Univ.-Prof. Dr. Wilhelm Rödder
Univ.-Prof. Dr. Hermann Singer
Dr. Peter Zörnig

Modul 32741
Vertiefung der Wirtschafts-mathematik und Statistik

Kurs 42220
Vertiefung der Linearen Algebra und Analysis
Kurs 42221
Vertiefung der Statistik

LESEPROBE

Fakultät für
Wirtschafts-wissenschaft

FernUniversität in Hagen

Kurs 42220

Vertiefung der Linearen Algebra und Analysis

Fakultät für
**Wirtschafts-
wissenschaft**

FernUniversität in Hagen

Inhaltsverzeichnis

KE 1 Ausgewählte Instrumente der Linearen Algebra

Kapitel 1

Determinante

1.1 Die 2- und die 3-reihige Determinante

Determinante

Die *Determinante* eines 2×2 Zahlenschemas
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

oder eines 3×3 Zahlenschemas
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

ist jeweils eine reelle Zahl. Sie wird mit

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{bzw. mit}$$

det

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

bezeichnet.

Geometrisch bedeutet die 2-reihige Determinante die Fläche des Parallelogramms der Zeilenvektoren

$$\mathbf{a}^{1\mathrm{T}} = (a_{11}, a_{12}),\ \mathbf{a}^{2\mathrm{T}} = (a_{21}, a_{22}).$$

Ebenso bedeutet die 3-reihige Determinante das Volumen des Parallelepipeds der Zeilenvektoren

$$\mathbf{a}^{1\mathrm{T}} = (a_{11}, a_{12}, a_{13}),\ \ \mathbf{a}^{2\mathrm{T}} = (a_{21}, a_{22}, a_{23}),\ \ \mathbf{a}^{3\mathrm{T}} = (a_{31}, a_{32}, a_{33}).$$

Die folgende Abbildung trägt zur Visualisierung des bisher Gesagten bei.

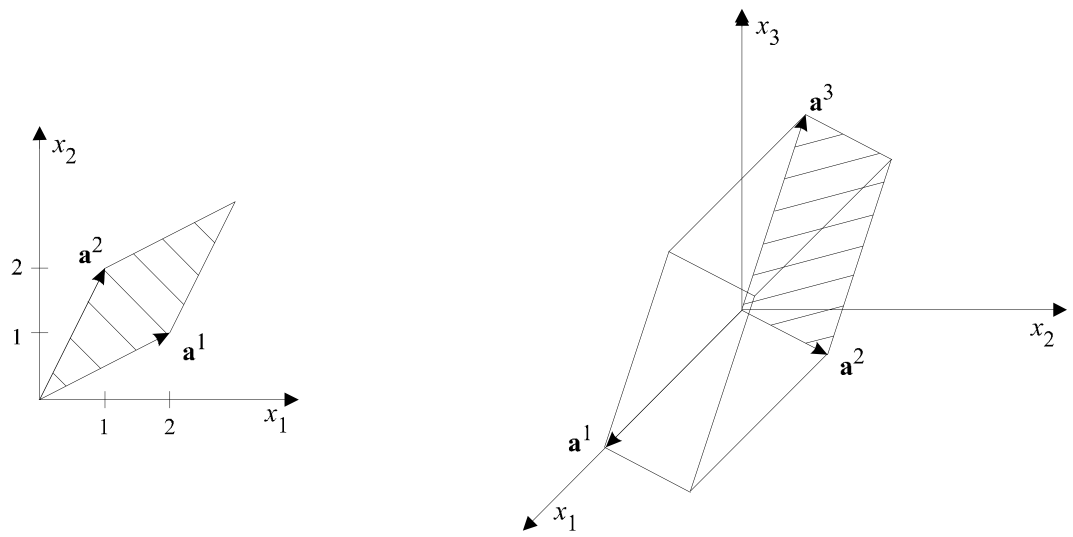


Abb. 1.1.1: 2- und 3-reihige Determinante

Orientierung von Vektoren

Ein wenig genauer ist die Determinante die Fläche bzw. das Volumen „bis auf das Vorzeichen". Das Vorzeichen hängt dabei von der *Orientierung* der Vektoren $\mathbf{a}^{1\mathrm{T}}$, $\mathbf{a}^{2\mathrm{T}}$ bzw. $\mathbf{a}^{1\mathrm{T}}$, $\mathbf{a}^{2\mathrm{T}}$, $\mathbf{a}^{3\mathrm{T}}$ ab, d. h. von der Reihenfolge ihrer Anordnung.

