FernUniversität in Hagen

FAKULTÄT FÜR
WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFT

Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre,
insb. Quantitative Methoden und
Wirtschaftsmathematik

Univ.-Prof. Dr. Andreas Kleine

AUFGABEN

Klausur: **Modul 31801**
Problemlösen in graphischen Strukturen

Termin: **24.03.2017**

Prüfer: **Univ.-Prof. Dr. Andreas Kleine**

Einführungstext und Grundlage für alle Aufgaben (1 bis 5)

In einem Versorgungsnetzwerk sollen Übergabepunkte so miteinander verbunden werden, dass sie disjunkte Teilnetze ergeben, die jeweils über einen ausgewählten Übergabeknoten (Einspeisungsknoten) mit dem Lieferanten verbunden sind.

Das Problem besteht nun darin, sowohl die Einspeisungsknotenpunkte als auch die Menge der herzustellenden Verbindungen zu bestimmen.

Folgende Daten sind gegeben:

Der ungerichtete Graph $G = [V, E; c]$ mit $V = \{1,\ldots,11\}$ und den in Abbildung 1 eingezeichneten Kanten stellt das Ausgangsnetzwerk dar, das Grundlage für die weitere Planung ist. Die Kantenbewertung c_{ij} entspricht der Entfernung zwischen den adjazenten Knoten.

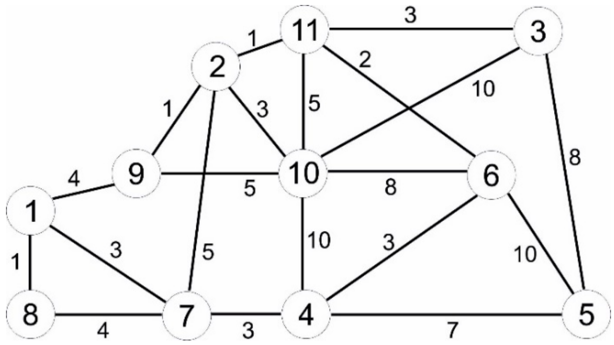


Abbildung 1: $G = [V, E]$, Ausgangsnetzwerk

Es ergeben sich folgende Teilprobleme, die in den Aufgaben 1 bis 5 unabhängig voneinander gelöst werden sollen.

Aufgabe 1: Ermittlung zweier minimaler Gerüste

Aufgabe 2: Auswahl zweier Übergabepunkte auf Basis gegebener Kosten

Aufgabe 3: Berechnung kürzester Verbindungen

Aufgabe 4: Bestimmung von Transportmengen

Aufgabe 5: Zuordnung von Lagerplätzen

Aufgabe 1 **Erreichbare Punktzahl: 15**

Um eine Abschätzung für den Ausbau des Leitungsnetzes zu erhalten, sollen in einem ersten Schritt mit den in Abbildung 1 des Einführungstextes gegebenen Entfernungsdaten Minimalgerüste bestimmt werden. Analog der Anwendung des Algorithmus „Minimalgerüst Prim“ sind ausgehend von **zwei Startknoten parallel** zwei nicht zusammenhängende Gerüste T^1 und T^2 zu ermitteln. Dazu beginnt man den Algorithmus mit $L^1 = \{2\}$ und $L^2 = \{4\}$ und konstruiert zwei Folgen von Bäumen, wobei in jedem Iterationsschritt einem der bisherigen Bäume eine Kante mit kleinstmöglichem Gewicht so hinzugefügt wird, dass sich wieder ein Baum ergibt. Wegen der letzteren Bedingung muss einer der beiden Endknoten der hinzugefügten Kante einem der bisherigen Bäume angehören, während der zweite Endknoten keinem der bisherigen Bäume angehören darf. Das Verfahren bricht ab, sobald die beiden Bäume in der Summe $n - 2$ Kanten besitzen, die alle Knoten in zwei (Minimal-) Gerüsten verbinden.

