AUFGABENTEIL

Klausur: **Modul 32621**
Optimierungsmethoden des Operations Research

Termin: **21.09.2017**

Prüfer: **Prof. Dr. Andreas Kleine**

Aufgabe 1 **20 Punkte**

Gegeben ist das folgende lineare Programm (LOP):

$$\begin{array}{rrrrrrr} \max & x_0 = & -12x_1 & - & 4x_2 & & \\ \text{u.d.N.} & & -2x_1 & - & 4x_2 & \leqq & -8 \\ & & -3x_1 & + & 4x_2 & \leqq & -2 \\ & & & x_1, & x_2 & \geqq & 0 \end{array}$$

a) Stellen Sie das zugehörige duales LOP auf.

b) Lösen Sie das **duale** LOP aus Aufgabenteil *a*) graphisch. Geben Sie eine optimale Lösung sowie den zugehörigen Zielfunktionswert an.

c) Bestimmen Sie mittels der dualen Simplex-Methode eine optimale Lösung für das **primale** LOP. Geben Sie Ihre berechnete optimale Lösung sowie den zugehörigen Zielfunktionswert an.

Aufgabe 2 **35 Punkte**

Der Metallverarbeiter „sholovs AG“ produziert vier Sorten von Spannklammern für den Schienenbau: SPK 1 (E_1), SPK 12 (E_2), SPK 14 (E_3) und SPK 21 (E_4). Die Spannklammern SPK 1, SPK 12 und SPK 14 werden von einer Biegemaschine bearbeitet; SPK 21 benötigt hingegen eine Handbearbeitung. Darüber hinaus erhalten die SPK 12 und SPK 21 eine Schutzlackierung. Für die Planung des nächsten Tages steht dem Unternehmen dazu die Biegemaschine (M_1) für drei Schichten, die Lackierstraße (M_2) für zwei Schichten sowie die Handstraße (M_3) für eine Schicht zur Verfügung, wobei eine Schicht acht Stunden umfasst. Der Arbeitsminutenverbrauch je Mengeneinheit (ME) der einzelnen Erzeugnisse ist der nachstehenden Tabelle zu entnehmen:

	E_1	E_2	E_3	E_4
M_1	4	3	2	0
M_2	0	6	0	8
M_3	0	0	0	20

Der Stückdeckungsbeitrag für die einzelnen Erzeugnisse beträgt je ME für E_1 30 €, für E_2 45 €, für E_3 20 € und für E_4 25 €. Ganzzahligkeitsbedingungen spielen keine Rolle!

a) Stellen Sie unter den gegebenen Bedingungen ein mathematisches Modell zur Bestimmung eines Produktionsplans mit maximalem Deckungsbeitrag auf.

Hinweis: Verwenden Sie die Variablen x_i, wobei x_i die herzustellende Menge des Erzeugnisses E_i in Stück angibt ($i = 1, 2, 3, 4$). Geben Sie die Arbeitszeitbedingungen in der Einheit **Minuten** an!

b) Aufgrund der Absatzstruktur müssen vom Typ SPK 14 mindestens doppelt so viele Spannklammern wie vom Typ SPK 12 hergestellt werden.

b1) Formulieren Sie das oben genannte Verhältnis als mathematischen Ausdruck der Form $\frac{x_i}{x_j} \geqq \frac{a_i}{a_j}$.

b2) Überführen Sie Ihre Formulierung aus *b1*) in eine lineare Nebenbedingung der Form $\sum_i a_i x_i \leqq b$

c) Ergänzen Sie das vollständige Modell aus Aufgabenteil *a*) zusammen mit der Restriktion aus *b2*) um notwendige Schlupfvariable und stellen Sie ein Anfangstableau für die Berechnung der optimalen Lösung mittels Simplexalgorithmus auf. Markieren Sie das Pivot-Element.

Hinweis: Bezeichnen Sie dabei die Schlupfvariable der Arbeitszeitrestirktion M_i mit s_i $(i = 1, 2, 3)$ und die Schlupfvariable für das Produktionsverhältnis aus *b2*) mit s_4.

d) Vervollständigen Sie die Simplextableaus auf Seite 15 der Lösungsbögen zur Bestimmung der optimalen Lösung des Problems.

e) Geben Sie Ihre in Aufgabenteil e) berechnete optimale Lösung sowie den zugehörigen Zielfunktionswert an und interpretieren Sie diese Größen ökonomisch. Beachten Sie dabei wieder die Hinweise in Aufgabenteil a) und c) hinsichtlich der Entscheidungs- und Schlupfvariablen.