Am besten vergegenwärtigt man sich die Sache mit der Orientierung an der Einheitsfläche bzw. dem Einheitswürfel als einfachstem Parallelogramm bzw. Parallelepiped.

Im zweidimensionalen Fall gibt es die beiden Orientierungen

1 2 und 2 1.

Im dreidimensionalen Fall gibt es die sechs Orientierungen

1 2 3 , 2 1 3 , 2 3 1 , 3 2 1 , 3 1 2 , 1 3 2.

Permutationen

Der Einfachheit halber wurden nur die Indizes der Einheitsvektoren $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$ bzw. $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$ hingeschrieben. Die Zahlentupel bzw. -tripel heißen bekanntlich *Permutationen* der Zahlen 1 2 bzw. 1 2 3.

gerade Permutation

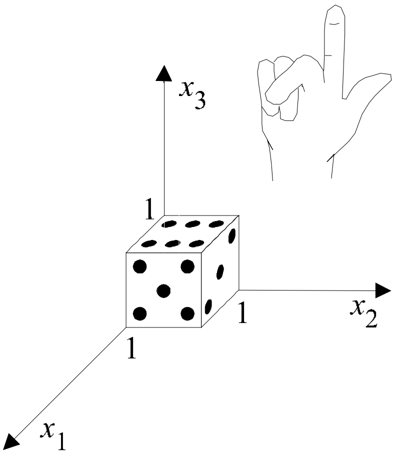
ungerade Permutation

Eine solche *Permutation* heißt *gerade* (+), falls sie aus einer geraden Zahl von Vertauschungen benachbarter Zahlen entsteht – so genannter Inversionen – sonst heißt sie *ungerade* (–). Achtung! Dieser Inversionsbegriff hat mit der Matrixinversion nichts gemein!

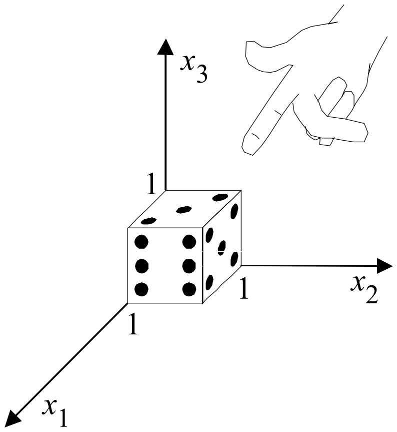
Im zweidimensionalen Fall sind die Permutationen 1 2 bzw. 2 1 gerade bzw. ungerade; im dreidimensionalen Fall hat man in der obigen Reihenfolge +, –, +, –, +, – .

Nun ist es so, dass die Einheitswürfel gerader Permutationen und die Einheitswürfel ungerader Permutationen gar nicht *untereinander* unterscheidbar sind, wohl aber *voneinander*:

Der Einheitswürfel aus $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$ im Koordinatenkreuz links



ist gleich dem aus $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$, $\mathbf{e}^1$ im identischen Koordinatenkreuz rechts,



2 3 1 ist eine gerade Permutation von 1 2 3; die Orientierung ist gleich. Der Würfel wurde nur gedreht, vergewissern Sie sich mit der „Rechte-Hand-Regel“ (s. o.).

Einheitswürfel mit gleicher Orientierung sollen gleiches, solche mit verschiedener Orientierung aber verschiedenes Vorzeichen haben.

Vertauscht man zwei Einheitsspalten, so ist stets eine ungerade Anzahl von Inversionen nötig, um das zu erreichen.

Übungsaufgabe 1.1.1

Vertauschen Sie in 1 2 3 die Vektoren 1 und 3 und stellen Sie diese Vertauschung als Folge von Inversionen dar!

Beispiel 1.1.1

Als Folge des bisher über Einheitsquadrat und Einheitswürfel Gesagten gilt also z. B. für deren Vorzeichen:

i) $\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1;\quad \det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = -1\,;$

ii) $\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = 1;\quad \det\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = -1;\quad \det\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = 1.$

Wie bei Einheitswürfeln wird nun auch allgemein bei Determinanten die Reihenfolge der *Zeilenvektoren* bestimmend für das Vorzeichen. So haben die Fläche bzw. das Volumen in Abb. 1.1.1 positives Vorzeichen. Die jeweils aufspannenden Vektoren folgen der Orientierung nach der „Rechte-Hand-Regel“.

