

AUFGABEN

Klausur: Modul 31801
Problemlösen in graphischen Strukturen

Termin: 22.09.2017

Prüfer: Univ.-Prof. Dr. Andreas Kleine

Aufgabe 1

Erreichbare Punktzahl: 15

Mit einer vorgeschalteten topologischen Sortierung der Knotenmenge V eines Digraphen \vec{G} ist es möglich, Rechenaufwand insgesamt zu reduzieren. Der Digraph muss jedoch gewisse Eigenschaften besitzen, damit eine solche Sortierung überhaupt möglich ist.

- Muss ein Digraph stark zusammenhängend sein, damit er topologisch sortierbar ist? Begründen Sie Ihre Antwort! Falls die Antwort „Nein“ lautet, geben Sie ein Beispiel.
- Muss ein Digraph schwach zusammenhängend sein, damit er topologisch sortierbar ist? Begründen Sie Ihre Antwort! Falls die Antwort „Nein“ lautet, geben Sie ein Beispiel.
- Muss ein Digraph zyklensfrei sein, damit er topologisch sortierbar ist? Begründen Sie Ihre Antwort! Falls die Antwort „Nein“ lautet, geben Sie ein Beispiel.
- Ist ein bipartiter Digraph topologisch sortierbar? Begründen Sie Ihre Antwort! Falls die Antwort „Nein“ lautet, geben Sie ein Beispiel.
- Für den Digraphen in Abbildung 1 soll die Knotenmenge topologisch sortiert werden. Tragen Sie **eine** Nummerierung in die Abbildung 1-L auf Seite 2 des Lösungsteils ein. Wieviele topologisch sortierten Reihenfolgen der Knoten $1, \dots, 8$ sind möglich. Notieren Sie **alle** Reihenfolgen.

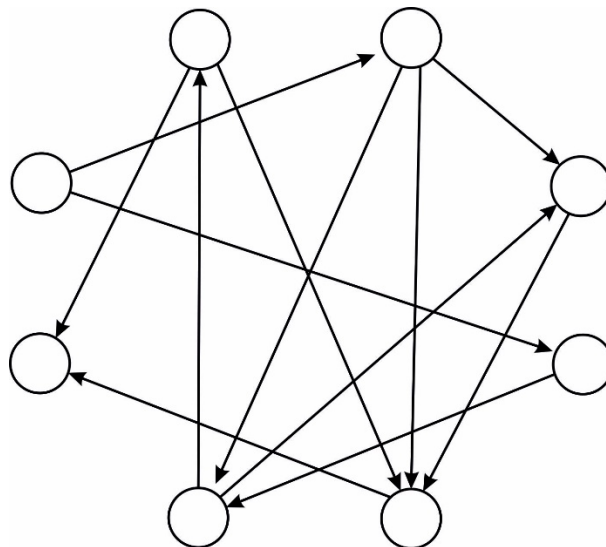


Abbildung 1: Digraph zu Aufgabe 1

Aufgabe 2

Erreichbare Punktzahl: 10

Grundlage für die unten formulierte Aufgabe ist der nachfolgende Algorithmus.

Algorithmus

Eingabedaten:

Gegeben sei ein ungerichteter Baum $T = [V, E; c, b]$
mit Knotenmenge $V = \{1, \dots, n\}$, Kantenmenge E , Kantenbewertung c und
Knotengewichten b , wobei alle Kanten mit 1 bewertet sind ($c_{ij} = 1$ für alle
 $[i, j] \in E$).

Schritt 1:

Wähle einen Knoten mit i mit $\delta(i) = 1$.

Falls $b_i \geq \frac{1}{2} \sum_{j \in V \setminus \{i\}} b_j$, STOP, Knoten ist ermittelt,

andernfalls gehe zu Schritt 2.

Schritt 2:

Setze $b_j := b_j + b_i$ für denjenigen Knoten j , der durch die Kanten $[j, i]$ mit
Knoten i verbunden ist.

Entferne Knoten i aus V ($V := V \setminus \{i\}$) und Kante $[j, i]$ aus E des aktuellen
Baumes und gehe zu Schritt 1.

