



AUFGABENTEIL

Klausur: Modul 32621
Optimierungsmethoden des Operations Research

Termin: 07.03.2016

Prüfer: Prof. Dr. Andreas Kleine

Aufgabe 1

20 Punkte

Gegeben ist das folgende lineare Programm (LOP):

$$\begin{array}{rcll} \min & x_0 = & 18x_1 & + & 24x_2 & + & 4x_3 \\ \text{u.d.N.} & & 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ & & 2x_1 & + & 2x_2 & & & = & 4 \\ & & & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

- a) Stellen Sie das zugehörige duale LOP auf.
- b) Lösen Sie das **duale** LOP unter Berücksichtigung der zusätzlichen Nichtnegativitätsbedingungen graphisch. Geben Sie eine optimale Lösung sowie den Zielfunktionswert hierzu an.
- c) Bestimmen Sie mittels des „LO-Algorithmus für Probleme mit nach oben beschränkten Variablen“ eine optimale Lösung für das **duale** LOP unter Berücksichtigung der zusätzlichen Nichtnegativitätsbedingungen. Geben Sie die berechnete optimale Lösung sowie den Zielfunktionswert an.

Aufgabe 2

40 Punkte

Eine Schreinerei produziert vier Erzeugnisse: Regalbretter (E_1), Meterware Küchenarbeitsplatten (E_2), Tischbeine (E_3) und Tischplatten (E_4). Dazu stehen dem Unternehmen pro Woche 261 Tischlerarbeitsstunden (R_1), 450 Lackiererarbeitsstunden (R_2) sowie 900 Arbeitsstunden von Hilfsarbeitern (R_3) zur Verfügung. Der Arbeitsstundenverbrauch je Mengeneinheit (ME) der einzelnen Erzeugnisse ist der nachstehenden Tabelle zu entnehmen:

	E_1	E_2	E_3	E_4
R_1	5	6	1	6
R_2	10	10	2	12
R_3	12	20	5	40

Der Stückdeckungsbeitrag für die einzelnen Erzeugnisse beträgt je ME für E_1 32 €, für E_2 44 €, für E_3 15 € und für E_4 50 €.

- Stellen Sie das entsprechende mathematische Modell zur Bestimmung eines Produktionsplans mit maximalem Deckungsbeitrag auf. Verwenden Sie hierzu die Variable x_i , wobei x_i die herzustellende Menge des Erzeugnisses E_i angibt ($i = 1, 2, 3, 4$). Das Hinzufügen von Ganzzahligkeitsbedingungen ist nicht notwendig!
- Die Tischbeine E_3 und Tischplatten E_4 werden vom Unternehmen nur in Form eines Tisches, der aus einer Tischplatte und vier Tischbeinen besteht, verkauft. Ergänzen Sie das unter a) formulierte Modell um diese zusätzliche Bedingung.
- Welche **Vereinfachung** ergibt sich aus b)? Passen Sie das formulierte Modell entsprechend an.
- Ergänzen Sie das Modell aus Aufgabenteil c) um notwendige Schlupfvariable und stellen Sie ein Anfangstableau für die Berechnung der optimalen Lösung mittels Simplexalgorithmus auf. Markieren Sie das Pivot-Element.

Hinweis: Bezeichnen Sie dabei die Schlupfvariable der Arbeitszeitrestriktion R_i mit s_i ($i = 1, 2, 3$).

- Vervollständigen Sie die Simplextableaus auf Seite 14 der Lösungsbögen zur Bestimmung der optimalen Lösung des Problems.

