine hinreichende Bedingung für seine Existenz an:

Definition 2.1

Seien $a_1, \ldots, a_m$ die zur Abstimmung stehenden Alternativen, dann heißt die Alternative a_{j*} **Condorcet-Gewinner**, wenn für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$ mit $j \neq j^*$ gilt: $N\left(a_{j*}\, P\, a_j\right) > N\left(a_j\, P\, a_{j*}\right)$.

Definition 2.2

Seien $a_1, \ldots, a_m$ die Alternativen und $H_1, \ldots, H_n$ die n Wähler (Index i). Dann heißen die Präferenzen der n Wähler über die m Alternativen **eingipflig**, wenn es eine Permutation π der Menge der Alternativen gibt, so daß die Präferenzen **jedes** Wählers über $a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(m)}$ durch einen Graph mit nur einem Gipfel dargestellt werden können, d. h. für jedes i existiert ein $a_{\pi(j)}$ so daß für alle Indizes $\pi(h),\ \pi(k) > \pi(j)$ gilt:

wenn $\pi(h) < \pi(k)$, dann $a_{\pi(h)}\ R_i\ a_{\pi(k)}$;

und für alle Indizes $\pi(h),\ \pi(k) < \pi(j)$ gilt:

wenn $\pi(h) > \pi(k)$, dann $a_{\pi(h)}\ R_i\ a_{\pi(k)}$.

Verdeutlichung der Definitionen 2.1 und 2.2

Zur Verdeutlichung werden zwei Beispiele betrachtet, die durch die folgenden Abbildungen illustriert werden:

Beispiel 2.1

$H_1: \quad x\, P_1\, y\, P_1\, z$

$H_2: \quad y\, P_2\, z\, P_2\, x$

$H_3: \quad z\, P_3\, x\, P_3\, y$

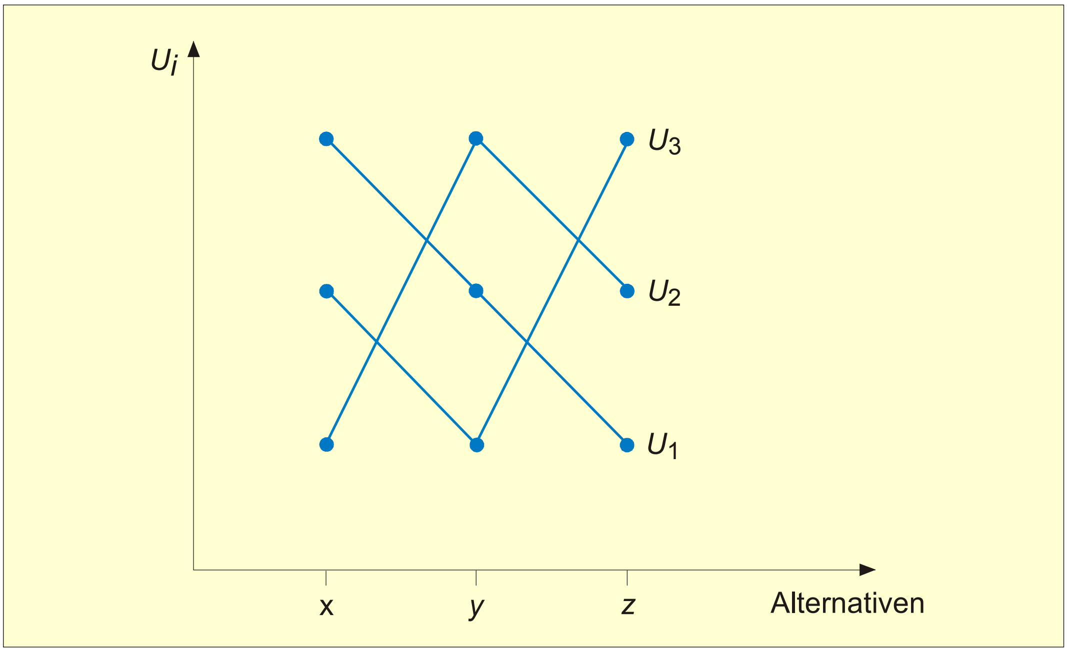


Abbildung 2.1

Man macht sich leicht klar, daß in diesem Beispiel keine Permutation der Alternativen eingipflige Präferenzen herbeiführt.