- a) Was berechnet der obige Algorithmus? Skizzieren Sie einen Graphen mit sechs Knoten, auf den der Algorithmus angewendet werden kann und der alle Eingabedaten enthält. Erläutern Sie daran die Vorgehensweise des Algorithmus und beschreiben Sie den Sachverhalt bei Abbruch. Interpretieren Sie das Ergebnis.
- b) Schätzen Sie den Rechenaufwand für den obigen Algorithmus ab und geben Sie die Zeitkomplexität in der Form $O(f(n))$ an. Wie lautet $f(n)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3

Erreichbare Punktzahl: 35

Die Kanalisation im Hagener Universitätsviertel soll überprüft und gegebenenfalls erweitert werden. Bezogen auf die Durchleitungspunkte 1 bis 9 mit dem zugehörigen Netzwerk in Abbildung 2 wird festgestellt, dass 3 m^3 pro Minute am Messpunkt 1 eingeleitet werden, die sich wie folgt im Netzwerk verteilen (Angaben: $\langle i, j \rangle (\phi_{ij})$): $\langle 1,3 \rangle (3)$; $\langle 3,4 \rangle (3)$; $\langle 4,8 \rangle (5)$; $\langle 6,4 \rangle (2)$; $\langle 8,6 \rangle (2)$; $\langle 8,9 \rangle (3)$; auf allen übrigen Verbindungen ist die Flussstärke gleich Null.

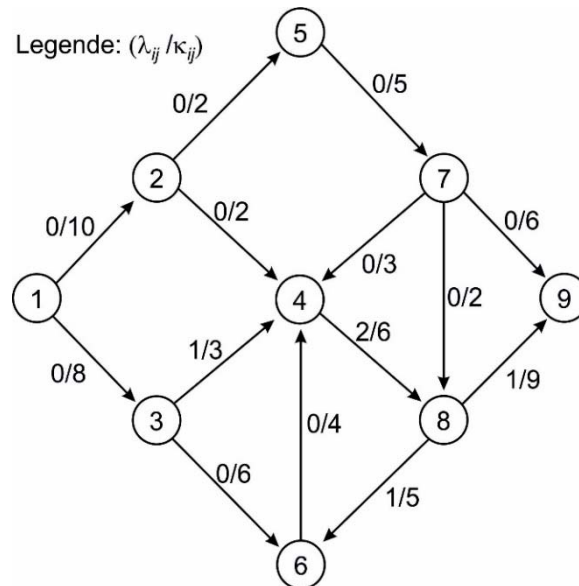


Abbildung 2: Abwassernetzwerk

- Entsprechen die angegebenen Flusswerte einem zulässigen Fluss? Welche Bedingung muss erfüllt sein?
- Kann durch das Abwassernetz auch mehr als 3 m^3 pro Minute von 1 nach 9 durchgeleitet werden? Bestimmen Sie einen maximalen Fluss mit dem Ford & Fulkerson-Algorithmus. Starten Sie den Algorithmus in jedem Fall mit einem zulässigen Fluss der Stärke 3.
- Notieren Sie den minimalen Schnitt nach Abbruch der letzten Iteration in b).
- Durch das Öffnen eines Schiebers wird ein Entlastungskanal geöffnet; über die neue Verbindung $\langle 4, 5 \rangle$ ist jetzt zusätzlich ein Fluss von 4 m^3 Abwasser pro Minute möglich. Kann mit dieser Aktion der Gesamtfluss von 1 nach 9 nochmal vergrößert werden? Bestimmen Sie mit dem Ford & Fulkerson-Algorithmus **ausgehend vom bereits in b) ermittelten** den jetzt maximal möglichen Fluss. Geben Sie am Schluss den resultierenden Fluss auf jedem einzelnen Teilstück an.

Nutzen Sie für die Bearbeitung der Teilaufgaben die auf den Antwortseiten vorgegebenen Schemata.

Aufgabe 4

Erreichbare Punktzahl: 10

Sie sind Schiffseigner und besitzen eine Flotte von Schiffen, mit denen Industriesalz in 20-Fuß-Containern (TEU) von den Häfen 1, 2, 3 in die Überseehäfen 7 und 8 transportiert werden sollen. Es ist allerdings noch eine Umladung der Container in den Häfen 4, 5 und 6 zwingend erforderlich.

