



## AUFGABENTEIL

—  
**Klausur:**                    **Modul 32621**  
                                     **Optimierungsmethoden des Operations Research**

**Termin:**                    **23.03.2017**

—  
**Prüfer:**                    **Prof. Dr. Andreas Kleine**

**Aufgabe 1**

**20 Punkte**

Gegeben ist das folgende lineare Programm (LOP):

$$\begin{array}{rcll} \min & x_0 = & 36x_1 & + & 24x_2 & + & 10x_3 & & \\ \text{u.d.N.} & & 4x_1 & + & 4x_2 & & & = & 6 \\ & & 6x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \\ & & & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

- a) Stellen Sie ein zugehöriges duales LOP auf.
- b) Lösen Sie das **duale** LOP aus Aufgabenteil a) unter Berücksichtigung der zusätzlichen Nichtnegativitätsbedingungen graphisch. Geben Sie eine optimale Lösung sowie den Zielfunktionswert hierzu an.
- c) Bestimmen Sie mittels des „LO-Algorithmus für Probleme mit nach oben beschränkten Variablen“ eine optimale Lösung für das **duale** LOP aus Aufgabenteil a) unter Berücksichtigung der zusätzlichen Nichtnegativitätsbedingungen. Geben Sie die berechnete optimale Lösung sowie den Zielfunktionswert an.

Aufgabe 2

45 Punkte

Eine Schreinerei produziert drei Arten von Schränken: Einen zweitürigen Kleiderschrank aus Naturholz ( $E_1$ ), eine Luxus-Kommode mit vier Türen und einer aufwändigen Lackierung ( $E_2$ ) und eine eintürige Nachttisch-Kommode mit einfacher Lackierung ( $E_3$ ). Dazu stehen dem Unternehmen 98 kg Holz ( $R_1$ ), 120 Türschaniere ( $R_2$ ) sowie 27 Liter Holzlack ( $R_3$ ) zur Verfügung. Für die Herstellung eines Kleiderschranks werden 9 kg Holz und 4 Schaniere benötigt. Um eine Luxus-Kommode zu produzieren, werden 5 kg Holz, 8 Schaniere sowie 2 Liter Holzlack verbraucht. Für die Produktion einer Nachttisch-Kommode sind 2 kg Holz, 2 Schaniere sowie 0,5 Liter Holzlack notwendig. Sonstige Bestandteile der Schränke sind außer Acht zu lassen. Für die Produktion stehen dem Unternehmen aktuell 20 Sägearbeitsstunden ( $R_4$ ), 33 Lackierarbeitsstunden ( $R_5$ ) sowie 21 Arbeitsstunden für den Zusammenbau ( $R_6$ ) zur Verfügung. Der Arbeitsverbrauch in Minuten je Mengeneinheit (ME) der einzelnen Erzeugnisse ist der nachstehenden Tabelle zu entnehmen:

	$E_1$	$E_2$	$E_3$
$R_4$	60	30	10
$R_5$	0	180	90
$R_6$	50	90	20

Der Stückdeckungsbeitrag je ME für die einzelnen Erzeugnisse liegt für  $E_1$  bei 230 €, für  $E_2$  bei 600 € und für  $E_3$  bei 300 €.

- a) Stellen Sie ein entsprechendes mathematisches Modell zur Bestimmung eines Produktionsplans mit maximalem Deckungsbeitrag auf.

**Hinweis:** Verwenden Sie hierzu die Variable  $x_i$ , wobei  $x_i$  die herzustellende Menge des Erzeugnisses  $E_i$  in Stück angibt ( $i = 1, 2, 3$ ). Achten Sie auf die Dimensionen in den Angaben!

- b) Ergänzen Sie das Modell aus Aufgabenteil a) um notwendige Schlupfvariable und stellen Sie ein Anfangstableau für die Berechnung der optimalen Lösung mittels Simplexalgorithmus auf. Markieren Sie das Pivot-Element.

**Hinweis:** Bezeichnen Sie dabei die Schlupfvariable der Rohstoff- und Arbeitszeitrestriktion  $R_i$  mit  $s_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ).