Beispiel 2.2:

$H_1 \quad x\, P_1\, z\, P_1\, y$

$H_2: \quad y\, P_2\, z\, P_2\, x$

$H_3: \quad z\, P_3\, x\, P_3\, y$

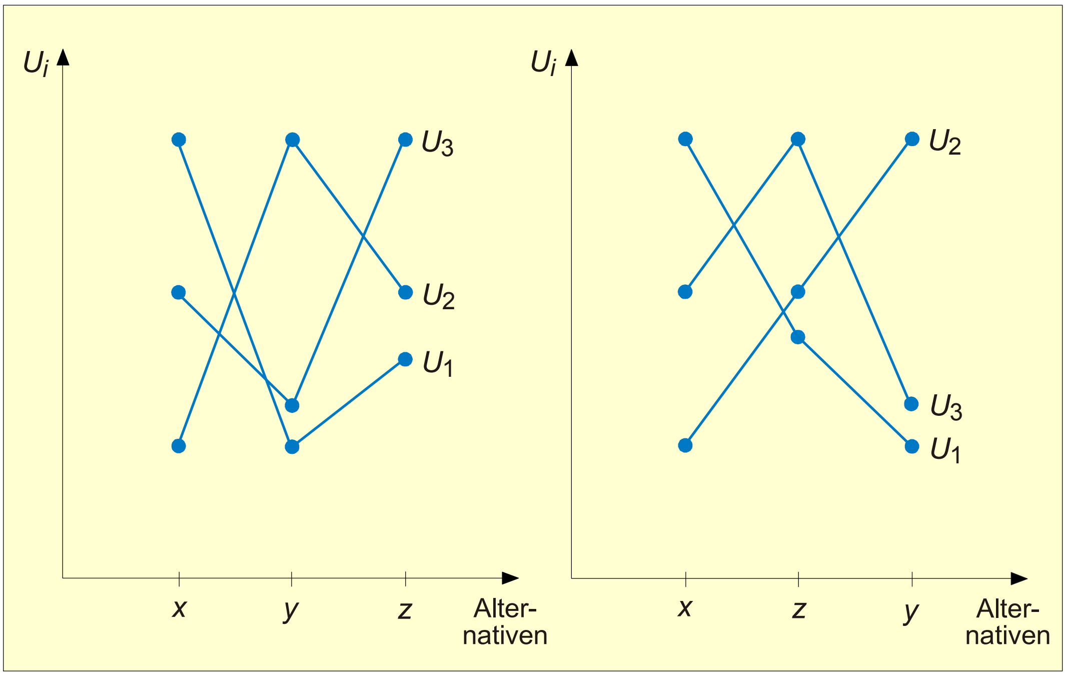


Abbildung 2.2 a) Abbildung 2.2 b)

Dieses Beispiel unterscheidet sich vom vorhergehenden nur dadurch, daß bei H_1 die Alternativen y und z vertauscht wurden. Die in Abbildung 2.2.b) angegebene Permutation der Alternativen führt tatsächlich zu eingipfligen Präferenzen.

Theorem 2.3

Falls die Präferenzen aller Wähler H_i $(i = 1, ..., n)$ über einer Menge von Alternativen $\{a_1, \ldots, a_m\}$ eingipflig sind und n ungerade ist, dann existiert eine Alternative a_j, die gegenüber **jeder** anderen Alternative a_h $(h \neq j)$ von einer Mehrheit präferiert wird und damit Condorcet-Gewinner ist. Sind dabei die Indizes i so geordnet, daß niemals ein Wähler mit einem höheren Index i eine Alternative a_j mit kleinerem Index j am höchsten schätzt als ein Wähler mit kleinerem Index i, dann ist diejenige Alternative a_{j*} Condorcet-Gewinner, die das Optimum für den Wähler mit dem Index $i^* = \frac{n+1}{2}$, den **Medianwähler** darstellt.

Def. Medianwähler

Beweis:

Wegen der Eingipfligkeit wird die Alternative a_{j*} gegenüber allen a_j mit $j < j*$ von H_{i*} und von allen H_i mit $i > i*$ vorgezogen, die zusammen nach Definition des Medianwählers eine Mehrheit von einer Stimme bilden. Analog wird a_{j*} gegenüber allen a_j mit $j > j*$ von H_{i*} und von allen H_i mit $i < i*$ vorgezogen, die zusammen ebenfalls eine Mehrheit von einer Stimme bilden. QED.

Wie plausibel ist die Annahme der Eingipfligkeit? Offensichtlich ist sie solange nicht problematisch, wie sich die Alternativen eindeutig in ein **eindimensionales** Größer-Kleiner- (oder auch Links-Rechts-) Schema einordnen lassen. Dazu seien zwei Beispiele betrachtet:

Beispiele für eindimensionale Schemata

Beispiel 2.3

Betrachtet werden die folgenden alternativen Regelungen der Erbschaftssteuer:

a_1: konfiskatorische Erbschaftssteuer (100%), deren Einkommen gleichmäßig auf alle Gesellschaftsmitglieder aufgeteilt wird.

a_2: dito mit einem Freibetrag von 300.000 DM,

a_3: keine Erbschaftssteuer.

