FernUniversität in Hagen

FAKULTÄT FÜR
WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFT

Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre,
insb. Quantitative Methoden
und Wirtschaftsmathematik

Univ.-Prof. Dr. Andreas Kleine

AUFGABENTEIL

Klausur:	**Modul 32621 Optimierungsmethoden des Operations Research**
Termin:	**19.09.2016**
Prüfer:	**Prof. Dr. Andreas Kleine**

Aufgabe 1	**20 Punkte**

Gegeben sei das folgende lineare Programm (LOP):

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \max & x_0 = & 8x_1 & + & 12x_2 & & \\ \text{u.d.N.} & & 2x_1 & + & 2x_2 & = & 12 \\ & & 2x_1 & + & 4x_2 & = & 18 \\ & & & x_1, & x_2 & \geqq & 0 \end{array}$$

a) Stellen Sie das zugehörige duale LOP auf.

b) Lösen Sie das **duale** LOP unter Berücksichtigung der zusätzlichen Nichtnegativitätsbedingungen graphisch. Geben Sie eine optimale Lösung sowie den Zielfunktionswert hierzu an.

c) Bestimmen Sie mit der Zweiphasen-Simplex-Methode eine optimale Lösung für das **primale** LOP, sofern eine solche existiert.

Aufgabe 2	**35 Punkte**

Ein Unternehmen produziert drei Sorten von Gold-Legierungen: Gelbgold 14 Karat (E_1), Gelbgold 18 Karat (E_2) sowie Gelbgold 22 Karat (E_3). Dazu stehen dem Unternehmen täglich 2015 Gramm Reingold (R_1), 420 Gramm Silber (R_2) sowie 750 Gramm Kupfer (R_3) zur Verfügung. Für die Herstellung von 100 Gramm des 14 Karat Goldes werden 58 Gramm Reingold, 15 Gramm Silber und 27 Gramm Kupfer benötigt. Um 100 Gramm des 18 Karat Goldes zu produzieren, werden 75 Gramm Reingold, 10 Gramm Silber sowie 15 Gramm Kupfer gebraucht. Für die Produktion von 100 Gramm 22 Karat Gold sind 92 Gramm Reingold sowie je 4 Gramm von Silber und Kupfer notwendig. Sonstige Bestandteile der Legierungen sind außer Acht zu lassen. Aufgrund der aktuellen Marktlage können von den Goldlegierungen maximal 1500 Gramm in 14 Karat, 3000 Gramm in 18 Karat und 1000 Gramm in 22 Karat täglich abgesetzt werden. Der Stückdeckungsbeitrag für die einzelnen Erzeugnisse beträgt je 100 Gramm für E_1 2300 €, für E_2 2950 € und für E_3 4000 €.

a) Stellen Sie das entsprechende mathematische Modell zur Bestimmung eines Produktionsplans mit maximalem Deckungsbeitrag auf.

Hinweis: Verwenden Sie hierzu die Variable x_i, wobei x_i die herzustellende Menge des Erzeugnisses E_i in 100 Gramm angibt ($i = 1, 2, 3$). Achten Sie dabei auf die Dimensionen in den Angaben!

b) Ergänzen Sie das Modell aus Aufgabenteil *a*) um notwendige Schlupfvariable und stellen Sie ein Anfangstableau für die Berechnung der optimalen Lösung mittels Simplexalgorithmus auf. Markieren Sie das Pivot-Element.

Hinweis: Bezeichnen Sie dabei die Schlupfvariable der Rohstoffrestriktion R_i mit s_i ($i = 1, 2, 3$) und die weiteren notwendigen Schlupfvariablen mit s_i ($i \geqq 4$).

c) Gegeben sei das auf Seite 13 der Lösungsbögen dargestellte optimale Simplex-Tableau.

c1) Geben Sie die optimale Lösung sowie den zugehörigen Zielfunktionswert an und interpretieren Sie diese Größen ökonomisch. Beachten Sie dabei wieder den Hinweis in Aufgabenteil *a*) und *b*) bzgl. der Variablen.

c2) Geben Sie die Inverse der optimalen Basis $\mathbf{B}^{-1}$ an.

c3) Durch eine gestiegene Rohstoffnachfrage nach Reingold schwankt die täglich zur Verfügung stehende Menge Kupfer zwischen 1800 und 2230 Gramm. Geben Sie den Bereich an, in dem die zur Verfügung stehende Menge von Kupfer variieren darf, ohne dass die gefundene Lösung Ihre Zulässigkeit verliert. Führen Sie eine entsprechende Sensitivitätsanalyse durch und interpretieren Sie das Ergebnis ökonomisch. Wird die bereits gefundene optimale Lösung in diesem Fall ihre Zulässigkeit behalten?

c4) Führen Sie eine Sensitivitätsanalyse für den Fall der gleichzeitigen Variation aller drei Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 durch und geben Sie die Bereiche an, in denen die jeweils zur Verfügung stehenden Mengen gleichzeitig variieren dürfen, ohne dass die gefundene Lösung Ihre Zulässigkeit verliert.

