

Diplomarbeit

# Chaotische Transportprozesse auf Netzwerken

vorgelegt von

**Angelika Hirrle**

am

30. März 2020



Fakultät für Mathematik und Informatik

Lehrgebiet Analysis

Prof. Dr. Delio Mugnolo

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Lineare Dynamische Systeme</b>	<b>3</b>
2.1	Halbgruppen, Erzeuger und Resolvente . . . . .	3
2.2	Halbgruppen und das Abstrakte Cauchy-Problem . . . . .	7
2.3	Beispiele spezieller Halbgruppen und ihrer Erzeuger . . . . .	8
2.3.1	Der Back-Shift und die von ihm erzeugte Halbgruppe . . . . .	9
2.3.2	Der Translationsoperator und die von ihm erzeugte Halbgruppe . . . . .	11
2.3.3	Der Differentialoperator und die von ihm erzeugte Halbgruppe . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Flüsse auf Netzwerken</b>	<b>14</b>
3.1	Grundlagen der Graphentheorie . . . . .	14
3.2	Folgen- und Funktionenräume auf Graphen . . . . .	17
3.2.1	Folgenräume auf Graphen . . . . .	17
3.2.2	Funktionenräume auf Graphen . . . . .	18
3.3	Der Transportprozess auf einem Graphen . . . . .	20
3.3.1	Der Transportprozess als diskreter, dynamischer Prozess . . . . .	20
3.3.2	Der Transportprozess als kontinuierlicher, dynamischer Prozess . . . . .	22
3.4	Adjazenzmatrizen als beschränkte Operatoren auf $l^p$ . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Hyperzyklizität und Chaotizität</b>	<b>37</b>
4.1	Hyperzyklische und chaotische Operatoren . . . . .	38
4.1.1	Allgemeine Betrachtungen . . . . .	38
4.1.2	Hyperzyklizität und Chaotizität auf Produkträumen . . . . .	44
4.2	Hyperzyklische und chaotische stark, stetige Halbgruppen . . . . .	45
4.2.1	Allgemeine Betrachtungen . . . . .	46
4.2.2	Hyperzyklizität und Chaotizität auf Produkträumen . . . . .	60
4.2.3	Hyperzyklizität und Chaotizität auf Unterräumen . . . . .	65

4.3	Hyperzyklizität und Chaotizität ausgewählter Operatoren und Operatorhalbgruppen . . . . .	74
4.3.1	Der Back-Shift und die von ihm erzeugte Halbgruppe . . . . .	74
4.3.2	Der Translationsoperator und die von ihm erzeugte Halbgruppe . . . . .	76
4.3.3	Der Differentialoperator und die von ihm erzeugte Halbgruppe . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Chaotische Transportprozesse auf Graphen von einfacher Struktur</b>	<b>78</b>
5.1	Chaotizität diskreter Transportprozesse . . . . .	79
5.2	Chaotizität kontinuierlicher Transportprozesse . . . . .	97
5.3	Zusammenhang der Chaotizität diskreter und kontinuierlicher Transportprozesse	101
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>109</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Wir wollen uns den chaotischen Transportprozessen auf Netzwerken nähern, in dem wir uns zunächst unabhängig voneinander mit den Begriffen des Netzwerkes, des Transportprozesses und der Chaotizität auseinandersetzen und diese Begriffe im Anschluss daran in einen gemeinsamen Kontext setzen und diskutieren. Wir beschreiben ein Netzwerk als mathematisches Objekt des Graphen mit Knoten und Kanten. Wir stellen uns nun vor, dass wir auf den Kanten eine Dichtefunktion gegeben haben und sind an der zeitlichen und räumlichen Ausbreitung dieser Anfangsdichte auf den Kanten des Graphen interessiert. Wir können diese Ausbreitung als Lösung eines Differentialgleichungssystems verstehen und haben somit einen kontinuierlichen Transportprozess definiert. Stellen wir uns hingegen die Knoten des Graphen als Zustände eines dynamischen Systems vor und die Kanten als mögliche Übergänge zwischen den Zuständen, so interessiert uns in diesem Fall die zeitliche Zustandsentwicklung in den Knoten. Auch dieser Prozess lässt sich als Lösung eines Systems von Differentialgleichungen beschreiben und wir haben es mit einem diskreten Transportprozess zu tun. Unter bestimmten Voraussetzungen ist es möglich, die Differentialgleichungssysteme als so genannte abstrakte Cauchy-Probleme zu schreiben, was es ermöglicht, mit Hilfe der Theorie der Operatorhalbgruppen Aussagen zu treffen, ob und unter welchen Bedingungen wir eine Lösung der soeben beschriebenen Transportprozesse erwarten dürfen. Im Fall diskreter Prozesse spielt dabei die Adjazenzmatrix des Graphen und im Fall kontinuierlicher Prozesse die Adjazenzmatrix des zugehörigen Kantengraphen eine wesentliche Rolle. Dies bedeutet, dass zum einen die Struktur des Graphen und zum anderen die Kantengewichte maßgeblichen Einfluss auf die Existenz und auch die Eigenschaften der Lösung haben. Insbesondere betrifft das eine Eigenschaft, die uns in dieser Arbeit interessiert, die Chaotizität. Wir wollen herausfinden, unter welchen Bedingungen sie entsteht und nähern uns der Beantwortung dieser Frage, in dem wir wie folgt vorgehen.

In Kapitel 2 stellen wir zunächst die benötigten Grundlagen zu linearen dynamischen Systemen zusammen. Dabei gehen wir auf Halbgruppen und ihre Erzeuger sowie den Zusammenhang mit dem bereits angesprochenen abstrakten Cauchy-Problem ein. Wir stellen ebenfalls spezielle, für diese Arbeit relevante Beispiele vor.

Kapitel 3 beinhaltet als weiteres Grundlagenkapitel die Beschreibung von Netzwerken als (gerichteter) Graph sowie die Definition von Folgen- und Funktionenräumen auf den Knoten und Kanten dieses Graphen. Mit diesen Voraussetzungen ist es dann möglich, diskrete und kontinuierliche Transportprozesse auf Netzen als Differentialgleichungssystem zu beschreiben, deren Lösungen sich mit Hilfe der in Kapitel 2 dargestellten Theorie beschreiben lassen. Ebenfalls Inhalt dieses Kapitels ist die Diskussion von Adjazenzmatrizen als beschränkte Operatoren, eine Eigenschaft, die eine entscheidende Rolle für die Eindeutigkeit der Lösungen spielt. Zudem erweitern wir in diesem Kapitel die in der Literatur diskutierten Fälle auf allgemeine Bochner-Räume und verallgemeinerte Adjazenzmatrizen.

Wir interessieren uns für Bedingungen, die dazu führen, dass die Lösungen der in Kapitel 3 vorgestellten Transportprozesse chaotisch sind. Was wir unter dieser Eigenschaft verstehen und welche Voraussetzungen für ihr Auftreten erfüllt sein müssen, ist Gegenstand von Kapitel 4 als letztes der drei Grundlagenkapitel.

In Kapitel 5 führen wir nun die Erkenntnisse aus den vorangegangenen Kapiteln zusammen, um zu untersuchen, welche Eigenschaften Graphen besitzen müssen, um chaotisches Verhalten der Transportprozesse hervorzurufen. Wie bereits erwähnt, kommt den Adjazenzmatrizen des Graphen und des Kantengraphen eine wichtige Bedeutung zu. Wir diskutieren zunächst den diskreten und den kontinuierlichen Fall getrennt voneinander. Für kontinuierliche Prozesse korrigieren wir dabei Aussagen zur Chaotizität aus der Literatur. Im Anschluss an diese Ausführungen widmen wir uns dem Zusammenhang der Chaotizität der diskreten und kontinuierlichen Prozesse.

Wir schließen in Kapitel 6 mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick auf weiterführende Arbeiten.

Die hier vorliegende Fassung der Arbeit enthält Korrekturen der eingereichten Fassung. Dies betrifft die Aussagen 5.2.1 - 5.2.4 und ihre Beweise in Abschnitt 5.2. An dieser Stelle sei Herrn Marvin Plümer sehr herzlich für die Änderungsvorschläge und die in diesem Zusammenhang geführten, intensiven Diskussionen gedankt.

## Kapitel 2

# Lineare Dynamische Systeme

Für die in dieser Arbeit zu untersuchende Fragestellung, unter welchen Bedingungen sich Halbgruppen auf Graphen chaotisch verhalten, werden wir in diesem Kapitel die halbgruppentheoretischen Grundlagen zusammenstellen. Wir werden zunächst in Abschnitt 2.1 die Operatorhalbgruppen diskutieren. Dabei betrachten wir insbesondere stark stetige Halbgruppen und ihre Erzeuger. Des Weiteren werden sich für die Untersuchung der Chaotizitätseigenschaft der Halbgruppen in den folgenden Kapiteln die spektralen Eigenschaften der Halbgruppe und ihres Erzeugers als zentrales Hilfsmittel herausstellen. Wir präsentieren daher ebenfalls wichtige diesbezügliche Begriffe und Zusammenhänge. In Abschnitt 2.2 werden wir das so genannte abstrakte Cauchy-Problem vorstellen, welches uns in den folgenden Kapiteln begegnen wird und wir werden die Wohlgestelltheit des Problems, d.h. die eindeutige Lösbarkeit mit der im vorangegangenen Abschnitt vorgestellten Halbgruppentheorie verbinden. Zum Abschluss dieses Kapitels sind in Abschnitt 2.3 die Charakteristika einiger Halbgruppen zusammengefasst, die in dieser Arbeit auftreten werden. Die hier zusammengestellten Definitionen und Propositionen sind, soweit nicht anderes angegeben, Engel und Nagel 2000 entnommen.

### 2.1 Halbgruppen, Erzeuger und Resolvente

Wir beginnen mit der Definition einer Halbgruppe bzw. eines linearen dynamischen Systems sowie der des Orbits.

**Definition 2.1.1.** *Halbgruppe und Orbit*

Eine Familie  $\{T(t) | t \geq 0\}$  beschränkter, linearer Operatoren auf einem Banach-Raum  $X$  heißt Halbgruppe oder lineares, dynamisches System, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$(FE) \begin{cases} T(t+s) = T(t)T(s) & \forall t, s \geq 0 \\ T(0) = I \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Die Menge  $\{T(t)x : t \in \mathbb{R}_+\}$  heißt Orbit des Anfangswertes  $x$ .

Von besonderer Bedeutung sind zwei Halbgruppentypen, die wir im Folgenden definieren. Dabei sei mit  $\mathcal{L}(X)$  die Menge aller linearen, beschränkten Operatoren auf einem Banach-Raum  $X$  bezeichnet.

**Definition 2.1.2.** Gleichmäßig stetige Halbgruppe

Eine Halbgruppe  $\{T(t) | t \geq 0\}$  auf einem Banach-Raum  $X$  heißt gleichmäßig stetig, wenn die Abbildung  $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto T(t) \in (\mathcal{L}(X), \|\cdot\|)$  stetig bezüglich der gleichmäßigen Operator-topologie ist.

**Proposition 2.1.3.** Beschränkte Operatoren und gleichmäßig stetige Halbgruppen

Sei  $X$  ein Banach-Raum,  $A \in \mathcal{L}(X)$  und  $(e^{tA})_{t \geq 0} := \{e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} | t \geq 0\}$ . Dann gilt:

1. Die so definierte Halbgruppe  $(e^{tA})_{t \geq 0}$  ist gleichmäßig stetig.
2. Jede gleichmäßig stetige Halbgruppe  $\{T(t) | t \geq 0\}$  ist von der Form  $\{e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} | t \geq 0\}$  für ein  $A \in \mathcal{L}(X)$ .
3. Die Abbildung  $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto T(t) := e^{tA} \in (\mathcal{L}(X), \|\cdot\|)$  ist differenzierbar und erfüllt die Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dt}T(t) = AT(t) \quad t \geq 0 \tag{2.1.2}$$

$$T(0) = I \tag{2.1.3}$$

4. Jede differenzierbare Funktion  $T(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow (\mathcal{L}(X), \|\cdot\|)$ , die die o.g. Differentialgleichung erfüllt ist von der Form  $T(t) = e^{tA}$  für ein  $A \in \mathcal{L}(X)$ .

**Definition 2.1.4.** Stark stetige Halbgruppe

Eine Halbgruppe  $\{T(t) | t \geq 0\}$  auf einem Banach-Raum  $X$  heißt stark stetige Halbgruppe, wenn die Abbildung

$$\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(X) \tag{2.1.4}$$

$$t \mapsto T(t) \tag{2.1.5}$$

stetig ist bezüglich der starken Operator-topologie. Dies ist gleichbedeutend damit, dass die Orbit-Abbildungen

$$\tilde{\zeta}_x : \mathbb{R}_+ \rightarrow X \tag{2.1.6}$$

$$t \mapsto \tilde{\zeta}_x(t) := T(t)x \tag{2.1.7}$$

stetig für jedes  $x \in X$  sind.

Der Nachweis der starken Stetigkeit einer Halbgruppe kann mit Hilfe des folgenden Kriteriums erfolgen.

**Proposition 2.1.5.** *Nachweis starker Stetigkeit*

Für eine Halbgruppe  $\{T(t)|t \geq 0\}$  auf einem Banach-Raum  $X$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1.  $\{T(t)|t \geq 0\}$  ist stark stetig.
2.  $\lim_{t \rightarrow 0} T(t)x = x, \forall x \in X$ .

Für stark stetige Halbgruppen gilt mit der folgenden Proposition 2.1.6, dass die Operatornormen von oben beschränkt sind. Dies führt uns zum Begriff der Wachstumsschranke für diese Halbgruppe.

**Proposition 2.1.6.** *Wachstumsschranke*

Für jede stark stetige Halbgruppe  $\{T(t)|t \geq 0\}$  gibt es eine Konstante  $\omega \in \mathbb{R}$  mit  $M \geq 1$ , so dass gilt  $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad \forall t \geq 1$ . Die Konstante  $\omega_0 := \omega(\mathcal{T}) := \inf\{\omega \in \mathbb{R} : \exists M_\omega \geq 1 : \|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0\}$  heißt Wachstumsschranke.

Eine wichtige Rolle bei der Lösung des abstrakten Cauchy-Problems, welches wir im nächsten Abschnitt vorstellen, spielt der Erzeuger einer Halbgruppe. Wir werden ihn im Folgenden definieren und seine Eigenschaften und den Zusammenhang zu Eigenschaften der zugehörigen Halbgruppe in Theorem 2.1.8 und Proposition 2.1.9 angeben.

**Definition 2.1.7.** *Erzeuger einer Halbgruppe*

Der Erzeuger  $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$  einer stark stetigen Halbgruppe  $\{T(t)|t \geq 0\}$  auf einem Banach-Raum  $X$  ist der Operator

$$Ax := \dot{\xi}_x(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (T(h)x - x) \quad (2.1.8)$$

Dieser Operator  $A$  ist definiert für alle  $x$  im Definitionsbereich

$$D(A) := \{x \in X : \xi_x \text{ ist differenzierbar}\} \quad (2.1.9)$$

des Operators  $A$ .

**Theorem 2.1.8.** *Eigenschaften des Erzeugers*

Der Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe ist linear, abgeschlossen und dicht definiert. Er bestimmt die Halbgruppe eindeutig.

**Proposition 2.1.9.** *Zusammenhang zwischen gleichmäßig und stark stetigen Halbgruppen*

Sei  $\{T(t)|t \geq 0\}$  eine stark stetige Halbgruppe auf einem Banach-Raum  $X$  und sei  $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$  ihr Erzeuger. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

1. Der Erzeuger  $A$  ist beschränkt.
2. Es ist  $D(A) = X$ .
3.  $D(A)$  ist abgeschlossen in  $X$ .
4. Die Halbgruppe  $\{T(t) | t \geq 0\}$  ist gleichmäßig stetig. In diesem Fall gilt:

$$T(t) = e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \quad (2.1.10)$$

Da uns insbesondere spektrale Eigenschaften des Erzeugers einer Halbgruppe interessieren, nehmen wir im Folgenden an, dass  $A$  ein linearer, abgeschlossener Operator ist. Ein dichter Definitionsbereich wird hingegen nicht vorausgesetzt.

**Definition 2.1.10.** *Spektrum, Resolventenmenge und Resolvente*

Die Menge  $\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} | \lambda - A : D(A) \rightarrow X \text{ bijektiv}\}$  wird als Resolventenmenge des Operators  $A$  bezeichnet. Für  $\lambda \in \rho(A)$  heißt der beschränkte Operator  $R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1}$  die Resolvente (von  $A$  im Punkt  $\lambda$ ). Das Komplement  $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$  dieser Menge heißt Spektrum des Operators  $A$ .

**Definition 2.1.11.** *Punktspektrum*

Die Menge  $\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} | \lambda - A : D(A) \rightarrow X \text{ ist nicht injektiv}\}$  wird als Punktspektrum des Operators  $A$  bezeichnet. Jedes  $\lambda \in \sigma_p$  heißt Eigenwert, jedes  $x \in D(A)$  mit  $x \neq 0$  und  $(\lambda - A)x = 0$  heißt der zu  $\lambda$  gehörige Eigenvektor von  $A$ .

