FernUniversität in Hagen

FAKULTÄT FÜR
WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFT

Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre,
insb. Quantitative Methoden und
Wirtschaftsmathematik

Univ.-Prof. Dr. Andreas Kleine

AUFGABEN

Klausur:	**Modul 31801** **Problemlösen in graphischen Strukturen**
Termin:	**19.09.2016**
Prüfer:	**Univ.-Prof. Dr. Andreas Kleine**

Copyright © 2016 FernUniversität in Hagen - Alle Rechte vorbehalten

Einführungstext und Grundlage für alle Aufgaben (1 bis 5)

Soziale Netzwerke wie "Facebook" oder "Twitter" sind allgemein bekannt und auch in der Wissenschaft erfährt die Soziale Netzwerkanalyse (SNA) immer höhere Bedeutung. SNA verwendet Konzepte der Graphentheorie zur Visualisierung von Beziehungen und Bewertung von Strukturen. Knoten repräsentieren dabei die sogenannten Akteure, die neben Personen auch bspw. Unternehmen oder Länder sein können. Werden die Verbindungen zwischen den Knoten durch Kanten dargestellt, handelt es sich um symmetrische Beziehungen: gemeinsame Aktivitäten, Geschäftskontakte oder Handelsabkommen.

Sei $G = [V, E]$ mit $V = \{1, 2, \dots 10\}$, der Menge der Akteure, deren ungerichtete Verbindungen E in folgender Adjazenzmatrix $A = \left(a_{ij}\right)_{10,10}$ abzulesen sind.

$$A = \left(a_{ij}\right)_{10,10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Copyright © 2016 FernUniversität in Hagen - Alle Rechte vorbehalten

Aufgabe 1	**Erreichbare Punktzahl: 20**

Gegeben sei der auf Seite 1 im Einführungstext spezifizierte Graph $G = [V, E]$.

a) Zeichnen Sie den zugehörigen Graphen. Verwenden Sie dazu das im Lösungsteil angegebene Knotenschema.

b) Notieren Sie zum Graphen G
   i) eine Kantenfolge mit mindestens fünf Knoten, die keine Kette ist,
   ii) eine Kette mit mindestens fünf Knoten, die keinen Kreis darstellt,
   iii) einen Kreis mit mindestens fünf Knoten.

c) Ist der Graph G bipartit?
   Wenn ja, notieren Sie die Mengen R und S.
   Wenn nein, geben Sie konkret an, warum G diese Eigenschaft nicht besitzt.

d) Notieren Sie die zugehörige Inzidenzmatrix $B(G)$.

e) Welche strukturellen Eigenschaften des Graphen G können aus dem Ergebnis der Berechnung des Produkts $B(G) \cdot B^T(G)$ unmittelbar abgelesen werden.

Aufgabe 2	**Erreichbare Punktzahl: 5**

Man verwendet sogenannte Zentralitätsmaße, um Knoten im Netzwerk zu bewerten und damit Aussagen über die Bedeutung eines Akteurs zu machen. In der vergleichenden Analyse werden Knoten identifiziert, die eine zentrale Rolle spielen. Grundlage für die nachfolgenden Berechnungen ist wieder der auf Seite 1 im Einführungstext spezifizierte Graph $G = [V, E]$.

Mit der Degree-Zentralität C_D wird nach der Anzahl der Kontakte gefragt und der im Kurs 00852 mit δ bezeichnete Knotengrad als Maß verwendet. Ein Akteur, der die meisten Kontakte hat, ist demnach zentral. Die Division durch die um eins reduzierte Anzahl der Akteure normiert den Wert und macht ihn auch bei unterschiedlichen Graphen anwendbar. Formal berechnet man $C_D(i) = \dfrac{\delta(i)}{n-1}$.

Bestimmen Sie die Degree-Zentralität C_D für alle $i \in V$, und ermitteln Sie das Maximum.

Copyright © 2016 FernUniversität in Hagen - Alle Rechte vorbehalten

Aufgabe 3	**Erreichbare Punktzahl: 25**

Man verwendet sogenannte Zentralitätsmaße, um Knoten im Netzwerk zu bewerten und damit Aussagen über die Bedeutung eines Akteurs zu machen. In der vergleichenden Analyse werden Knoten identifiziert, die eine zentrale Rolle spielen.