Aufgabe: Notieren Sie die Reihenfolge, in der die Kanten zu einem der Bäume hinzugenommen werden und zeichnen Sie die beiden entstandenen Gerüste. Verwenden Sie die Schemata im Lösungsteil.

Aufgabe 2 **Erreichbare Punktzahl: 15**

Gegeben sei das im Einführungstext gegebene Versorgungsproblem, das als Warehouse Location Problem interpretiert werden kann. Die Knotenpunkte 1, 2, 3 und 4 kommen generell für die Erweiterung zu Einspeisungsknoten in Betracht, wobei jeweils anteilige Fixkosten für den Fall der Einrichtung zu berücksichtigen sind und entsprechend addiert werden müssen. Die laufenden Durchleitungsentgelte zwischen allen Knoten $V = \{1,\ldots,11\}$ in der Planungsperiode sind in nachfolgender Tabelle 1 zusammengestellt.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	*fix*
1	0	5	19	6	13	9	3	1	4	9	6	10
2	5	0	4	8	12	3	5	9	1	3	1	20
3	19	4	0	15	8	5	9	13	15	10	3	5
4	6	8	15	0	7	3	3	7	15	10	5	15

Tabelle 1: Durchleitungsentgelte in Tsd. € / Planungsperiode

Wie bereits im Einführungstext erläutert, sind in jedem Fall zwei Knoten für die Einspeisung vorgesehen.

Aufgabe: Ermitteln Sie eine Lösung mit Hilfe des Add-Algorithmus. Welche Knoten werden als Einspeisungsknoten zu welchen Kosten eingerichtet? Welche Knoten werden von den jeweiligen Knoten versorgt? Tragen Sie Ihre Ergebnisse in das Schema im Lösungsteil ein; füllen Sie dieses vollständig aus!

Aufgabe 3	**Erreichbare Punktzahl: 25**

Gegeben sei das im Einführungstext gegebene Versorgungsproblem mit dem Netzwerk aus Abbildung 1. Sie haben auf Basis weiterführender Analysen entschieden, dass über die Knoten 1 und 3 die Einspeisung in die jeweiligen Teilnetze erfolgen soll und möchten nun die übrigen Knoten {2,4,5,6,7,8,9,10,11} entweder von 1 aus oder von 3 aus auf möglichst kurzem Weg erreichen.

Aufgabe: Berechnen Sie mit dem Dijkstra-Algorithmus (in einem Durchgang) die kürzesten Wege von Knoten 1 bzw. Knoten 3 aus zu den anderen Knoten so, dass jeder Knoten entweder von 1 oder von 3 aus erreicht wird.

Starten Sie dazu den Kürzeste Wege Algorithmus 3.3 (aus dem Kurs) mit der Knotenmenge $L = \{1, 3\}$ und verfahren Sie weiter wie im Kurs beschrieben.

Tragen Sie Ihre Ergebnisse in das Schema im Lösungsteil ein; füllen Sie dieses vollständig aus! Notieren Sie die kürzesten Wege!

Aufgabe 4	**Erreichbare Punktzahl: 20**

Gehen Sie nun davon aus, dass es sich bei allen vier Knoten 1, 2, 3, 4 um Anbieter und bei den Knoten 5 bis 11 um Nachfrager handelt. Nur die direkten Verbindungen zwischen Anbieter und Nachfrager können auf Basis der aus dem Einführungstext bekannten Entfernungsangaben als Verbindungskosten genutzt werden. Zur Verdeutlichung sei das reduzierte Netzwerk $\vec{G}'$ nachfolgend nochmals angegeben.

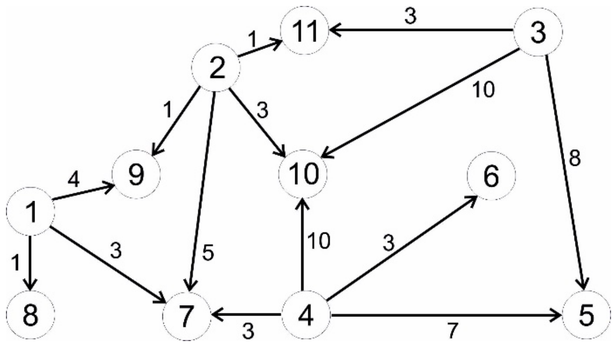


Abbildung 2: $\vec{G}' = [V, E']$, Anbieter- / Nachfragernetzwerk

Die in Tabelle 2 notierten Mengen werden angeboten bzw. nachgefragt.