Es gebe 3 Haushalte mit den folgenden erwarteten Erbschaften:

H_1: 0

H_2: 300.000 DM

H_3: 1.200.000 DM

Das Nettovermögen jedes Haushalts bei jeder der alternativen Steuerregeln und damit die relative Bewertung dieser Alternativen durch egoistische Wähler ergibt sich aus Tabelle 2.3. Die Eingipfligkeit ist offensichtlich erfüllt.

Tabelle 2.3

	a_1	a_2	a_3
H_1	**500.000**	**300.000**	**0**
H_2	**500.000**	**600.000**	**300.000**
H_3	**500.000**	**600.000**	**1.200.000**

Beispiel 2.4

Bei der Reform des § 218 stehen folgende Alternativen zur Debatte:

a_1: Straffreiheit in den ersten 3 Schwangerschaftsmonaten,

a_2: Indikationenregelung wie bisher,

a_3: Straffreiheit nur noch bei medizinischer, nicht mehr bei sozialer Indikation.

Auf den ersten Blick lassen sich auch diese Alternativen eindeutig auf einem Spektrum der „Liberalität“ anordnen. Eingipfligkeit ist erfüllt, solange Anhänger-(innen) der Fristenregelung (H_1) die bisher geltende Indikationenregelung a_2 noch als das kleinere Übel ansehen als eine Verschärfung gemäß a_3 und umgekehrt. Sie ist jedoch verletzt, wenn z. B. die Mitglieder der Bewegung „Schutz des ungeborenen Lebens“ (H_3) die Präferenzordnung $a_3 \; P_i \; a_1 \; P_i \; a_2$ haben. Ein Motiv dafür könnte sein, daß zwischen sozialer Indikation und Fristenregelung im Ergebnis wenig Unterschied besteht und erstere zu unangenehmen Begleiterscheinungen Anlaß gibt wie den Prozessen gegen Ärzte, die Abtreibungen vorgenommen haben.

Verletzung der Eingipfligkeit

Übungsaufgabe 2.4

Die Präferenzen von drei Wählern H_i (i = 1, 2, 3) über drei Alternativen $\{x, y, z\}$ seien gegeben durch:

$$H_1: \quad x\, P_1\, z\, P_1\, y$$
$$H_2: \quad y\, P_2\, x\, P_2\, z$$
$$H_3: \quad z\, P_3\, y\, P_3\, x$$

a) Zeigen Sie, daß die Präferenzen nicht eingipflig sind und daß bei Anwendung der Mehrheitsregel kein Condorcet-Gewinner existiert.

b) Ändert sich das Ergebnis, wenn anstelle der Mehrheitsregel

   1. die Zweidrittel-Regel,
   2. die Dreiviertel-Regel

   angewendet wird?

c) Konstruieren Sie durch Hinzunahme eines weiteren Wählers und einer weiteren Alternative einen Fall, in dem auch die Dreiviertel-Regel zu zyklischen Gruppenpräferenzen führt. Verallgemeinern Sie die damit implizierte Aussage über die Möglichkeit zyklischer Gruppenpräferenzen!

Weitere Aufgaben zu diesem Unterabschnitt finden Sie im Übungskurs 00533.

2.4.2.2 Aussagen über die „Ähnlichkeit" der individuellen Präferenzen

Theorem 2.3 beantwortet die Frage nach der Möglichkeit der Gewinnung widerspruchsfreier Gruppenpräferenzen mit Hilfe der Mehrheitsregel nur zum Teil. Zum einen stellt Eingipfligkeit nur eine **hinreichende** Bedingung für die Existenz eines Condorcet-Gewinners dar, und auch dies nur für eine ungerade Wählerzahl. Zum zweiten ist Eingipfligkeit schwer zu überprüfen, weil erst sämtliche Permutationen einer Alternativenmenge durchprobiert werden müssen. Ferner sucht man nach Einschränkungen des Definitionsbereichs, die inhaltlich eine einleuchtende Interpretation haben. Davon werden im folgenden drei formuliert, die voneinander unabhängig sind und von denen jede die Existenz eines Condorcet-Gewinners in jeder endlichen Menge von Alternativen garantiert:

Einschränkungen des Definitionsbreichs

Bedingung VR
(Beschränkung der Werte, engl.: „Value Restriction"):

In jedem Tripel von Alternativen existiert eine, bezüglich derer alle Wähler übereinstimmen, daß sie nicht die beste **oder** nicht die schlechteste **oder** nicht die mittlere ist.