In dieser Aufgabe wird anders als in Aufgabe 2 nun die sogenannte Closeness-Zentralität C_C eines Akteurs bestimmt. Grundlage für die nachfolgenden Berechnungen ist wieder der auf Seite 1 im Einführungstext spezifizierte Graph $G = [V, E]$.

Bei der Closeness-Zentralität C_C stellt sich die Frage: Wer ist schneller erreichbar? Dazu berechnet man alle kürzesten Wege von jedem Knoten zu jedem anderen Knoten. In dieser Aufgabe sind die Distanzen d_{ij} mit dem Tripel-Algorithmus zu ermitteln, wobei für die Eingabedaten gilt: $c_{ij} = 0 \;\; für\; i = j$, $c_{ij} = 1 \;\; \forall e_{ij} \in E$ und $c_{ij} = \infty$ sonst.

a) Bestimmen Sie die Matrizen $D^{(1)}, \ldots, D^{(10)}$. Geben Sie immer jeweils die Werte in der Hauptdiagonalen sowie in der ν–ten Zeile und Spalte an. Darüber hinaus müssen nur Veränderungen eingetragen werden, die sich in einer Matrix ergeben. Die Wegematrizen Q sind in dieser Aufgabe nicht zu bestimmen.
Verwenden Sie die Schemata im Lösungsteil.

b) Auch bei der Closeness-Zentralität C_C wird noch eine Normierung durchgeführt. Formal berechnet man $C_C(i) = \frac{n-1}{\sum_{j=1}^{n} d_{ij}}$. Dabei sind d_{ij} dabei die kürzesten Distanzen von Knoten i zu Knoten j.

Bestimmen Sie die Closeness-Zentralität C_C für alle $i \in V$, und ermitteln Sie das Maximum.

Copyright © 2016 FernUniversität in Hagen - Alle Rechte vorbehalten

Aufgabe 4	**Erreichbare Punktzahl: 25**

Die zehn Akteure, die im Einführungstext mit ihren Beziehungen zueinander benannt wurden, sind Studierende im Bachelorstudiengang (Gruppe B) $B = \{1, 2, 3, 7, 10\}$ und Masterstudiengang (Gruppe M) $M = \{4, 5, 6, 8, 9\}$. Aufgabe ist es nun, für ein Seminar je einen Akteur aus Gruppe B genau einem Akteur aus Gruppe M zuzuordnen. Auf Basis der Distanzen wurde unter Berücksichtigung persönlicher Präferenzen die nachfolgende Kostenmatrix $C = (c_{ij})$ für die Zuordnung der Akteure aus den Gruppen B und M ermittelt. Ziel ist es, die Gesamtbewertung zu minimieren. Die optimale Zuordnung ist mit der Ungarischen Methode zu bestimmen.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} 4 & 5 & 6 & 8 & 9 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 10 \end{array} & C = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

a) Berechnen Sie gemäß der Schritte 1 und 2 des Algorithmus 9.2 (KE2, S.96) die reduzierte Matrix und markieren Sie eine Menge UN von unabhängigen Nullen.

b) Setzen Sie den Algorithmus mit Ausführung der erforderlichen Schritte 3 bis 5 fort. Sie können Ihre Berechnungen beenden, wenn **mindestens einmal Schritt 5** („Korrektur der Dualvariablen und der reduzierten Kostenmatrix“) **und mindestens einmal Schritt 4** („Korrektur der Menge Unabhängiger Nullen“) vollständig durchgeführt wurde. Verwenden Sie für jeden Schritt ein eigenes Schema, dem für Schritt 3 auch die Marken zu entnehmen sind.
Verwenden Sie die Schemata im Lösungsteil.

Copyright © 2016 FernUniversität in Hagen - Alle Rechte vorbehalten

Aufgabe 5 **Erreichbare Punktzahl: 25**

Die zehn Akteure, die im Einführungstext mit ihren Beziehungen zueinander benannt wurden, haben alle als Wahlfach das Modul 31801 belegt und wollen zum nächsten Termin die zugehörige Klausur schreiben. Sie haben sich in unterschiedlichen kleineren Lerngruppen bereits gemeinsam auf frühere Klausuren vorbereitet; die Gruppen waren $L_1 = \{1, 2, 9\}$, $L_2 = \{2, 3, 9\}$, $L_3 = \{3, 4\}$, $L_4 = \{3, 8, 9\}$, $L_5 = \{4, 6, 7\}$, $L_6 = \{5, 6\}$, $L_7 = \{7, 8\}$, $L_8 = \{9, 10\}$.