- c) Vervollständigen Sie die Simplextableaus auf Seite 14 der Lösungsbögen zur Bestimmung der optimalen Lösung des Problems.
- d) Geben Sie Ihre in Aufgabenteil c) berechnete optimale Lösung sowie den zugehörigen Zielfunktionswert an und interpretieren Sie diese Größen ökonomisch. Beachten Sie dabei die Hinweise in den Aufgabenteilen a) und b) bzgl. der Variablen.
- e) Aufgrund von Schichtüberschneidungen können die zur Verfügung stehenden Lackierarbeitsstunden  $R_5$  kurzfristig um den Wert von 33 Stunden schwanken.
- e1) Geben Sie die Inverse der optimalen Basis  $\mathbf{B}^{-1}$  an.
- e2) Führen Sie eine Sensitivitätsanalyse durch und berechnen Sie das kritische Intervall  $[\lambda_{Min}, \lambda_{Max}]$ .
- e3) Bleibt die bereits in Aufgabenteil c) ermittelte Basislösung optimal, falls sich die Schwankungen von  $R_1$  auf bis zu 10 Stunden um den Wert von 33 Stunden belaufen? Interpretieren Sie hierzu das kritische Intervall in Bezug auf eine bereits berechnete optimale Basislösung.
- f) Die Unternehmensleitung ändert kurzfristig ihre Zielsetzung bei der Herstellung von der Deckungsbeitragsmaximierung in eine Gewinnmaximierung. Berechnen Sie unter diesem neuen Gesichtspunkt das Optimum, indem Sie wie folgt vorgehen:
- f1) Das Controlling hat berechnet, dass sich die Fixkosten insgesamt auf 1520 € belaufen. Stellen Sie die Zielfunktion formal dar, die sich durch die Änderung der Unternehmensphilosophie ergibt. Beachten Sie dabei wieder den Hinweis in Aufgabenteil a) bzgl. der Variablen.
- f2) Wie wirkt sich diese Änderung auf die Zielfunktionszeile des Anfangstableaus aus Aufgabenteil b) aus?
- f3) Geben Sie den maximalen Gewinn im Optimum an. *Achtung:* Hierzu ist keine weitere Optimierungsaufgabe zu lösen!

**Aufgabe 3**

**15 Punkte**

Zu einem Partitionsproblem seien die folgende Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie der Kostenvektor  $\mathbf{c}^T = (1 \ 3 \ 2 \ 1 \ 4 \ 2)^T$  gegeben.

- a) Formulieren Sie ein mathematisches Optimierungsmodell für das (unreduzierte) Problem.
- b) Reduzieren Sie die Matrix A mit Hilfe der Reduktionsregeln soweit wie möglich. Notieren Sie jeden einzelnen Schritt mit der dort angewandten Regel sowie die aufgrund dieser gestrichenen Spalten/Zeilen. Geben Sie die gefundene Lösung an.

**Aufgabe 4**

**10 Punkte**

Ein Paketdienst muss ausgehend von seinem Depot (Knoten ②) drei Kunden (Knoten ①, ③ und ④) beliefern. Die Tour soll als ein symmetrisches Rundreiseproblem mit folgender Entfernungstabelle geplant werden:

$c_{ij}$	①	②	③	④
①	–	4	3	2
②	4	–	6	1
③	3	6	–	5
④	2	1	5	–

- a) Bestimmen Sie den **durch Knoten ② ausgezeichneten** minimalen 1-Baum und geben Sie die zugehörige Bewertung an.
- b) Bestimmen Sie **ausgehend vom minimalen 1-Baum aus Aufgabenteil a)** die optimale Rundreise, indem Sie wie folgt vorgehen:

b1) Berechnen Sie zunächst die modifizierten Kantenbewertungen  $\bar{c}_{ij} = c_{ij} + \nu_i + \nu_j$ . Wählen Sie hierbei die Zahlen  $\nu_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) wie folgt:

$$\nu_i = \begin{cases} -1 & , \text{ falls in Knoten } i \text{ weniger als 2 Kanten zusammentreffen} \\ 0 & , \text{ falls in Knoten } i \text{ genau 2 Kanten zusammentreffen} \\ 1 & , \text{ falls in Knoten } i \text{ mehr als 2 Kanten zusammentreffen} \end{cases}$$