zu Übungsaufgabe 2.3

a) Die paarweise Abstimmung mit der einfachen Mehrheitsregel ergibt:

$$b\,P\,a\,(2:1),\quad c\,P\,b\,(2:1)\quad \text{sowie}\quad a\,P\,c\,(2:1)\ .$$

b) Diese resultierende Gruppenpräferenz ist keine Ordnung, denn sie ist zyklisch.

zu Übungsaufgabe 2.4

$$H_1:\quad x\,P_1\,z\,P_1\,y$$
$$H_2:\quad y\,P_2\,x\,P_2\,z$$
$$H_3:\quad z\,P_3\,y\,P_3\,x$$

a) Eingipfligkeit ist verletzt, weil jede der drei Alternativen für einen Haushalt die schlechteste ist. Eine davon muß bei einer graphischen Darstellung entlang einer Achse die mittlere sein. Damit weisen die Präferenzen für den entsprechenden Wähler zwei Gipfel auf. Bei Anwendung der Mehrheitsregel verliert x gegen y $(1:2)$, y gegen z $(1:2)$ und z gegen x $(1:2)$. Keine Alternative gewinnt gegen alle anderen, damit existiert kein Condorcet-Sieger.

b) 1. die Zweidrittel-Regel ändert nichts, da die in a) festgestellten Mehrheiten sämtlich Zweidrittel-Mehrheiten sind.

2. die Dreiviertel-Regel bewirkt, daß die Gruppe bezüglich jedes Alternativenpaars indifferent ist, sie vermeidet also einen Präferenzzyklus.

c) Die weitere Alternative sei w und stehe in den Rangordnungen von H_1, H_2, H_3 unmittelbar hinter z. Der weitere Wähler sei H_4 mit $w\,P_4\,y\,P_4\,x\,P_4\,z$. Dann unterliegt bei Anwendung der Dreiviertel-Regel x gegen y $(1:3)$, y gegen w $(1:3)$, w gegen z $(1:3)$ und z gegen x $(1:3)$.

Die Verallgemeinerung lautet:

Sei der erforderliche Stimmenanteil $\frac{Q}{N}$ gleich q, so können zyklische Gruppenpräferenzen auftreten, wenn die Anzahl der Wähler und der Alternativen mindestens $N = \frac{1}{1-q}$ beträgt.

Unterabschnitt 2.4.2: Bedingungen für die Vermeidung zyklischer Mehrheiten

2.4.2.1

Arrows Mindestanforderungen an eine demokratische und praktikable Vorschrift f zur Aggregation individueller Präferenzen finden ihren Ausdruck in den Bedingungen U, P, I, D. Zeigen Sie, daß die einfache Mehrheitsregel die Bedingungen U, P, I und D erfüllt!

2.4.2.2

Drücken Sie die Definition 2.1 des Condorcet-Gewinners mit eigenen Worten aus!

2.4.2.3

Prüfen Sie, ob es in den folgenden Beispielen einen Condorcet-Gewinner gibt!

a)
$$H_1: \ x\,P_1\,y\,P_1\,z\,P_1\,w$$
$$H_2: \ w\,P_2\,y\,P_2\,z\,P_2\,x$$
$$H_3: \ z\,P_3\,w\,P_3\,y\,P_3\,x$$

b)
$$H_1: \ y\,P_1\,w\,P_1\,x\,P_1\,z$$
$$H_2: \ x\,P_2\,z\,P_2\,w\,P_2\,y$$
$$H_3: \ y\,P_3\,z\,P_3\,x\,P_3\,w$$

c)
$$H_1: \ z\,P_1\,x\,P_1\,w\,P_1\,y$$
$$H_2: \ w\,P_2\,y\,P_2\,z\,P_2\,x$$
$$H_3: \ y\,P_3\,w\,P_3\,x\,P_3\,z$$

2.4.2.4

Drücken Sie die Definition 2.2 mit Ihren eigenen Worten aus!

2.4.2.5

Nehmen Sie an, die drei Abstimmungsberechtigten H_1, H_2 und H_3 hätten aus den drei Alternativen x, y und z die beste auszuwählen. Die Präferenzen seien (vgl. Beispiel 2.1 auf S. 39 des Textes):

$$H_1: \ x\,P_1\,y\,P_1\,z$$
$$H_2: \ y\,P_2\,z\,P_2\,x$$
$$H_3: \ z\,P_3\,x\,P_3\,y$$

Zeigen Sie, daß keine Permutation der drei Alternativen eingipflige Präferenzen herbeiführt!

spricht, um auf diese Weise ein Ergebnis zu erreichen, das ihn besserstellt als die wahrheitsgemäße Abstimmung.