Knoten	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Mengen	25	25	25	25	20	5	30	5	10	20	10

Tabelle 2: Angebots- / Nachfragemengen in Mio. kWh

Aufgabe

a) Welche beiden Nachfrager können bei der algorithmischen Bestimmung von Transportmengen außer Betracht gelassen werden? Begründen Sie Ihre Antwort und nennen Sie die sich ergebenden Konsequenzen!

b) Notieren Sie in dem im Lösungsteil vorgegebenen Schema die Ausgangsdaten für das gemäß Teil a) der Aufgabe reduzierte Transportproblem. Tragen Sie für nicht existierende Verbindungen Kosten in Höhe von 20 GE ein.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Vogel-Approximation einen zulässigen Transportplan. Kennzeichnen Sie im Verlauf des Verfahrens die Auswahl der Differenzen und die Reihenfolge der realisierten Transporte.

d) Wie lautet der sich ergebende Transportplan?
Wie hoch sind die Transportkosten?

e) Zeichnen Sie den sich aus Ihrer Lösung ergebenden Basisbaum.

Aufgabe 5	**Erreichbare Punktzahl: 25**

Die Knotenpunkte in dem in Abbildung 1 im Einführungstext vorgestellten Graphen G sollen für die Lagerung von Chemikalien genutzt werden, wobei die Chemikalien den drei Klassen **A**, **B**, **C** zugeordnet sind. An benachbarten Lagerplätzen, d.h. Knoten die im Graphen direkt verbunden sind, dürfen keine Chemikalien gelagert werden, die derselben Klasse angehören. Es ist zu prüfen, ob für G eine konfliktfreie Lagerung möglich ist.

Das Problem kann als Färbungsproblem interpretiert werden, wobei eine Zuordnung der Klassen zu den Knoten 1 bis 11 als Zeichenkette der Länge 11 kodiert wird. Dies entspricht dann einer nicht notwendigerweise zulässigen Lösung des oben beschriebenen Problems.

Aufgabe

a) Ist die Lösung x_0 = (**A B C A B C A B C A B**) zulässig im Hinblick auf die beschriebene Problemstellung? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Wie kann eine Lösung x_k bewertet werden, so dass eine Minimierung zur Zulässigkeit führt? Geben Sie für x_0 aus Teil a) der Aufgabe den Wert an.

c) Sie erinnern sich, dass Tabu Search für die Lösung des Färbungsproblems ein geeignetes Verfahren sein könnte, und definieren einen *move* für eine Position i in der Lösung x_k als Wechsel der Klasse in x_k^i zur nächsten (**A**→**B**→**C**→**A**).
Notieren Sie den Nachbarn für x_0 und Position 4. Tragen Sie diese Lösung x_1 in das Schema im Lösungsteil ein und bewerten Sie die Zuordnung gemäß der in b) gewählten Funktion.

d) Bezeichne die Eigenschaftsmenge $F = \{F_1, F_2, ..., F_{11}\}$ die „Farbe“ der Knoten {1,…,11}. Notieren Sie sowohl den Attributen-Vektor *from*(x_0, x_1) als auch den Vektor *to*(x_0, x_1) mit x_0 aus Teil a) und x_1 aus Teil c).