- b2) Bestimmen Sie den durch Knoten ② ausgezeichneten minimalen 1-Baum anhand der modifizierten Kantenbewertungen  $\bar{c}_{ij}$  und geben Sie die zugehörige Bewertung an.
- b3) Der folgenden Tabelle können Sie die Bewertungen aller weiteren minimalen 1-Bäume entnehmen:

ausgezeichneter Knoten	①	③	④
Bewertung des minimalen 1-Baums	11	11	10

Ist die Rundreise aus b2) bereits optimal? Begründen Sie kurz Ihre Antwort!

**Aufgabe 5**

**10 Punkte**

Gegeben sei folgendes lineares Vektormaximierungsproblem (LVMP):

$$\begin{aligned} \max z(x) &= \begin{pmatrix} 100 & 300 \\ 200 & 200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &u.d.N \\ &20x_1 + 20x_2 \leq 140 \\ &4x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ &5x_1 + 5x_2 \geq 20 \\ &x_1 \geq 2 \\ &x_2 \geq 1 \end{aligned}$$

- a) Stellen Sie die Lösungsmenge von LVMP graphisch dar. Markieren Sie die Menge aller zulässigen Lösungen.
- b) Bestimmen Sie in der Grafik für jedes der zwei Ziele die individuell optimalen Lösungen.
- c) Gibt es im vorliegenden LVMP eine perfekte Lösung? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie eine perfekte Lösung an, falls diese existiert!

## LÖSUNGSBÖGEN

**Klausur:** Modul 32621  
Optimierungsmethoden des Operations Research

**Termin:** 23.03.2017

**Prüfer:** Prof. Dr. Andreas Kleine

**Name, Vorname:**

**Matrikelnummer:**

Aufgabe	1	2	3	4	5				Summe
maximale Punktzahl	20	45	15	10	10				100
erreichte Punktzahl									

**Gesamtpunktzahl:**

**Note:**

Datum:

Unterschriften  
der Prüfer:



## Hinweise zur Bearbeitung der Modulklausur 32621


1. Tragen Sie zunächst sowohl auf das Deckblatt als auch auf das Deckblatt der Lösungsbögen Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein!
2. Benutzen Sie für Ihre Rechnungen nur die beigelegten Lösungsbögen und tragen Sie dort Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein. Trennen Sie von den Lösungsbögen keine Blätter ab; am Ende der Klausur müssen alle Lösungsbögen abgegeben werden. Die Lösungen müssen in den dafür vorgesehenen Raum auf den Lösungsbögen eingetragen werden. Falls der Platz nicht ausreicht, benutzen Sie bitte die Rückseiten oder die freien Blätter am Ende und geben Sie einen deutlichen Hinweis auf die Aufgabenzugehörigkeit. Bedenken Sie bitte bei der Anfertigung Ihrer Lösungen, dass vor allem der Lösungsweg einschließlich Ansatz und Zwischenschritten bewertet wird. Bei einem mehrfach bearbeiteten Aufgabenteil wird lediglich die erste Lösung bewertet. Nicht zu korrigierende Lösungsteile sind zu entwerfen.
3. Die Klausur umfasst 5 Aufgaben, die in 120 Minuten zu bearbeiten sind.
4. Zu jeder Aufgabe ist die maximal erreichbare Punktzahl angegeben; die Summe aller Punkte beträgt 100. Die Klausur ist auf jeden Fall bestanden, wenn 50 Punkte erreicht wurden. **Bitte kontrollieren Sie sofort, ob Sie ein vollständiges Klausurexemplar erhalten haben.**
5. Die Verwendung eines Taschenrechners ist – sofern überhaupt ein Taschenrechner als Hilfsmittel in einer Klausur zugelassen ist – dann und nur dann erlaubt, wenn dieser einer der folgenden Modellreihen angehört:
  - Casio fx86 oder Casio fx87,
  - Texas Instruments TI 30 X II,
  - Sharp EL 531.