Zwei andere Eigenschaften der Determinante visualisieren wir im $\boldsymbol{R}^2$, im $\boldsymbol{R}^3$ wird das schon ein wenig unübersichtlich:

- die Determinante ist *homogen* in der ersten Zeile
- die Determinante ist *additiv* in der ersten Zeile.

Linearität von det

Homogenität und Additivität zusammen machen gerade die *Linearität* aus.

Homogenität bedeutet $\begin{vmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$ und

Additivität bedeutet $\begin{vmatrix}a_1 + b_1 & a_2 + b_2\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}.$

λ ist hier eine reelle Zahl und $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}^1$, $\mathbf{a}^2$, $\mathbf{b}$ sind Vektoren, vgl. Abb. 1.1.2.

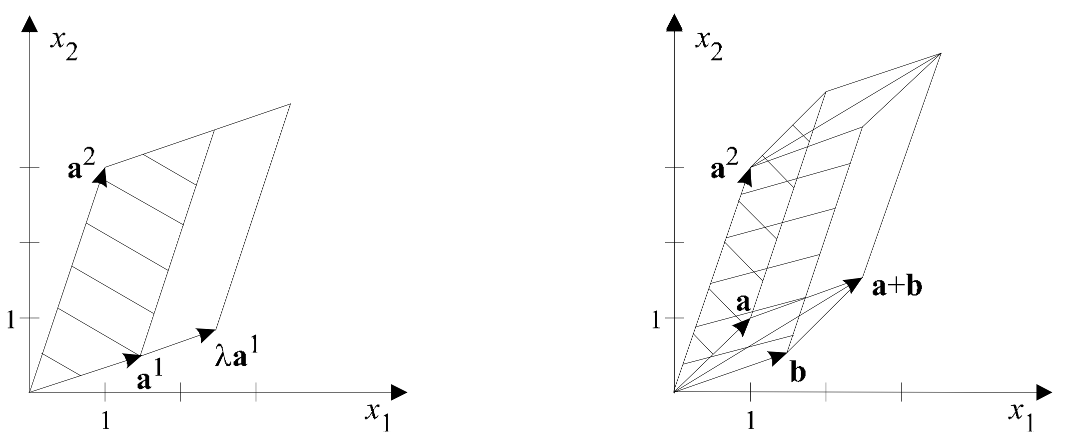


Abb. 1.1.2: Homogenität und Additivität der Determinante im $\boldsymbol{R}^2$

Die etwas langatmigen Betrachtungen dieses Abschnitts werden zu den folgenden Determinanteneigenschaften zusammengefasst.

Determinanten im $\boldsymbol{R}^2$

Zu zwei Vektoren $\mathbf{a}^{1\mathrm{T}} = (a_{11}, a_{12})$, $\mathbf{a}^{2\mathrm{T}} = (a_{21}, a_{22})$ ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

(D_0) eine Zahl.

Für die Determinante det gilt ferner

(D_1) $\det\begin{pmatrix} \alpha\mathbf{a}^{\mathrm{T}} + \beta\mathbf{b}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{a}^{2\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \alpha\det\begin{pmatrix} \mathbf{a}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{a}^{2\mathrm{T}} \end{pmatrix} + \beta\det\begin{pmatrix} \mathbf{b}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{a}^{2\mathrm{T}} \end{pmatrix};$

det ist linear in der ersten Zeile.

(D_2) $\det\begin{pmatrix} \mathbf{a}^{1\mathrm{T}} \\ \mathbf{a}^{2\mathrm{T}} \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} \mathbf{a}^{2\mathrm{T}} \\ \mathbf{a}^{1\mathrm{T}} \end{pmatrix};$

det ist *alternierend*. D. h. bei Vertauschung zweier Zeilen ändert sich das Vorzeichen der Determinante. *alternierend*

(D_3) $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1;$

bei richtiger Orientierung ist die Fläche des Einheitsquadrats gleich 1.