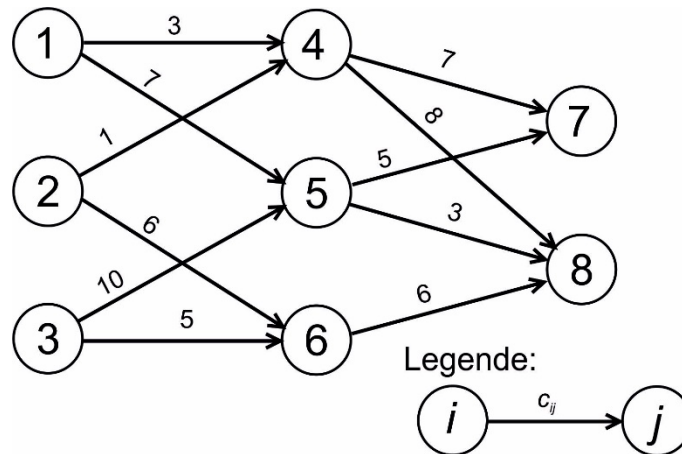


Abbildung 3: Umladenetzwerk

In den Verladepunkten 1, 2 und 3 stehen 100, 50 und 70 TEU bereit; die Nachfrage in den Bedarfsorten 7 bzw. 8 beträgt 80 bzw. 140 TEU. Die Transportkosten c_{ij} zu den möglichen Verbindungen sind in Abbildung 3 an den Pfeilen des Netzwerks angegeben.

- a) Zeichnen Sie zu dem unkapazitierten Umladeproblem den Digraph des äquivalenten einstufigen Transportproblems. Gehen Sie dabei wie folgt vor: Jeder Umladeknoten j ist Nachfrageknoten und zusätzlich als weiterer Knoten j' auf der Angebotsseite darzustellen.
 Sowohl Angebots- als auch Nachfragemenge der Umladeknoten entsprechen dem Gesamtangebot und sind gleich der Gesamtnachfrage.
 Da die tatsächlich umgeladene Menge zunächst nicht bekannt ist, wird jeweils eine (fiktive) Transportverbindung $\langle j', j \rangle$ vom Umladeknoten j' auf Angebotsseite zum Umladeknoten j auf Nachfragerseite eingezeichnet.
- b) Mit der Erweiterung in Teilaufgabe a) besteht das modifizierte Umladeproblem sechs Angebots- und fünf Nachfrageknoten. Tragen Sie in das Transporttableau im Lösungsteil die Mengen und Verbindungskosten ein. Bestimmen Sie mit der Zeilenfolgemethode einen zulässigen Transportplan.

Aufgabe 5

Erreichbare Punktzahl: 30

In Aufgabe 4 wurde ermittelt, wie die Nachfragemengen mit den bestehenden Angebotsmengen befriedigt werden können. Nun gehen von den Überseehäfen 7 und 8 sechs zusätzliche Anfragen {A; B; C; D; E; F} ein, die Sie mit Ihren Schiffen von den Häfen 1, 2, 3 aus ebenfalls bedienen sollen. Sie wissen bereits, dass die notwendigen Schiffe dazu grundsätzlich zur Verfügung stehen, wobei auch zwei Schiffe in einem Hafen Fracht aufnehmen könnten. Einen Engpass stellen jedoch jeweils die Umladehäfen dar, da diese stark belastet sind und dort die Verladung nur jeweils für **maximal ein Schiff** erfolgen kann. Es können deshalb also maximal drei der sechs Nachfragen bedient werden. Sie müssen nun abwägen, von welchen Häfen aus die Belieferung erfolgen soll.

In der nachfolgenden Tabelle 1 ist zu jeder Anfrage der Zielhafen notiert, und es ist bereits der Erlös angegeben, der sich bei einer Realisierung ergeben würde.

Tabelle 1: Anforderungen für Salzlieferungen in die Häfen 7 und 8

Anfrage	Überseehafen	Erlös in [GE]
A	7	21
B	7	18
C	7	15
D	8	25
E	8	20
F	8	14

- a) Notieren Sie in der vorbereiteten Tabelle L-2 im Lösungsteil alle möglichen Routen ausgehend von der Verladung über die Umladung zum Zielhafen.