Die Verwendung anderer Taschenrechnermodelle wird als Täuschungsversuch gewertet und mit der Note „nicht ausreichend“ (5,0) sanktioniert. Ob ein Taschenrechner einer der drei Modellreihen angehört, können Studierende selbst überprüfen, indem sie die vom Hersteller auf dem Rechner angebrachte Modellbezeichnung mit den oben angegebenen Bezeichnungen vergleichen: Bei **vollständiger** Übereinstimmung ist das Modell erlaubt. Ist die auf dem Rechner angebrachte Modellbezeichnung umfangreicher, enthält aber eine der oben angegebenen Bezeichnungen **vollständig**, ist das Modell ebenfalls erlaubt. In allen anderen Fällen ist das Modell nicht erlaubt. **Eventuelle**

**Vorgänger- oder Nachfolgemodelle, die nicht in der oben aufgeführten Liste enthalten sind, sind ebenfalls nicht erlaubt.**

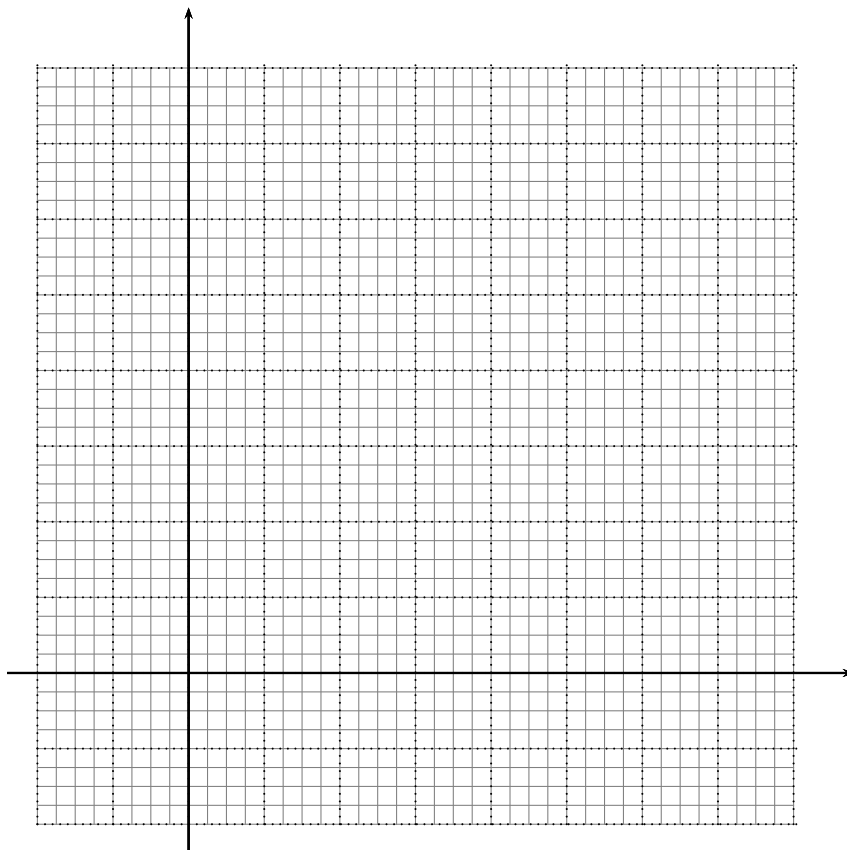
6. Darüber hinaus sind ausschließlich die zum Modul gehörenden Kurseinheiten einschließlich der darin enthaltenen Lösungen zu den Übungsaufgaben zugelassen. Die Kurse dürfen Markierungen und textbezogene Anmerkungen enthalten.
7. Vergessen Sie nicht, die Klausuren auf der letzten bearbeiteten Seite zu **unterschreiben**.
8. Lesen Sie den Aufgabentext gut durch und nun:

**Viel Erfolg!**


 Aufgabe 1 Matr.-Nr.: \_\_\_\_\_

a)

b)