2.4.1.2

Die Studentin hat, was die Kenntnis der Wählerpräferenzen betrifft, recht: Nur dann, wenn der Wähler eine Vorstellung von den Präferenzen der übrigen Wähler hat, kann er sich taktisch verhalten. Was er aber nicht weiß, ist, ob die anderen Wähler ihren wahren Präferenzen gemäß abstimmen oder sich ebenfalls taktisch verhalten. Daher ist der Ausgang der Abstimmung für ihn ungewiß. Selbst wenn er das taktische Verhalten der anderen Wähler einkalkuliert, ist das Wahlergebnis nicht von vornherein klar, weil dieses Verhalten viele Varianten eröffnet, die jeweils zu verschiedenen Ergebnissen führen. Daher ist die Berücksichtigung taktischen Wahlverhaltens weder unrealistisch noch läuft es der Intention einer Abstimmung zuwider.

Unterabschnitt 2.4.2: Bedingungen für die Vermeidung zyklischer Mehrheiten

2.4.2.1

Die einfache Mehrheitsregel ist folgendermaßen definiert:

$$s = f(S) = \operatorname{sign}\left[N_+(S) - N_-(S)\right] = \operatorname{sign}\left[\sum_{i=1}^{n} s_i\right]$$

Hierbei gibt s_i die Präferenz des Wählers i bei der Abstimmung über zwei bestimmte Alternativen an.

Diese Alternativen können z. B. Zustimmung und Ablehnung („Ja“ und „Nein“) einer bestimmten Maßnahme sein. Die Maßnahme kann beispielsweise lauten: Der Schürmann-Bau wird abgerissen. Die Alternativen sind „Ja“ und „Nein“. Bei der Abstimmung gibt es dann soundsoviel Stimmen für die Alternative „Ja“ und soundsoviel Stimmen für die Alternative „Nein“.

Die Alternativen können aber auch z. B. zwei bestimmte Kandidaten für den Vorsitz im Kaninchenzüchterverein sein, Frau Hase und Herr Lampe, oder allgemein: x und y. Mit solchen Alternativen haben wir es später im Rahmen der Diskussion über die Eigenschaften der Mehrheitsregel öfter zu tun. Bei der Abstimmung gibt es dann soundsoviel Stimmen für Frau Hase (für x) – das sind zugleich Stimmen gegen Herrn Lampe (gegen y) – und soundsoviel Stimmen für Herrn Lampe, die zugleich Stimmen gegen Frau Hase sind. Die Umwandlung der Entscheidung zwischen x und y in zwei Ja-Nein-Abstimmungen (1. Abstimmung: x, ja oder nein; 2. Abstimmung: y, ja oder nein) ist nicht möglich, denn es handelt sich in den beiden Teilen um verschiedene Situationen und Alternativen: Es ist ein Unterschied, ob der Abstimmungsteilnehmer eine Wahl zwischen den beiden Alternativen Frau Hase und Herr Lampe zu treffen hat oder ob der Vorschlag lautet, Frau Hase zur Vorsitzenden zu wählen, und er die Wahl zwischen den beiden Alternativen „Ja“ und „Nein“ hat, selbst wenn anschließend noch eine entsprechende Abstimmung über Herrn Lampe stattfindet. Trotzdem vermag aber die Definition der Mehrheitsregel beide Fälle abzudecken, wenn man folgende definitorische Vereinbarung trifft:

Tabelle 2.4.2.1–1: Zuordnung der Alternativen ja, nein, x und y

		Alternative Ja und Nein	Alternativen x und y
$s_i =$	1	**bei Zustimmung (Ja)**	**bei Präferenz für Alternative x**
	0	**bei Indifferenz**	**bei Indifferenz**
	-1	**bei Ablehnung (Nein)**	**bei Präferenz für Alternative y**

Entsprechend sind die drei Werte definiert, welche die Gruppenpräferenz s annehmen kann.

Die vier Bedingungen U, P, I und D lauten:

Bedingung U („Universelle Gültigkeit“):
Die kollektive Entscheidungsregel f muß für alle logisch denkbaren Kombinationen individueller Präferenzen definiert sein.

Diese Bedingung wird von der Mehrheitsregel als binärer Abstimmungsregel erfüllt, denn die einfache Mehrheitsregel ist für alle logisch denkbaren Kombinationen individueller Präferenzen hinsichtlich **zweier** Alternativen definiert, da sich für alle $S = (s_1, ..., s_N)$ die Summe $\sum_{i=1}^{N} s_i$ und deren Vorzeichen ermitteln läßt. (Die s_i sind allerdings keine Präferenz*ordnungen*.)