Hinweis: Es gilt somit $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$!

d) Aufgrund eines Wechsels in der Unternehmensleitung wird die Zielsetzung bei der Herstellung von Gold-Legierungen von der Deckungsbeitragsmaximierung in eine Gewinnmaximierung geändert. Das Controlling hat hierzu berechnet, dass sich die Fixkosten in diesem Segment täglich auf 23.350 € belaufen.

d1) Stellen Sie die Zielfunktion formal dar, die sich durch die Änderung der Unternehmensphilosophie ergibt. Beachten Sie dabei wieder den Hinweis in Aufgabenteil *a*) bzgl. der Variablen.

d2) Wie wirkt sich diese Änderung auf die Zielfunktionszeile des Anfangstableaus aus Aufgabenteil *b)* aus?

d3) Geben Sie den maximalen Gewinn im Optimum an. Hierzu ist keine weitere Optimierungsaufgabe zu lösen!

Aufgabe 3	**15 Punkte**

Zu einem Überdeckungsproblem seien die folgende Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie der Kostenvektor $\mathbf{c}^\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & 5 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Formulieren Sie das mathematische Optimierungsmodell für das (unreduzierte) Problem.

b) Reduzieren Sie die Matrix $\mathbf{A}$ mit Hilfe der Reduktionsregeln soweit wie möglich. Notieren Sie jeden einzelnen Schritt mit der dort angewandten Regel sowie die aufgrund dieser Regel gestrichenen Spalten/Zeilen. Die in der jeweiligen Regel erwähnten Indizes wie beispielsweise i, j, i^* sind unbedingt anzugeben. Geben Sie die gefundene Lösung an.

c) Angenommen, es handelt sich um ein Problem der Tourenplanung. Erläutern Sie kurz die Variablen, die Zielfunktion, die Restriktionen und die optimale Lösung vor dem Hintergrund dieser konkreten Problemstellung.

Aufgabe 4 **20 Punkte**

Gegeben sei das Programm:

$$\begin{array}{lrl}
\max & x_0 = 2x_1 + x_2 + 3x_3 & \\
\text{u.d.N.} & x_1 - 3x_2 + 4x_3 & \leqq 11 \\
& 3x_1 + x_2 + x_3 & \leqq 4 \\
& x_i \geqq 0 & \text{ganzzahlig } (i = 1, 2, 3)
\end{array}$$

Lösen Sie die rein-ganzzahlige Optimierungsaufgabe mit dem ersten Gomoryverfahren, indem Sie wie folgt vorgehen:

a) Lösen Sie zuerst das relaxierte Problem mit dem Simplexalgorithmus.

b) Leiten Sie aus der ersten Restriktionszeile des Ergebnistableaus die Schnittebenenrestriktion ab und schreiben Sie diese formal auf.

c) Berechnen Sie die optimale Lösung unter Beachtung der Ganzzahligkeit und geben Sie diese an.

Aufgabe 5 **10 Punkte**

Gegeben sei folgendes lineares Vektormaximierungsproblem (LVMP):

$$\max z(x) = \begin{pmatrix} 21 & 28 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$u.d.N$$

$$\begin{array}{rcrcl}
3x_1 & + & 4x_2 & \leqq & 96 \\
x_1 & + & x_2 & \leqq & 28 \\
3x_1 & + & 4x_2 & \geqq & 48 \\
& & x_1 & \geqq & 4 \\
& & x_2 & \geqq & 0
\end{array}$$

a) Stellen Sie die Lösungsmenge von LVMP graphisch dar. Markieren Sie die Menge aller zulässigen Lösungen.

b) Bestimmen Sie in der Grafik für jedes der zwei Ziele die individuell optimalen Lösungen.

c) Gibt es im vorliegen LVMP eine perfekte Lösung? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie eine perfekte Lösung an, falls diese existiert!

Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre,
insb. Quantitative Methoden
und Wirtschaftsmathematik

Univ.-Prof. Dr. Andreas Kleine

LÖSUNGSBÖGEN

Klausur: **Modul 32621**
Optimierungsmethoden des Operations Research

Termin: **19.09.2016**

Prüfer: **Prof. Dr. Andreas Kleine**

Name, Vorname:
Matrikelnummer:

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**				**Summe**
maximale Punktzahl	20	35	15	20	10				100
erreichte Punktzahl									

Gesamtpunktzahl:

Note:

Datum:

Unterschriften
der Prüfer:

Hinweise zur Bearbeitung der Modulklausur 32621

1. Tragen Sie zunächst sowohl auf das Deckblatt als auch auf das Deckblatt der Lösungsbogen Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein!