Punkte

 Aufgabe 1 Matr.-Nr.: \_\_\_\_\_

c)

Punkte




 Aufgabe 2 Matr.-Nr.: \_\_\_\_\_

c)

$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$s_6$	$b$
1	0	0	$-\frac{115}{9}$	$\frac{230}{9}$	0	0	0	$\frac{4250}{27}$	0	$\frac{69290}{9}$
0	1	0	$-\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	0	0	0	$-\frac{5}{27}$	0	$\frac{43}{9}$
0	0	0	$-\frac{16}{9}$	$-\frac{4}{9}$	1	0	0	$-\frac{52}{27}$	0	$\frac{116}{9}$
0	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	0	5
0	0	0	$-\frac{1}{36}$	$-\frac{1}{9}$	0	0	1	$\frac{1}{54}$	0	$\frac{175}{18}$
0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	11
0	0	0	$-\frac{10}{27}$	$-\frac{5}{54}$	0	0	0	$-\frac{28}{81}$	1	$\frac{14}{27}$

Punkte

 Aufgabe 2 Matr.-Nr.: \_\_\_\_\_


*d)*

*e1)*

Punkte





 Aufgabe 2 Matr.-Nr.: \_\_\_\_\_

*f1)*

*f2)*

*f3)*


Punkte

 Aufgabe 3 Matr.-Nr.: \_\_\_\_\_

*a)*

*b)*

Punkte


 Aufgabe 4 Matr.-Nr.: \_\_\_\_\_

a)

b1)

$\bar{c}_{ij}$	①	②	③	④
①	—			
②		—		
③			—	
④				—


Punkte

 Aufgabe 4 Matr.-Nr.: \_\_\_\_\_

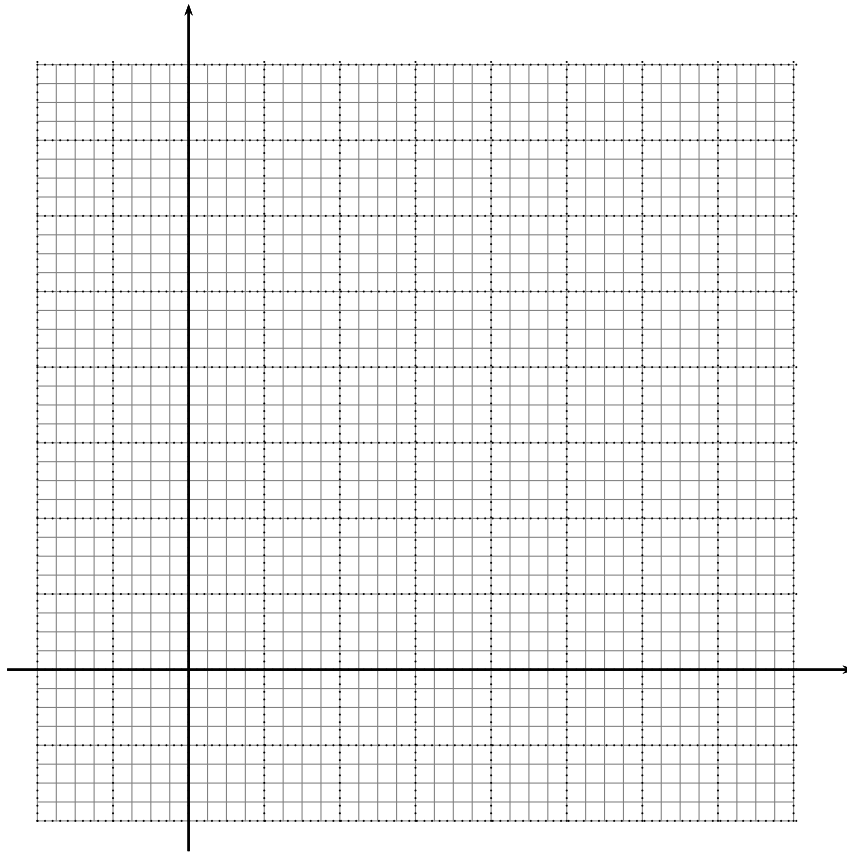
*b2)*

*b3)*

Punkte

 Aufgabe 5 Matr.-Nr.: \_\_\_\_\_


a)