Wird dagegen über mehr als zwei Alternativen nach der Mehrheitsregel abgestimmt, dann ist die Bedingung U nicht erfüllt, denn U verlangt, daß die Entscheidungsregel allen denkbaren Kombinationen individueller Präferenzen eine eindeutige Gruppenpräferenz zuordnet. Hier versagt die Mehrheitsregel, denn sie erzeugt u.U. zyklische Gruppenpräferenzen.

Bedingung P („Schwaches Pareto-Prinzip“):
Für jedes Paar von Alternativen

$$x, y \in X \quad \text{gilt: } \forall i: \ x P_i \, y \rightarrow x P y \ .$$

In Worten: Wenn jedes Individuum i aus der Gruppe der Wähler die Alternative x der Alternativen y eindeutig vorzieht, dann besitzt, sofern die Bedingung P erfüllt ist, auch die Gruppe insgesamt eine Präferenz für x vor y.

Diese Bedingung wird von der Mehrheitsregel erfüllt, denn es gilt:

$$x P_i \, y \rightarrow s_i = 1$$

$$\forall i: \ x P_i \, y \rightarrow x P y \, , \quad \text{denn}$$

$$s \;=\; \operatorname{sign}\left[\sum_{i=1}^{N} s_i\right] \;=\; \operatorname{sign}\sum_{i=1}^{N} 1 \;=\; \operatorname{sign}[N] \;=\; 1\;.$$

Bedingung I („Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen“) lautet:
Für zwei verschiedene Vektoren individueller Präferenzen gelte

$$f\left(R_1, ..., R_n\right) \;=\; R \quad \text{und} \quad f\left(R_1', ..., R_n'\right) \;=\; R'\;.$$

Ferner gelte für

$$x, y \;\in\; S \;\subset\; X \quad \text{und} \quad \forall i:\; x\,R_i\,y \leftrightarrow x\,R_i'\,y\,.$$

Dann folgt

$$x\,R\,y \;\leftrightarrow\; x\,R'\,y\;.$$

In Worten: n Wähler bestimmen für zwei verschiedene Gruppen von Alternativen, die beide die Alternativen x und y enthalten, die jeweilige Gruppenpräferenz. Wenn jeder der n Wähler hinsichtlich der Alternativen x und y in beiden Alternativengruppen dieselbe Präferenz i besitzt, dann ist auch die Gruppenpräferenz hinsichtlich dieser beiden Alternativen dieselbe. Oder kürzer: Die Gruppenpräferenz bezüglich zweier Alternativen hängt, sofern die Bedingung I erfüllt ist, nur von den Präferenzen der einzelnen Wähler hinsichtlich dieser beiden Alternativen ab, mögen die anderen Alternativen sein, welche sie wollen.

Die Bedingung I wird von der Mehrheitsregel erfüllt, da es sich bei ihr um eine binäre Entscheidungsregel handelt, also um eine Regel für Fälle, in denen es immer nur um die Entscheidung zwischen zwei Alternativen geht und andere Alternativen keine Rolle spielen.

Bedingung D („Nicht-Diktatur“) lautet:
Es gibt kein Individuum $i \in \{1, ..., n\}$, so daß für **alle** Kombinationen individueller Präferenzen und für **alle** Paare $x, y \in X$ gilt: $x\,P_i\,y \rightarrow x\,P\,y$. In Worten: Unter den n Wählern ist keiner, der für alle Alternativenpaare die Gruppenpräferenz bestimmt, unabhängig davon, welche individuellen Präferenzen hinsichtlich dieser Paare die anderen Wähler haben.

Auch die Bedingung D wird von der Mehrheitsregel erfüllt, denn hinsichtlich jedes Alternativenpaares ist für die Gruppenpräferenz allein die Zahl der Zustimmungen und Ablehnungen entscheidend, nicht aber die Präferenz, die ein bestimmter Wähler i bezüglich der infrage stehenden Alternativen besitzt.

2.4.2.2

Eine Alternative a_{j*} aus einer Alternativenmenge a_j mit $j = 1, ..., m$ heißt Condorcet-Gewinnerin, wenn sie die paarweise Abstimmung gegen jede der anderen Alternativen gewinnt.