2. Benutzen Sie für Ihre Rechnungen nur die beigefügten Lösungsbogen und tragen Sie dort Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein. Trennen Sie von den Lösungsbögen keine Blätter ab; am Ende der Klausur müssen alle Lösungsbögen abgegeben werden. Die Lösungen müssen in den dafür vorgesehenen Raum auf den Lösungsbögen eingetragen werden. Falls der Platz nicht ausreicht, benutzen Sie bitte die Rückseiten oder die freien Blätter am Ende und geben Sie einen deutlichen Hinweis auf die Aufgabenzugehörigkeit. Bedenken Sie bitte bei der Anfertigung Ihrer Lösungen, dass vor allem der Lösungsweg einschließlich Ansatz und Zwischenschritten bewertet wird. Bei einem mehrfach bearbeiteten Aufgabenteil wird lediglich die erste Lösung bewertet. Nicht zu korrigierende Lösungsteile sind zu entwerten.

3. Die Klausur umfasst 5 Aufgaben, die in 120 Minuten zu bearbeiten sind.

4. Zu jeder Aufgabe ist die maximal erreichbare Punktzahl angegeben; die Summe aller Punkte beträgt 100. Die Klausur ist auf jeden Fall bestanden, wenn 50 Punkte erreicht wurden. **Bitte kontrollieren Sie sofort, ob Sie ein vollständiges Klausurexemplar erhalten haben**.

5. Die Verwendung eines Taschenrechners ist – sofern überhaupt ein Taschenrechner als Hilfsmittel in einer Klausur zugelassen ist – dann und nur dann erlaubt, wenn dieser einer der folgenden Modellreihen angehört:

   - Casio fx86 oder Casio fx87,
   - Texas Instruments TI 30 X II,
   - Sharp EL 531.

   Die Verwendung anderer Taschenrechnermodelle wird als Täuschungsversuch gewertet und mit der Note „nicht ausreichend“ (5,0) sanktioniert. Ob ein Taschenrechner einer der drei Modellreihen angehört, können Studierende selbst überprüfen, indem sie die vom Hersteller auf dem Rechner angebrachte Modellbezeichnung mit den oben angegebenen Bezeichnungen vergleichen: Bei **vollständiger** Übereinstimmung ist das Modell erlaubt. Ist die auf dem Rechner angebrachte Modellbezeichnung umfangreicher, enthält aber eine der oben angegebenen Bezeichnungen **vollständig**, ist das Modell ebenfalls erlaubt. In allen anderen Fällen ist das Modell nicht erlaubt. **Eventuelle**

Vorgänger- oder Nachfolgemodelle, die nicht in der oben aufgeführten Liste enthalten sind, sind ebenfalls nicht erlaubt.

6. Darüber hinaus sind ausschließlich die zum Modul gehörenden Kurseinheiten einschließlich der darin enthaltenen Lösungen zu den Übungsaufgaben zugelassen. Die Kurse dürfen Markierungen und textbezogene Anmerkungen enthalten.

7. Vergessen Sie nicht, die Klausuren auf der letzten bearbeiteten Seite zu **unterschreiben**.

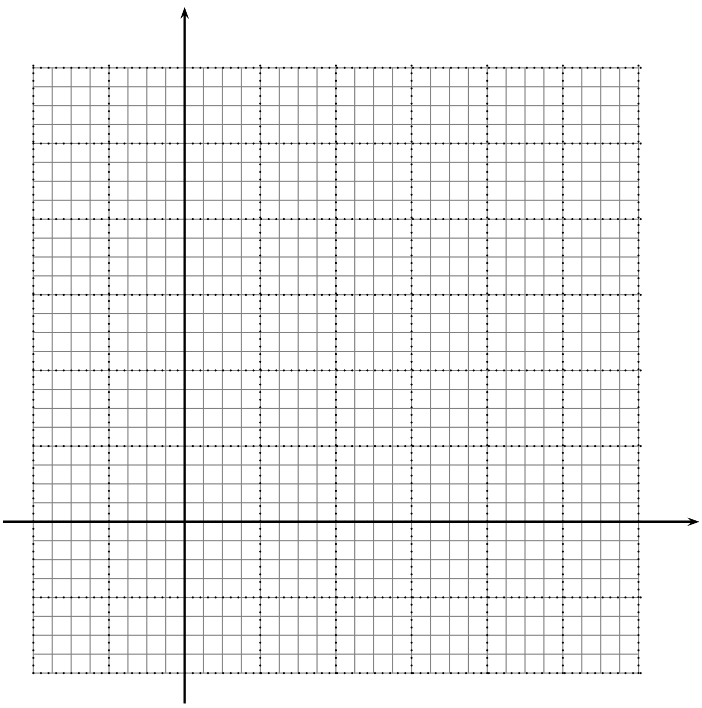
8. Lesen Sie den Aufgabentext gut durch und nun:

Viel Erfolg!