Nach guten Lernerfolgen in der Vergangenheit wollen die zehn Studierenden sich auch jetzt zusammen vorbereiten und dazu in zwei gleich große Gruppen aufteilen. Da bisher alles sehr harmonisch und produktiv verlaufen ist, will man erreichen, dass in den beiden neu zu bildenden Gruppen so viele Personen wie möglich bereits früher zusammengearbeitet haben.

Werden Akteure durch Knoten dargestellt, entsprechen also der Knotenmenge V, und werden zwei Knoten durch eine Kante verbunden, wenn die Studierenden bereits zusammen gelernt haben, so ergibt sich der Graph aus Aufgabe 1. Gesucht ist zu diesem Graphen eine Bipartition, also eine disjunkte Aufteilung der Knoten in zwei Mengen V_1, V_2, die gleich groß sein sollen, also hier im Beispiel jeweils fünf Knoten enthalten.

Stellt man dieses Problem abstrakt dar, so besteht die Aufgabe darin, eine Partition des gegebenen Graphen in zwei Knotenmenge V_1 und V_2 zu finden, mit $|V_1| = |V_2|$ und $V_1 \cup V_2 = V$, so dass die Anzahl der Kanten mit Endknoten in verschiedenen Mengen minimiert wird.

a) Notieren Sie für das Problem eine geeignete Zielfunktion, die eine Lösung des abstrakt formulierten Problems bewertet und die bei Minimierung zu einer optimalen Lösung führt. Erläutern und begründen Sie Ihre Angaben.

b) Seien $x_i \in \{0, 1\}$ ($i = 1,...,10$) Binärvariable, die angeben, ob ein Knoten i zur Menge V_1 gehört ($x_i = 1$) oder nicht ($x_i = 0$; damit ist Knoten i automatisch V_2 zugeordnet).
Repräsentieren die beiden Strings
i) $x^1 = 0111010001$ und
ii) $x^2 = 1101101011$
zulässige Lösungen der gestellten Aufgabe? Begründen Sie Ihre Antworten!

Copyright © 2016 FernUniversität in Hagen - Alle Rechte vorbehalten

c) Das Problem der Bestimmung einer bestmöglichen Aufteilung soll mit Simulated Annealing unter Anwendung des im Kurs beschriebenen Pseudocodes gelöst werden.

Zielfunktion *f* sei wie in a) von Ihnen gewählt.
Der **Abkühlplan** berechnet sich für jeden Iterationsschritt k mit $T_k = 0{,}5 \cdot T_{k-1}$.
Die **Starttemperatur** ist $T_0 = 10$, wobei die Boltzmannkonstante bei der Berechnung der Akzeptanzwahrscheinlichkeit vernachlässigt werden kann.

Die **Nachbarlösungen** werden nach folgender Regel erzeugt:

– Wähle in Iteration *k* die *k*-te Position im String.
– Suche rechts davon die erste Position, deren Wert verschieden von dem in Position *k* ist und vertausche diese beiden Werte.
– Werden in Iteration *k* weitere Nachbarlösungen benötigt, wähle nach rechts weiter laufend die nächste Position, die obige Eigenschaft hat. Ist das Ende des Strings erreicht, beginne bei Position 1 bis wieder Position *k* erreicht ist.

Verwenden Sie die im Lösungsteil abgedruckte Tabelle und füllen Sie diese vollständig aus.