**Theorem 2.1.12.** *Erzeuger und Resolvente*

Sei  $\mathcal{T} := \{T(t) | t \geq 0\}$  eine stark stetige Halbgruppe auf einem Banachraum  $X$ . Seien  $\omega \in \mathbb{R}$  und  $M \geq 1$  so gewählt, dass  $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ ,  $\forall T \geq 0$ . Für den Erzeuger  $(A, D(A))$  der Halbgruppe  $\mathcal{T}$  gilt: Ist  $\Re \lambda > \omega$ , so liegt  $\lambda$  in der Resolventenmenge  $\rho(A)$  und die Resolvente ist gegeben mit

$$R(\lambda, A)x = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-\lambda s} T(s)x ds, \forall x \in X. \quad (2.1.11)$$

Wir schreiben:  $R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) ds$  und  $R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x ds$ .

Wir werden im Verlauf dieser Arbeit auch Halbgruppen diskutieren, die auf Unterräumen oder Produkträumen definiert sind. Wichtige Begriffe und Aussagen dafür sind im Folgenden zusammengestellt.

**Definition 2.1.13.** *Halbgruppen auf Unterräumen*

Sei  $\mathcal{T} := \{T(t) | t \geq 0\}$  eine stark stetige Halbgruppe auf einem Banach-Raum  $X$ . Sei  $Y \subset X$  ein abgeschlossener,  $\mathcal{T}$ -invarianter Unterraum von  $X$ , d.h.  $\forall t \geq 0$  gilt  $T(t)Y \subseteq Y$ . Dann bildet die auf  $Y$  eingeschränkte Menge  $\{T(t)|_Y | t \geq 0\}$  ebenfalls eine stark stetige Halbgruppe auf dem Banach-Raum  $Y$ . Sie heißt Unterraum-Halbgruppe.

**Proposition 2.1.14.** *Erzeuger von Halbgruppen auf Unterräumen*

Sei  $\mathcal{T} := \{T(t) | t \geq 0\}$  eine stark stetige Halbgruppe auf einem Banach-Raum  $X$ . Sei  $Y \subset X$  ein abgeschlossener,  $\mathcal{T}$ -invarianter Unterraum von  $X$ . Dann ist der Erzeuger  $(A|_Y, D(A|_Y))$  der restringierten Menge  $\{T(t)|_Y | t \geq 0\}$  gegeben mit

$$A|_Y y = Ay \tag{2.1.12}$$

$$D(A|_Y) = D(A) \cap Y \tag{2.1.13}$$

**Definition 2.1.15.** *Halbgruppen auf Produkträumen (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, Th. 2.41)*

Wir betrachten die direkte Summe abzählbar vieler Operatoren auf Banach-Räumen. Seien  $T_n$  Operatoren auf separablen Banachräumen  $X_n, n \geq 1$ . Für  $1 \leq p < \infty$  definieren wir die direkte- $l^p$ -Summe wie folgt:

$$\left( \bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n \right)_{l^p} := \{ (x_n)_{n \geq 1} | x_n \in X_n, n \geq 1, \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty \}. \tag{2.1.14}$$

Versehen mit der Norm  $\|(x_n)_n\| = (\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p)^{\frac{1}{p}}$  ist dies ein separabler Banach-Raum. Angenommen es gilt  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$ . Dann ist die direkte Summe der Operatoren  $T_n$  wie folgt definiert

$$\left( \bigoplus_{n=1}^{\infty} T_n \right) (x_n)_n := (T_n x_n)_n. \tag{2.1.15}$$

Dies ist ein Operator auf  $(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n)_{l^p}$  und auf  $(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n)_{c_0}$ .

## 2.2 Halbgruppen und das Abstrakte Cauchy-Problem

Mit der im vorangegangenen Abschnitt vorgestellten Theorie sind wir nun in der Lage, dass abstrakte Cauchy-Problem (ACP) zu formulieren und seine Lösungen anzugeben. Wir beginnen mit der Definition.

**Definition 2.2.1.** *Abstraktes Cauchy-Problem*

Sei  $X$  ein Banach-Raum,  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  ein linearer Operator,  $x \in X$  und  $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$  eine Funktion mit Werten in  $X$ . Das Anfangswertproblem

$$(ACP) \begin{cases} \dot{u}(t) = Au(t) & t \geq 0, \\ u(0) = x, \end{cases} \tag{2.2.1}$$

heißt das zu  $(A, D(A))$  und  $x \in X$  assoziierte Abstrakte Cauchy-Problem (ACP).

Wir definieren nun zunächst, was wir darunter verstehen, dass die Funktion  $u$  eine Lösung des (ACP) ist.

**Definition 2.2.2.** *Klassische Lösung des (ACP)*

Eine Funktion heißt klassische Lösung des (ACP), wenn  $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$  stetig differenzierbar bezüglich  $X$  ist,  $u(t) \in D(A) \forall t \geq 0$  gilt und die Gleichungen (2.2.1) des (ACP) erfüllt sind.

In der folgenden Proposition treffen wir eine Aussage darüber, welche Funktionen klassische Lösungen des (ACP) sind.

**Proposition 2.2.3.** *Klassische Lösung des (ACP)*

Sei  $(A, D(A))$  der Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe  $\{T(t) | t \geq 0\}$ . Für  $x \in D(A)$  ist die Funktion

$$u : \mathbb{R}_+ \rightarrow X \tag{2.2.2}$$

$$t \mapsto u(t) := T(t)x \tag{2.2.3}$$

die eindeutige klassische Lösung des (ACP).

Uns interessieren die (ACP), für die eine Lösung existiert, die zudem eindeutig ist und die stetig von den Werten des Definitionsbereiches abhängt. Wir wollen derartige (ACP) wohlgestellt nennen (Definition 2.2.4). Proposition 2.2.5 macht eine Aussage darüber, für welche Operatoren  $A$  wir diese gewünschte Wohlgestelltheit erwarten dürfen.

**Definition 2.2.4.** *Wohlgestelltheit des (ACP)*

Das zu einem abgeschlossenen Operator  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  assoziierte (ACP) heißt wohlgestellt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind

1. Für jedes  $x \in D(A)$  gibt es eine eindeutige Lösung  $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$  des (ACP).
2.  $D(A)$  liegt dicht in  $X$ .
3. Für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ , für die gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} u(t, x_n) = 0$  gleichmäßig auf kompakten Intervallen  $[0, t_0]$ .

**Proposition 2.2.5.** *Stark stetige Halbgruppen und Wohlgestelltheit des (ACP)*

Für einen abgeschlossenen Operator  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  ist das assoziierte (ACP) genau dann wohlgestellt, wenn  $A$  der Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe ist.

## 2.3 Beispiele spezieller Halbgruppen und ihrer Erzeuger

Wir stellen in diesem Abschnitt Operatorhalbgruppen und ihre Erzeuger vor, die im Verlauf dieser Arbeit auftreten werden. Als Grundlage dienen uns die Ausführungen in Desch, Schappacher und Webb 1997 sowie Grosse-Erdmann und Manguillot 2011.

### 2.3.1 Der Back-Shift und die von ihm erzeugte Halbgruppe

Bei der Analyse diskreter Verschiebungen betrachten wir als darunterliegende Banach-Räume  $X$  die Folgenräume  $l^p, 1 \leq p < \infty$  und  $c_0$  sowie die gewichteten Folgenräume  $l_v^p$  und  $c_{0,v}$ , die wir im Folgenden definieren.

**Definition 2.3.1.** Raum der gewichteten  $l^p$ - und  $c_0$ -Folgen

Der Banach-Raum  $X$  der gewichteten  $l^p$ - bzw.  $c_0$ -Folgen, mit  $1 \leq p < \infty$  sei gegeben durch:

$$X = l_v^p = \left\{ (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid x_i \in \mathbb{C}, \sum_{i=1}^{\infty} v_i |x_i|^p < \infty \right\} \quad (2.3.1)$$

$$\text{mit } \|(x_i)_{i \in \mathbb{N}}\| = \left( \sum_{i=1}^{\infty} v_i |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.3.2)$$

$$X = c_{0,v} = \left\{ (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid x_i \in \mathbb{C}, \lim_{i \rightarrow \infty} v_i |x_i| = 0 \right\} \quad (2.3.3)$$

$$\text{mit } \|(x_i)_{i \in \mathbb{N}}\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} v_i |x_i| \quad (2.3.4)$$

Wir definieren sowohl auf den gewichteten als auch auf den ungewichteten Folgenräumen die diskrete Rückwärts-Verschiebung wie folgt

**Definition 2.3.2.** Rückwärts-Verschiebung

Sei  $X = l^p, X = l_v^p$  (mit  $1 \leq p < \infty$ ),  $X = c_0$  oder  $X = c_{0,v}$ . Dann ist die Rückwärts-Verschiebung  $B$  wie folgt definiert

$$B : X \rightarrow X \quad (2.3.5)$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto Bx = (x_2, x_3, x_4, \dots) \quad (2.3.6)$$

Im Falle der gewichteten Folgenräume entscheiden die Gewichte darüber, ob die Rückwärts-Verschiebung ein Operator auf dem jeweiligen Raum ist.

**Lemma 2.3.3.** Back-Shift-Operator, kurz: Back-Shift (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, L.4.4)

Sei  $X = l_v^p, 1 \leq p < \infty$ . der Raum der gewichteten Folgen in  $l^p$ , wobei  $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge positiver Gewichte ist. Die Rückwärts-Verschiebung  $B$  ist genau dann ein Operator (der Back-Shift) auf  $l_v^p$ , wenn es ein  $M > 0$  gibt, so dass für alle  $x \in l_v^p$  gilt:

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1}|^p v_n \right)^{\frac{1}{p}} \leq M \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p v_n \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (2.3.7)$$

was äquivalent ist zu  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{v_n}{v_{n+1}} < \infty$ .

Wenn wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit vom Back-Shift auf gewichteten Folgenräumen sprechen, setzen wir die o.g. Eigenschaft der Gewichte somit stets voraus. Der Fall der ungewichteten Folgenräume ist als Spezialfall mit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1)$  enthalten. Ausgehend von der Definition des Back-Shifts können wir einen davon abgeleitete Operator, den gewichteten Back-Shift definieren.

**Definition 2.3.4.** *Gewichtete Rückwärts-Verschiebung auf  $l^p$*

Sei  $X = l^p, 1 \leq p < \infty$  oder  $X = c_0$ . Dann ist die gewichtete Rückwärts-Verschiebung  $B_w$  wie folgt definiert

$$B_w : X \rightarrow X \tag{2.3.8}$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto B_w x = (w_2 x_2, w_3 x_3, w_4 x_4, \dots) \tag{2.3.9}$$

**Lemma 2.3.5.** *Gewichteter Back-Shift auf  $l^p$  (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, L.4.9)*

Sei  $X = l^p, 1 \leq p < \infty$  oder  $X = c_0$ . Dann ist die gewichtete Rückwärts-Verschiebung  $B_w$  genau dann ein Operator (der gewichtete Back-Shift), wenn  $\sup_{n \in \mathbb{N}} w_n < \infty$ .

Wir können einen Zusammenhang zwischen dem gewichtete Back-Shift  $B_w$  auf den Folgenräumen  $X = l^p, 1 \leq p < \infty$  bzw.  $X = c_0$  und dem Back-Shift  $B$  auf den gewichteten Folgenräumen  $X_v = l_v^p, 1 \leq p < \infty$  bzw.  $X_v = c_{0,v}$  herstellen, wenn folgendes gilt:

$$v_n = \left( \prod_{i=1}^n w_i \right)^{-p} \tag{2.3.10}$$

In diesem Fall gibt es einen Isomorphismus  $\phi_v$  mit

$$\phi_v : X_v \rightarrow X \tag{2.3.11}$$

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (x_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}, \tag{2.3.12}$$

so dass  $B_w \circ \phi_v = \phi_v \circ B$ . Somit kommutiert das folgende Diagramm und  $B : X_v \rightarrow X_v$  und  $B_w : X \rightarrow X$  sind konjugierte Operatoren.

$$\begin{array}{ccc} X_v & \xrightarrow{B} & X_v \\ \phi_v \downarrow & & \downarrow \phi_v \\ X & \xrightarrow{B_w} & X \end{array}$$

Da wir insbesondere an abstrakten Cauchy-Problemen interessiert sind und somit an stark stetigen Halbgruppen und ihren Erzeugern, wollen wir uns nun noch die Halbgruppe angeben, die durch den Back-Shift erzeugt wird.

**Lemma 2.3.6.** *Der Back-Shift und die von ihm erzeugte Halbgruppe (Desch, Schappacher und Webb 1997, L. 5.1)*

Sei  $X = l_v^p$  und  $B$  der Backshift-Operator auf  $X$ . Dieser ist ein beschränkter Operator auf  $X$ . Er erzeugt die folgende lineare Halbgruppe  $\{T(t) | t \geq 0\}$ :

$$T(t) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (2.3.13)$$

mit

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{j-i}}{(j-i)!} x_j \quad (2.3.14)$$

### 2.3.2 Der Translationsoperator und die von ihm erzeugte Halbgruppe

Wir betrachten in diesem Abschnitt kontinuierliche Verschiebungen. An die Stelle der (gewichteten) Folgenräume  $l^p, l_v^p$  bzw.  $c_0, c_{0,v}$  treten nun die (gewichteten) Funktionenräume  $L^p, L_\rho^p$  bzw.  $C^0, C_\rho^0$ . Um diese zu definieren benötigen wir zunächst den Begriff der zulässigen Gewichtsfunktion, deren Definition sowie wichtige Eigenschaft wir voranstellen.

**Definition 2.3.7.** *Zulässige Gewichtsfunktion (Desch, Schappacher und Webb 1997, Def. 4.1)*

Sei  $I = (-\infty, \infty)$  oder  $I = [0, \infty)$ . Eine messbare Funktion  $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt zulässige Gewichtsfunktion auf  $I$ , wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

1.  $\rho(\tau) > 0, \forall \tau \in I$
2. Es gibt eine Konstante  $M \geq 1$  und  $\omega \in \mathbb{R}$  so, dass  $\rho(\tau) \leq M e^{\omega t} \rho(t + \tau)$  für alle  $\tau \in I$  und alle  $t > 0$ .

**Lemma 2.3.8.** *Zulässige Gewichtsfunktion (Desch, Schappacher und Webb 1997, L. 4.2)*

Sei  $I = (-\infty, \infty)$  oder  $I = [0, \infty)$  und sei  $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine zulässige Gewichtsfunktion auf  $I$ . Für jedes  $l > 0$  gibt es Konstanten  $m_1, M_1$  mit  $0 < m_1 \leq M_1$  so, dass für alle  $\sigma \in I$  und  $\tau \in [\sigma, \sigma + l]$  gilt:

$$m_1 \rho(\sigma) \leq \rho(\tau) \leq M_1 \rho(\sigma + l). \quad (2.3.15)$$

**Definition 2.3.9.** *Gewichtete Funktionenräume Desch, Schappacher und Webb 1997, Def. 4.3)*

Sei  $I = (-\infty, \infty)$  oder  $I = [0, \infty)$  und sei  $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine zulässige Gewichtsfunktion auf  $I$ . Dann

definieren wir die folgenden Funktionenräume:

$$L^p_\rho(I, \mathbb{C}) = \left\{ u : I \rightarrow \mathbb{C} \mid u \text{ messbar, } \int_I |u(\tau)|^p \rho(\tau) d\tau < \infty \right\} \quad (2.3.16)$$

$$\text{mit } \|u\|_p = \left( \int_I |u(\tau)|^p \rho(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.3.17)$$

$$C_{0,\rho}(I, \mathbb{C}) = \left\{ u : I \rightarrow \mathbb{C} \mid u \text{ stetig, } \lim_{\tau \pm \infty} \rho(\tau) u(\tau) = 0 \right\} \quad (2.3.18)$$

$$\text{mit } \|u\|_\infty = \sup_{\tau \in I} |u(\tau)| \rho(\tau). \quad (2.3.19)$$

**Definition 2.3.10.** *Translationsoperator*

Sei  $X = L^p_\rho(\mathbb{R}_+)$ ,  $1 \leq p < \infty$  oder  $C_{0,\rho}(\mathbb{R}_+)$ . Der Translations-Operator  $T$

$$T : X \rightarrow X \quad (2.3.20)$$

$$f \mapsto (Tf)(x) = f(x+1) \quad (2.3.21)$$

ist wohldefiniert, genau dann wenn gilt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} \frac{\rho(x)}{\rho(x+1)} < \infty \quad (2.3.22)$$

Zulässige Gewichtsfunktionen führen somit zur Wohldefiniertheit des Translationsoperators. Sprechen wir im Verlauf dieser Arbeit von Operatoren auf gewichteten Funktionenräumen, werden wir stets davon ausgehen, dass die zugrunde liegenden Gewichtsfunktionen zulässig sind.