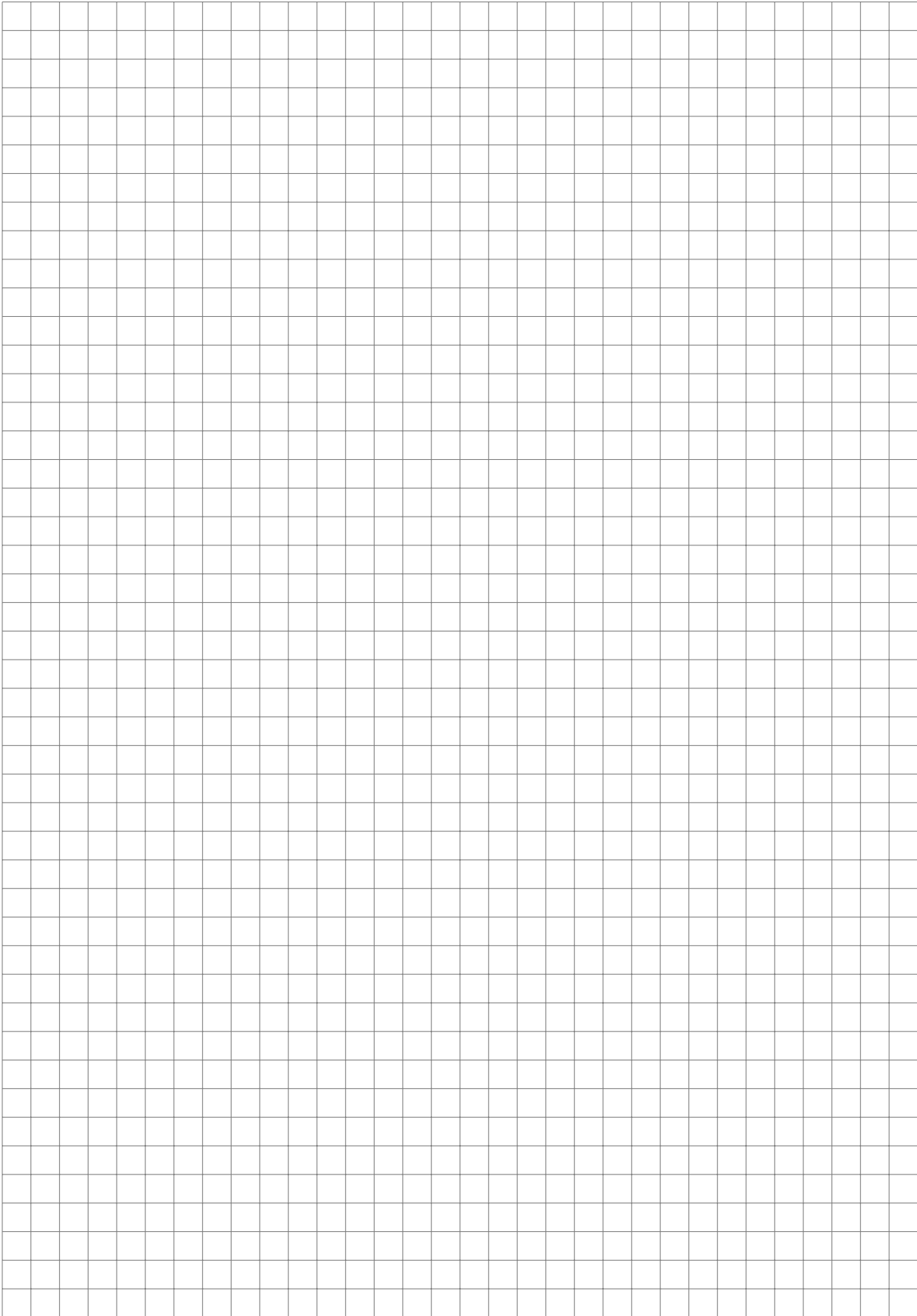


b)


c)