e) Führen Sie Tabu-Search unter Verwendung des *to*-Attributs durch. Die Position zur Erzeugung des Nachbarn ist jeweils angegeben. Sollte die erzeugte Lösung tabu sein, behalten Sie die aktuelle Lösung bei und gehen Sie zur nächsten Zeile. Die Tabu-Liste habe die maximale Länge von **vier**. Füllen Sie die im Lösungsteil vorgegebene Tabelle vollständig aus; machen Sie in jeder Zeile die folgenden Angaben:

k	Position	x_k	$f(x_k)$	x_{k+1}	*tabu?*	$f(x_{k+1})$	to-Attribut

FernUniversität in Hagen

FAKULTÄT FÜR
WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFT

Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre,
insb. Quantitative Methoden und
Wirtschaftsmathematik

Univ.-Prof. Dr. Andreas Kleine

LÖSUNGSBÖGEN

Klausur: **Modul 31801**
Problemlösen in graphischen Strukturen

Termin: **24.03.2017**

Prüfer: **Univ.-Prof. Dr. Andreas Kleine**

Name, Vorname:
Matrikelnummer:

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**				**Summe**
maximale Punktzahl	**15**	**15**	**25**	**20**	**25**				**100**
erreichte Punktzahl									

Gesamtpunktzahl: **Note:**

Datum: Unterschriften der Prüfer:

Hinweise für die Bearbeitung

- Füllen Sie zunächst das Deckblatt und den Kopf der Lösungsbögen aus.
- Trennen Sie von den Lösungsbögen keine Blätter ab; am Ende der Klausur müssen alle Lösungsbögen abgegeben werden.
- Die Lösungen müssen in den vorgesehenen Raum auf den Lösungsbögen eingetragen werden. Falls der Platz nicht ausreicht, benutzen Sie bitte die Rückseite, und geben Sie einen deutlichen Hinweis hierauf.
- Bedenken Sie, dass vor allem der Lösungsweg einschließlich Ansatz und Zwischenschritten bewertet wird.
- Die Klausur umfasst 5 Aufgaben, die in 120 Minuten zu bearbeiten sind.
- Zu jeder Aufgabe ist die maximal erreichbare Punktzahl angegeben; die Summe aller Punkte beträgt 100. Die Klausur ist auf jeden Fall bestanden, wenn 50 Punkte erreicht wurden.
- Als Hilfsmittel für diese Klausur sind zugelassen:

  Die Verwendung eines Taschenrechners ist dann und nur dann erlaubt, wenn dieser einer der drei folgenden Modellreihen angehört:
  – Casio fx86 oder Casio fx87,
  – Texas Instruments TI 30 X II,
  – Sharp EL 531.
  Die Verwendung anderer Taschenrechnermodelle wird als Täuschungsversuch gewertet und mit der Note „nicht ausreichend“ (5,0) sanktioniert.

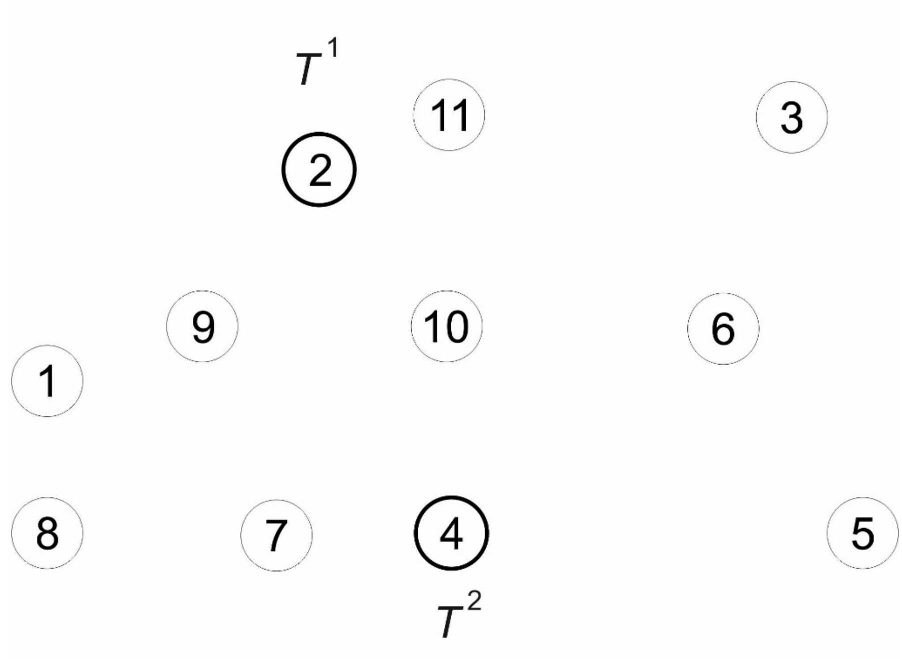
  Ob ein Taschenrechner einer der drei Modellreihen angehört, können Sie selbst überprüfen, indem Sie die vom Hersteller auf dem Rechner angebrachte Modellbezeichnung mit den oben angegebenen Bezeichnungen vergleichen: Bei **vollständiger** Übereinstimmung ist das Modell erlaubt. Ist die auf dem Rechner angebrachte Modellbezeichnung umfangreicher, enthält aber eine der oben angegebenen Bezeichnungen **vollständig**, ist das Modell ebenfalls erlaubt.
  In allen anderen Fällen ist das Modell nicht erlaubt. **Eventuelle Vorgänger- oder Nachfolgemodelle, die nicht in der oben aufgeführten Liste enthalten sind, sind ebenfalls nicht erlaubt.**