f) Aufgrund von technischen Störungen im Werk kann es kurzfristig zu Ausfällen der Handstraße für zwei Stunden (120 Minuten) kommen.

f1) Führen Sie eine Sensitivitätsanalyse für M_3 durch und berechnen Sie das kritische Intervall $[\lambda_{Min}, \lambda_{Max}]$.

f2) Bleibt die in Aufgabenteil *d*) ermittelte Basislösung bzgl. der obigen Störung optimal? Interpretieren Sie hierzu das kritische Intervall.

g) Zeigen Sie, dass das in Aufgabenteil *b*) geforderte Verhältnis für alle $\lambda \in [-272, \infty)$ erfüllt ist.

Aufgabe 3 **20 Punkte**

Die „sholovs AG“ hat einen Auftrag aus Asien bekommen und muss für die Spannklammern SPK 1, SPK 12 und SPK 14 je fünf Paletten aus dem Lager verschiffen. Für eine erste Teillieferung hat das Unternehmen in der kommenden Woche in einem Überseecontainer ein Ladevolumen von 3 m^3 reservieren können. Nach den Vorgaben der Geschäftsleitung sollen mit der ersten Lieferung der maximal erzielbare Ertrag erwirtschaftet werden. Die jeweilgen Erträge für eine Palette sowie deren Volumina sind in der folgenden Tabelle aufgelistet:

	SPK 1 (E_1)	SPK 12 (E_2)	SPK 14 (E_3)
Ertrag je Palette in €	300	450	200
Volumen je Palette in m^3	1	2	1

Helfen Sie der „sholovs AG“ die Beladung des Containers mit maximalem Gesamtertrag unter Einhaltung des vorgegebenen Ladevolumens zu planen. Gehen Sie hierzu wie folgt vor:

a) Formulieren Sie das beschriebene Problem als rein ganzzahliges lineares Programm. Verwenden Sie hierzu die Variable x_i, wobei x_i die Anzahl an zu verladenen Paletten für E_i angibt ($i = 1, \ldots, 3$).

b) Lösen Sie das Beladungssproblem für die Spannklammern mit dem Ihnen aus dem Skript bekannten rekursiven Verfahren. Dokumentieren Sie Ihren Lösungsweg, indem Sie die Größen $F(k, y)$ und $j(k, y)$ in entsprechenden Tabellen notieren. Führen Sie zudem alle zugehörigen Algorithmusschritte (Schritte 1 bis 5) auf.

c) Bestimmen Sie die Optimallösung, indem Sie die hierzu notwendigen Schritte 6 bis 8 des rekursiven Verfahrens ausführen.

d) Welche Paletten werden in der ersten Lieferung verschifft? Wie hoch ist der damit erzielte Ertrag?

Aufgabe 4 **10 Punkte**

Für die Überwachung der insgesamt vier Steuersysteme im Werk der „sholovs AG“ soll eine Personaleinsatzplanung zu minimalen Kosten erfolgen; Mehrfachbesetzungen einzelner Systeme sind aufgrund einer Zentralisierung erlaubt. Hierzu stehen dem Unternehmen insgesamt vier Mitarbeiter mit unterschiedlichen Qualifikationen zur Verfügung, die verschiedene Systeme gleichzeitig bedienen können. Die folgende Matrix stellt diesen Sachverhalt kompakt dar:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dabei bedeutet $a_{ij} = 1$, dass Steuersystem i von Mitarbeiter j bedient werden kann. Der Vektor $\mathbf{c^T} = \begin{pmatrix} 200 & 150 & 300 & 400 \end{pmatrix}^T$ gibt dabei die Personalkosten in € an.

a) Formulieren Sie das mathematische Optimierungsmodell für das resultierende (unreduzierte) Partitionsproblem. Dabei bezeichnet die Variable x_j, ob ein Mitarbeiter j eingesetzt wird oder nicht.

b) Reduzieren Sie die Matrix $\mathbf{A}$ mit Hilfe der Ihnen bekannten Reduktionsregeln soweit wie möglich. Notieren Sie jeden einzelnen Schritt mit der dort angewandten Regel sowie die aufgrund dieser gestrichenen Spalten und Zeilen. Die in den jeweiligen Regeln erwähnten Indizes wie beispielsweise k, i, j, i^* sind dabei unbedingt anzugeben.

c) Welche Mitarbeiter werden eingesetzt und wie hoch ist der Personalkostenaufwand hierfür?