- f) Geben Sie Ihre in Aufgabenteil e) berechnete optimale Lösung sowie den zugehörigen Zielfunktionswert an und interpretieren Sie diese Größen ökonomisch. Beachten Sie dabei wieder den Hinweis in Aufgabenteil a) und d) bzgl. der Variablen.
- g) Aufgrund von Schichtüberschneidungen können die zur Verfügung stehenden Tischlerarbeitsstunden R_1 kurzfristig um den Wert von 261 Stunden schwanken.
- g1) Führen Sie eine Sensitivitätsanalyse durch und berechnen Sie das kritische Intervall $[\lambda_{Min}, \lambda_{Max}]$.
- g2) Bleibt die bereits in Aufgabenteil e) ermittelte Basislösung optimal, falls sich die Schwankungen von R_1 auf bis zu 10 Stunden um den Wert von 261 Stunden belaufen? Interpretieren Sie hierzu das kritische Intervall in Bezug auf eine bereits berechnete optimale Basislösung.
- g3) Angenommen, es liegt doch eine Forderung nach Ganzzahligkeit der Lösung vor. Wieviele zusätzliche ganzzahlige Lösungen existieren für $\lambda \in [\lambda_{Min}, \lambda_{Max}]$ noch?

Hinweis: Betrachten Sie hierzu den Zusammenhang $\bar{b} + \lambda \bar{v}$ und leiten Sie ein Vielfaches von λ her, welches die Ganzzahligkeitsbedingungen erfüllt.

Aufgabe 3

25 Punkte

Ein Unternehmen für Veranstaltungstechnik „stay4that“ hat einen Auftrag in Übersee bekommen und muss Equipment verschiffen. Hierzu wird stay4that in ein Überseecontainer ein Ladevolumen von $3 m^3$ reserviert. Anhand der Vorgaben des Veranstalters hat der Inhaber sieben Technikkomponenten T_i ($i = 1, \dots, 7$) ausgemacht, die zur Mitnahme in Frage kommen. Den jeweiligen Nutzen für den Einsatz sowie das Volumen der Komponenten sind in der folgenden Tabelle aufgelistet:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7
Nutzen je Komponente	5	8	2	15	4	24	12
Volumen je Komponente in m^3	1	2	1	2	1	3	1

Helfen Sie stay4that die Beladung des Containers mit maximalem Gesamtnutzen unter Einhaltung des vorgegebenen Ladevolumens zu planen. Gehen Sie hierzu wie folgt vor:

- Um welches Problem des Operations Research handelt es sich bei dem beschriebenen Szenario?
- Formulieren Sie das beschriebene Problem als rein ganzzahliges lineares Programm. Verwenden Sie hierzu die Variable x_i , wobei x_i die Anzahl an mitzunehmenden Technikkomponenten T_i angibt ($i = 1, \dots, 7$).
- Bei einer technischen Überprüfung der Komponenten erwiesen sich T_5 bis T_7 als defekt und können nicht mehr eingeplant werden. Lösen Sie das Maximierungsproblem für die verbleibenden Technikkomponenten T_1 bis T_4 mit dem Ihnen aus dem Skript bekannten rekursiven Verfahren. Dokumentieren Sie Ihren Lösungsweg, indem Sie die Größen $F(k, y)$ und $j(k, y)$ in entsprechenden Tabellen sowie alle zugehörigen Algorithmusschritte notieren.
- Bestimmen Sie die Optimallösung, indem Sie die zugehörigen Algorithmusschritte ausführen. Welche Technikkomponenten werden mitgenommen?

Aufgabe 4

15 Punkte

Gegeben sei folgendes (LVMP):

$$\max z(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

u.d.N

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leq 20 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 15 \\ x_1 + x_2 &\geq 6 \\ 1 &\leq x_2 \leq 6 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

- a) Stellen Sie die Lösungsmenge von (LVMP) graphisch dar. Markieren Sie die Menge aller zulässigen Lösungen.
- b) Bestimmen Sie in der Grafik für jedes der drei Ziele die individuell optimalen Lösungen. Geben Sie jeweils die Menge der individuell optimalen Lösungen sowie den optimalen Zielvektor formal an.
- c) Ermitteln Sie anhand der Grafik die Menge der funktional-effizienten Lösungen von (LVMP) und geben Sie die Menge der vollständigen Lösungen formal an.
- d) Angenommen, es gilt zusätzlich $x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0$. Geben Sie an, ob $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ eine funktional-effiziente Alternative darstellt. Begründen Sie Ihre Antwort.