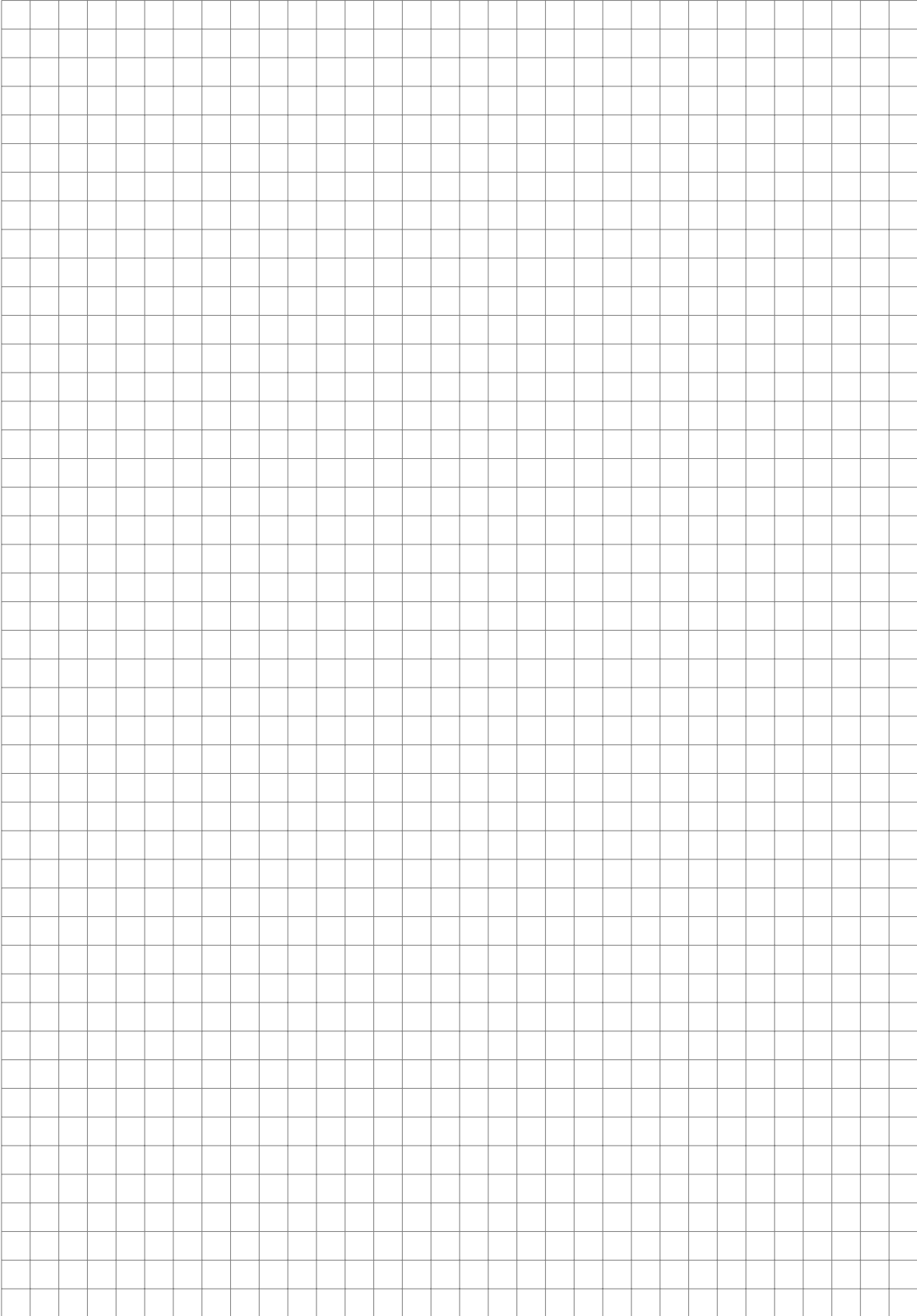
Punkte

 Aufgabe \_\_\_\_ Matr.-Nr.: \_\_\_\_\_



Punkte

 Aufgabe \_\_\_\_ Matr.