### 2.3.3 Der Differentialoperator und die von ihm erzeugte Halbgruppe

Auch in diesem Abschnitt legen wir (gewichtete) Funktionenräume zugrunde. Wir betrachten nun jedoch nicht mehr den Translationsoperator, sondern den Differentialoperator. Wir werden sehen, dass dieser die so genannte Translationshalbgruppe erzeugt. Deren Element  $T(1)$  stimmt mit dem im vorangegangenen Abschnitt diskutierten Translationsoperator  $T$  überein. Wir beginnen mit der Definition des Differentialoperators und der Translationshalbgruppe.

**Definition 2.3.11.** *Differentialoperator*

Sei  $X = L^p_\rho(I, \mathbb{C})$  oder  $X = C_{0,\rho}(I, \mathbb{C})$  mit zulässiger Gewichtsfunktion  $\rho$ . Dann ist der Differentialoperator  $A$  wie folgt definiert

$$Au = u' \quad (2.3.23)$$

$$\text{dom}(A) = \{u \in X \mid u \text{ absolut stetig, } u' \in X\} \quad (2.3.24)$$

$$= \{u \in W^{1,p}(I, \mathbb{C})\} \quad (2.3.25)$$

**Definition 2.3.12.** *Translationshalbgruppe (Desch, Schappacher und Webb 1997, Def. 4.5)*

Sei  $I = (-\infty, \infty)$  oder  $I = [0, \infty)$  und  $X = L^p_\rho(I, \mathbb{C})$  oder  $X = C_{0,\rho}(I, \mathbb{C})$  mit zulässiger Gewichtsfunktion  $\rho$ . Für  $t \geq 0$  und  $u \in X$  definieren wir  $T(t)u$  mit  $[T(t)u](\tau) = u(\tau + t)$  und nennen  $\{T(t) | t \geq 0\}$  die (Vorwärts-)Translationsgruppe auf  $X$ .

Wir schließen den Abschnitt mit dem folgenden Lemma, welches den Zusammenhang zwischen Differentialoperator und Translationshalbgruppe darstellt.

**Lemma 2.3.13.** *Starke Stetigkeit und Erzeuger der Translationshalbgruppe (Desch, Schappacher und Webb 1997, L. 4.6)*

Sei  $I = (-\infty, \infty)$  oder  $I = [0, \infty)$  und  $X = L^p_\rho(I, \mathbb{C})$  oder  $X = C_{0,\rho}(I, \mathbb{C})$  mit zulässiger Gewichtsfunktion  $\rho$ . Die Translationshalbgruppe  $\{T(t) | t \geq 0\}$  auf  $X$  ist eine stark stetige Halbgruppe linearer Operatoren. Ihr Erzeuger  $A$  ist der mit Definition 2.3.11 gegebene Differentialoperator.

## Kapitel 3

# Flüsse auf Netzwerken

Bei Flüssen auf Netzwerken handelt sich um einen so genannten Transportprozess, der die zeitlich und räumlich variante Dichte von Partikeln oder aber die Zustandsänderung eines Systems beschreibt. Um diese Phänomene mathematisch beschreiben und analysieren zu können, benötigen wir einige grundlegende Definitionen und Zusammenhänge. In Kapitel 3.1 werden wir Begriffe der Graphentheorie einführen, die es uns ermöglichen, Netze als mathematisches Objekt des Graphen zu beschreiben. Um den Transportprozess auf dem Netz untersuchen zu können, müssen wir zunächst Folgen- und Funktionenräume auf den Knoten bzw. Kanten des Graphen definieren. Dies ist Inhalt von Kapitel 3.2. Nach dieser Vorarbeit können wir dann den Transportprozess in Kapitel 3.3 mit Hilfe von partiellen Differentialgleichungen modellieren und analysieren. Wir werden sehen, dass man den Transportprozess als abstraktes Cauchy-Problem schreiben kann, womit wir die in Kapitel 2 dargestellte Theorie für die Lösung derartiger Problem nutzen können. Von großer Bedeutung ist dabei die Beschränktheit der betrachteten Operatoren. Den Zusammenhang dieser Eigenschaft mit der Struktur des Graphen werden wir in Abschnitt 3.4 diskutieren.

### 3.1 Grundlagen der Graphentheorie

Wir beginnen zunächst mit der Definition einiger wesentlicher Begriffe, die es ermöglichen, Netze als mathematische Objekte zu beschreiben. Als Grundlage dienen uns dabei, soweit nicht anders angegeben, Bollobás 1998 sowie Bondy und Murty 2008.

**Definition 3.1.1.** *Graph*

Ein Graph  $G = (V(G), E(G))$  ist ein geordnetes Paar disjunkter Mengen, wobei  $E \subseteq V \times V$  eine Menge ungeordneter Paare von  $V$  ist. Die Menge  $V(G)$  ist die Knotenmenge, ein Element  $v \in V$  heißt ein Knoten von  $G$ . Die Menge  $E(G)$  ist die Kantenmenge, ein Element  $e \in E$  heißt eine Kante von  $G$ .

**Definition 3.1.2.** *Gerichteter Graph*

Ein gerichteter oder orientierter Graph  $G = (V(G), E(G))$  ist ein geordnetes Paar disjunkter Mengen, wobei  $E \subseteq V \times V$  eine Menge geordneter Paare von  $V$  ist. Die Menge  $V(G)$  ist die Knotenmenge, ein Element  $v \in V$  ein Knoten. Die Menge  $E(G)$  ist die Menge der gerichteten Kanten oder Bögen, ein Element  $e = (u, v) \in E$  eine gerichtete Kante oder ein Bogen. Der Knoten  $u$  heißt Anfangsknoten, der Knoten  $v$  Endknoten des Bogens.

**Definition 3.1.3.** *Einfacher (gerichteter) Graph*

Ein (gerichteter) Graph heißt einfach, wenn er weder Schlingen noch parallele (Bögen) Kanten besitzt.

**Definition 3.1.4.** *Gewichteter (gerichteter) Graph*

Ein (gerichteter) Graph heißt gewichtet, wenn jedem Bogen/jeder Kante  $e \in E$  ein Gewicht  $\rho(e) \in \mathbb{R}$  zugeordnet ist.

**Definition 3.1.5.** *Kantengraph*

Der Kantengraph  $L(G) = (V(L), E(L))$  des (gerichteten) Graphen  $G$  ergibt sich durch Vertauschen der Knoten- und Kanten- bzw. Bogenmenge, wobei gilt:

1.  $V(L) = E(G)$
2. (a) Zwei Knoten  $v_i = e_i, v_j = e_j \in V(L)$  sind genau dann über eine Kante  $e \in E(L)$  miteinander verbunden, wenn sie in  $G = (V(G), E(G))$  einen gemeinsamen Knoten besitzen.
- (b) Zwei Knoten  $v_i = e_i, v_j = e_j \in V(L)$  sind genau dann über einen Bogen  $e \in E(L)$  miteinander verbunden, wenn es in  $G = (V(G), E(G))$  Bögen  $e_i, e_j$  gibt, so dass der Endknoten von  $e_i$  mit dem Anfangsknoten von  $e_j$  übereinstimmt.

**Definition 3.1.6.** *Adjazenz*

Zwei Knoten  $v_i, v_j \in V$  heißen adjazent, wenn sie über eine Kante/einen Bogen miteinander verbunden sind, d.h. wenn es ein  $e \in E$  gibt mit  $e = \{v_i, v_j\}$  bzw.  $e = (v_i, v_j)$ .

**Definition 3.1.7.** *Inzidenz*

Ein Knoten  $v_i$  und eine Kante  $e$  heißen inzident, wenn  $v_i \in e = \{v_i, v_j\}$ . Ein Knoten  $v_i$  und ein Bogen  $e$  heißen negativ inzident, falls  $v_i$  Anfangsknoten des Bogens, d.h.  $e = (v_i, v_j)$  für ein  $v_j \in V$ . Sie heißen positiv inzident, falls  $v_i$  Endknoten des Bogens, d.h.  $e = (v_j, v_i)$  für ein  $v_j \in V$ .

**Definition 3.1.8.** *Lokal endlicher Graph, beschränkter Grad (Agrawal u. a. 2018)*

Ein Graph heißt lokal endlich, wenn für jeden Knoten  $u \in V$  gilt, dass die Menge  $\deg(u) := \{v \in V : \exists e \in E : e = \{u, v\}\}$  endlich ist. Ein lokal endlicher Graph heißt von beschränktem Grad (bzw. gleichmäßig lokal endlich), wenn die Menge  $\{\deg(v) : v \in V\}$  beschränkt ist.

**Definition 3.1.9.** Lokal endlicher gewichteter gerichteter Graph (Mugnolo 2014)

Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph. Für jeden Knoten  $u \in V$  seien die Mengen  $E_{\text{in}} := \{e \in E : \exists v \in V : e = (v, u)\}$  und  $E_{\text{out}} := \{e \in E : \exists v \in V : e = (u, v)\}$  sowie die folgenden Summen definiert:  $\deg_{\text{in}}(u) := \sum_{e \in E_{\text{in}}} \rho(e)$  und  $\deg_{\text{out}}(u) := \sum_{e \in E_{\text{out}}} \rho(e)$  definiert. Der Graph heißt eingehend lokal endlich, wenn es eine Konstante  $M_v$  gibt, so dass  $\deg_{\text{in}}(u) \leq M_v, \forall v \in V$ . Der Graph heißt ausgehend lokal endlich, wenn es eine Konstante  $M_v$  gibt, so dass  $\deg_{\text{out}}(u) \leq M_v, \forall v \in V$ . Er heißt lokal endlich, wenn er sowohl eingehend als auch ausgehend lokal endlich ist. Ist die Folge  $(\deg_{\text{in}})_{v \in V}$  beschränkt, heißt der Graph eingehend gleichmäßig lokal endlich. Ist die Folge  $(\deg_{\text{out}})_{v \in V}$  beschränkt, heißt der Graph ausgehend gleichmäßig lokal endlich. Gilt die Beschränktheit für beide Folgen, heißt der Graph gleichmäßig lokal endlich.

**Definition 3.1.10.** Inzidenzmatrix (Dorn 2008a)

Sei  $G$  ein gerichteter Graph. Die Ausgangs-Inzidenzmatrix  $\Phi^-$  und die Eingangs-Inzidenzmatrix  $\Phi^+$  sind wie folgt definiert:

$$(\Phi^-)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \xrightarrow{e_j} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\Phi^+)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \xrightarrow{e_j} v_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Bezeichnet  $w_{ij} := \rho(e_j)$  das Gewicht der Kante  $e_j$  mit Anfangsknoten  $v_i$ , so lässt sich die gewichtete Ausgangs-Inzidenzmatrix  $\Phi_w^-$  wie folgt definieren:

$$(\Phi_w^-)_{ij} = \begin{cases} w_{ij} & \text{falls } v_i \xrightarrow{e_j} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.1.2)$$

**Definition 3.1.11.** Adjazenzmatrix (Dorn 2008a)

Sei  $G$  ein gerichteter Graph. Seien die Gewichte seiner Kanten  $e_k$  mit Anfangsknoten  $v_j$  gegeben als  $w_{jk}$ . Dann ist die gewichtete Adjazenzmatrix  $\mathbb{A}$  definiert durch

$$(\mathbb{A}_w)_{ij} = \begin{cases} w_{jk} & \text{falls } v_j \xrightarrow{e_k} v_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.1.3)$$

Des Weiteren gilt  $\mathbb{A}_w = \Phi^+(\Phi_w^-)^T$ .

Die Adjazenzmatrix  $\mathbb{B}$  des zu  $G$  gehörigen Kantengraphen  $L(G)$  ist definiert mit

$$(\mathbb{B})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \exists v_k \in V(G) : \xrightarrow{e_j} v_k \xrightarrow{e_i} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.1.4)$$

Für die gewichtete Adjazenzmatrix  $\mathbb{B}_w$  des Kantengraphen gilt

$$(\mathbb{B}_w)_{ij} = \begin{cases} w_{ki} & \text{falls } \exists v_k \in V(G) : \xrightarrow{e_j} v_k \xrightarrow{e_i} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.1.5)$$

Des Weiteren gilt:  $\mathbb{B}_w = (\Phi_w^-)^T \Phi^+$ .

Wie wir noch sehen werden, spielen sowohl die Adjazenzmatrix des Graphen als auch die Adjazenzmatrix des zugehörigen Kantengraphen eine entscheidende Rolle für die Analyse von dynamischen Systemen auf Graphen. Um dies zu erkennen, benötigen wir noch einige Vorarbeit, die wir in den nächsten beiden Abschnitten leisten.

## 3.2 Folgen- und Funktionenräume auf Graphen

In diesem Abschnitt werden wir zunächst Folgenräume auf den Knoten bzw. Kanten definieren. Diese werden wir dann in Abschnitt 3.3.1 nutzen, um diskrete Transportprozesse zu beschreiben. Des Weiteren betten wir den Graphen in den  $\mathbb{R}^3$  ein und sind damit in der Lage, Funktionen auf den Kanten des Graphen zu definieren. Diese dienen uns dann in Abschnitt 3.3.2 für die Beschreibung kontinuierlicher Transportprozesse. Wir beziehen uns in diesem Abschnitt auf Mugnolo 2014.

### 3.2.1 Folgenräume auf Graphen

Wir stellen in diesem Abschnitt gewichtete Knoten- und Kantenfolgen vor.

**Definition 3.2.1.** *Gewichtete Knoten*

Sei  $s : V \rightarrow (0, \infty)$ . Für  $p \in [0, \infty]$  bezeichne  $l_s^p(V)$  den Raum aller Funktionen  $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass:

$$\|f\|_{l_s^p(V)} := \left( \sum_{v \in V} |f(v)|^p s(v) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad \text{für } p \in [1, \infty)$$

$$\|f\|_{l_s^\infty(V)} := \sup_{v \in V} |f(v)| s(v) < \infty \quad \text{für } p = \infty.$$

Wir erhalten mit dieser Definition somit einen gewichteten  $l^p$ - bzw.  $c_0$ -Folgenraum, wie wir ihn mit Definition 2.3.1 eingeführt haben. Dabei bezeichnen wir die Folgenglieder hier mit  $v$  (statt  $x_i$ ) und die Gewichte mit  $s(v)$  (statt mit  $v_i$ ).

**Definition 3.2.2.** *Gewichtete Kanten*

Sei  $\rho : E \rightarrow (0, \infty)$ . Für  $p \in [0, \infty]$  bezeichne  $l_\rho^p(E)$  den Raum aller Funktionen  $u : E \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass:

$$\|u\|_{l_\rho^p(E)} := \left( \sum_{e \in E} |u(e)|^p \rho(e) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad \text{für } p \in [1, \infty)$$

$$\|u\|_{l_\rho^\infty(E)} := \sup_{e \in E} |u(e)| \rho(e) < \infty \quad \text{für } p = \infty.$$

Auch in diesem Fall erhalten wir wieder einen gewichteten  $l^p$ - bzw.  $c_0$ -Folgenraum wie in Definition 2.3.1. Dabei bezeichnen wir die Folgenglieder hier mit  $e$  (statt  $x_i$ ) und die Gewichte mit

$\rho(e)$  (statt mit  $v_i$ ). Des Weiteren entsprechen die Kantengewichte  $\rho(e)$  hier den Gewichten  $w_{ij}$  in der Definition 3.1.11 der gewichteten Adjazenzmatrix  $A_w$ .

### 3.2.2 Funktionenräume auf Graphen

In diesem Abschnitt definieren wir Funktionenräume auf Graphen und beginnen dafür mit der Einbettung des Graphen in den  $\mathbb{R}^3$ .

**Lemma 3.2.3.** *Einbettung eines Graphen in den  $\mathbb{R}^3$*

Jeder Graph  $G = (V, E)$  kann in den  $\mathbb{R}^3$  eingebettet werden, d.h.

1. Jeder Knoten  $v \in V$  kann bijektiv einem Punkt  $x_v \in \mathbb{R}^3$  zugeordnet werden.
2. Zwei Punkte  $x_v, x_w \in \mathbb{R}^3$  sind genau dann über einen Bogen verbunden, wenn  $v$  und  $w$  adjazent in  $G$  sind.

Wenn wir mit Lemma 3.2.3 für einen gegebenen gewichteten Graphen die Gewichte der Kanten als deren Länge interpretieren, führt uns dies zur Definition eines metrischen Graphen.

**Definition 3.2.4.** *Metrischer Graph*

Sei  $(V, E, \rho)$  ein gewichteter, gerichteter Graph. Sei

$$\mathfrak{E} := \prod_{e \in E} \{e\} \times (0, \rho(e)) \quad (3.2.1)$$

Dann heißt das Paar  $\mathfrak{G} := (V, \mathfrak{E})$  der metrische Graph über  $G$ . Die Elemente von  $\mathfrak{E}$  heißen metrische Kanten.