Copyright © 2016 FernUniversität in Hagen - Alle Rechte vorbehalten

FernUniversität in Hagen

FAKULTÄT FÜR
WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFT

Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre,
insb. Quantitative Methoden und
Wirtschaftsmathematik

Univ.-Prof. Dr. Andreas Kleine

LÖSUNGSBÖGEN

Klausur: **Modul 31801**
Problemlösen in graphischen Strukturen

Termin: **19.09.2016**

Prüfer: **Univ.-Prof. Dr. Andreas Kleine**

Name, Vorname:
Matrikelnummer:

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**				**Summe**
maximale Punktzahl	**20**	**5**	**25**	**25**	**25**				**100**
erreichte Punktzahl									

Gesamtpunktzahl: **Note:**

Datum: Unterschriften der Prüfer:

Copyright © 2016 FernUniversität in Hagen - Alle Rechte vorbehalten

Hinweise für die Bearbeitung

- Füllen Sie zunächst das Deckblatt und den Kopf der Lösungsbögen aus.
- Trennen Sie von den Lösungsbögen keine Blätter ab; am Ende der Klausur müssen alle Lösungsbögen abgegeben werden.
- Die Lösungen müssen in den vorgesehenen Raum auf den Lösungsbögen eingetragen werden. Falls der Platz nicht ausreicht, benutzen Sie bitte die Rückseite, und geben Sie einen deutlichen Hinweis hierauf.
- Bedenken Sie, dass vor allem der Lösungsweg einschließlich Ansatz und Zwischenschritten bewertet wird.
- Die Klausur umfasst 5 Aufgaben, die in 120 Minuten zu bearbeiten sind.
- Zu jeder Aufgabe ist die maximal erreichbare Punktzahl angegeben; die Summe aller Punkte beträgt 100. Die Klausur ist auf jeden Fall bestanden, wenn 50 Punkte erreicht wurden.
- Als Hilfsmittel für diese Klausur sind zugelassen:

  Die Verwendung eines Taschenrechners ist dann und nur dann erlaubt, wenn dieser einer der drei folgenden Modellreihen angehört:
  – Casio fx86 oder Casio fx87,
  – Texas Instruments TI 30 X II,
  – Sharp EL 531.
  Die Verwendung anderer Taschenrechnermodelle wird als Täuschungsversuch gewertet und mit der Note „nicht ausreichend“ (5,0) sanktioniert.

  Ob ein Taschenrechner einer der drei Modellreihen angehört, können Sie selbst überprüfen, indem Sie die vom Hersteller auf dem Rechner angebrachte Modellbezeichnung mit den oben angegebenen Bezeichnungen vergleichen: Bei **vollständiger** Übereinstimmung ist das Modell erlaubt. Ist die auf dem Rechner angebrachte Modellbezeichnung umfangreicher, enthält aber eine der oben angegebenen Bezeichnungen **vollständig**, ist das Modell ebenfalls erlaubt.
  In allen anderen Fällen ist das Modell nicht erlaubt. **Eventuelle Vorgänger- oder Nachfolgemodelle, die nicht in der oben aufgeführten Liste enthalten sind, sind ebenfalls nicht erlaubt.**

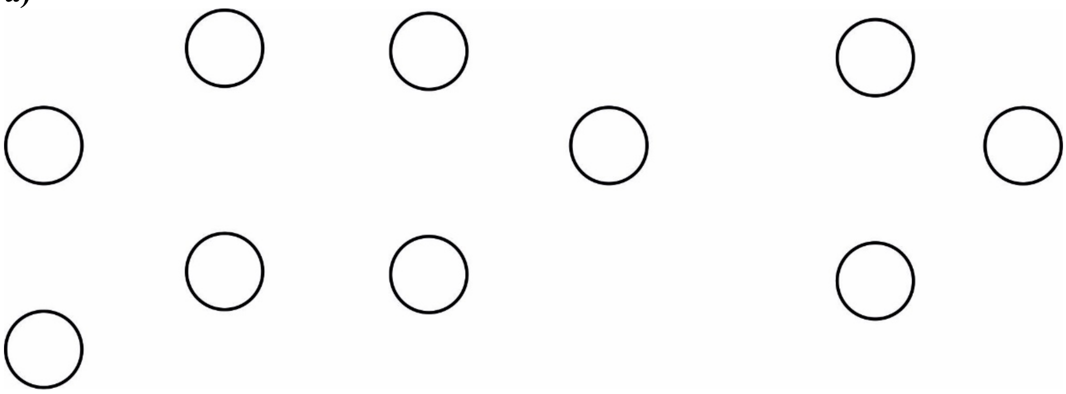
  Darüber hinaus sind ausschließlich die zum Modul gehörenden Kurseinheiten einschließlich der darin enthaltenen Lösungen zu den Übungsaufgaben zugelassen. Die Kurse dürfen Markierungen und textbezogene Anmerkungen enthalten.
- Lesen Sie den Aufgabentext gut durch und nun:

  Viel Erfolg !