LÖSUNGSBÖGEN

Klausur: Modul 32621
Optimierungsmethoden des Operations Research

Termin: 07.03.2016

Prüfer: Prof. Dr. Andreas Kleine

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe	1	2	3	4					Summe
maximale Punktzahl	20	40	25	15					100
erreichte Punktzahl									

Gesamtpunktzahl:

Note:

Datum:

Unterschriften
der Prüfer:

Hinweise zur Bearbeitung der Modulklausur 32621

1. Tragen Sie zunächst sowohl auf das Deckblatt als auch auf das Deckblatt der Lösungsbogen Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein!
2. Benutzen Sie für Ihre Rechnungen nur die beigegefügte Lösungsbogen und tragen Sie dort Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein. Trennen Sie von den Lösungsbögen keine Blätter ab; am Ende der Klausur müssen alle Lösungsbögen abgegeben werden. Die Lösungen müssen in den dafür vorgesehenen Raum auf den Lösungsbögen eingetragen werden. Falls der Platz nicht ausreicht, benutzen Sie bitte die Rückseiten oder die freien Blätter am Ende und geben Sie einen deutlichen Hinweis auf die Aufgabenzugehörigkeit. Bedenken Sie bitte bei der Anfertigung Ihrer Lösungen, dass vor allem der Lösungsweg einschließlich Ansatz und Zwischenschritten bewertet wird. Bei einem mehrfach bearbeiteten Aufgabenteil wird lediglich die erste Lösung bewertet. Nicht zu korrigierende Lösungsteile sind zu entwerfen.
3. Die Klausur umfasst 4 Aufgaben, die in 120 Minuten zu bearbeiten sind.
4. Zu jeder Aufgabe ist die maximal erreichbare Punktzahl angegeben; die Summe aller Punkte beträgt 100. Die Klausur ist auf jeden Fall bestanden, wenn 50 Punkte erreicht wurden. **Bitte kontrollieren Sie sofort, ob Sie ein vollständiges Klausurexemplar erhalten haben.**
5. Die Verwendung eines Taschenrechners ist dann und nur dann erlaubt, wenn dieser einer der drei folgenden Modellreihen angehört:
 - Casio fx86,
 - Texas Instruments TI 30 X II,
 - Sharp EL 531.


Die Verwendung anderer Taschenrechnermodelle wird als Täuschungsversuch gewertet und mit der Note „nicht ausreichend“ (5,0) sanktioniert.

Ob ein Taschenrechner einer der drei Modellreihen angehört, können Sie selbst überprüfen, indem Sie die vom Hersteller auf dem Rechner angebrachte Modellbezeichnung mit den oben angegebenen Bezeichnungen vergleichen: Bei **vollständiger** Übereinstimmung ist das Modell erlaubt. Ist die auf dem Rechner angebrachte Modellbezeichnung umfangreicher, enthält aber eine der oben angegebenen Bezeichnungen **vollständig**, ist das Modell ebenfalls erlaubt. In allen anderen Fällen ist das Modell nicht erlaubt. **Eventuelle**

Vorgänger- oder Nachfolgemodelle, die nicht in der oben aufgeführten Liste enthalten sind, sind ebenfalls nicht erlaubt.