Auf einem metrischen Graphen lässt sich nun wie folgt ein Funktionenraum  $L^p(\mathfrak{G})$  definieren.

**Definition 3.2.5.** *Lebesgue-Räume auf metrischen Graphen*

Für  $p \in [1, \infty]$  bezeichne  $L^p(\mathfrak{G})$  den Raum aller messbaren Funktionen  $u : \mathfrak{E} \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass:

$$\|u\|_{L^p(\mathfrak{G})} := \left( \sum_{e \in E} \int_0^{\rho(e)} |u(e, x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad \text{für } p \in [1, \infty)$$

$$\|u\|_{L^\infty(\mathfrak{G})} := \inf\{c \in \mathbb{R} : |u(e, x)| \leq c \text{ für f.a. } x \in (0, \rho(e)) \text{ und alle } e \in E\} \quad \text{für } p = \infty.$$

Derartige Lebesgue-Räume auf metrischen Graphen sind eng verbunden mit den im folgenden definierten vektorwertigen Lebesgue-Räumen. Diese umfassen die  $L^p$ -Funktionen, die jedem Element aus dem Intervall  $(0, 1)$  ein Element aus dem Folgenraum  $l_\rho^p(E)$  zuordnen.

**Definition 3.2.6.** *Vektorwertige Lebesgue-Räume (Bochner-Räume)*

Für  $p \in [1, \infty)$  bezeichne  $L^p((0, 1); l_\rho^p(E))$  den Raum aller messbaren Funktionen  $u : (0, 1) \rightarrow l_\rho^p(E)$ , so dass:

$$\|u\|_{L^p((0,1);l_\rho^p(E))} := \int_0^1 \left( \sum_{e \in E} |u(e, x)|^p \rho(e) \right) dx < \infty \quad (3.2.2)$$

Der Zusammenhang zwischen den in Definition 3.2.5 und Definition 3.2.6 vorgestellten Räumen zeigt sich, wenn wir die Kanten des metrischen Graphen auf die Länge Eins normieren, d.h.  $x \in (0, \rho(e)) \rightarrow \tilde{x} = \frac{x}{\rho(e)} \in (0, 1)$  und das Intervall  $(0, 1)$  mit dem Lebesgue-Maß  $\rho dx$  versehen. Denn dann gilt:

$$\|u\|_{L^p(\mathfrak{G})}^p = \|u\|_{L^p((0,1);l_\rho^p(E))}^p \quad (3.2.3)$$

und

$$L^p(\mathfrak{G}) \simeq L^p((0, 1); l_\rho^p(E)) \quad (3.2.4)$$

In Anlehnung an die Definition von vektorwertigen Lebesgue-Räumen definieren wir nun vektorwertige Sobolev-Räume.

**Definition 3.2.7.** *Vektorwertige Sobolev-Räume*

Für  $p \in [1, \infty)$  bezeichne  $W^{1,p}((0, 1); l_\rho^p(E))$  den Raum aller messbaren Funktionen  $u : (0, 1) \rightarrow l_\rho^p(E)$ , so dass:

1.  $u \in L^p((0, 1); l_\rho^p(E))$
2.  $u' \in L^p((0, 1); l_\rho^p(E))$ , wobei  $u'$  die schwache Ableitung von  $u$  bezeichnet.

Somit besteht  $W^{1,p}((0, 1); l_\rho^p(E))$  aus allen schwach differenzierbaren Elementen von  $L^p((0, 1); l_\rho^p(E))$ , deren schwache Ableitungen ebenfalls in  $L^p((0, 1); l_\rho^p(E))$  liegen.

Wie bereits erwähnt, ist der Raum  $L^p((0, 1); l_\rho^p(E))$  für  $p \in [1, \infty)$  isometrisch isomorph zum Raum  $L^p(\mathfrak{G})$  der  $p$ -integrierbaren Funktionen auf einem metrischen Graphen. Der Sobolev-Raum  $W^{1,p}(\mathfrak{G})$  ist hingegen nur zu einem abgeschlossenen Unterraum des vektorwertigen Sobolev-Raum  $W^{1,p}((0, 1); l_\rho^p(E))$  isomorph. Es ist der Unterraum, der die Adjazenzbedingungen des Graphen respektiert.

**Lemma 3.2.8.** *Sobolev-Raum über dem metrischen Graphen*

Für  $p \in [1, \infty)$  ist der Sobolev-Raum  $W^{1,p}(\mathfrak{G})$  über einem metrischen Graphen  $\mathfrak{G}$  definiert als

$$W^{1,p}(\mathfrak{G}) := \{u \in W^{1,p}((0, 1); l_\rho^p(E)) : \exists u|_V \in \mathbb{C}^V : (\Phi^+)^T u|_V = u(0), (\Phi^-)^T u|_V = u(1)\} \quad (3.2.5)$$

Er ist ein Banach-Raum bezüglich der Norm

$$\|u\|_{W^{1,p}(\mathfrak{G})}^p := \|u\|_{L^p(\mathfrak{G})}^p + \|u'\|_{L^p(\mathfrak{G})}^p \quad (3.2.6)$$

Einen Zusammenhang zwischen Lebesgue- und Sobolev-Räumen auf Graphen stellt das folgende Lemma vor. Wir werden diese Eigenschaft benötigen, um kontinuierliche Transportprozesse auf Graphen zu diskutieren.

**Lemma 3.2.9.** *Dichtheit von  $W^{1,p}(\mathfrak{G})$  in  $L^p([0,1],l^p)$*

*Sei  $1 \leq p < \infty$ . Dann liegt  $W^{1,p}(\mathfrak{G})$  dicht in  $L^p(\mathfrak{G})$ ,  $1 \leq p < \infty$ .*

*Beweis.* Die Menge der Treppenfunktionen  $T([0,1],l^p)$  liegt dicht in  $L^p([0,1],l^p)$  (Gajewski, Gröger und Zacharias 1975). Des Weiteren gilt  $T([0,1],l^p) \subset W^{1,p}(\mathfrak{G})$ . Daher liegt mit  $T([0,1],l^p)$  auch  $W^{1,p}(\mathfrak{G})$  dicht in  $L^p([0,1],l^p)$ .  $\square$

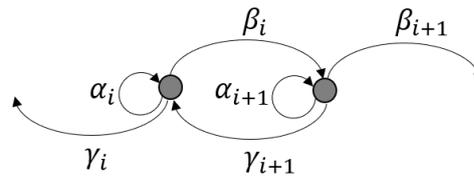
### 3.3 Der Transportprozess auf einem Graphen

Wie in Dorn 2008a angemerkt, gibt es zwei Ansätze, Transportprozesse auf Graphen zu betrachten. Der erste Ansatz interessiert sich allein für den zeitlichen Verlauf des Prozesses in den Knoten. Es handelt sich somit um einen diskreten, dynamischen Prozess. Diesem Ansatz widmen wir uns in Abschnitt 3.3.1. Der zweite Ansatz untersucht den kontinuierlichen, zeitlichen Verlauf des Transportprozessen auf den Kanten. Wir werden ihn in Abschnitt 3.3.2 beschreiben. Die in der Literatur untersuchten Transportprozesse stellen dabei entweder Flüsse auf endlichen Graphen (Kramar und Sikolya 2005) oder aber auf unendlichen Graphen (Dorn, Keicher und Sikolya 2009, Dorn 2008b) dar. Für die Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit werden uns letztgenannte interessieren. Warum dies so ist, werden wir in Kapitel 5 zeigen. Des Weiteren liegen den Untersuchungen meist die Banach-Räume  $X = l_s^1$  bzw.  $X = L^1((0,1),l^1)$  zugrunde. Wir werden die Betrachtungen in dieser Arbeit auf  $X = l_s^p$  bzw.  $X = L^p((0,1),l_p^p)$ ,  $p \in [1, \infty)$  erweitern.

#### 3.3.1 Der Transportprozess als diskreter, dynamischer Prozess

Ein Beispiel für einen diskreten Transportprozess stellt der sogenannte Geburts- und Sterbeprozess mit Proliferation dar. Dieser wird in der Literatur umfangreich diskutiert und in Kapitel 5 ausführlich dargestellt. Eine Population (z.B. eine Zellpopulation) wird dabei in Subpopulationen aufgeteilt, wobei die Elemente (Zellen) der  $n$ -ten Subpopulation eine bestimmte Eigenschaft (z.B.  $n$  Kopien eines bestimmten Gens) besitzen. Die Frage, die es zu beantworten gilt, ist die nach der sich zeitlichen ändernden Anzahl an Zellen in jeder Subpopulation (den Zuständen). Die zeitliche Änderung entsteht durch zwei Mechanismen. Zum einen kann mit einer bestimmten Rate durch Mutation eine Kopie eines Gens verschwinden (Sterberate  $\gamma_i$ ) oder eine zusätzliche entstehen (Geburtsrate  $\beta_i$ ). Dadurch werden Zellen von einer Subpopulation in eine andere "transportiert". Einen zweiten Mechanismus stellt die Zellteilung dar, die die

Rate  $\alpha_i$  des Wachstums einer Subpopulation beeinflusst. Beide Mechanismen führen somit zu einer Zustandsänderung des Systems "Population". Abbildung 3.1 zeigt den zum Geburts- und Sterbeprozess mit Proliferation gehörigen Graphen. Die Knoten repräsentieren die Subpopulationen, die Kanten die möglichen Übergänge zwischen den Subpopulationen. Da die Anzahl an Kopien eines bestimmten Gens und damit die Anzahl an Subpopulationen sehr groß werden kann, ist es zulässig, den Graphen als unendlich anzunehmen (Banasiak, Lachowicz und Moszynski 2005).



**Abbildung 3.1:** Geburts- und Sterbeprozess mit Proliferation mit variablen Koeffizienten: Sterberaten  $\gamma_i$ , Wachstumsraten  $\alpha_i$  und Geburtsraten  $\beta_i$ .

Sei nun  $f_n = f_n(t)$  die Anzahl an Elementen in der  $n$ -ten Subpopulation und  $f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  die zugehörige Folge. Sei  $f^0 = f(0)$  die Anfangspopulation zum Zeitpunkt  $t = 0$ . Dann lässt sich die zeitliche Änderung der Anzahl an Elementen in den einzelnen Subpopulationen durch das folgende Differentialgleichungssystem darstellen

$$(TG) \begin{cases} \frac{df_0}{dt} = \alpha_0 f_0 + \gamma_1 f_1 \\ \frac{df_n}{dt} = \alpha_n f_n + \beta_{n-1} f_{n-1} + \gamma_{n+1} f_{n+1} & n \geq 1 \\ f(0) = f^0 \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Die Lösung dieses Systems wollen wir unter Nutzung der in Kapitel 2 dargestellten Theorie gewinnen. Dafür müssen wir zunächst einmal einen geeigneten Banach-Raum  $X$  festlegen, in dem sowohl die Anfangsverteilung als auch die Lösung des Systems liegen. In einem zweiten Schritt wird das Differentialgleichungssystem für die Dynamik auf den Knoten in Form einer Differentialgleichung mit Operator  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  geschrieben, wobei  $D(A)$  den Definitionsbereich des Operators darstellt, in den auch die Randbedingungen eingehen. Stellt sich  $A$  als Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe  $\{T(t) | t \geq 0\}$  heraus, ist dann mit Proposition 2.2.5 das so definierte (ACP) wohlgestellt und seine Lösung  $u = T(t)u_0$  auch Lösung des Transportproblems.

Aus praktischen Gründen naheliegend ist für die Wahl des Banach-Raumes  $X = l^1$  mit Norm  $\|f\|_{l^1} = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(t)|$ , die die Anzahl an Elementen der gesamten Population angibt. Für darauf aufbauende Analysen werden aber auch, wie wir in Kapitel 5 sehen werden, die Banach-Räume  $X = l^p$ , versehen mit der Standardnorm oder der Banach-Raum  $X = l^1_s$  der gewichteten

$l^1$ -Folgen mit Norm  $\|f\|_{l^1_s} = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(t)|s_n$  gewählt. Als Operator  $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$  auf diesem Banach-Raum wird die Adjazenzmatrix  $A_w$  des Graphen mit

$$A := A_w = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \gamma_1 & & & \\ \beta_0 & \alpha_1 & \gamma_2 & & \\ & \beta_1 & \alpha_2 & \gamma_3 & \\ & & \beta_2 & \alpha_3 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.3.2)$$

sowie Definitionsbereich  $D(A) = \{f \in l^p : Af \in l^p\}$  mit  $p \in [1, \infty)$  bzw.  $D(A) = \{f \in l^1_s : Af \in l^1_s\}$  definiert. Mit dem so definierten Operator  $(A, D(A))$  ist das diskrete Transportproblem (TG) äquivalent zu dem folgenden (ACP)

$$(ACP) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f(t) = Af(t), & t \geq 0 \\ f(0) = f^0 \end{cases} \quad (3.3.3)$$

Sind die Koeffizientenfolgen beschränkt, ist es auch der Operator  $A$  (vgl. Abschnitt 3.4). Die von ihm erzeugte Halbgruppe  $\{T(t) | t \geq 0\}$  mit

$$T(t) = e^{tA_w} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A_w^k \quad (3.3.4)$$

ist mit 2.1.3 gleichmäßig stetige Lösung des (ACP). Sind die Koeffizientenfolgen unbeschränkt, ist es nach Banasiak, Lachowicz und Moszynski 2006 nicht trivial, einen Operator zu finden, der Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe ist. Die positive Antwort für diese Problemstellung, die die Autoren in Banasiak, Lachowicz und Moszynski 2006 unter bestimmten Einschränkungen an die Koeffizienten finden, stellen wir in Kapitel 5 vor.

### 3.3.2 Der Transportprozess als kontinuierlicher, dynamischer Prozess

In Dorn 2008a werden Transportprozesse als kontinuierliche, dynamische Prozesse ausführlich beschrieben und somit dient uns diese Arbeit als Grundlage für eine Einführung in diese Thematik. Ein Beispiel für einen derartigen Prozess stellt der in der Einleitung erwähnte Transport von Partikeln dar. Wir wollen ihn in einem Netzwerk, d.h. auf den Kanten eines Graphen über die zeitliche und räumliche Massenverteilung  $u$  auf den Kanten beschreiben, wobei wir davon ausgehen, dass die gesamt zu transportierende Masse endlich ist. Wir nehmen weiter an, dass ein unendlicher, einfacher, gerichteter, zusammenhängender Graph  $G = (V, E)$  gegeben ist, dessen Struktur über seine (gewichtete) Ausgangs- und Eingangs-Inzidenzmatrizen  $\Phi_w^-$  und  $\Phi^+$  beschrieben wird. Dabei gehen wir von den in Dorn 2008a gegebenen Annahmen aus:

1. Die Massenverteilung  $f_j$  zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  ist für jede Kante  $e_j$  bekannt.
2. Die Partikel können pro Kante nur in eine Richtung transportiert werden.
3. Kein Partikel kann in den Knoten verloren gehen, d.h. die Summe der ein- und ausfließenden Partikel ist identisch. Diese Bedingung wird auch als Kirchhoff-Bedingung bezeichnet.
4. Die Verteilung von Partikeln erfolgt nur in den Knoten.
5. Die Verteilung der Partikel in den Knoten  $v_i$  in die aus diesem Knoten herausführenden Kanten erfolgt gewichtet, wobei für die Gewichte gilt:  $\sum_{j:v_i \rightarrow e_j} w_{ij} = 1$

Des Weiteren nehmen wir an, dass die Kanten normiert sind, d.h. ihre Länge Eins beträgt und sie entgegen der Flussrichtung parametrisiert sind. Für die gesuchte räumliche und zeitliche Massenverteilung  $u_j$  gilt das Gleichungssystem (TG) (3.3.5). Dabei beschreibt die erste Zeile die Dynamik des Prozesses, die zweite Zeile die Anfangsbedingungen (IC) und die letzte Zeile die Anschlussbedingungen (BC) in den Knoten.

$$(TG) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u_j(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} u_j(x, t), & x \in (0, 1), t \geq 0 \\ u_j(x, 0) = f_j(x), & x \in (0, 1) \\ \phi_{ij}^- u_j(1, t) = w_{ij} \sum_{k \in J} \phi_{ik}^+ u_k(0, t), & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.3.5)$$

Wir wollen das Problem (TG) lösen, in dem wir es als Abstraktes Cauchy-Problem (ACP) auffassen und eine Lösung unter Verwendung der in Kapitel 2 vorgestellten Halbgruppen-Theorie finden. Dafür müssen wir zunächst einen Banach-Raum  $X$  wählen. Die Aufgabe ist es dann, einen Operator  $A$  auf einem Unterraum  $D(A) \subset X$  festzulegen und zu zeigen, dass dieser den Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe darstellt. Mit den Propositionen 2.2.3 und 2.2.5 ist dann die eindeutige Lösung des (ACP) und damit des (TG) gegeben durch  $u(t) = T(t)f$ .