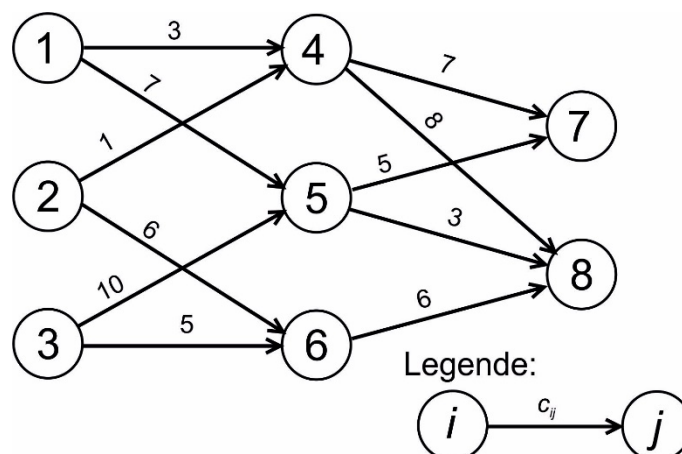


Abbildung 4 (wie 3): Umladenetzwerk

- b) Erst wenn feststeht, welche Zielhäfen angesteuert werden, können (unabhängig von der konkreten Route) die Anfragen mit dem größten Erlös ausgewählt werden.

Von dem somit feststehenden Erlös sind zur Ermittlung des Gewinns die Kosten, die durch die Fahrtzeit bestimmt sind, abzuziehen (Fahrtzeit = Kosten der Fahrt in [GE]).

Als Fahrtzeit werden die Werte c_{ij} in Abbildung 4 verwendet und für jede Route jeweils aufsummiert. Tragen Sie die Kosten der einzelnen Verbindungen ebenfalls in die Tabelle ein.

- c) Da die Umladehäfen den Engpass darstellen, können maximal drei Aufträge bedient, d.h. maximal drei Schiffe auf den Weg gebracht werden. Transportmengen müssen nicht betrachtet werden. Die Auswahl der Routen erfolgt mit Simulated Annealing, wobei jede Dreierkombination mit **unterschiedlichen** Umladehäfen eine zulässige Lösung darstellt.

Eine **benachbarte Lösung** entsteht durch Austausch einer Route mit einer, die denselben Umladehafen ansteuert. (Die Auswahl der Route für Simulated Annealing wird in Teil d) der Aufgabe beschrieben.)

Die **Bewertung** einer Lösung ergibt sich aus der Summe der bestmöglichen Erlöse, die gemäß der Zielhäfen den drei Routen zugeordnet werden. Davon ist die Summe der routenabhängigen Kosten abzuziehen.

Eine Steigerung des Gewinns stellt somit eine Lösungsverbesserung dar.

- c1) Handelt es bei der Auswahl folgender Tripel um zulässige Lösungen? Begründen Sie Ihre Antwort!

T1: {<1-4-8>, <2-6-8>, <3-6-7>}

T2: {<2-5-7>, <2-6-8>, <2-4-8>}

T3: {<3-5-7>, <2-6-8>, <2-4-7>}

- c2) Ermitteln Sie für alle zulässigen Lösungen den möglichen Gewinn.

- d) Im Lösungsteil ist ein Schema vorbereitet, in das die vollständigen Ergebnisse zu fünf Iterationen mit Simulated Annealing eingetragen werden müssen. Die **Ausgangslösung** ist dort bereits vorgegeben. Die Temperatur ergibt sich aus folgendem **Kühlplan**: $T_1 := 10, T_{k+1} = \frac{1}{2} T_k$.

Ebenfalls im Lösungsschema angegeben sind **Umladehäfen**, die bei Bedarf zu verwenden sind. Die Auswahl einer **Nachbarlösung** erfolgt durch Übergang zur nächsten geeigneten Route in der von Ihnen zu Teil a) aufgestellten Tabelle L-2; ist das Ende der Tabelle erreicht, wird wieder bei F1 begonnen.