Determinanten im $\boldsymbol{R}^3$

Zu drei Vektoren
$\mathbf{a}^{1\mathrm{T}} = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$, $\mathbf{a}^{2\mathrm{T}} = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$, $\mathbf{a}^{3\mathrm{T}} = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$ ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(D_0) eine Zahl.

Für die Determinante det gilt ferner

$$(D_1)\quad \det\begin{pmatrix} \alpha\mathbf{a}^{\mathrm{T}}+\beta\mathbf{b}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{a}^{2\mathrm{T}} \\ \mathbf{a}^{3\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \alpha\det\begin{pmatrix} \mathbf{a}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{a}^{2\mathrm{T}} \\ \mathbf{a}^{3\mathrm{T}} \end{pmatrix} + \beta\det\begin{pmatrix} \mathbf{b}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{a}^{2\mathrm{T}} \\ \mathbf{a}^{3\mathrm{T}} \end{pmatrix};$$

det ist linear in der ersten Zeile.

$$(D_2)\quad \det\begin{pmatrix} \mathbf{a}^{i\mathrm{T}} \\ \cdots \\ \mathbf{a}^{k\mathrm{T}} \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} \mathbf{a}^{k\mathrm{T}} \\ \cdots \\ \mathbf{a}^{i\mathrm{T}} \end{pmatrix};$$

det ist *alternierend*. D. h. bei Vertauschung zweier Zeilen ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

$$(D_3)\quad \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1;$$

bei richtiger Orientierung ist das Volumen des Einheitswürfels gleich 1.

einreihige Determinante

Der Vollständigkeit halber sei angemerkt, dass man auch zu einer reellen Zahl eine *einreihige* Determinante det **a** definieren kann. Diese (entartete) Determinante erfüllt natürlich auch (D_0), (D_1) und (D_3); (D_2) entfällt.

Es ist nun an der Zeit, auf die allgemeinere Frage der Determinante im $\boldsymbol{R}^n$ überzugehen.

1.2 Die *n*-reihige Determinante

Angesichts des vorigen Abschnitts erscheinen einige Passagen des folgenden Textes redundant. Dennoch scheuen wir aus Gründen der mathematischen Vollständigkeit Wiederholungen nicht.

Definition 1.2.1 (Determinante)

Unter der Determinante der *n*-Zeilenvektoren $\mathbf{a}^{1\mathrm{T}},\ldots,\mathbf{a}^{n\mathrm{T}}$ (oder auch $n\times n-$Matrix $\begin{pmatrix} \mathbf{a}^{[1]} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{[n]} \end{pmatrix}$) versteht man

Lösungen zu den Übungsaufgaben

Kapitel 1

Übungsaufgabe 1.1.1

Aus 123 soll also 321 entstehen. Das geschieht mittels folgender ungeraden – nämlich 3 – Zahl von Inversionen:

123 132 312 321

✓

Übungsaufgabe 1.2.1

Zu zeigen: Addiert man zu einer Zeile das λ-fache einer anderen, so bleibt der Zahlenwert unverändert:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}^{1\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{i\mathrm{T}} + \lambda\,\mathbf{a}^{k\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{k\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{n\mathrm{T}} \end{vmatrix} \overset{\textit{Linearität}}{=} \begin{vmatrix} \mathbf{a}^{1\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{i\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{k\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{n\mathrm{T}} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \mathbf{a}^{1\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{k\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{k\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{n\mathrm{T}} \end{vmatrix}$$

und da eine Determinante mit zwei gleichen Zeilen den Wert 0 hat, folgt die Behauptung.

✓

Übungsaufgabe 1.2.2

Nach der Sarrus-Regel gilt

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

Kurs 42221

Vertiefung der Statistik

Fakultät für
**Wirtschafts-
wissenschaft**

FernUniversität in Hagen

Inhaltsverzeichnis

3.3 Zwei-Stichproben-Fall

3.3.1 Unabhängige Stichproben

3.3.1.1 Quantitative Merkmale: Vergleich von Erwartungswerten

In vielen Anwendungen kann die Stichprobe in zwei oder mehrere *unabhängige* Untergruppen aufgeteilt werden.
Beispiele:

- Zufriedenheit in Bankfilialen mit unterschiedlichem Gestaltungskonzept
- Umsätze mit/ohne Werbemaßnahme
- Arbeitslosenzahlen in alten/neuen Bundesländern
- BIP-Wachstum Europa/Übersee
- Unterschiede im Kaufverhalten zwischen Männern/Frauen
- Änderung von Prozentwerten bei Wahlumfragen.