Als zugrunde liegenden Banach-Raum  $X$  wählen wir zunächst  $X := L^1([0, 1], l^1)$  mit Norm  $\|f\|_X := \int_0^1 \|f(s)\|_{l^1} ds$  (Dorn 2008a). Als Operator  $A$  ist  $A := \frac{d}{dx}$  naheliegend. Wir suchen nun nach einem passenden Definitionsbereich  $D(A)$ . Damit in (TG)  $\frac{d}{dt} u_j(x, t)$  existiert, muss  $\frac{d}{dx} u_j(x, t)$  existieren. Ferner muss gelten  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ , d.h.  $\frac{d}{dx} u_j(x, t) \in X$ . Demzufolge muss gelten  $u \in W^{1,1}([0, 1], l^1)$ . Um zusätzlich auch die Randbedingungen (BC) zu erfüllen, müssen wir den Definitionsbereich weiter einschränken. Unter Verwendung von Proposition 3.3.1 können wir den Operator  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  wie folgt definieren:

$$A := \frac{d}{dx} \quad (3.3.6)$$

$$D(A) := \{v \in W^{1,1}([0, 1], l^1) | v(1) = \mathbb{B}_w v(0)\} \quad (3.3.7)$$

Das zu (TG) gehörende (ACP) ist damit äquivalent zu dem folgenden (ACP):

$$(ACP) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t) = Au(x, t), & t \geq 0 \\ u(0) = u_0 = (f_j)_{j \in \mathbb{N}} \in X, \end{cases} \quad (3.3.8)$$

denn es gilt die folgende Aussage.

**Proposition 3.3.1.** *Randbedingungen von (TG) im (ACP) (Dorn 2008a, Prop. 17)*

Eine Funktion  $u \in W^{1,1}([0, 1], l^1)$  erfüllt genau dann die Randbedingungen (BC) in (TG), wenn gilt  $u \in D(A)$ , d.h.

$$\phi_{ij}^- u_j(1) = w_{ij} \sum_{k \in J} \phi_{ik}^+ u_k(0) \quad \forall i, j \in \mathbb{N} \Leftrightarrow u(1) = \mathbb{B}_w u(0). \quad (3.3.9)$$

*Beweis.* ( $\Leftarrow$ ) Sei  $u(1) = \mathbb{B}_w u(0)$ . Wir schreiben  $\mathbb{B}_w$  als Produkt von Ausgangs- und Eingangs-Inzidenzmatrix und erhalten  $u(1) = (\Phi_w^-)^T \Phi^+ u(0)$ . Wir betrachten nun auf beiden Seiten der Gleichung die  $j$ -te Komponente. Die linke Seite entspricht dem Wert der Masseverteilung  $u_j(1, t)$  auf der den Knoten  $i$  verlassenden Kante  $j$ . Die rechte Seite entspricht der mit dem Kantengewicht  $w_{ij}$  der  $j$ -ten Kante gewichteten Summe aller in den Knoten  $i$  eingehenden Kanten  $k$ . Diese entspricht der  $i$ -ten Zeile der Matrix  $\Phi^+ u(0)$ . Es gilt somit:

$$u_j(1, t) = w_{ij} \sum_k \Phi_{ik}^+ u_k(0, t). \quad (3.3.10)$$

Wir multiplizieren beide Seiten mit  $\phi_{ij}^-$ . Da jede Kante  $j$  nur in einem Knoten  $i$  beginnen kann, gibt es in der  $j$ -ten Spalte von  $\Phi^-$  genau einen Eintrag ungleich Null und es ist  $\phi_{ij}^- = 1 \Leftrightarrow w_{ij} \neq 0$ . Somit gilt:

$$\phi_{ij}^- u_j(1, t) = w_{ij} \sum_k \Phi_{ik}^+ u_k(0, t). \quad (3.3.11)$$

( $\Rightarrow$ ) Wir betrachten die  $j$ -te Komponente von  $\mathbb{B}_w u(0, t)$  und wollen zeigen, dass diese der Masseverteilung  $u_j(1, t)$  entspricht, die einen Knoten  $i$  auf der  $j$ -ten Kante verlässt, was gleichbedeutend ist mit  $u(1, t) = \mathbb{B}_w u(0, t)$ . Es ist

$$(\mathbb{B}_w u(0, t))_j = (\Phi_w^-)_j^T \Phi^+ u(0, t) \quad (3.3.12)$$

$$= \sum_{k \in E} (\Phi_w^-)_{jk}^T (\Phi^+ u(0, t))_k \quad (3.3.13)$$

$$= \sum_{k \in E} (\Phi_w^-)_{jk}^T \sum_{l \in E} \Phi_{kl}^+ u_l(0, t) \quad (3.3.14)$$

Die Matrix  $(\Phi_w^-)^T$  besitzt in der  $j$ -ten Zeile genau einen Eintrag ungleich Null. Dieser entspricht dem Kantengewicht  $w_{ij}$  und befindet sich in Spalte  $i$ , wobei  $v_i$  der Anfangsknoten der Kante  $j$  ist. Folglich vereinfacht sich der Ausdruck und ergibt zusammen mit der Voraussetzung

$$\sum_{k \in E} (\Phi_w^-)^T_{jk} \sum_{l \in E} \Phi_{kl}^+ u_l(0, t) = w_{ij} \sum_{l \in E} \Phi_{il}^+ u_l(0, t) \quad (3.3.15)$$

$$= \phi_{ij}^- u_j(1, t) \quad (3.3.16)$$

$$= u_j(1, t) \quad (3.3.17)$$

□

Wir wollen nun zeigen, dass das oben beschriebene (ACP) wohlgestellt ist und die Lösung explizit angeben (Proposition 3.3.3). Dafür benötigen wir die Aussage des folgenden Theorems.

**Theorem 3.3.2.** *Resolvente des Differentialoperators im Transportproblem (Dorn 2008a, Th. 18)*

Für  $\lambda > 0$  ist die Resolvente des mit Gleichung (3.3.6) und (3.3.7) gegebenen Operators  $(A, D(A))$  durch die folgende Gleichung beschrieben

$$(R(\lambda, A)f)(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda n} \int_0^1 e^{-\lambda(t+1-s)} \mathbb{B}_w^{n+1} f(t) dt + \int_s^1 e^{\lambda(s-t)} f(t) dt, s \in [0, 1] \quad (3.3.18)$$

*Beweis.* Sei  $X = L^1([0, 1], l^1)$  und  $Y = W^{1,1}([0, 1], l^1)$ , sowie  $\lambda > 0$ . Wir wählen  $f \in X$  und betrachten die folgende Differentialgleichung erster Ordnung  $f = \lambda g - g'$ . Wir untersuchen, unter welchen Bedingungen wir eine Lösung  $g \in Y$  der Differentialgleichung bestimmen können. Mit der Methode der Variation der Konstanten erhalten wir:

$$g(s) = Ce^{\lambda s} + \int_s^1 f(\tau) e^{\lambda(s-\tau)} d\tau \quad (3.3.19)$$

Wir wollen erreichen, dass nicht nur  $g \in Y$  gilt, sondern sogar  $g \in \text{dom}(A)$  (vgl. Gleichung (3.3.7)), denn dann dürfen wir schreiben

$$f = \lambda g - g' \quad (3.3.20)$$

$$= (\lambda - A)g. \quad (3.3.21)$$

Für  $g \in \text{dom}(A)$  muss gelten  $g(1) = \mathbb{B}_w g(0)$ . Setzen wir für  $g(0)$  und  $g(1)$  Gleichung (3.3.19) ein, erhalten wir

$$g(1) = \mathbb{B}_w g(0) \quad (3.3.22)$$

$$Ce^{\lambda} = \mathbb{B}_w C + \mathbb{B}_w \int_0^1 f(\tau) e^{-\lambda\tau} d\tau \quad (3.3.23)$$

$$(I - e^{-\lambda} \mathbb{B}_w)C = \mathbb{B}_w \int_0^1 f(\tau) e^{-\lambda(\tau+1)} d\tau. \quad (3.3.24)$$

Wir müssen nun zeigen, dass der Operator  $(I - e^{-\lambda}\mathbb{B}_w)$  invertierbar ist, denn in diesem Fall können wir Gleichung (3.3.24) nach  $C$  umstellen und diese Konstante und damit auch die Funktion  $g$  explizit angeben. Dies ist für  $\lambda > 0$  jedoch der Fall. Denn auf Grund der Tatsache, dass sich die Gewichte der Kanten  $i$ , die in einem Knoten  $j$  beginnen, zu Eins summieren, erhalten wir  $\|\mathbb{B}_w\| = 1$  und damit  $\|e^{-\lambda}\mathbb{B}_w\| < 1$  für  $\lambda > 0$ . In diesem Fall konvergiert die Neumann-Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} (e^{-\lambda}\mathbb{B}_w)^k$  und es gilt

$$(I - e^{-\lambda}\mathbb{B}_w)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda k} \mathbb{B}_w^k \quad (3.3.25)$$

und damit

$$C = (I - e^{-\lambda}\mathbb{B}_w)^{-1} \mathbb{B}_w \int_0^1 f(\tau) e^{-\lambda(\tau+1)} d\tau \quad (3.3.26)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda k} \mathbb{B}_w^k \mathbb{B}_w \int_0^1 f(\tau) e^{-\lambda(\tau+1)} d\tau \quad (3.3.27)$$

Wir setzen die Konstante in Gleichung (3.3.19) ein und erhalten

$$g(s) = C e^{\lambda s} + \int_s^1 f(\tau) e^{\lambda(s-\tau)} d\tau \quad (3.3.28)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda k} \mathbb{B}_w^k \mathbb{B}_w \int_0^1 f(\tau) e^{-\lambda(\tau+1)} d\tau e^{\lambda s} + \int_s^1 f(\tau) e^{\lambda(s-\tau)} d\tau \quad (3.3.29)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda k} \mathbb{B}_w^{k+1} \int_0^1 f(\tau) e^{-\lambda(\tau+1-s)} d\tau + \int_s^1 f(\tau) e^{\lambda(s-\tau)} d\tau \quad (3.3.30)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 e^{-\lambda k} \mathbb{B}_w^{k+1} f(\tau) e^{-\lambda(\tau+1-s)} d\tau + \int_s^1 f(\tau) e^{\lambda(s-\tau)} d\tau \quad (3.3.31)$$

Gleichzeitig gilt jedoch bei einer eindeutigen Lösung für  $g$ :  $(\lambda - A)g = f \Rightarrow g = (\lambda - A)^{-1}f = R(\lambda, A)f$ , womit Gleichung (3.3.31) gleichbedeutend mit der Resolvente von  $A$  ist.  $\square$

Wir sind nun in der Lage, die Lösung des kontinuierlichen Transportprozesses ( $TG$ ) wie folgt anzugeben:

**Proposition 3.3.3.** *Lösung der Transportgleichung (Dorn 2008a, Prop. 20/Th. 21)*

Sei  $X := L^1([0, 1], l^1)$  mit Norm  $\|f\|_X := \int_0^1 \|f(s)\|_{l^1} ds$ . Sei  $A$  der Operator  $A = \frac{d}{dx}$  mit  $D(A) = \{v \in W^{1,1}([0, 1], l^1) \mid v(1) = \mathbb{B}_w v(0)\}$ . Sei  $\{T(t) \mid t \geq 0\}$  die Halbgruppe mit

$$T(t)f(s) = \mathbb{B}_w^n f(t + s - n) \quad \text{für } n \leq t + s < n + 1, f \in X, n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.3.32)$$

Die Halbgruppe  $\{T(t) \mid t \geq 0\}$  ist eine stark, stetige Halbgruppe auf  $X$  mit Erzeuger  $A$ . Mit Proposition 2.2.5 ist das in Gleichung (3.3.8) gegebene (ACP) und somit der zugehörige Transportprozess in Gleichung (3.3.5) wohlgestellt.

*Beweis.* Wir beweisen die Aussagen in drei Schritten. Zunächst zeigen wir, dass die Halbgruppe  $\{T(t)|t \geq 0\}$  stark stetig ist. Dann beweisen wir, dass  $(A, D(A))$  der Erzeuger dieser Halbgruppe ist und folgern danach, dass das  $(ACP)$  wohlgestellt und die Lösung des Transportprozesses  $(TG)$  mit Gleichung (3.3.32) gegeben ist. Wir stellen den Beweisschritten die Feststellung voran, dass für alle  $n' \in \mathbb{N}_0$  und  $s'' \in [0, 1]$ :  $\mathbb{B}_w^{n'} f(s'') \in l^1$  und somit  $\mathbb{B}_w^{n'} f \in X$ . Dies gilt, denn  $\|\mathbb{B}_w\| = 1$ , da  $\mathbb{B}_w$  spalten-stochastisch ist. Daher gilt  $\|\mathbb{B}_w^n\| \leq \|\mathbb{B}_w\|^n = 1$  und somit  $\|\mathbb{B}_w^n f\| \leq \|f\|$ . Mit  $f \in X$  folgt  $\mathbb{B}_w^n f \in X$ .

Schritt 1: Wir zeigen, dass  $\{T(t)|t \geq 0\}$  eine stark stetige Halbgruppe ist und beginnen mit dem Nachweis der Halbgruppeneigenschaften (vgl. Definition 2.1.1). Sei  $f \in X$  gegeben. Für  $n \leq t + s < n + 1, s \in [0, 1]$  gilt nach Voraussetzung  $T(t)f(s) = \mathbb{B}_w^n f(t + s - n)$ . Und somit für den Fall  $t = 0$ :  $T(0)f(s) = \mathbb{B}_w^0 f(s) = f(s)$ . Somit ist  $T(0)$  die Identität und die Halbgruppeneigenschaft  $T(0) = I$  erfüllt. Seien nun  $a, b \in \mathbb{R}_+$  beliebig gegeben. Für jedes  $s \in [0, 1]$  wählen wir  $m \in \mathbb{N}$  so, dass  $m \leq b + s < m + 1$  und somit  $0 \leq b + s - m < 1$ . Wir setzen  $s' := b + s - m$ . Für dieses  $s'$  wählen wir  $k \in \mathbb{N}$  so, dass  $k \leq a + s' < k + 1$  und damit  $0 \leq a + b + s - (m + k) < 1$ . Wir setzen nun  $n := m + k$  und zeigen die zweite Halbgruppeneigenschaft:

$$T(a)T(b)f(s) = T(a)\mathbb{B}_w^m f(b + s - m) \quad (3.3.33)$$

$$= T(a)\mathbb{B}_w^m f(s') \quad (3.3.34)$$

$$= T(a)g(s') \quad (3.3.35)$$

$$= \mathbb{B}_w^k g(a + s' - k) \quad (3.3.36)$$

$$= \mathbb{B}_w^k \mathbb{B}_w^m f(a + s' - k) \quad (3.3.37)$$

$$= \mathbb{B}_w^{k+m} f(a + b + s - (m + k)) \quad (3.3.38)$$

$$= \mathbb{B}_w^n f(a + b + s - n) \quad (3.3.39)$$

$$= T(a + b)f(s) \quad (3.3.40)$$

Wir weisen nun unter Verwendung von Proposition 2.1.5 nach, dass die Halbgruppe stark stetig ist. Wir zeigen: Für  $t \rightarrow 0$  gilt  $T(t)f \rightarrow f$ , d.h.  $\|T(t)f - f\|_X \rightarrow 0$ . Sei  $s \in [0, 1]$  und  $n \in \mathbb{N}_0$  so, dass  $n \leq t + s < n + 1$ . Dann gilt:

$$\|T(t)f - f\|_X = \int_0^1 \|T(t)f(s) - f(s)\|_{l^1} ds \quad (3.3.41)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{1-(t-n)} \|\mathbb{B}_w^n f(t + s - n) - f(s)\|_{l^1} ds \\ &+ \int_{1-(t-n)}^1 \|\mathbb{B}_w^{n+1} f(t + s - (n + 1)) - f(s)\|_{l^1} ds \end{aligned} \quad (3.3.42)$$

Für  $t \rightarrow 0$  ist  $n = 0$ . Für das erste Integral in Gleichung (3.3.42) gilt unter Beachtung, dass mit

$f \in D(A) : f' \in X$ , d.h.  $\|f'\|_X < \infty$ :

$$\int_0^{1-(t-n)} \|\mathbb{B}^n f(t+s-n) - f(s)\|_{l^1} ds \quad (3.3.43)$$

$$= \int_0^{1-t} \|f(t+s) - f(s)\|_{l^1} ds \quad (3.3.44)$$

$$= \int_0^{1-t} \left\| \frac{t}{t} f(t+s) - f(s) \right\|_{l^1} ds \quad (3.3.45)$$

$$\leq t \int_0^{1-t} \left\| \frac{f(t+s) - f(s)}{t} \right\|_{l^1} ds \quad (3.3.46)$$

$$= t \int_0^{1-t} \|f'(s)\|_{l^1} ds \rightarrow 0 \quad (3.3.47)$$

Für das zweite Integral in Gleichung (3.3.42) gilt für  $t \rightarrow 0$  ebenfalls:

$$\int_{1-(t-n)}^1 \|\mathbb{B}^{n+1} f(t+s-(n+1)) - f(s)\|_{l^1} ds \quad (3.3.48)$$

$$= \int_{1-t}^1 \|\mathbb{B} f(t+s-1) - f(s)\|_{l^1} ds \rightarrow 0 \quad (3.3.49)$$

Wir haben somit gezeigt, dass  $\|T(t)f - f\| \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow 0$ . Mit Proposition 2.1.5 ist  $\{T(t) | t \geq 0\}$  eine stark stetige Halbgruppe. Da  $\mathbb{B}$  spalten-stochastisch ist, gilt  $\|T(t)\| = 1, \forall t \geq 0$  und daher für die Wachstumsschranke  $\omega_0 = 0$ .