2.4.2.3

Da in der Aufgabe nach dem Condorcet-Gewinner gefragt ist, muß zunächst gesagt werden, was darunter zu verstehen ist, das heißt, es muß die Definition des Condorcet-Gewinners (vgl. Antwort zur vorigen Aufgabe) vorangestellt werden.

a) Falls ein Condorcet-Gewinner vorhanden ist, so ergibt sich das aus dem paarweisen Vergleich jeder Alternative mit jeder anderen:

$$\begin{array}{llllllllllll} x:y & = & 1:2 & y:x & = & 2:1 & z:x & = & 2:1 & w:x & = & 2:1 \\ x:z & = & 1:2 & y:z & = & 2:1 & z:y & = & 1:2 & w:y & = & 2:1 \\ x:w & = & 1:2 & y:w & = & 1:2 & z:w & = & 2:1 & w:z & = & 1:2 \end{array}$$

Der paarweise Vergleich zeigt, daß keine der Alternativen gegenüber jeder der anderen Alternativen gewinnt. Es gibt also keinen Condorcet-Gewinner.

b)

$$\begin{array}{llllllllllll} x:y & = & 1:2 & y:x & = & 2:1 & z:x & = & 1:2 & w:x & = & 1:2 \\ x:z & = & 2:1 & y:z & = & 2:1 & z:y & = & 1:2 & w:y & = & 1:2 \\ x:w & = & 2:1 & y:w & = & 2:1 & z:w & = & 2:1 & w:z & = & 1:2 \end{array}$$

In diesem Fall gibt es eine Alternative, die bei paarweiser Abstimmung gegenüber jeder anderen Alternative mit $2:1$ gewinnt und somit Condorcet-Gewinnerin ist, und das ist y.

c)

$$\begin{array}{llllllllllll} x:y & = & 1:2 & y:x & = & 2:1 & z:x & = & 2:1 & w:x & = & 2:1 \\ x:z & = & 1:2 & y:z & = & 2:1 & z:y & = & 1:2 & w:y & = & 2:1 \\ x:w & = & 1:2 & y:w & = & 1:2 & z:w & = & 1:2 & w:z & = & 2:1 \end{array}$$

Auch in diesem Fall gibt es eine Alternative, die im paarweisen Vergleich gegenüber jeder anderen Alternative von der Mehrheit der Abstimmungsberechtigten vorgezogen wird $\left(N\left(a_{j*}\, Pa_{\,j}\right) > N\left(a_j\; P\, a_{j*}\right)\right)$ und damit Condorcet-Gewinnerin ist. Diesmal ist es w.

(Anmerkung: Um es ganz klar zu machen: $N\left(a_{j*}\; P\, a_j\right)$ bedeutet in diesem Falle:

$$N\left(a_{j*}\; P\, a_j\right) \;=\; \begin{cases} N(w\,P\,x) & = \;\; 2 \\ N(w\,P\,y) & = \;\; 2 \\ N(w\,P\,z) & = \;\; 2 \end{cases}$$

und entsprechend

$$N\left(a_j\; P\, a_{j*}\right) \;=\; \begin{cases} N(x\,P\,w) & = \;\; 1 \\ N(y\,P\,w) & = \;\; 1 \\ N(z\,P\,w) & = \;\; 1\;, \end{cases}$$

und die Ungleichungen aus der Definition 2.1 lauten dann:

$$\begin{aligned}
N\left(a_{j*}\; P\; a_j\right) &> N\left(a_j\; P\; a_{j*}\right): \\
N(w\; P\; x) = 2 &> 1 = N(x\; P\; w) \\
N(w\; P\; y) = 2 &> 1 = N(y\; P\; w) \\
N(w\; P\; z) = 2 &> 1 = N(z\; P\; w)\;\; .)
\end{aligned}$$

2.4.2.4

Definition 2.2 (eingipflig):

a_1, ..., a_m sollen die Alternativen sein und H_1, ..., H_n die Wähler (mit i = 1, ..., n). **Eingipflig** werden die Präferenzen aller n Wähler über die m Alternativen dann genannt, wenn die Alternativen in eine solche Reihenfolge gebracht werden können, daß sich die Präferenzen jedes einzelnen Wählers über diese Alternativen durch eine Kurve darstellen lassen, die von der Alternativen mit der höchsten Präferenz aus nach beiden Seiten monoton fällt.

2.4.2.5

Die Antwort ist ein wenig Spielerei, denn Sie müssen alle denkbaren Möglichkeiten von Permutationen durchspielen, aber Spielen übt, und die mit der Frage verbundene Hoffnung ist, daß Sie auf diese Weise spielend lernen, mit der Definition der Eingipfligkeit umzugehen.