Auch hier ergeben sich wieder unterschiedliche Test-Hypothesen für die Erwartungswerte der Merkmale X (Stichprobe 1) und Y (Stichprobe 2):

Test des Erwartungswerts (2-Stichprobenfall)

2-seitiger Test:

$$H_0 \; : \; \mu_x - \mu_y = \delta_0 \tag{3.90}$$
$$H_1 \; : \; \mu_x - \mu_y \neq \delta_0 \tag{3.91}$$

1-seitiger Test; kritischer Wert rechts:

$$H_0 \; : \; \mu_x - \mu_y \leq \delta_0 \tag{3.92}$$
$$H_1 \; : \; \mu_x - \mu_y > \delta_0 \tag{3.93}$$

1-seitiger Test; kritischer Wert links:

$$H_0 \; : \; \mu_x - \mu_y \geq \delta_0 \tag{3.94}$$
$$H_1 \; : \; \mu_x - \mu_y < \delta_0. \tag{3.95}$$

Die kritischen Bereiche sind wiederum Abb. 3.1 zu entnehmen.

Als Prüfgröße ist die Mittelwertsdifferenz

$$\bar{X} - \bar{Y} - \delta_0 \tag{3.96}$$

naheliegend, wobei

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum X_n \tag{3.97}$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{M} \sum Y_m \tag{3.98}$$

die Mittelwerte in Stichprobe 1 und 2 sind (Stichprobenumfänge N und M).
Wie im Einstichprobenfall lassen sich verschiedene Konstellationen unterscheiden:

1. $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$, $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$
   σ_x^2 und σ_y^2 bekannt

   Varianzterm: $S = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{N} + \frac{\sigma_y^2}{M}}$

2. $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$, $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$
   $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$, aber unbekannt

   Varianzterm: $S = \sqrt{(\frac{1}{N} + \frac{1}{M})\frac{(N-1)S_x^2+(M-1)S_y^2}{N+M-2}}$

3. $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$, $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$
   $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$ **und** unbekannt (Behrens-Fisher-Problem)

   Behrens-Fisher-Problem

   Varianzterm: $S = \sqrt{\frac{S_x^2}{N} + \frac{S_y^2}{M}}$

   Freiheitsgrade: $k \approx \frac{\left(\frac{S_x^2}{N}+\frac{S_y^2}{M}\right)^2}{\left(\frac{S_x^2}{N}\right)^2/(N-1)+\left(\frac{S_y^2}{M}\right)^2/(M-1)}$ (gerundet)

4. X, Y beliebig verteilt, $N, M > 30$

Varianzterm: $S = \sqrt{\frac{S_x^2}{N} + \frac{S_y^2}{M}}$

Die Prüfgröße hat die einheitliche Form

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta_0}{S}, \tag{3.99}$$

wobei die Varianzterme oben aufgeführt wurden.

Fall	Prüfgröße	Prüfverteilung
1	$Z = \frac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta_0}{S}$	$Z \sim N(0,1)$
2	$T = \frac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta_0}{S}$	$T \sim t(N+M-2)$
3	$T = \frac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta_0}{S}$	$T \sim t(k)$
4	$T = \frac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta_0}{S}$	$T \overset{a}{\sim} N(0,1)$ für $N, M > 30$

Tabelle 3.6: 2-Stichproben-Tests für Erwartungswerte.

Begründung für die Varianzterme:

1. $\mathrm{Var}(\bar{X} - \bar{Y} - \delta_0) = \mathrm{Var}(\bar{X}) + \mathrm{Var}(\bar{Y}) = \frac{\sigma_x^2}{N} + \frac{\sigma_y^2}{M}$,

   da δ_0 eine Konstante ist und die Stichproben unabhängig sind (ansonsten wäre bei abhängigen Stichproben noch ein Kovarianzterm $-2\,\mathrm{Cov}(\bar{X}, \bar{Y})$ zu berücksichtigen.

2. falls $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$, aber unbekannt:

   durch gepooltes (alle Daten zusammenfassen)

   $S^2 = [(N-1)S_x^2 + (M-1)S_y^2]/(N+M-2)$ schätzen.