Schritt 2: Wir wollen zeigen, dass der in den Gleichungen (3.3.6) und (3.3.7) definierte Operator  $(A, D(A))$  der Erzeuger der oben vorgestellten stark stetigen Halbgruppe ist. Wir nehmen dafür an, dass  $(C, D(C))$  ihr Erzeuger ist und zeigen, dass  $(A, D(A))$  mit diesem übereinstimmt. Sei  $f \in D(A)$  und  $s \in [0, 1]$ . Dann ist für jedes  $t \geq 0$   $T(t)f \in D(A)$  und damit auch  $e^{-\lambda t} T(t)f \in D(A)$  eine stetige Funktion. Wir betrachten das Integral:

$$y = \int_0^t e^{-\lambda \tau} (T(\tau)f) d\tau. \quad (3.3.50)$$

Da  $e^{-\lambda t} T(t)f$  stetig ist, ist das Integral stetig differenzierbar und  $Ay = e^{-\lambda t} T(t)f$ . Wir betrachten nun die Graphennorm von  $y$  für  $t \rightarrow \infty$ . Es ist

$$\|y\|_{D(A)} = \|y\|_X + \|Ay\|_X \quad (3.3.51)$$

$$= \|y\|_X + \|y'\|_X \quad (3.3.52)$$

$$= \left\| \int_0^t e^{-\lambda \tau} (T(\tau)f) d\tau \right\|_X + \|e^{-\lambda t} T(t)f\|_X \quad (3.3.53)$$

Sei  $\omega_0$  die Wachstumsschranke für  $\{T(t) | t \geq 0\}$  und  $\lambda > \omega_0$ . Für den zweiten Summanden gilt dann die Abschätzung:

$$\|e^{-\lambda t} T(t)f\|_X \leq M e^{(\omega_0 - \lambda)t} \|f\|_X \quad (3.3.54)$$

$$\rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow \infty \quad (3.3.55)$$

Wir zeigen nun, dass auch der erste Summand in Gleichung (3.3.53) konvergiert. Dafür zeigen wir, dass  $y$  eine Cauchy-Folge im Banach-Raum  $X$ , und damit eine konvergente Folge ist. Genauer zeigen wir, dass  $\forall \varepsilon > 0 \exists T_\varepsilon \forall T_\varepsilon < t_1 < t_2 : \left\| \int_{t_1}^{t_2} e^{-\lambda\tau} (T(\tau)f) d\tau \right\|_X < \varepsilon$ . Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben und sei  $T_\varepsilon = \ln \frac{\varepsilon(1-\omega_0)}{M\|f\|_X} (\omega_0 - \lambda)^{-1}$ . Es ist

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} e^{-\lambda\tau} (T(\tau)f) d\tau \right\|_X \leq \int_{t_1}^{t_2} \|e^{-\lambda\tau} (T(\tau)f)\|_X d\tau \quad (3.3.56)$$

$$\leq \int_{t_1}^{t_2} M e^{(\omega_0 - \lambda)\tau} \|f\|_X d\tau \quad (3.3.57)$$

$$\leq \frac{M\|f\|_X}{\lambda - \omega_0} \left( e^{(\omega_0 - \lambda)t_1} - e^{(\omega_0 - \lambda)t_2} \right) \quad (3.3.58)$$

$$\leq \frac{M\|f\|_X}{\lambda - \omega_0} \left( e^{(\omega_0 - \lambda)t_1} \right) \quad (3.3.59)$$

$$< \varepsilon \quad (3.3.60)$$

Somit konvergiert  $y$  in Graphennorm, die mit der  $W^{1,1}$ -Norm übereinstimmt und daher auch in Supremumsnorm, d.h.

$$\sup_{s \in [0,1]} \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} T(\tau)f(s) d\tau \right\|_{l^1} < \infty \quad (3.3.61)$$

Somit ist die folgende Funktion für alle  $f \in D(A)$  ein beschränkter Operator:

$$(R(\lambda, C)f)(s) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} (T(t)f)(s) dt. \quad (3.3.62)$$

Da  $D(A)$  dicht in  $X$  liegt, lässt sich dieser Operator auf ganz  $X$  stetig fortsetzen und stellt somit die Resolvente von  $C$  dar. Wir werden nun zeigen, dass  $R(\lambda, C)$  auf der dichten Menge  $D(A) \subset X$  und damit auf ganz  $X$  mit  $R(\lambda, A)$  übereinstimmt.

Unter Nutzung von Gleichung (3.3.32) sowie Substitution  $\tau := s + t - n$  bzw.  $\tau := s + t$  bzw.  $n' := n - 1$  können wir zeigen, dass dies äquivalent zu Gleichung (3.3.18) in Theorem 3.3.2 ist:

$$(R(\lambda, C)f)(s) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} (T(t)f)(s) dt \quad (3.3.63)$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbb{B}_w^n f(t + s - n) dt, \quad n \leq t + s < n + 1 \quad (3.3.64)$$

$$= \int_0^{1-s} e^{-\lambda t} f(t + s) dt + \sum_{n=1}^\infty \int_{n-s}^{n+1-s} e^{-\lambda t} \mathbb{B}_w^n f(t + s - n) dt \quad (3.3.65)$$

$$= \int_{\tau=s}^1 e^{-\lambda(\tau-s)} f(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^\infty \int_{\tau=0}^1 e^{-\lambda(\tau-s+n)} \mathbb{B}_w^n f(\tau) d\tau \quad (3.3.66)$$

$$= \int_s^1 e^{-\lambda(\tau-s)} f(\tau) d\tau + \sum_{n'=0}^\infty \int_0^1 e^{-\lambda(\tau-s+n'+1)} \mathbb{B}_w^{n'+1} f(\tau) d\tau \quad (3.3.67)$$

$$= R(\lambda, A)f(s) \quad (3.3.68)$$

Da  $D(A)$  mit Lemma 3.2.9 dicht in  $X$  liegt, stimmen die beschränkten Operatoren  $R(\lambda, C)$  und  $R(\lambda, A)$  auf einer dichten Teilmenge von  $X$  und damit auf ganz  $X$  überein. Folglich gilt  $(A, D(A)) = (C, D(C))$  ist der Erzeuger der stark stetigen Halbgruppe  $\{T(t) | t \geq 0\}$ .

Schritt 3: Da  $(A, D(A))$  als Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe insbesondere abgeschlossen ist, erhalten wir mit Proposition 2.2.5 daher, dass das  $(ACP)$  und damit das zugehörige  $(TG)$  wolgestellt ist und die eindeutige Lösung in Gleichung (3.3.32) besitzt.  $\square$

Wir werden in Kapitel 4 sehen, dass die Einschränkungen, die wir für die Gewichte und damit die Adjazenzmatrix  $\mathbb{B}_w$  des Kantengraphen vornehmen, dazu führen, dass die von uns gewünschten Eigenschaften der Hyperzyklizität und Chaotizität nicht auftreten können. Wir werden diese Einschränkungen daher lockern. In diesem Zusammenhang lösen wir uns auch von der Matrix  $\mathbb{B}_w$  und betrachten allgemeine beschränkte Operatoren  $K$ , wobei die Interpretation von  $K$  als Adjazenzmatrix des Kantengraphen als Spezialfall enthalten ist. Wir fordern zusätzlich, dass  $\forall x \in X : K^n x \in X$ . Des Weiteren wollen wir uns nicht auf den Banach-Raum  $X = L^1([0, 1], \mathbb{R})$  beschränken, sondern die Bochner-Räume  $X = L^p([0, 1], Z)$ ,  $1 \leq p < \infty$  und  $Z$  ein Banach-Raum, zulassen. Unter diesen Voraussetzungen betrachten wir das folgende  $(ACP_{II})$ .

$$(ACP_{II}) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t) = Au(x, t), & t \geq 0 \\ u(0) = u_0 = (f_j)_{j \in \mathbb{N}} \in X, \end{cases} \quad (3.3.69)$$

wobei der Operator  $(A, D(A))$  wie folgt definiert ist.

$$A := \frac{d}{dx} \quad (3.3.70)$$

$$D(A) := \{v \in W^{1,p}([0, 1], Z) | v(1) = Kv(0)\} \quad (3.3.71)$$

Wir stellen die folgende Behauptung als Erweiterung der in Dorn 2008a vorgestellten Untersuchung auf.

**Theorem 3.3.4.** *Resolvente des  $(ACP_{II})$ -Differentialoperators*

Sei  $K$  ein beschränkter Operator, für den gilt:  $\forall x \in X : K^n x \in X$ . Dann ist für  $\lambda > \ln \|K\|$  die Resolvente des mit Gleichung (3.3.70) und (3.3.71) gegebenen Operators  $(A, D(A))$  durch die folgende Gleichung beschrieben

$$(R(\lambda, A)f)(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 e^{-\lambda(n+t+1-s)} K^{n+1} f(t) dt + \int_s^1 e^{\lambda(s-t)} f(t) dt, s \in [0, 1] \quad (3.3.72)$$

*Beweis.* Sei  $X = L^p([0, 1], Z)$  und  $Y = W^{1,p}([0, 1], Z)$ , sowie  $\lambda > \ln \|K\|$ . Wir gehen bis Gleichung (3.3.24) wie im Beweis zu Theorem 3.3.2 vor, wobei  $\mathbb{B}_w$  mit  $K$  zu ersetzen ist. Wir müssen nun zeigen, dass der Operator  $(I - e^{-\lambda}K)$  invertierbar ist. Dies ist für  $\lambda > \ln \|K\|$  jedoch der

Fall, denn es ist dann  $\|e^{-\lambda}K\| < 1$ . Die Neumann-Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} (e^{-\lambda}K)^k$  konvergiert und es gilt

$$(I - e^{-\lambda}K)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda k} K^k \quad (3.3.73)$$

Da  $e^{-\lambda k} K^k$  für alle  $k$  ein beschränkter Operator ist, dürfen wir die Funktion  $g$  wie in Theorem 3.3.2 bestimmen, da die Umformungen hin zu Gleichung (3.3.31) erlaubt sind. Es gilt daher:

$$g(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 e^{-\lambda(k+\tau+1-s)} K^{k+1} f(\tau) d\tau + \int_s^1 f(\tau) e^{\lambda(s-\tau)} d\tau \quad (3.3.74)$$

Wie in Theorem 3.3.2 schlussfolgern wir, dass damit die Resolvente von  $A$  gegeben ist.  $\square$

Unter Verwendung dieses Theorems können wir nun in Anlehnung an Proposition 3.3.3 die folgende Aussage zur Lösung des  $(ACP_{II})$  treffen.

**Proposition 3.3.5.**  $(ACP_{II})$ -Lösung

Sei  $X := L^p([0,1], Z)$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $Z$  ein Banach-Raum mit Norm  $\|f\|_X := \int_0^1 \|f(s)\|_Z^p ds$ . Sei  $K$  ein beschränkter Operator, für den gilt  $\forall x \in X : K^n x \in X$ . Sei  $A$  der Operator  $A = \frac{d}{dx}$  mit Definitionsbereich  $D(A) = \{v \in W^{1,p}([0,1], Z) | v(1) = Kv(0)\}$ . Sei  $\{T(t) | t \geq 0\}$  die Halbgruppe mit

$$T(t)f(s) = K^n f(t + s - n) \quad \text{für } n \leq t + s < n + 1, f \in X, n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.3.75)$$

Die Halbgruppe  $\{T(t) | t \geq 0\}$  ist eine stark, stetige Halbgruppe auf  $X$  mit Erzeuger  $A$ . Mit Proposition 2.2.5 ist das zugehörige  $(ACP)$  und somit der zugehörige Transportprozess in Gleichung (3.3.75) wohlgestellt.

*Beweis.* Wir führen den Beweis in drei Schritten analog zum Beweis von Proposition 3.3.3. Schritt 1. Wir zeigen: Die Halbgruppe  $\{T(t) | t \geq 0\}$  ist eine stark, stetige Halbgruppe auf  $X$ . Der Nachweis der Halbgruppeneigenschaften erfolgt wie in Beweis zu Proposition 3.3.3 mit  $\mathbb{B}_w = K$ , da alle dort durchgeführten Schritte bereits für den allgemeinen Fall, dass  $\mathbb{B}_w$  beschränkt und  $\mathbb{B}_w^n f \in X, \forall f \in X$  gelten. Für die starke Stetigkeit gehen wir ebenso vor. Sei  $s \in [0,1]$  und  $n \in \mathbb{N}_0$  so, dass  $n \leq t + s < n + 1$ . Es gilt:

$$\|T(t) - f\|_X^p = \int_0^1 \|T(t)f(s) - f(s)\|_Z^p ds \quad (3.3.76)$$

$$\int_0^{1-(t-n)} \|K^n f(t + s - n) - f(s)\|_Z^p ds \quad (3.3.77)$$

$$+ \int_{1-(t-n)}^1 \|K^{n+1} f(t + s - (n + 1)) - f(s)\|_Z^p ds \quad (3.3.78)$$

Für  $t \rightarrow 0$  ist  $n = 0$ . Für das erste Integral gilt unter Beachtung, dass mit  $f \in D(A) : f' \in X$ , d.h.  $\|f'\|_X < \infty$  wie im Beweis zu Proposition 3.3.3:

$$\int_0^{1-(t-n)} \|K^n f(t+s-n) - f(s)\|_Z^p ds \quad (3.3.79)$$

$$= \int_0^{1-t} \|f(t+s-n) - f(s)\|_Z^p ds \quad (3.3.80)$$

$$\leq t \int_0^{1-t} \left\| \frac{f(t+s-n) - f(s)}{t} \right\|_Z^p ds \quad (3.3.81)$$

$$= t \int_0^{1-t} \|f'(s)\|_Z^p ds \rightarrow 0 \quad (3.3.82)$$

Für das zweite Integral in Gleichung (3.3.78) gilt für  $t \rightarrow 0$ :

$$\int_{1-(t-n)}^1 \|K^{n+1} f(t+s-(n+1)) - f(s)\|_Z^p ds \quad (3.3.83)$$

$$= \int_{1-t}^1 \|K f(t+s-1) - f(s)\|_Z^p ds \rightarrow 0 \quad (3.3.84)$$

Wir haben somit gezeigt, dass  $\|T(t)f - f\|_X^p \rightarrow 0$  und daher auch  $\|T(t)f - f\|_X \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow 0$ , folglich ist  $\{T(t)|t \geq 0\}$  stark stetig.

Schritt 2. Wir zeigen:  $(A, D(A))$  ist der Erzeuger von  $\{T(t)|t \geq 0\}$ . Wir können dabei die Argumentation aus dem Beweis zu Proposition 3.3.3 bis Gleichung (3.3.60) übernehmen. Wir haben gezeigt, dass das Integral  $y$  mit

$$y = \int_0^t e^{-\lambda\tau} (T(\tau)f) d\tau \quad (3.3.85)$$

in Graphennorm konvergiert. Diese stimmt hier für  $t \rightarrow \infty$  mit der  $W^{1,p}$ -Norm überein, da  $\|y'\|_X \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ . Somit konvergiert  $y$  auch in  $W^{1,p}$ -Norm und daher in Sup-Norm. Daher ist auch hier der folgende Operator für alle  $f \in D(A)$  ein beschränkter:

$$(R(\lambda, C)f)(s) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} (T(t)f)(s) dt. \quad (3.3.86)$$

Mit der gleichen Argumentation wie im Beweis zu Proposition 3.3.3 folgt nun, dass  $(A, D(A))$  der Erzeuger der stark stetigen Halbgruppe  $\{T(t)|t \geq 0\}$  ist.

Schritt 3. Wir schlussfolgern: Das zugehörige (ACP) und der zugehörige Transportprozess (vgl. Gleichung 3.3.75) sind wohlgestellt.  $\square$

### 3.4 Adjazenzmatrizen als beschränkte Operatoren auf $l^p$

Wir haben im vorangegangenen Abschnitt gesehen, dass wir eine eindeutige Lösung des (ACP), welches den diskreten Transportprozess beschreibt erhalten, wenn die Adjazenzmatrix  $A_w$  des Graphen ein beschränkter Operator  $A : l^p \rightarrow l^p$  ist. Für die Wohlgestellttheit des (ACP), welches den kontinuierlichen Transportprozess beschreibt, haben wir hingegen gefordert, dass die

Adjazenzmatrix  $B_w$  des Kantengraphen bzw. der Operator  $K$ , der die verallgemeinerten Randbedingungen beschreibt, ein beschränkter Operator  $A : l^p \rightarrow l^p$  sein muss. Des Weiteren haben wir gefordert, dass  $\forall x \in l^p : K^n x \in l^p$  gelten muss. Wir wollen diese Bedingungen in Kontext mit der Struktur des Graphen setzen und die folgenden Fragestellungen beantworten:

1. Wie sehen (verallgemeinerte) Adjazenzmatrizen (des Kantengraphen)  $A_w, B_w, K$  aus, die die oben genannten Bedingungen erfüllen?
2. Welche Struktur haben die Graphen, deren Adjazenzmatrizen den oben genannten Bedingungen genügen?