  Darüber hinaus sind ausschließlich die zum Modul gehörenden Kurseinheiten einschließlich der darin enthaltenen Lösungen zu den Übungsaufgaben zugelassen. Die Kurse dürfen Markierungen und textbezogene Anmerkungen enthalten.
- Lesen Sie den Aufgabentext gut durch und nun:

  Viel Erfolg !

Lösung zu Aufgabe 1

Aufgabe: Notieren Sie die Reihenfolge, in der die Kanten zu einem der Bäume hinzugenommen werden und zeichnen Sie die beiden entstandenen Gerüste. Verwenden Sie die nachfolgenden Schemata.



Reihenfolge, in der die Kanten hinzugefügt werden:

Lfd. Nr.	Kante $[i, j]$	Bewertung	Baum T^1/T^2?
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			

Lösung zu Aufgabe 2

Aufgabe: Ermitteln Sie eine Lösung mit Hilfe des Add-Algorithmus. Welche Knoten werden als Einspeisungsknoten zu welchen Kosten eingerichtet? Welche Knoten werden von den jeweiligen Knoten versorgt?
Tragen Sie Ihre Ergebnisse in das Schema im Lösungsteil ein; füllen Sie dieses vollständig aus!

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**fix**	σ_i	η_i
1	0	5	19	6	13	9	3	1	4	9	6	10		
2	5	0	4	8	12	3	5	9	1	3	1	20		
3	19	4	0	15	8	5	9	13	15	10	3	5		
4	6	8	15	0	7	3	3	7	15	10	5	15		
δ_j^1														
ν_j^1														
δ_j^2														
ν_j^2														

Einspeisungsknoten?

zugeordnete Knoten?

Kosten / Periode?

Lösung zu Aufgabe 3

Aufgabe: Berechnen Sie mit dem Dijkstra-Algorithmus (in einem Durchgang) die kürzesten Wege von *Knoten 1 bzw. Knoten 3* aus zu den anderen Knoten so, dass jeder Knoten entweder von 1 oder von 3 aus erreicht wird. Starten Sie dazu den Kürzeste Wege Algorithmus 3.3 (aus dem Kurs) mit der Knotenmenge $L = \{1, 3\}$ und verfahren Sie weiter wie im Kurs beschrieben.
Tragen Sie Ihre Ergebnisse in das nachfolgende Schema ein; füllen Sie dieses vollständig aus! Notieren Sie die kürzesten Wege!

Iteration	1		2		3		4		5	
Knoten j	d_j	q_j	d_j	q_j	d_j	q_j	d_j	q_j	d_j	q_j
1	**0**	**-**								
2										
3	**0**	**-**								
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										
11										
L	**{1, 3}**									
M										

Fortsetzung nächste Seite!