   $SSQ = (N-1)S_x^2 + (M-1)S_y^2 = \sum_n (X_n - \bar{X})^2 + \sum_m (Y_m - \bar{Y})^2$,

   daher ist $SSQ/\sigma^2 \sim \chi^2(N+M-2)$-verteilt.

Normiert man den Nenner $\bar{X} - \bar{Y} - \delta_0$ mit seiner Varianz (Ziffer 1, gleiche Varianzen), so ergibt sich die t-Variable

$$T \;=\; \frac{(\bar{X} - \bar{Y} - \delta_0)/\sqrt{\frac{\sigma^2}{N} + \frac{\sigma^2}{M}}}{\sqrt{\frac{(N-1)S_x^2 + (M-1)S_y^2}{\sigma^2(N+M-2)}}} \sim t(N+M-2)$$

Dies ist aber der Varianzterm aus Fall 2 (oben). Bitte nachrechnen.

3. Wenn die Varianzen unbekannt und auch nicht gleich sind, so ist das Testproblem für die Differenzen nur näherungsweise lösbar [eine exakte Lösung ist im Bayesianischen Paradigma möglich (Behrens-Fisher-Verteilung; vgl. Box und Tiao 1973, Kap. 2.5)]. Eine Approximation der Verteilung der Prüfgröße durch die t-Verteilung ist oben angegeben.

4. Schließlich sind bei großen Stichprobenumfängen die Mittelwerte $\bar{X}, \bar{Y}$ approximativ normalverteilt (zentraler Grenzwertsatz) und die Varianz-Schätzungen S_x^2, S_y^2 streben gegen die Parameter σ_x^2, σ_y^2. Daher ist die Teststatistik approximativ normalverteilt.

Beispiel 3.6 (Werbemaßnahme)

In einem Teil einer Supermarktkette $(X, N = 20)$ wurde eine Werbemaßnahme durchgeführt. Nun soll die Wirksamkeit der Maßnahme anhand eines Vergleichs der Umsätze untersucht werden. Es ergaben sich folgende Statistiken (in TEuro):

$\bar{x} = 12.34, \bar{y} = 3.38$

$s_x = 5.08, s_y = 2.07$

$N = 20, M = 20.$

Die Werbemaßnahme erhöht also offenbar stark den Umsatz, jedoch sind auch die Streuungen sehr unterschiedlich.

Es ist nicht bekannt, ob die Varianzen gleich sind.

Daher ist Fall 3 relevant.

Varianzterm: $s = \sqrt{\frac{s_x^2}{N} + \frac{s_y^2}{M}} = \sqrt{\frac{5.08^2}{20} + \frac{2.07^2}{20}} = 1.23$

Teststatistik: $t = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \delta_0}{S} = 7.30$

Freiheitsgrade: $k \approx \frac{\left(\frac{S_x^2}{N} + \frac{S_y^2}{M}\right)^2}{\left(\frac{S_x^2}{N}\right)^2/(N-1) + \left(\frac{S_y^2}{M}\right)^2/(M-1)} = 25.14 \approx 25$

Hypothesen:

$H_0 : \mu_x \leq \mu_y$
$H_1 : \mu_x > \mu_y$ (Werbung stärkt den Umsatz)
kritischer Wert: $t(1-\alpha, k) = t(.95, 25) = 1.708$
Testentscheidung: da $t > t(1-\alpha, k)$, wird H_1 angenommen (Werbung stärkt den Umsatz).
■

3.3.1.2 Dichotome Merkmale: Vergleich von Anteilswerten

Häufig müssen Prozentwerte einer Eigenschaft in verschiedenen Populationen verglichen werden, etwa A = Zugehörigkeit zur Mittelschicht im Vergleich Hauptschule/Gymnasium oder Prozentwerte von Parteien in den alten/neuen Bundesländern.

In diesem Fall werden als Stichprobenvariablen die Indikatoren X_n, Y_m betrachtet, die das Vorliegen der Eigenschaft A in Stichprobe (Gruppe) 1 oder 2 anzeigen:

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{wenn } A \text{ in Stichprobe 1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.100}$$

$$Y_m = \begin{cases} 1 & \text{wenn } A \text{ in Stichprobe 2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.101}$$

(Bsp.: $X_n = 1$, wenn die n-te Person die A-Partei in Westdeutschland wählt, 0 sonst).