Wir widmen uns zunächst der ersten Fragestellung und halten dafür fest, dass jeder beschränkte Operator  $B : l^p \rightarrow l^p$ , mit  $1 \leq p < \infty$  eine Matrixdarstellung besitzt. Welche Eigenschaften eine Matrix umgekehrt haben muss, um einen beschränkten Operator darzustellen, ist Inhalt der folgenden Propositionen und Theoreme. Diese sind Borwein und Jakimovski 1979 entnommen.

**Proposition 3.4.1.** *Matrizen als beschränkte Operatoren (Borwein und Jakimovski 1979)*

1. Eine Matrix  $A$  ist genau dann ein beschränkter Operator  $B : l^1 \rightarrow l^1$  wenn gilt:

$$\sup_{k \geq 0} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty. \quad (3.4.1)$$

2. Eine Matrix  $A$  ist genau dann ein beschränkter Operator  $B : l^\infty \rightarrow l^\infty$  wenn gilt:

$$\sup_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty. \quad (3.4.2)$$

3. Gelten sowohl Gleichung (3.4.1) als auch Gleichung (3.4.2), so ist die Matrix  $A$  ein beschränkter Operator  $B : l^p \rightarrow l^p$ ,  $p \geq 1$ .

4. Sei  $1 < p < \infty$ . Sei  $q$  so gewählt, dass  $p^{-1} + q^{-1} = 1$ . Dann ist  $A$  ein beschränkter Operator  $B : l^p \rightarrow l^p$ , wenn gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}|^q \right)^{\frac{p}{q}} < \infty. \quad (3.4.3)$$

5. Sei  $1 < p < \infty$ . Sei  $q$  so gewählt, dass  $p^{-1} + q^{-1} = 1$ . Dann ist  $A$  ein beschränkter Operator  $B : l^p \rightarrow l^p$  genau dann, wenn ihre Transponierte  $A^T$  ein beschränkter Operator  $B : l^q \rightarrow l^q$  ist.

**Theorem 3.4.2.** *Matrizen als beschränkte Operatoren (Borwein und Jakimovski 1979, Th. 1)*

Seien  $p, q$  so, dass  $p^{-1} + q^{-1} = 1$ . Sei  $b_{nk} > 0$ ,  $n, k = 0, 1, \dots$  Es gelte:

$$\sup_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| b_{nk}^{\frac{1}{p}} = M_1 < \infty \quad (3.4.4)$$

und

$$\sup_{k \geq 0} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{nk}| b_{nk}^{\frac{1}{q}} = M_2 < \infty. \quad (3.4.5)$$

Dann ist  $A$  ein beschränkter Operator  $B : l^p \rightarrow l^p$  mit  $\|A\| = \sup_{\|x\|_p \leq 1} \|Ax\|_p \leq M_1^{\frac{1}{q}} M_2^{\frac{1}{p}}$ .

Neben den  $l^p$ -Räumen betrachten wir auch die gewichteten  $l^1$ -Räume  $l_s^1$ . Welche notwendigen und hinreichenden Bedingungen erfüllt sein müssen, damit Matrizen beschränkte Operatoren  $B : l_s^1 \rightarrow l_s^1$  sind, stellen wir in den folgenden Theoremen zusammen.

**Theorem 3.4.3.** Matrizen als beschränkte Operatoren auf  $l_s^1$  (Williams und Ye 2013, Th. 1)

Sei  $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge positiver, reeller Zahlen. Dann ist eine gegebene Matrix  $A$  genau dann ein beschränkter Operator  $B : l_s^1 \rightarrow l_s^1$ , wenn

$$M := \sup_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{s_i a_{ij}}{s_j} \right| < \infty \quad (3.4.6)$$

In diesem Fall gilt  $\|A\| = M$ .

**Theorem 3.4.4.** Matrizen als beschränkte Operatoren auf  $l_s^1$  (Williams und Ye 2013, Th. 3)

Sei die Matrix  $A$  ein beschränkter Operator  $B : l_s^1 \rightarrow l_s^1$  und  $M = \sup_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{s_i a_{ij}}{s_j} \right|$ . Dann gilt

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ji} a_{ij}| \leq M^2 < \infty \quad (3.4.7)$$

sowie

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{|a_{ij} a_{ji} a_{kj} a_{jk}|} \right)^2 \leq M^4 < \infty \quad (3.4.8)$$

**Theorem 3.4.5.** Matrizen als beschränkte Operatoren auf  $l_s^1$  (Williams und Ye 2013, Th. 4)

Sei  $A$  eine Matrix und sei  $|A|$  die Matrix der Absolutwerte von  $A$ . Sei  $U$  die aus  $|A|$  entnommene strikte obere Dreiecksmatrix und  $L$  die aus  $|A|$  entnommene untere Dreiecksmatrix, so dass  $|A| = U + L$ . Sei  $s^T = e_1^T (I - U)^{-1}$ , wobei  $e_1^T = (1, 0, 0, \dots)$ . Angenommen, es gelten die folgenden Bedingungen:

1.  $\forall j \in \mathbb{N}, j \geq 2, \exists i \in \mathbb{N}, i < j$  so, dass  $a_{ij} \neq 0$ .
2.  $s^T L$  existiert.
3.  $\exists \alpha$  mit  $0 \leq \alpha < \infty$  so, dass  $s^T L \leq \alpha s^T$ .

Dann gilt  $s > 0$ ,  $A$  ist ein beschränkter Operator  $B : l_s^1 \rightarrow l_s^1$  und  $\|A\| \leq \alpha + 1$ .

**Theorem 3.4.6.** *Matrizen als beschränkte Operatoren auf  $l_s^1$  (Williams und Ye 2013, Th. 5)*

Sei  $A$  eine Matrix und sei  $|A|$  die Matrix der Absolutwerte von  $A$ . Sei  $U$  die aus  $|A|$  entnommene strikte obere Dreiecksmatrix und  $L$  die aus  $|A|$  entnommene untere Dreiecksmatrix, so dass  $|A| = U + L$ . Sei  $s^T = e_1^T(I - U)^{-1}$ , wobei  $e_1^T = (1, 0, 0, \dots)$ . Angenommen, es gelten die folgenden Bedingungen:

1.  $\forall j \in \mathbb{N}, j \geq 2, \exists i \in \mathbb{N}, i < j$  so, dass  $a_{ij} \neq 0$ .
2.  $s^T L$  existiert.
3.  $(s^T L)_k \leq (s^T L U)_k, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ .

Dann gilt  $s > 0$ ,  $A$  ist ein beschränkter Operator  $B : l_s^1 \rightarrow l_s^1$  und  $\|A\| \leq (s^T L)_1 + 1$ .

Wann gilt nun für beschränkte Operatoren  $K : X \rightarrow X$ ,  $X := l^p, 1 \leq p < \infty$  oder  $X := l_s^1$  zusätzlich  $K^n x \in X, \forall x \in X$ ? Dies ist zunächst einmal gegeben, wenn  $K$  potenzbeschränkt ist, d.h.  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|K^n\| < \infty$ , was wiederum erfüllt ist, wenn die Operatornorm kleiner Eins, d.h.  $\|K\|^n < \infty$  ist, denn dann gilt

$$\|K^n x\| \leq \|K^n\| \|x\| \leq \|K\|^n \|x\| < \infty \quad (3.4.9)$$

und somit  $K^n x \in X, \forall x \in X$ . Wir werden jedoch sehen, eine derartige Forderung dazu führt, dass kein chaotisches Verhalten entstehen kann (vgl. Proposition 4.1.13). Wir sind also an schwächeren Forderungen interessiert, die  $K^n x \in X, \forall x \in X$  gewährleisten. Ein Beispiel für einen Operator, der diese Forderung erfüllt, ist der in dieser Arbeit betrachtete gewichtete Back-Shift mit beschränkten Gewichten  $w_{ij}$ , repräsentiert durch die Matrix  $\mathbb{B}_w$ . Wir sehen dies, wenn wir beachten, dass in der Matrix  $\mathbb{B}_w$  der Eintrag  $b_{ij} \neq 0$  nur, wenn  $j = i + 1$ . Folglich gilt bei Multiplikation zweier  $\mathbb{B}_w$ -Matrizen:

$$(\mathbb{B}_w^2)_{ij} = (\mathbb{B}_w \mathbb{B}_w)_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} b_{kj} \quad (3.4.10)$$

$$= \begin{cases} b_{i,i+1} b_{i+1,i+2} & j = i + 2 \\ 0 & j \neq i + 2 \end{cases} \quad (3.4.11)$$

Unter Beachtung der Beschränktheit der Gewichte ( $w_{max} = \max w_{ij}$ ) gilt weiter:

$$\|\mathbb{B}_w^2 x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |b_{i,i+1} b_{i+1,i+2} x_{i+2}| \quad (3.4.12)$$

$$\leq |w_{max}|^2 \|x\| \quad (3.4.13)$$

Mit jeder weiteren Multiplikation von  $\mathbb{B}_w$  verschiebt sich die Diagonale mit den nicht Nulleinträgen um eine Stelle nach rechts. Und es gilt:

$$\|\mathbb{B}_w^n x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |b_{i,i+1} b_{i+1,i+2} \dots b_{i+n-1,i+n} x_{i+n}| \quad (3.4.14)$$

$$\leq |w_{max}|^n \|x\| \quad (3.4.15)$$

Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt demzufolge für  $x \in X$  :  $\|\mathbb{B}_w^n x\| < \infty$ , also  $\mathbb{B}_w^n x \in X$ . Für  $w_{max} > 1$  gilt zusätzlich  $|w_{max}|^n \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Wir wenden uns nun der zweiten Fragestellung zu und untersuchen die Struktur des Graphen bzw. Kantengraphen, die entsteht, wenn die so eben vorgestellten Operatoren die zugehörigen Adjazenzmatrizen sind. Beschränkten Operatoren können wir dabei Graphen von beschränktem Grad zuordnen.

**Theorem 3.4.7.** *Graphenstruktur und beschränkte Operatoren (Agrawal u. a. 2018, Th. 3.1)*

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und  $1 \leq p \leq \infty$ . Die Adjazenzmatrix  $\mathbb{A}$  ist genau dann ein beschränkter Operator  $B : l^p \rightarrow l^p$ , wenn  $G$  von beschränktem Grad ist. In diesem Fall gilt:

$$\|B\| \leq \max\{\deg(v) : v \in V\}. \quad (3.4.16)$$

Wir formulieren dieses Theorem für die in dieser Arbeit untersuchten gewichteten, gerichteten Graphen.

**Proposition 3.4.8.** *Graphenstruktur und beschränkte Operatoren*

Die Adjazenzmatrix  $\mathbb{A}_w$  eines gewichteten, gerichteten Graphen ist genau dann ein beschränkter Operator  $B : l^p \rightarrow l^p$ , wenn der Graph gleichmäßig lokal endlich ist.

*Beweis.* Mit Proposition 3.4.1 ist die Adjazenzmatrix genau dann ein beschränkter Operator  $\mathbb{A}_w : l^p \rightarrow l^p$ , wenn sowohl das Supremum der Zeilensummen als auch das der Spaltensummen beschränkt ist. Dies ist aber gleichbedeutend mit der gleichmäßig lokalen Endlichkeit des Graphen, da die Matrix-Einträge  $a_{ij}$  jeweils dem Gewicht  $w_{jk}$  des Bogens  $e_k$  mit Anfangsknoten  $v_j$  und Endknoten  $v_i$  entsprechen und die Zeilensumme somit jeweils gleich dem Eingangsgrad  $\deg_{\text{in}}(v_i)$  des Knotens  $v_i$ , die Spaltensumme jeweils gleich dem Ausgangsgrad  $\deg_{\text{out}}(v_j)$  des Knotens  $v_j$  ist. Die Beschränktheit der Suprema der Zeilen- bzw. Spaltensummen entspricht daher der Beschränktheit der Folgen  $(\deg_{\text{in}})_{v \in V}$  und  $(\deg_{\text{out}})_{v \in V}$ , was per Definition gleichmäßige lokale Endlichkeit des Graphen bedeutet.  $\square$

## Kapitel 4

# Hyperzyklizität und Chaotizität

In diesem Kapitel widmen wir uns der Eigenschaft der Chaotizität sowie der schwächeren Eigenschaft der Hyperzyklizität von Operatoren und Operatorhalbgruppen. Dabei beziehen wir uns auf die in Devaney 1989 angegebene Definition der Chaotizität für Funktionen, deren Definitions- und Wertebereich die reellen Zahlen sind. Wir stellen diese Definition, zusammen mit einer Verallgemeinerung auf unendlich dimensionale metrische Räume und Anmerkungen wie sie in Banks u. a. 1992 vorgenommen worden sind, an den Anfang dieses Kapitels. Der so eingeführte Begriff wird in der Literatur auf Operatoren und Operatorhalbgruppen auf (separablen) Banach-Räumen übertragen und wir werden diesem Vorgehen folgen. In Abschnitt 4.1 stellen wir notwendige und hinreichende Kriterien für die Hyperzyklizität und Chaotizität von linearen Operatoren auf Banach-Räumen zusammen. Gleiches führen wir in Abschnitt 4.2 für stark stetige Operatorhalbgruppen durch. In Abschnitt 4.3 widmen wir uns abschließend der Hyperzyklizität und Chaotizität der für diese Arbeit wichtigen Operatoren und Operatorhalbgruppen.

Wir beginnen mit der Definition der Chaotizität nach Devaney 1989, wobei wir dieser die Definition von Begriffen voranstellen, die in diesem Zusammenhang verwendet werden: Die Periodizität, die topologischen Transitivität und die sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.

**Definition 4.0.1.** *Periodizität*

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion in  $C^\infty$ . Ein Punkt  $x \in \mathbb{R}$  heißt periodischer Punkt mit Periode  $n$ , wenn es ein  $n \geq 0$  gibt mit  $f^n(x) = x$ .

**Definition 4.0.2.** *Topologische Transitivität*

Sei  $J$  ein abgeschlossenes Intervall in  $\mathbb{R}$ . Eine Funktion  $f : J \rightarrow J$  in  $C^\infty$  heißt topologisch transitiv, wenn für alle offenen Mengen  $U, V \subset J$  ein  $k > 0$  existiert, sodass  $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ .

**Definition 4.0.3.** *Sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen*

Sei  $J$  ein abgeschlossenes Intervall in  $\mathbb{R}$ . Eine Funktion  $f : J \rightarrow J$  in  $C^\infty$  heißt sensitiv abhängig von den Anfangsbedingungen, wenn es ein  $\delta > 0$  gibt, sodass für alle  $x \in J$  und jede Umgebung  $N$  von  $x$  ein  $y \in N$  und  $n \geq 0$  existieren mit  $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$ .

**Definition 4.0.4.** *Chaotizität*

Sei  $V$  eine Menge. Eine Funktion  $f : V \rightarrow V$  in  $C^\infty$  heißt chaotisch, wenn sie topologisch transitiv ist, die periodischen Punkte dicht in  $V$  liegen und sie sensitiv von den Anfangsbedingungen abhängt.

Banks u. a. 1992 erweitern diese Definition auf unendlich dimensionale metrische Räume und zeigen auch, dass die sensitive Abhängigkeit bereits durch die beiden anderen Bedingungen impliziert wird.

**Proposition 4.0.5.** *(Banks u. a. 1992)*

Sei  $X$  ein metrischer Raum. Sei  $f : X \rightarrow X$  eine stetige Abbildung. Ist  $f$  topologisch transitiv und ist die Menge der periodischen Punkte dicht, dann hängt  $f$  sensitiv von den Anfangswerten ab.

## 4.1 Hyperzyklische und chaotische Operatoren

Wir wenden uns nun den hyperzyklischen und chaotischen linearen Operatoren auf Banach-Räumen zu. Dafür übertragen wir in Abschnitt 4.1.1 zunächst die in der Einleitung angegebenen Definitionen. Des Weiteren diskutieren wir Kriterien für die Hyperzyklizität und Chaotizität eines linearen Operators. In Abschnitt 4.1.2 erweitern wir diese Betrachtungen auf Produkträume. Soweit nicht anders angegeben, beziehen wir uns bei unseren Ausführungen auf Grosse-Erdmann und Manguillot 2011.