Aufgabe 5	**15 Punkte**

Neben Spannklammern produziert die „sholovs AG“ auch vollständig montierte Weichen (Variable x_1) und Kreuzungen (Variable x_2). Getrieben durch den fortschreitenden Umweltschutz wird seit kurzer Zeit bei der Herstellung neben der Gewinnmaximierung in € auch die Minimierung des Emissionsausstoßes in kg CO_2 verfolgt. Das folgende lineare Mehrziel-Optmierungsproblem bildet dabei den vereinfachten Sachverhalt ab:

$$
\begin{array}{lrcll}
\max & z_1(x) = 2400x_1 & +4500x_2 & & \text{(Gewinnziel)} \\
\min & z_2(x) = \ \ 200x_1 & +1250x_2 & & \text{(Emissionsziel)} \\
u.d.N & & & & \\
& 50x_1 \ + & 70x_2 & \leqq 1750 & \text{(Rohstoff Stahl)} \\
& 160x_1 \ + & 140x_2 & \leqq 5600 & \text{(Rohstoff Beton)} \\
& & x_1 & \geqq 10 & \text{(Absatz Weichen)} \\
& & x_2 & \geqq 5 & \text{(Absatz Kreuzungen)}
\end{array}
$$

a) Ermitteln Sie eine Kompromisslösung des Problems, indem Sie das entsprechende Kompromissprogramm bei einer gegebenen Zielgewichtungsfunktion

$$\Psi\left(z\left(x\right)\right) = z_1\left(x\right) + 2z_2\left(x\right)$$

graphisch lösen.

b) Geben Sie die zu produzierenden Mengen an Weichen und Kreuzungen an! Wie hoch ist der erwirtschaftete Gewinn in €? Wie viel kg CO_2 werden dabei ausgestoßen?

c) Die Geschäftsleitung überlegt, wie sie die beiden Ziele für das kommende Geschäftsjahr im Verhältnis zueinander gewichten soll. Bestimmen Sie anhand der Grafik aus Aufgabenteil *a*) alle kompromissoptimalen Lösungen für die Zielgewichtungsfunktion

$$\Psi\left(z\left(x\right)\right) = z_1\left(x\right) + tz_2\left(x\right), \quad \text{für } t > 0.$$

Geben Sie Ihr Ergebnis in Mengenschreibweise an!

d) Wie lässt sich die in *c*) gefundene Lösungsmenge interpretieren?

Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre,
insb. Quantitative Methoden
und Wirtschaftsmathematik

Univ.-Prof. Dr. Andreas Kleine

LÖSUNGSBÖGEN

Klausur: **Modul 32621**
Optimierungsmethoden des Operations Research

Termin: **21.09.2017**

Prüfer: **Prof. Dr. Andreas Kleine**

Name, Vorname:
Matrikelnummer:

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**				**Summe**
maximale Punktzahl	20	35	20	10	15				100
erreichte Punktzahl									

Gesamtpunktzahl:

Note:

Datum:

Unterschriften der Prüfer:

Hinweise zur Bearbeitung der Modulklausur 32621

1. Tragen Sie zunächst sowohl auf das Deckblatt als auch auf das Deckblatt der Lösungsbogen Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein!

2. Benutzen Sie für Ihre Rechnungen nur die beigefügten Lösungsbogen und tragen Sie dort Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein. Trennen Sie von den Lösungsbögen keine Blätter ab; am Ende der Klausur müssen alle Lösungsbögen abgegeben werden. Die Lösungen müssen in den dafür vorgesehenen Raum auf den Lösungsbögen eingetragen werden. Falls der Platz nicht ausreicht, benutzen Sie bitte die Rückseiten oder die freien Blätter am Ende und geben Sie einen deutlichen Hinweis auf die Aufgabenzugehörigkeit. Bedenken Sie bitte bei der Anfertigung Ihrer Lösungen, dass vor allem der Lösungsweg einschließlich Ansatz und Zwischenschritten bewertet wird. Bei einem mehrfach bearbeiteten Aufgabenteil wird lediglich die erste Lösung bewertet. Nicht zu korrigierende Lösungsteile sind zu entwerten.

3. Die Klausur umfasst 5 Aufgaben, die in 120 Minuten zu bearbeiten sind.

4. Zu jeder Aufgabe ist die maximal erreichbare Punktzahl angegeben; die Summe aller Punkte beträgt 100. Die Klausur ist auf jeden Fall bestanden, wenn 50 Punkte erreicht wurden. **Bitte kontrollieren Sie sofort, ob Sie ein vollständiges Klausurexemplar erhalten haben**.