Als Hypothesen formuliert man für die unbekannten Wahrscheinlichkeiten $\pi_x = P(A|1) = E[X]$, $\pi_y = P(A|2) = E[Y]$:

Test von Anteilswerten (2-Stichprobenfall)

2-seitiger Test:

$$H_0 : \pi_x - \pi_y = \delta_0 \tag{3.102}$$
$$H_1 : \pi_x - \pi_y \neq \delta_0 \tag{3.103}$$

1-seitiger Test; kritischer Wert rechts:

$$H_0 : \pi_x - \pi_y \leq \delta_0 \tag{3.104}$$
$$H_1 : \pi_x - \pi_y > \delta_0 \tag{3.105}$$

1-seitiger Test; kritischer Wert links:

$$H_0 : \pi_x - \pi_y \geq \delta_0 \tag{3.106}$$
$$H_1 : \pi_x - \pi_y < \delta_0. \tag{3.107}$$

Die kritischen Bereiche sind Abb. 3.1 zu entnehmen.

Die Testgröße ist die Differenz der empirischen Anteilswerte

$$\hat{\pi}_x = P_x = \bar{X} = \frac{1}{N}\sum_n X_n \tag{3.108}$$

$$\hat{\pi}_y = P_y = \bar{Y} = \frac{1}{M}\sum_m Y_m. \tag{3.109}$$

Die Streuung der Anteilswerte kann durch

$$S_x^2 = \frac{\hat{\pi}_x(1-\hat{\pi}_x)}{N} \tag{3.110}$$

$$S_y^2 = \frac{\hat{\pi}_y(1-\hat{\pi}_y)}{M} \tag{3.111}$$

geschätzt werden.

Die Testgröße

$$Z = \frac{\hat{\pi}_x - \hat{\pi}_y - \delta_0}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2}} \overset{a}{\sim} N(0,1), N, M > 30 \tag{3.112}$$

ist für genügend große Stichproben asymptotisch normalverteilt.

Beispiel 3.7 (Politbarometer, Veränderung)

Die Prozentwerte der Parteien für den April 2009 sind in Abb. 3.4 zu sehen. Gegenüber der letzten Umfrage vom März 2009 (Abb. 2.3) ergeben sich Unterschiede.

Sind diese aber auch relevant bzw. signifikant (statistisch bedeutsam)?

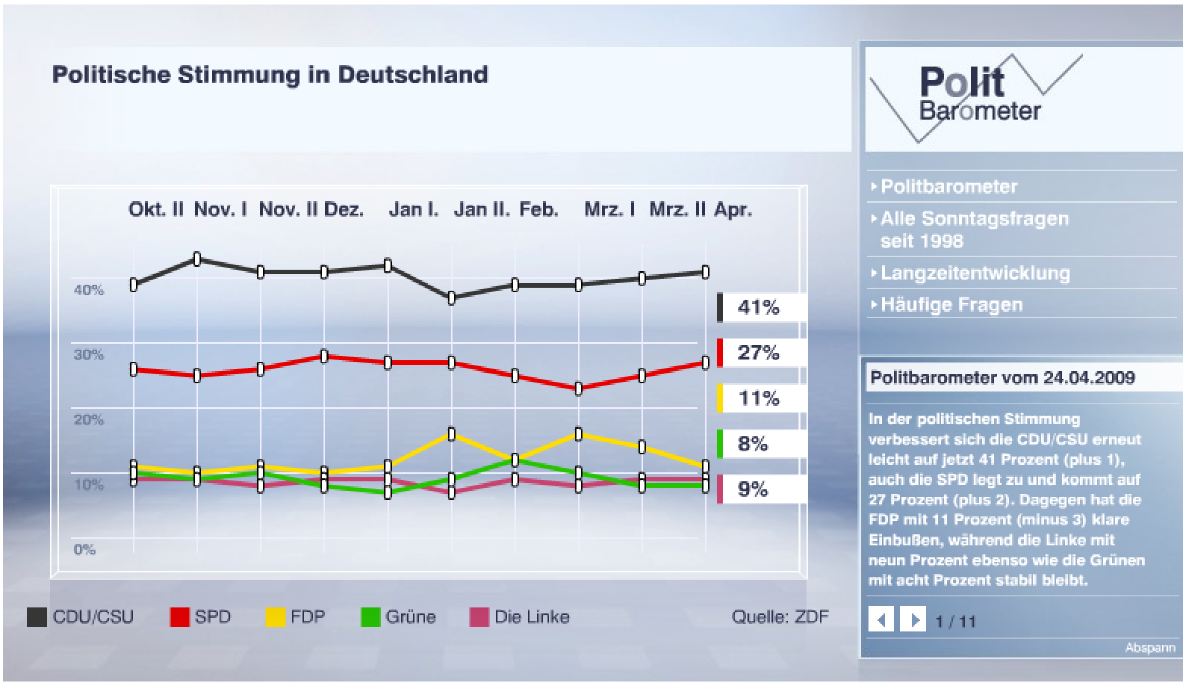
In der Teststatistik und dem kritischen Wert mischen sich Effektstärke (Unterschiede), Stichprobengröße und Signifikanzniveau. Praktische Relevanz bzw. statistische Signifikanz müssen daher strikt unterschieden werden (etwa Signifikanz durch höhere Fallzahl bei gleicher Differenz).