-Nr.: \_\_\_\_\_




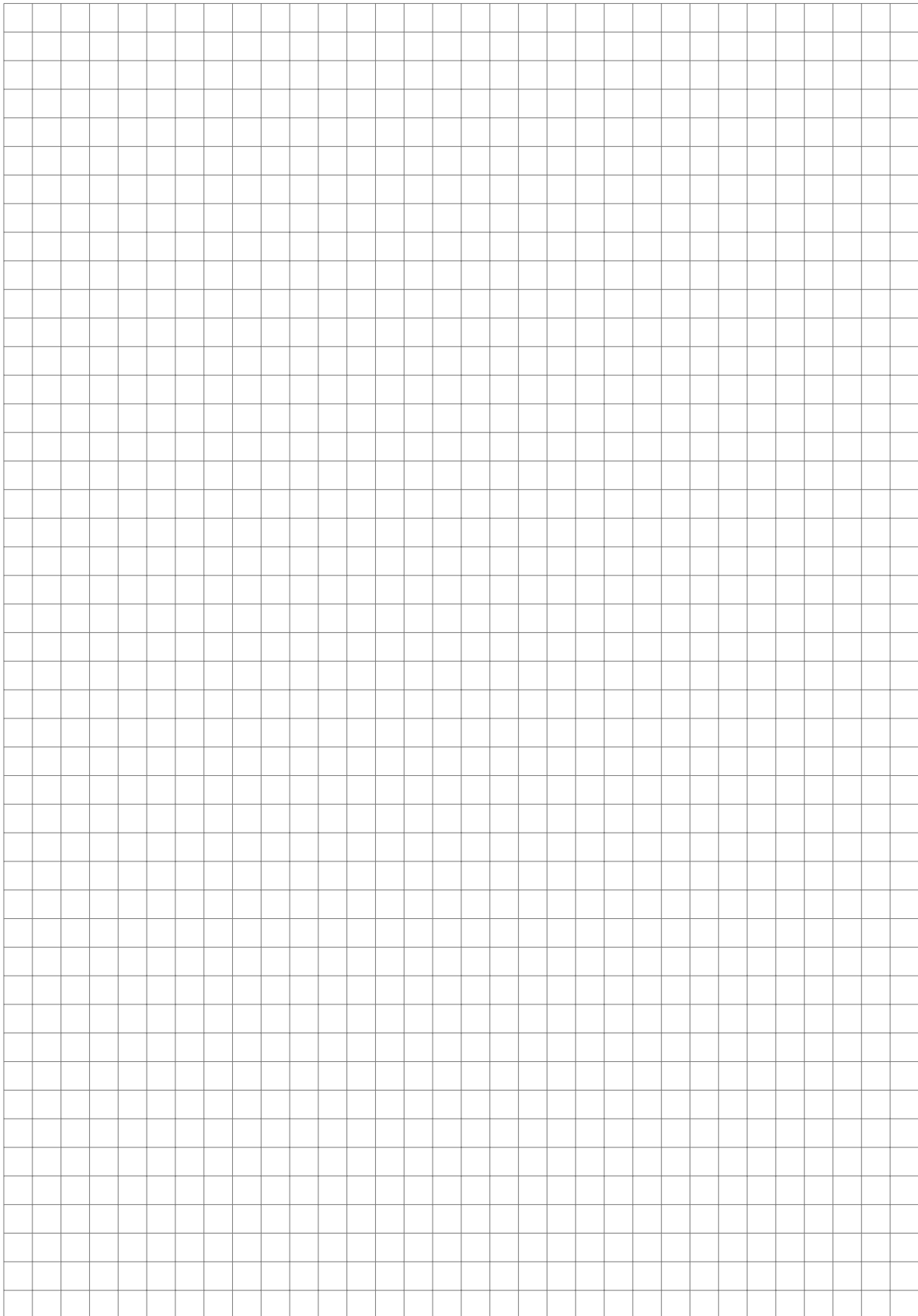
Punkte







 Aufgabe \_\_\_\_ Matr.-Nr.: \_\_\_\_\_



Punkte