LÖSUNGSBÖGEN

Klausur: **Modul 31801**
Problemlösen in graphischen Strukturen

Termin: **22.09.2017**

Prüfer: **Univ.-Prof. Dr. Andreas Kleine**

Name, Vorname:
Matrikelnummer:

Aufgabe	1	2	3	4	5				Summe
maximale Punktzahl	15	10	35	10	30				100
erreichte Punktzahl									

Gesamtpunktzahl:

Note:

Datum:

Unterschriften
der Prüfer:

Hinweise für die Bearbeitung

- Füllen Sie zunächst das Deckblatt und den Kopf der Lösungsbögen aus.
 - Trennen Sie von den Lösungsbögen keine Blätter ab; am Ende der Klausur müssen alle Lösungsbögen abgegeben werden.
 - Die Lösungen müssen in den vorgesehenen Raum auf den Lösungsbögen eingetragen werden. Falls der Platz nicht ausreicht, benutzen Sie bitte die Rückseite, und geben Sie einen deutlichen Hinweis hierauf.
 - Bedenken Sie, dass vor allem der Lösungsweg einschließlich Ansatz und Zwischenschritten bewertet wird.
 - Die Klausur umfasst 5 Aufgaben, die in 120 Minuten zu bearbeiten sind.
 - Zu jeder Aufgabe ist die maximal erreichbare Punktzahl angegeben; die Summe aller Punkte beträgt 100. Die Klausur ist auf jeden Fall bestanden, wenn 50 Punkte erreicht wurden.
 - Als Hilfsmittel für diese Klausur sind zugelassen:
Die Verwendung eines Taschenrechners ist dann und nur dann erlaubt, wenn dieser einer der drei folgenden Modellreihen angehört:
 - Casio fx86 oder Casio fx87,
 - Texas Instruments TI 30 X II,
 - Sharp EL 531.Die Verwendung anderer Taschenrechnermodelle wird als Täuschungsversuch gewertet und mit der Note „nicht ausreichend“ (5,0) sanktioniert. Ob ein Taschenrechner einer der drei Modellreihen angehört, können Sie selbst überprüfen, indem Sie die vom Hersteller auf dem Rechner angebrachte Modellbezeichnung mit den oben angegebenen Bezeichnungen vergleichen: Bei **vollständiger** Übereinstimmung ist das Modell erlaubt. Ist die auf dem Rechner angebrachte Modellbezeichnung umfangreicher, enthält aber eine der oben angegebenen Bezeichnungen **vollständig**, ist das Modell ebenfalls erlaubt.
In allen anderen Fällen ist das Modell nicht erlaubt. **Eventuelle Vorgänger- oder Nachfolgemodelle, die nicht in der oben aufgeführten Liste enthalten sind, sind ebenfalls nicht erlaubt.**
- Darüber hinaus sind ausschließlich die zum Modul gehörenden Kurseinheiten einschließlich der darin enthaltenen Lösungen zu den Übungsaufgaben zugelassen. Die Kurse dürfen Unterstreichungen, Markierungen und textbezogene Anmerkungen (z.B. Zwischenschritte oder Nebenrechnungen) enthalten. Auch Griffregister bspw. Klebezettel sind zugelassen und können mit Stichworten versehen werden. Nicht zugelassen sind eingelegte Seiten aller Art.
- Lesen Sie den Aufgabentext gut durch und nun:

Viel Erfolg !



Lösung zu Aufgabe 1

Fortsetzung mit Teil e) auf der nächsten Seite!

Lösung zu Aufgabe 1 (Fortsetzung)

e)