5. Die Verwendung eines Taschenrechners ist – sofern überhaupt ein Taschenrechner als Hilfsmittel in einer Klausur zugelassen ist – dann und nur dann erlaubt, wenn dieser einer der folgenden Modellreihen angehört:

   - Casio fx86 oder Casio fx87,
   - Texas Instruments TI 30 X II,
   - Sharp EL 531.

   Die Verwendung anderer Taschenrechnermodelle wird als Täuschungsversuch gewertet und mit der Note „nicht ausreichend“ (5,0) sanktioniert. Ob ein Taschenrechner einer der drei Modellreihen angehört, können Studierende selbst überprüfen, indem sie die vom Hersteller auf dem Rechner angebrachte Modellbezeichnung mit den oben angegebenen Bezeichnungen vergleichen: Bei **vollständiger** Übereinstimmung ist das Modell erlaubt. Ist die auf dem Rechner angebrachte Modellbezeichnung umfangreicher, enthält aber eine der oben angegebenen Bezeichnungen **vollständig**, ist das Modell ebenfalls erlaubt. In allen anderen Fällen ist das Modell nicht erlaubt. **Eventuelle**

Vorgänger- oder Nachfolgemodelle, die nicht in der oben aufgeführten Liste enthalten sind, sind ebenfalls nicht erlaubt.

6. Darüber hinaus sind ausschließlich die zum Modul gehörenden Kurseinheiten einschließlich der darin enthaltenen Lösungen zu den Übungsaufgaben zugelassen. Die Kurse dürfen Unterstreichungen, Markierungen und textbezogene Anmerkungen (z.B. Zwischenschritte oder Nebenrechnungen) enthalten. Auch Griffregister bspw. Klebezettel sind zugelassen und können mit Stichworten versehen werden. Nicht zugelassen sind eingelegte Seiten aller Art.

7. Vergessen Sie nicht, die Klausuren auf der letzten bearbeiteten Seite zu **unterschreiben**.

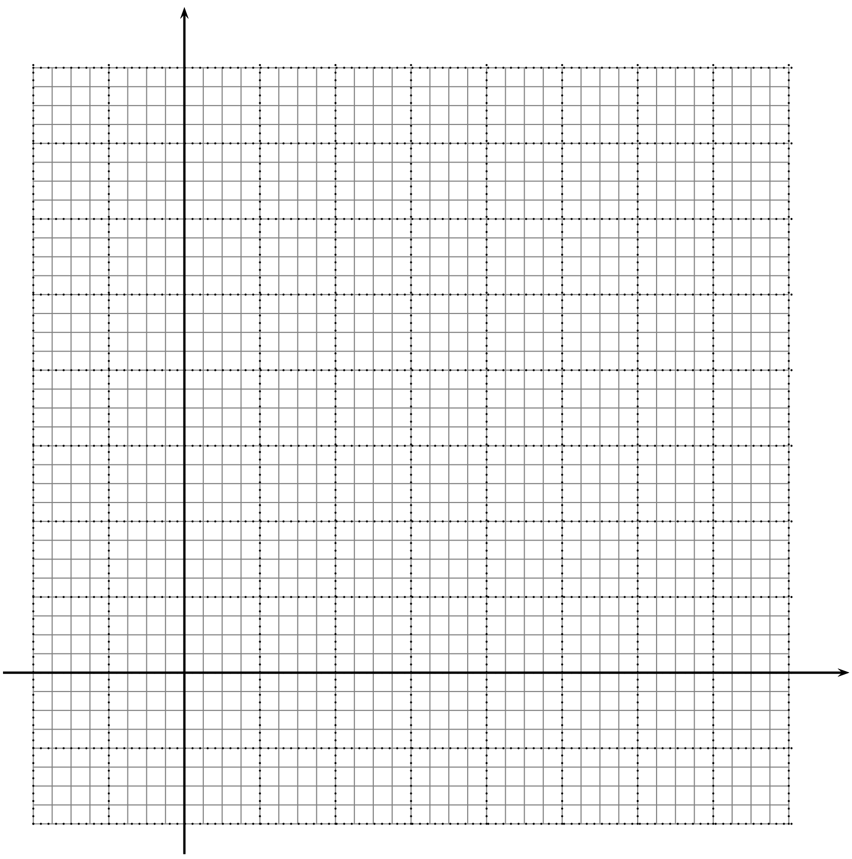
8. Lesen Sie den Aufgabentext gut durch und nun:

Viel Erfolg!