Copyright © 2016 FernUniversität in Hagen - Alle Rechte vorbehalten

Lösung zu Aufgabe 1

a)



b)

i)

ii)

iii)

c)

Copyright © 2016 FernUniversität in Hagen - Alle Rechte vorbehalten

Lösung zu Aufgabe 1 (Fortsetzung)

d)

e)

Copyright © 2016 FernUniversität in Hagen - Alle Rechte vorbehalten

Lösung zu Aufgabe 2

Copyright © 2016 FernUniversität in Hagen - Alle Rechte vorbehalten

Lösung zu Aufgabe 3

a)

Für die Eingabedaten gilt: $c_{ij} = 0 \;\; \textit{für } i = j$, $c_{ij} = 1 \;\; \forall e_{ij} \in E$ und $c_{ij} = \infty$ sonst.

Ab jetzt müssen mindestens die Werte in der Hauptdiagonalen, Werte in der ν–ten Zeile und Spalte sowie veränderte Werte eingetragen werden. Die Wegematrizen *Q* sind nicht zu bestimmen.

$D^{(1)} =$

$D^{(2)} =$

$D^{(3)} =$

$D^{(4)} =$

$D^{(5)} =$

$D^{(6)} =$

Copyright © 2016 FernUniversität in Hagen - Alle Rechte vorbehalten

$D^{(7)} =$

$D^{(8)} =$

$D^{(9)} =$

$D^{(10)} =$

b)

Copyright © 2016 FernUniversität in Hagen - Alle Rechte vorbehalten

Lösung zu Aufgabe 4

a)

b)

	$S_{4'}$	$S_{5'}$	$S_{6'}$	$S_{8'}$	$S_{9'}$	u_i	Marken
S_1							
S_2							
S_3							
S_7							
S_{10}							
u_j							
Marken							

η =

Fortsetzung nächste Seite

Copyright © 2016 FernUniversität in Hagen - Alle Rechte vorbehalten

Lösung zu Aufgabe 4 (Fortsetzung)

	$S_{4'}$	$S_{5'}$	$S_{6'}$	$S_{8'}$	$S_{9'}$	u_i	Marken
S_1							
S_2							
S_3							
S_7							
S_{10}							
u_j							
Marken							

$\eta =$

	$S_{4'}$	$S_{5'}$	$S_{6'}$	$S_{8'}$	$S_{9'}$	u_i	Marken
S_1							
S_2							
S_3							
S_7							
S_{10}							
u_j							
Marken							

$\eta =$

	$S_{4'}$	$S_{5'}$	$S_{6'}$	$S_{8'}$	$S_{9'}$	u_i	Marken
S_1							
S_2							
S_3							
S_7							
S_{10}							
u_j							
Marken							

$\eta =$

Es werden nicht zwingend alle Schemata benötigt. Die Anzahl der Tabellen entspricht also nicht unbedingt der Anzahl durchzuführender Iterationen.

Copyright © 2016 FernUniversität in Hagen - Alle Rechte vorbehalten

Lösung zu Aufgabe 5

a)

b)

c)

Aktuelle Lösung	Nachbarlösung	F_{alt}	F_{neu}	Δ	T	$e^{-\Delta/T}$	R	Akzept.
0111010001					10		0,84	
							0,48	
							0,73	
							0,21	
							0,13	
							0,62	

Hinweis: Füllen Sie die obige Tabelle vollständig aus und brechen Sie das Verfahren dann ab! Je nach Reihenfolge der Nachbarlösungen, ist das Optimum eventuell noch nicht erreicht.

Copyright © 2016 FernUniversität in Hagen - Alle Rechte vorbehalten

Zusätzliche Seite 1; Bezug zu den Aufgaben bitte deutlich machen.

Copyright © 2016 FernUniversität in Hagen - Alle Rechte vorbehalten

Zusätzliche Seite 2; Bezug zu den Aufgaben bitte deutlich machen.

Copyright © 2016 FernUniversität in Hagen - Alle Rechte vorbehalten