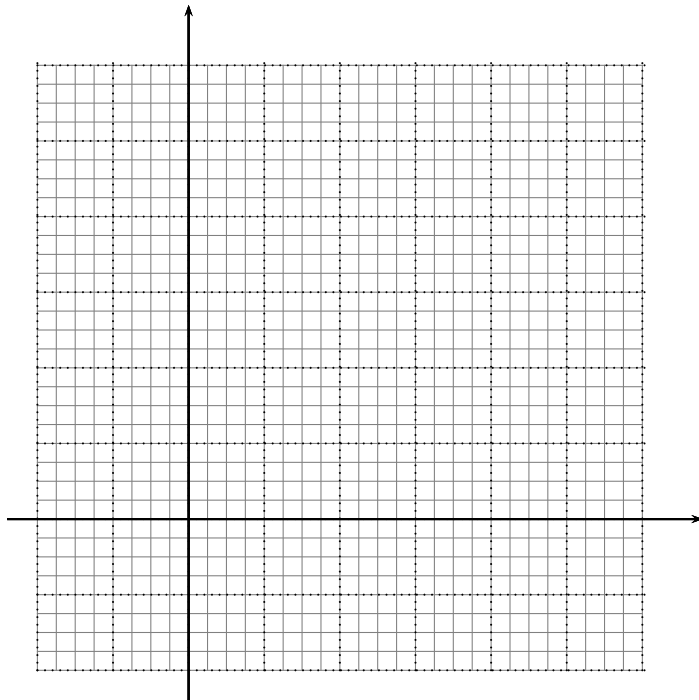
6. Darüber hinaus sind ausschließlich die zum Modul gehörenden Kurseinheiten einschließlich der darin enthaltenen Lösungen zu den Übungsaufgaben zugelassen. Die Kurse dürfen Markierungen und textbezogene Anmerkungen enthalten.
7. Vergessen Sie nicht, die Klausuren auf der letzten bearbeiteten Seite zu **unterschreiben**.
8. Lesen Sie den Aufgabentext gut durch und nun:

Viel Erfolg!


 Aufgabe 1 Matr.-Nr.: _____

a)

b)




Punkte

 Aufgabe 1 Matr.-Nr.: _____

c)


Punkte

 Aufgabe 2 Matr.-Nr.: _____

e)

x_0	x_1	x_2	x_4	s_1	s_2	s_3	b
1	-10	$-\frac{22}{3}$	0	0	0	$\frac{11}{6}$	1650
0	3	$\frac{8}{3}$	0	1	0	$-\frac{1}{6}$	111
0	6	$\frac{10}{3}$	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	150
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{60}$	15


Punkte

 Aufgabe 2 Matr.-Nr.: _____

f)

g)


Punkte

 Aufgabe 2 Matr.-Nr.: _____

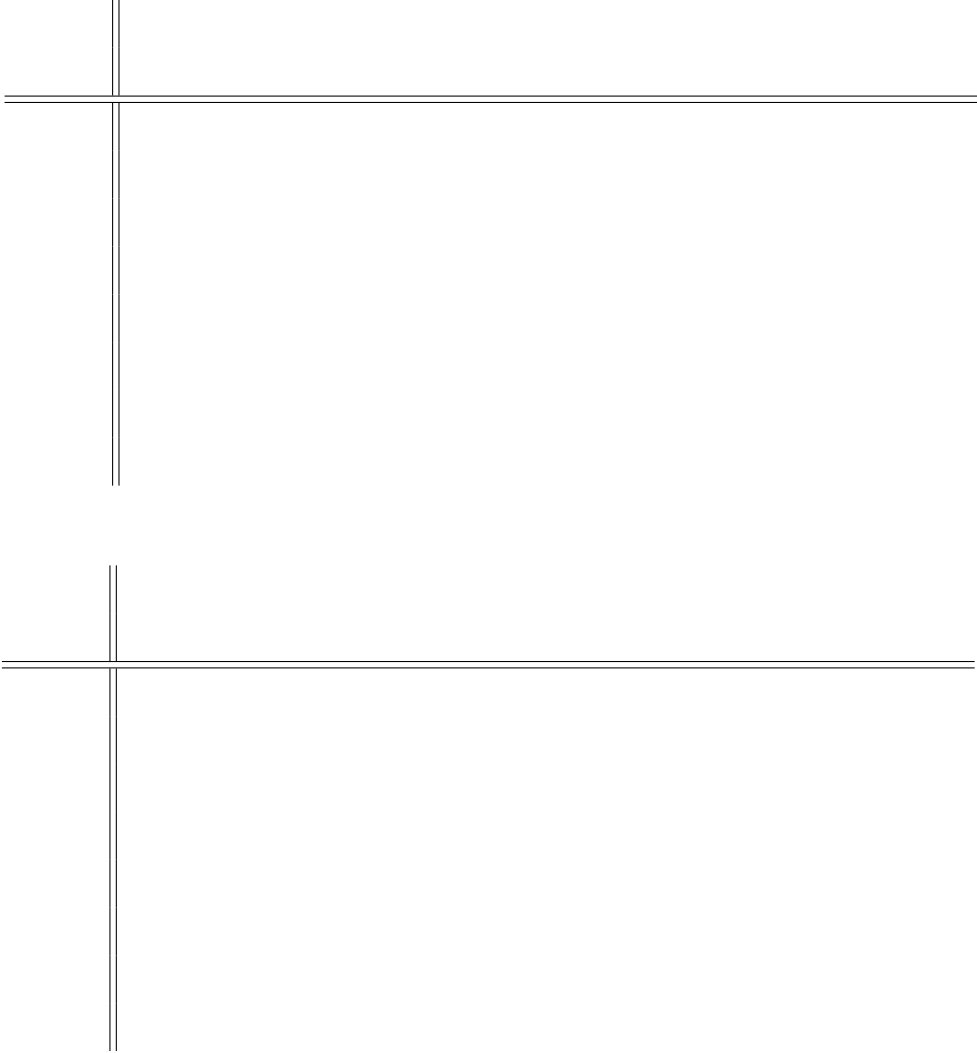
g2)