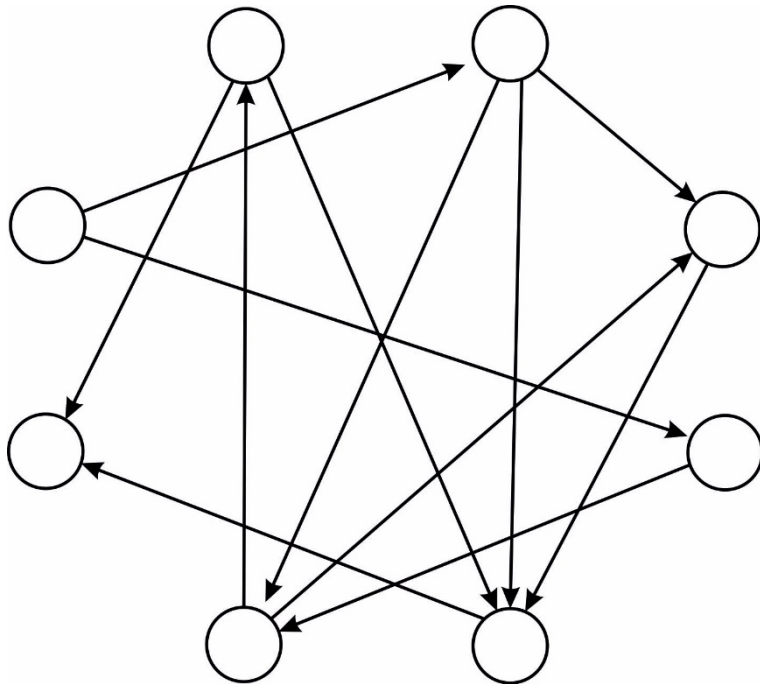


Abbildung 1-L: Digraph zu Aufgabe 1



Lösung zu Aufgabe 2

Lösung zu Aufgabe 3

a)

b) **Tabelle L-1: Anwendung Ford & Fulkerson-Algorithmus**

Iterations- schritt	1	2	3	4	5
Knoten					
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
Flussänderung					
Flussstärke					

Die Anzahl der Spalten muss nicht der Anzahl der Iterationsschritte entsprechen.

Lösung zu Aufgabe 3 (Fortsetzung)

c)

d)

Iterations- schritt	1	2	3
Knoten			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
Flussänderung			
Flussstärke			

Die Anzahl der Spalten muss nicht der Anzahl der Iterationsschritte entsprechen.

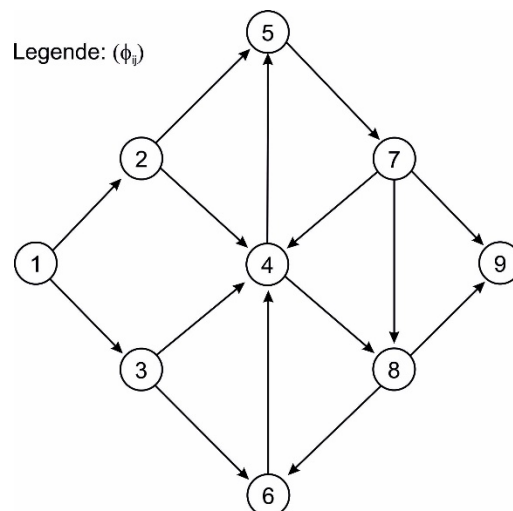


Abbildung 2-L: maximaler Fluss zu Aufgabe 3 d)

Lösung zu Aufgabe 4

a)

b)

Nachfrage j	4		5		6		7		8		
Angebot i	c_{i1}	x_{i1}	c_{i2}	x_{i2}	c_{i3}	x_{i3}	c_{i4}	x_{i4}	c_{i5}	x_{i5}	a_i
1							∞		∞		
2							∞		∞		
3							∞		∞		
4'	0		∞		∞						220
5'	∞		0		∞						220
6'	∞		∞		0						220
b_j		220		220		220					



Lösung zu Aufgabe 4 (Fortsetzung)
--

**Lösung zu Aufgabe 5**

a) + b)

Tabelle L-2

Verbindung	Route	Kosten in [GE]
F1		
F2		
F3		
F4		
F5		
F6		
F7		
F8		
F9		
F10		

Lösung zu Aufgabe 5 (Fortsetzung)

c)

d)

Aktuelle Lösung	Umladeknoten	Nachbarlösung	F _{alt}	F _{neu}	Δ	T	$e^{-\frac{\Delta}{T}}$	R	Akzept.
$\{ \langle 3,5,7 \rangle \langle 2,4,7 \rangle \langle 2,6,8 \rangle \}$	4					10		0,84	
	6							0,48	
	4							0,73	
	5							0,31	
	6							0,00	

Hinweis: Füllen Sie die obige Tabelle vollständig aus und brechen Sie das Verfahren dann ab! Je nach Reihenfolge der Nachbarlösungen, ist das Optimum eventuell noch nicht erreicht.



Zusätzliche Seite 1; Bezug zu den Aufgaben bitte deutlich machen.



Zusätzliche Seite 2; Bezug zu den Aufgaben bitte deutlich machen.