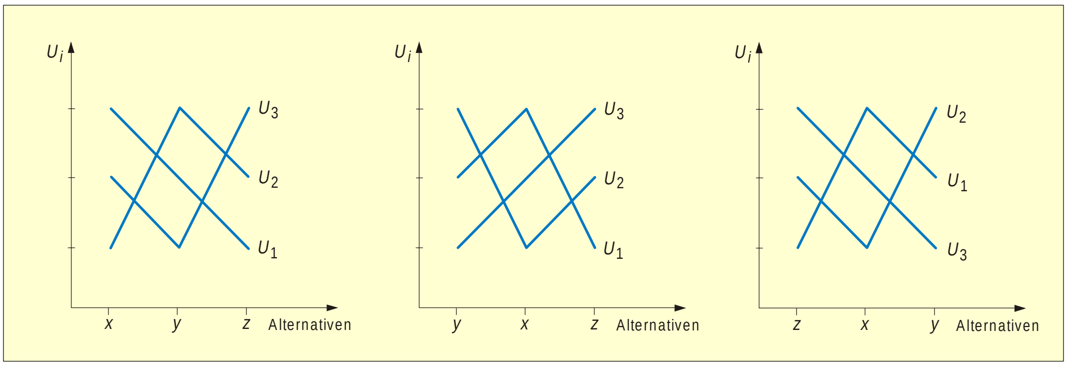
Zunächst werden alle Permutationen der drei Alternativen aufgeschrieben:

1. *x*, *y*, *z*	3. *y*, *x*, *z*	5. *z*, *x*, *y*
2. *x*, *z*, *y*	4. *y*, *z*, *x*	6. *z*, *y*, *x*

Nun wird für jede der sechs Permutationen ein Koordinatenkreuz mit den Achsenbezeichnungen „U_i“ (Ordinate) und „Alternativen“ (Abzisse) gezeichnet. In jedes Kreuz werden für jede der drei Alternativen die möglichen Wertschätzungen eingetragen: Höchste Präferenz, mittlere Präferenz und niedrigste Präferenz. Schließlich werden, wie in Abbildung 2.1 im Text, für jeden Wähler die Kurven eingezeichnet, die für jede der drei Alternativen die Höhe seiner Präferenz angeben, und zwar in jedem einzelnen der sechs Koordinatenkreuze.

Das sieht dann so aus:

1. 3. 5.



2. 4. 6.

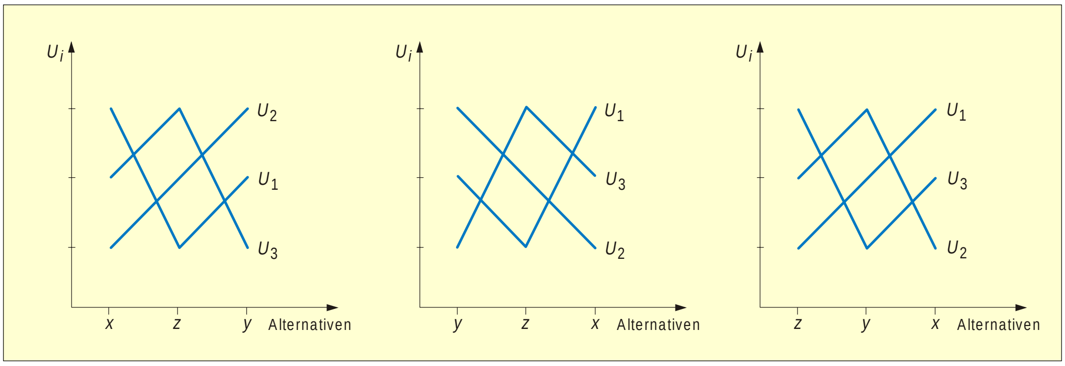


Abbildung 2.4.2.5–1: Graphischer Nachweis der (Nicht-)Eingipfligkeit

Keine der sechs denkbaren Permutationen ist eingipflig: Bei der 1. verletzt H_3 die Definition, bei der 2. H_1, H_2 bei der 3., H_1 bei der 4., H_2 bei der 5. und H_3 bei der 6.

Offensichtlich gibt es dann keine eingipfligen Präferenzen, wenn jede Alternative von mindestens einem Wähler schlechter bewertet wird als alle anderen Alternativen. Dann gibt es nämlich bei jeder Anordnung der Alternativen einen Wähler, der eine zwischen zwei Alternativen stehende Alternative schlechter bewertet als ihre beiden Nachbarn, so daß seine Nutzenkurve zwei Gipfel aufweist.

2.4.2.6

Die Frage bezieht sich natürlich auf den zweiten Teil des Theorems, denn der erste Teil ist der Aussage nach klar und bedarf kaum einer „Übersetzung“. Der zweite Teil besagt also:

Wir gehen von derjenigen Anordnung oder Permutation der Alternativen aus, für welche die Präferenzen der Wähler eingipflig sind. Die Alternativen werden entsprechend dieser Reihenfolge mit $a_1, ..., a_m$ bezeichnet. (Die Permutation bildet also das geordnete m-Tupel $(a_1, ..., a_m)$ und a_j mit $j \in \{1, ..., m\}$ seine j-te Koordinate.)