g3)


Punkte

 Aufgabe 3 Matr.-Nr.: _____

c)




Punkte

 Aufgabe 3 Matr.-Nr.: _____


c)

Punkte

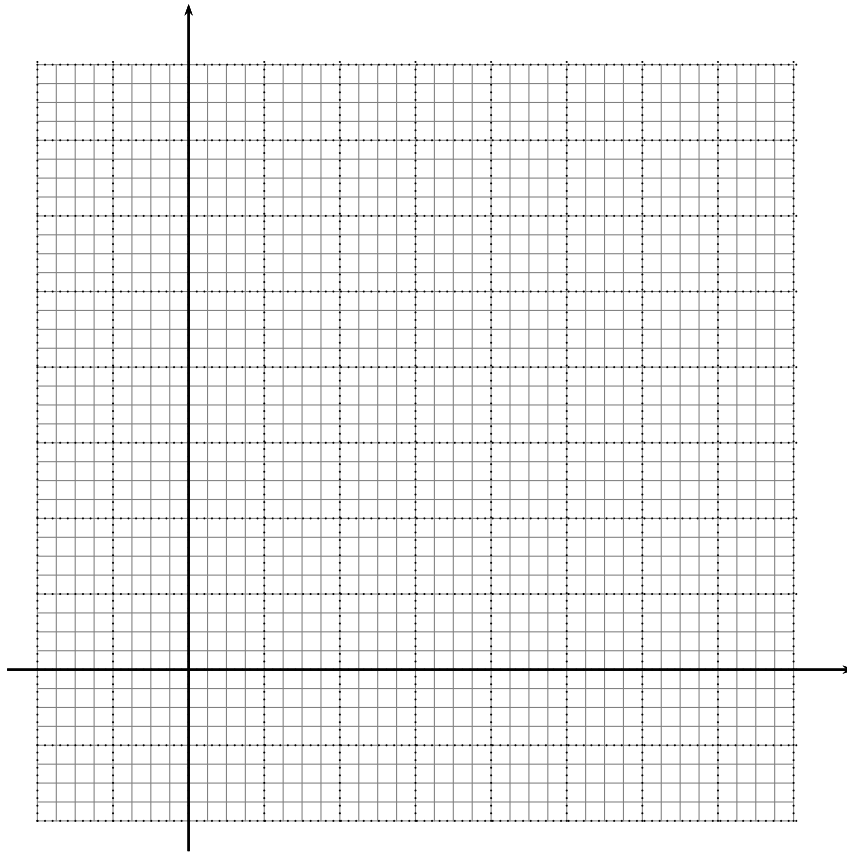
 Aufgabe 3 Matr.-Nr.: _____

d)

Punkte

 Aufgabe 4 Matr.-Nr.: _____

a)



b)

Punkte