Lösung zu Aufgabe 3 (Fortsetzung)

Iteration	6		7		8		9		10	
Knoten j	d_j	q_j	d_j	q_j	d_j	q_j	d_j	q_j	d_j	q_j
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										
11										
L										
M										

Kürzeste Wege

Von Knoten 1 bzw. 3 zu Knoten
2:
4:
5:
6:
7:
8:
9:
10:
11:

Lösung zu Aufgabe 4

Aufgabe

a) Welche beiden Nachfrager können bei der algorithmischen Bestimmung von Transportmengen außer Betracht gelassen werden? Begründen Sie Ihre Antwort und nennen Sie die sich ergebenden Konsequenzen!

b) Notieren Sie in dem vorgegebenen Schema die Ausgangsdaten für das gemäß Teil a) der Aufgabe reduzierte Transportproblem. Tragen Sie für nicht existierende Verbindungen Kosten in Höhe von 20 GE ein.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Vogel-Approximation einen zulässigen Transportplan. Kennzeichnen Sie im Verlauf des Verfahrens die Auswahl der Differenzen und die Reihenfolge der realisierten Transporte.

d) Wie lautet der sich ergebende Transportplan?
Wie hoch sind die Transportkosten?

e) Zeichnen Sie den sich aus Ihrer Lösung ergebenden Basisbaum.

a)

Lösung zu Aufgabe 4 (Fortsetzung)

b) + c)

c_{ij}	**Nachfrage-knoten**						
Angebots-knoten	**Mengen** a_i / b_j						Δc
1							
2							
3							
4							
Δc							

Streich-
reihenfolge

d)

Transportplan

X_{ij}						Angebot
1						
2						
3						
4						
Nachfrage						

Transportkosten

Lösung zu Aufgabe 4 (Fortsetzung)

e)

Lösung zu Aufgabe 5

Aufgabe

a) Ist die Lösung x_0 = (**A B C A B C A B C A B**) zulässig im Hinblick auf die beschriebene Problemstellung? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Wie kann eine Lösung x_k bewertet werden, so dass eine Minimierung zur Zulässigkeit führt? Geben Sie für x_0 aus Teil a) der Aufgabe den Wert an.

c) Sie erinnern sich, dass Tabu Search für die Lösung des Färbungsproblems ein geeignetes Verfahren sein könnte, und definieren einen *move* für eine Position *i* in der Lösung x_k als Wechsel der Klasse in x_k^i zur nächsten (**A**→**B**→**C**→**A**).
Notieren Sie den Nachbarn für x_0 und Position 4. Tragen Sie diese Lösung x_1 in das Schema im Lösungsteil ein und bewerten Sie die Zuordnung gemäß der in b) gewählten Funktion.

d) Bezeichne die Eigenschaftsmenge $F = \{F_1, F_2, ..., F_{11}\}$ die „Farbe" der Knoten {1,…,11}. Notieren Sie sowohl den Attributen-Vektor *from*(x_0, x_1) als auch den Vektor *to*(x_0, x_1) mit x_0 aus Teil a) und x_1 aus Teil c).

e) Führen Sie Tabu-Search unter Verwendung des *to*-Attributs durch. Die Position zur Erzeugung des Nachbarn ist jeweils angegeben. Sollte die erzeugte Lösung tabu sein, behalten Sie die aktuelle Lösung bei und gehen Sie zur nächsten Zeile. Die Tabu-Liste habe die maximale Länge von **vier**.

Lösung zu Aufgabe 5 (Fortsetzung)

e) Füllen Sie die nachfolgende Tabelle vollständig aus!

k	Pos.	x_k	$f(x_k)$	x_{k+1}	tabu?	$f(x_{k+1})$	to-Attribut
0	4	x_0 = (**ABCABCABCAB**)					
1	11						
	6						
	4						
	3						
	1						
	4						

Zusätzliche Seite 1; Bezug zu den Aufgaben bitte deutlich machen.

Zusätzliche Seite 2; Bezug zu den Aufgaben bitte deutlich machen.