✎ Aufgabe **1** Matr.-Nr.: ______________________________

a)

b)



Punkte

✎ Aufgabe **1** Matr.-Nr.: ______________________________

c)

Punkte

✎ Aufgabe **2** Matr.-Nr.: ______________________________

a)

b)

Punkte

✎ Aufgabe **2** Matr.-Nr.: ______________________________

c)

x_0	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	b
1	0	0	0	$\frac{118}{3}$	0	0	$\frac{56}{3}$	0	$\frac{1144}{3}$	83350
0	0	1	0	$\frac{1}{75}$	0	0	$-\frac{58}{75}$	0	$-\frac{92}{75}$	3
0	0	0	0	$-\frac{2}{15}$	1	0	$-\frac{109}{15}$	0	$\frac{124}{15}$	125
0	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	1	$-\frac{77}{5}$	0	$\frac{72}{5}$	260
0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	15
0	0	0	0	$-\frac{1}{75}$	0	0	$\frac{58}{75}$	1	$\frac{92}{75}$	27
0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	10

c1)

c2)

Punkte

✎ Aufgabe **2** Matr.-Nr.: ______________________________

c3)

c4)

Punkte

✎ Aufgabe **2** Matr.-Nr.: ______________________________

d1)

d2)

d3)

Punkte

✎ Aufgabe **3** Matr.-Nr.: ______________________________

a)

b)

Punkte

✎ Aufgabe **3** Matr.-Nr.: ______________________________

c)

Punkte

✎ Aufgabe **4** Matr.-Nr.: ______________________________

a)

Punkte

✎ Aufgabe **4** Matr.-Nr.: ______________________________

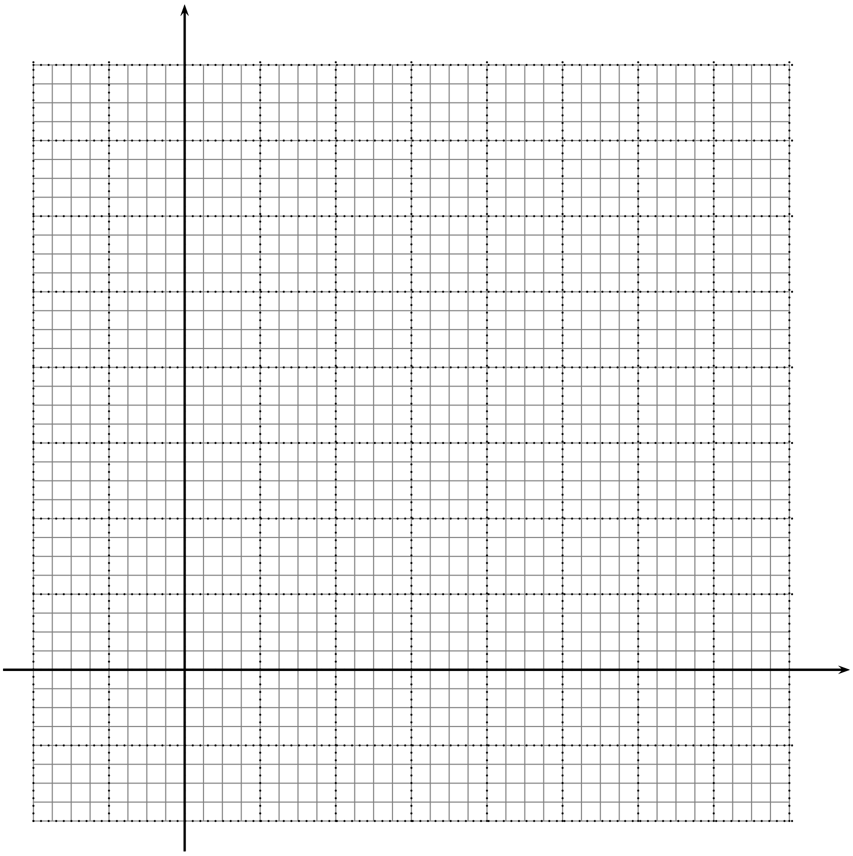
b)

c)

Punkte

✎ Aufgabe **5** Matr.-Nr.: ______________________________

a)



b)

c)

Punkte

✎ Aufgabe ___ Matr.-Nr.: ______________________________

Punkte

✎ Aufgabe ___ Matr.-Nr.: ______________________________

Punkte

✎ Aufgabe ___ Matr.-Nr.: ________________________________

Punkte

✎ Aufgabe ___ Matr.-Nr.: ______________________________

Punkte

✎ Aufgabe ___ Matr.-Nr.: ______________________________

Punkte