Die Prozentwerte im März waren:

$\hat{\pi}_y = \{0.4, 0.25, 0.14, 0.08, 0.09, 0.04\}$

Im April ergab sich

$\hat{\pi}_x = \{0.41, 0.27, 0.11, 0.08, 0.09, 0.04\}$



INFOBOX

Die Umfragen zum Politbarometer ...
... wurden wie immer von der Mannheimer Forschungsgruppe Wahlen durchgeführt. Die Interviews wurden in der Zeit vom 21. bis 23. April 2009 bei 1445 zufällig ausgewählten Wahlberechtigten telefonisch erhoben. Die Befragung ist repräsentativ für die wahlberechtigte Bevölkerung in ganz Deutschland. Der Fehlerbereich beträgt bei einem Parteianteil von 40 Prozent rund drei Prozentpunkte und bei einem Parteianteil von zehn Prozent rund zwei Prozentpunkte. Das nächste Politbarometer sendet das ZDF am Freitag, den 8. Mai.

Abbildung 3.4: Politbarometer vom 24.4.2009.

Differenz:
$\hat{\pi}_x - \hat{\pi}_y = \{0.01, 0.02, -0.03, 0., 0., 0.\}$
(FDP verlor 3 Prozentpunkte)
Diese Differenzen müssen aber in Relation zu den Schätzfehlern gesehen werden:
$s_x = \{0.0129, 0.0117, 0.0082, 0.0071, 0.0075, 0.0052\}$
$s_y = \{0.0139, 0.0123, 0.0098, 0.0077, 0.0081, 0.0056\}$
$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \{0.019, 0.0169, 0.0128, 0.0105, 0.0111, 0.0076\}$
Die Schätzfehler liegen somit im Prozentbereich, etwa bei CDU/CSU 1.9%. Daher ist eine Steigerung von 1% vermutlich nicht statistisch bedeutsam.
Hypothesen (2-seitiger Test)

$$\begin{aligned} H_0 &: \pi_x - \pi_y = 0 \\ H_1 &: \pi_x - \pi_y \neq 0 \end{aligned}$$

Teststatistik:

$$z = \frac{\hat{\pi}_x - \hat{\pi}_y}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}} = \{0.5269, 1.1806, -2.3393, 0, 0, 0\}$$

Kritischer Wert: $z(.975) = 1.96$ ($z(.995) = 2.58$).
Auf dem 5%-Niveau ist nur die Veränderung des FDP-Werts (–0.03) signifikant.
■

3.3.1.3 Stetige Merkmale: Vergleich von Varianzen

Meistens wird bei Gruppenvergleichen nur der Mittelwertsunterschied getestet. Jedoch können sich auch andere Parameter der Verteilungen $f_x(x), f_y(y)$ in den Gruppen geändert haben (etwa die Streuung oder die Kurtosis bei Renditen vor und nach der Finanzkrise).
Auch können Interventionseffekte (Werbemaßnahmen, Trainingseffekte) auch auf der Ebene der Streuungen sichtbar sein (größere Heterogenität durch die Maßnahme).
Dies führt auf das Testproblem