✎ Aufgabe **1** Matr.-Nr.: ______________________________

a)

b)



Punkte

✎ Aufgabe **1** Matr.-Nr.: ______________________________

c)

Punkte

✎ Aufgabe **2** Matr.-Nr.: ______________________________

a)

b1)

b2)

Punkte

✎ Aufgabe **2** Matr.-Nr.: ______________________________

c)

Punkte

✎ Aufgabe **2** Matr.-Nr.: ______________________________

d)

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	s_4	b
1	0	0	0	$\frac{55}{3}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{65}{12}$	0	-5	16000
0	1	0	0	$-\frac{7}{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{24}$	0	$\frac{1}{2}$	80
0	0	0	1	$\frac{8}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	-1	320
0	0	0	0	20	0	0	1	0	480
0	0	1	0	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	0	0	160

Punkte

✎ Aufgabe **2** Matr.-Nr.: ________________________________

e)

Punkte

✎ Aufgabe **2** Matr.-Nr.: ______________________________

f1)

f2)

Punkte

✎ Aufgabe **2** Matr.-Nr.: ______________________________

g)

Punkte

✎ Aufgabe **3** Matr.-Nr.: ________________________________

a)

b)

Punkte

✎ Aufgabe **3** Matr.-Nr.: ______________________________

b)

Punkte

✎ Aufgabe **3** Matr.-Nr.: ______________________________

b)

Punkte

✎ Aufgabe **3** Matr.-Nr.: ______________________________

c)

d)

Punkte

✎ Aufgabe **4** Matr.-Nr.: ______________________________

a)

b)

Punkte

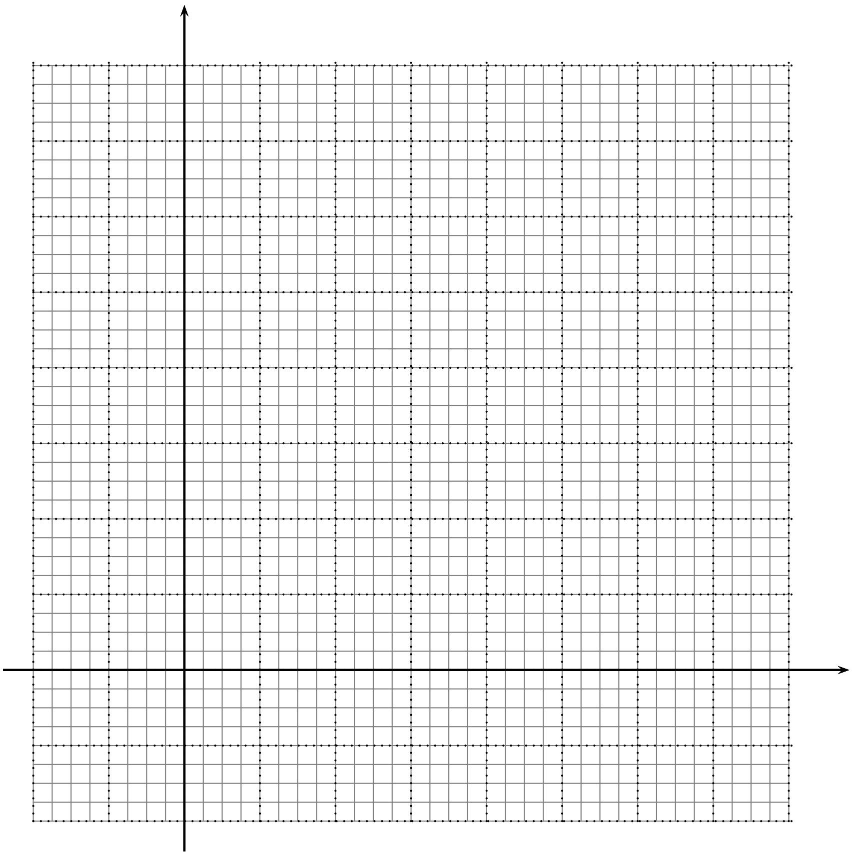
✎ Aufgabe **4** Matr.-Nr.: ______________________________

c)

Punkte

✎ Aufgabe **5** Matr.-Nr.: ________________________________

a)



b)

Punkte

✎ Aufgabe **5** Matr.-Nr.: ______________________________

c)

d)

Punkte

✎ Aufgabe ___ Matr.-Nr.: ______________________________

Punkte

✎ Aufgabe ___ Matr.-Nr.: ______________________________

Punkte

✎ Aufgabe ___ Matr.-Nr.: ______________________________

Punkte

✎ Aufgabe ___ Matr.-Nr.: ____________________________

Punkte

✎ Aufgabe ___ Matr.-Nr.: ______________________________

Punkte