### 4.1.1 Allgemeine Betrachtungen

**Definition 4.1.1.** *Periodizität*

Sei  $T : X \rightarrow X$  ein linearer Operator auf einem Banach-Raum  $X$ . Ein Punkt  $x \in X$  heißt periodischer Punkt mit Periode  $n$ , wenn es ein  $n > 0$  gibt mit  $T^n x = x$ .

**Definition 4.1.2.** *Topologische Transitivität*

Ein linearer Operator  $T : X \rightarrow X$  auf einem Banach-Raum  $X$  heißt topologisch transitiv, wenn für je zwei offene, nicht-leere Mengen  $U, V \subset X$  ein  $n \geq 0$  existiert, so dass  $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ .

**Definition 4.1.3.** *Hyperzyklizität*

Ein linearer Operator  $T : X \rightarrow X$  auf einem Banach-Raum  $X$  heißt hyperzyklisch, wenn es ein  $x \in X$  gibt, dessen Orbit unter  $T$  dicht in  $X$  liegt. In diesem Fall heißt  $x$  hyperzyklischer Vektor von  $T$ . Unter dem Orbit eines Operators verstehen wir dabei die Menge  $\{T^n x, n \geq 0\}$ .

Das folgende Transitivitätstheorem von Birkhoff stellt eine Verbindung zwischen Hyperzyklizität und topologischer Transitivität her.

**Theorem 4.1.4.** *Birkhoffs Transitivitätstheorem*

Sei  $T : X \rightarrow X$  ein Operator auf einem separablen Banach-Raum  $X$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1.  $T$  ist topologisch transitiv.
2.  $T$  ist hyperzyklisch.

Unter Beachtung der Ausführungen in Banks u. a. 1992 (Proposition 4.0.5) folgt die Definition der Chaotizität eines Operators in Anlehnung an die Definition von Devaney.

**Definition 4.1.5.** *Chaotizität*

Ein linearer Operator  $T : X \rightarrow X$  auf einem separablen Banach-Raum  $X$  heißt chaotisch, wenn er hyperzyklisch ist und die Menge der periodischen Punkte dicht in  $X$  liegt.

Wir stellen nun Hyperzyklizitäts- und Chaotizitätskriterien zusammen und beginnen mit erstgenannten.

**4.1.1.1 Hyperzyklizitätskriterien**

Wir wollen zunächst hinreichende Bedingungen für die Hyperzyklizität eines linearen Operators betrachten. Die angeführten Kriterien basieren dabei alle auf Konvergenzaussagen. Es sei angemerkt, dass die in den Theoremen angegebenen Bedingungen zu stärkeren Eigenschaften als die der Hyperzyklizität führen, die daraus jedoch folgt.

**Theorem 4.1.6.** *Kriterium von Godefrey-Shapiro (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, Th. 3.1)*

Sei  $T : X \rightarrow X$  ein linearer Operator auf einem separablen Banach-Raum. Angenommen, die beiden folgenden Unterräume sind dicht in  $X$ .

$$Y_0 := \text{span}\{x \in X \mid \exists \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < 1, Tx = \lambda x\} \tag{4.1.1}$$

$$Z_0 := \text{span}\{x \in X \mid \exists \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| > 1, Tx = \lambda x\} \tag{4.1.2}$$

Dann ist  $T$  hyperzyklisch.

*Beweis.* Wir beweisen die Aussage, in dem wir zeigen, dass  $T$  topologisch transitiv ist. Mit dem Birkhoffschen Transitivitätstheorem ist  $T$  dann auch hyperzyklisch. Seien also  $U, V$  beliebige offene Teilmengen von  $X$ . Da sowohl  $Y_0$  als auch  $Z_0$  nach Voraussetzung dicht in  $X$  liegen, gibt

es  $y, z \in X$  mit  $y \in Y_0 \cap U$  und  $z \in Z_0 \cap V$ . Nach Definition der Mengen  $Y_0$  und  $Z_0$  lassen sich diese Elemente wie folgt schreiben.

$$y = \sum_{k=1}^m a_k y_k \quad y_k \in Y_0 \quad (4.1.3)$$

$$z = \sum_{k=1}^l b_k z_k \quad z_k \in Z_0 \quad (4.1.4)$$

Wir definieren uns nun Hilfsvektoren  $u_n := \sum_{k=1}^l \frac{1}{\mu_k^n} b_k z_k$  und zeigen mit deren Hilfe, dass es ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, so dass für alle  $n \geq N$  gilt, dass  $(y + u_n) \in U$  und  $T^n(y + u_n) \in V$ , also  $T^n U \cap V \neq \emptyset$  und somit  $T$  hyperzyklisch ist. Es ist

$$T^n y = \sum_{k=1}^m a_k T^n y_k = \sum_{k=1}^m a_k \lambda_k^n y_k \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty, \text{ da } |\lambda_k| < 1 \quad (4.1.5)$$

$$u_n = \sum_{k=1}^l \frac{1}{\mu_k^n} b_k z_k \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty, \text{ da } |\mu_k| > 1 \quad (4.1.6)$$

$$T^n u_n = \sum_{k=1}^l \frac{1}{\mu_k^n} b_k T^n z_k = \sum_{k=1}^l \frac{1}{\mu_k^n} b_k \mu_k^n z_k = \sum_{k=1}^l b_k z_k = z \quad (4.1.7)$$

Wählen wir  $n$  groß genug ( $n \geq N$ ), liegen sowohl der Vektor  $u_n$  demnach in einer beliebig kleinen  $\varepsilon$ -Umgebung von  $y$ , also  $(y + u_n) \in U$  als auch der Vektor  $T^n(y + u_n)$  in einer beliebig kleinen  $\varepsilon$ -Umgebung von  $z$ , also  $T^n(y + u_n) \in V$ .  $\square$

Das Theorem besagt demnach, dass ein Operator hyperzyklisch ist, wenn es genügend viele Eigenvektoren gibt, die zu Eigenwerten gehören, die außerhalb bzw. innerhalb des Einheitskreises liegen. Wie wir zu einem späteren Zeitpunkt noch zeigen werden, ist der Operator chaotisch, wenn es auch genügend viele Eigenvektoren gibt, die zu Eigenwerten auf dem Einheitskreis gehören. Das folgende Kriterium von Kitai stellt eine Verallgemeinerung des Theorems von Godefroy-Shapiro dar.

**Theorem 4.1.7.** *Kriterium von Kitai (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, Th. 3.4)*

Sei  $T : X \rightarrow X$  ein linearer Operator auf einem separablen Banach-Raum. Angenommen, es gibt zwei dichte Mengen  $Y_0, Z_0 \subset X$  und eine Abbildung  $S : Z_0 \rightarrow Z_0$ , so dass für alle  $y \in Y_0, z \in Z_0$  folgendes gilt:

1.  $T^n y \rightarrow 0$
2.  $S^n z \rightarrow 0$
3.  $TSz = z$ ,

dann ist  $T$  hyperzyklisch.

*Beweis.* Der Beweis erfolgt analog zum Beweis des Theorems von Godefrey-Shapiro, wobei wir  $u_n := S^n z$  setzen.  $\square$

Das folgende Theorem von Gethner-Shapiro schwächt die Voraussetzungen des Theorems von Kitai ab. Die ersten beiden Bedingungen müssen nur noch für eine Teilfolge gelten.

**Theorem 4.1.8.** *Kriterium von Gethner-Shapiro (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, Th. 3.10)*

Sei  $T : X \rightarrow X$  ein linearer Operator auf einem separablen Banach-Raum. Angenommen, es gibt zwei dichte Mengen  $Y_0, Z_0 \subset X$  eine Abbildung  $S : Z_0 \rightarrow Z_0$ , und eine wachsende Folge  $(n_k)_k$  positiver ganzer Zahlen, so dass für alle  $y \in Y_0, z \in Z_0$  folgendes gilt:

1.  $T^{n_k} y \rightarrow 0$
2.  $S^{n_k} z \rightarrow 0$
3.  $TSz = z$ ,

dann ist  $T$  hyperzyklisch.

*Beweis.* Auch hier erfolgt der Beweis analog zum Beweis des Theorems von Godefrey-Shapiro, wobei wir  $u_{n_k} := S^{n_k} z$  setzen.  $\square$

Wir schwächen nun die Bedingungen im Theorem von Gethner-Shapiro ab, indem wir keine Abbildung  $S$  mehr fordern, die zu  $T$  rechts-invers ist. Wir ersetzen sie, indem wir eine Folge  $(S_{n_k})$  voraussetzen, die die beiden letztgenannten Bedingungen in adäquater Weise erfüllt. Wir erhalten so das Hyperzyklizitätskriterium für Operatoren. Angemerkt sei, dass in Grosse-Erdmann und Manguillot 2011 gezeigt wird, dass trotz dieser vermeintlichen Abschwächung das Hyperzyklizitätskriterium und das Kriterium von Gethner-Shapiro äquivalent sind.

**Theorem 4.1.9.** *Hyperzyklizitätskriterium (HCC), (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, Th. 3.12)*

Sei  $T : X \rightarrow X$  ein linearer Operator auf einem separablen Banach-Raum  $X$ . Angenommen, es gibt zwei dichte Mengen  $Y_0, Z_0 \subset X$ , eine wachsende Folge  $(n_k)_k$  positiver ganzer Zahlen und Abbildung  $S_{n_k} : Z_0 \rightarrow X, k \geq 1$  so dass für alle  $y \in Y_0, z \in Z_0$  folgendes gilt:

1.  $T^{n_k} y \rightarrow 0$
2.  $S_{n_k} z \rightarrow 0$
3.  $T^{n_k} S_{n_k} z \rightarrow z$ ,

dann ist  $T$  hyperzyklisch.

*Beweis.* Der Beweis erfolgt ebenso wie die Beweise zu den Theoremen von Godefrey-Shapiro und Kitai, wobei wir hier  $u_{n_k} := S_{n_k} z$  wählen.  $\square$

Die nun folgenden drei Sätze, für deren Beweis wir auf Grosse-Erdmann und Manguillot 2011 verweisen, stellen notwendige Bedingungen für die Hyperzyklizität eines linearen Operators auf einem Banach-Raum zusammen. Es sind Anforderungen an das Spektrum des Operators.

**Proposition 4.1.10.** *Schnitt des Operatorspektrums mit dem Einheitskreis (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, Prop. 5.3)*

Sei  $T : X \rightarrow X$  ein linearer, hyperzyklischer Operator auf einem Banach-Raum  $X$ . Dann schneidet sein Spektrum  $\sigma(T)$  den Einheitskreis  $\mathbb{T}$ , d.h.

$$\sigma(T) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset \quad (4.1.8)$$

**Theorem 4.1.11.** *Kitai (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, Th. 5.6)*

Sei  $T : X \rightarrow X$  ein linearer, hyperzyklischer Operator auf einem Banach-Raum  $X$ . Dann schneidet jede zusammenhängende Komponente von  $\sigma(T)$  den Einheitskreis.

Hyperzyklische Operatoren können somit keine isolierten Spektralwerte außerhalb des Einheitskreises haben. Weitere Folgerungen aus dem Satz von Kitai sind in der folgenden Proposition aufgeführt.

**Proposition 4.1.12.** *Spektrum eines hyperzyklischen Operators (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, Prop. 5.7)*

Sei  $T : X \rightarrow X$  ein linearer Operator auf einem Banach-Raum  $X$ . Dann gilt

1. Ist  $T$  nicht-invertierbar und hyperzyklisch, so besitzt  $T$  ein überabzählbares Spektrum.
2. Ist  $T$  hyperzyklisch und sein Spektrum endlich oder abzählbar, so liegt es auf dem Einheitskreis  $\mathbb{T}$ .

Auf Grund der Bedingungen an das Spektrum des Operators, die erfüllt sein müssen, um Hyperzyklizität zu erreichen, kann für die folgenden, im Laufe der Arbeit diskutierten Operatoren diese Eigenschaft ausgeschlossen werden. Wir verweisen für Beweise auf Grosse-Erdmann und Manguillot 2011.

**Proposition 4.1.13.** *Kontraktionen, potenzbeschränkte und nilpotente Operatoren (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, Prop. 5.8)*

Sei  $T : X \rightarrow X$  ein linearer Operator auf einem Banach-Raum  $X$ . Gilt für  $T$  eine der folgenden Eigenschaften, so ist  $T$  nicht hyperzyklisch.

1.  $\|T\| \leq 1$  ( $T$  ist kontraktiv)
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$  ( $T$  ist quasi-nilpotent)
3.  $\sup_{n \geq 0} \|T^n\| < \infty$  ( $T$  ist potenzbeschränkt)

**Proposition 4.1.14.** *Operatoren mit endlichem Rang, kompakte Operatoren und kompakte Potenzen (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, Prop. 5.10/5.17)*

Sei  $T : X \rightarrow X$  ein linearer, hyperzyklischer Operator auf einem Banach-Raum  $X$ .

1. Dann hat  $T$  keinen endlichen Rang.
2. Dann ist  $T$  nicht kompakt.
3. Dann ist keine seiner Potenzen kompakt, das heißt es gibt kein  $n \geq 1$ , so dass  $T^n$  kompakt ist.

Das folgende Kriterium stellt einen Zusammenhang zwischen einem Operator  $T$  und der ihn repräsentierenden Matrix her.

**Proposition 4.1.15.** *Matrix-Repräsentation eines Operators (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, L. 5.21)*

Sei  $T$  ein linearer Operator auf einem Banach-Raum  $X$ . Falls die Matrix  $A$ , die  $T$  repräsentiert, eine Zeile hat, deren Nicht-Diagonaleinträge alle gleich Null sind, ist  $T$  nicht hyperzyklisch.

Wir schließen die Auflistung der notwendigen Hyperzyklizitätskriterien mit einer Aussage, die die Eigenschaft der Hyperzyklizität eines Operators mit dem Punktspektrum seiner Adjungierten in Verbindung bringt.

**Lemma 4.1.16.** *Punktspektrum der Adjungierten eines Operators (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, L. 2.53)*

Sei  $T$  ein linearer, hyperzyklischer Operator auf einem Banach-Raum  $X$ . Dann besitzt seine Adjungierte  $T^*$  keine Eigenwerte. Äquivalent dazu ist, dass jeder Operator  $T - \lambda I$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$  einen dichten Wertebereich in  $X$  besitzt.

#### 4.1.1.2 Chaotizitätskriterien

In diesem Abschnitt stellen wir ohne Beweis notwendige und hinreichende Bedingungen zusammen, die zur Chaotizität eines linearen Operators auf einem Banach-Raum führen. Wir beginnen mit einer hinreichenden Bedingung.

**Theorem 4.1.17.** *Godefroy-Shapiro (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, Th. 3.1)*

Sei  $T : X \rightarrow X$  ein linearer Operator auf einem separablen Banach-Raum  $X$ . Angenommen, die folgenden Unterräume sind dicht in  $X$ .

$$X_0 := \text{span}\{x \in X \mid \exists \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < 1, Tx = \lambda x\} \quad (4.1.9)$$

$$Y_0 := \text{span}\{x \in X \mid \exists \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| > 1, Tx = \lambda x\} \quad (4.1.10)$$

$$Z_0 := \text{span}\{x \in X \mid \exists \alpha \in \mathbb{Q}, Tx = e^{\lambda \pi i} x\} \quad (4.1.11)$$

Dann ist  $T$  chaotisch.

Wie auch im Fall der Hyperzyklizität können wir notwendige Bedingungen für die Chaotizität eines Operators an sein Spektrum stellen. Dafür erweitern wir die im vorangegangenen Abschnitt angeführten Bedingungen für die Hyperzyklizität eines Operators und erhalten die folgende Proposition.

**Proposition 4.1.18.** *Spektrum eines chaotischen Operators (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, Prop. 5.7)*

Sei  $T : X \rightarrow X$  ein linearer, chaotischer Operator auf einem Banach-Raum  $X$ . Dann besitzt sein Spektrum  $\sigma(T)$  keinen isolierten Punkt und sein Punktspektrum  $\sigma_p(T)$  enthält unendlich viele Einheitswurzeln.

#### 4.1.2 Hyperzyklizität und Chaotizität auf Produkträumen

Nach der Untersuchung von Hyperzyklizität und Chaotizität eines einzelnen Operators interessieren wir uns nun dafür, inwiefern sich diese Eigenschaften auf die direkte Summe derartiger Operatoren übertragen. Wir führen dafür die Begriffe der (schwachen) Mischung ein und verweisen für die Beweise in diesem Abschnitt auf Grosse-Erdmann und Manguillot 2011.

**Definition 4.1.19.** *Mischung*

Ein linearer Operator  $T : X \rightarrow X$  auf einem Banach-Raum  $X$  heißt *mischend*, wenn es für alle nicht-leeren, offenen Teilmengen  $U, V \subset X$  ein  $N \geq 0$  gibt, so dass

$$T^n(U) \cap V \neq \emptyset \quad \forall n \geq N. \quad (4.1.12)$$

**Definition 4.1.20.** *Schwache Mischung*

Ein linearer Operator  $T : X \rightarrow X$  auf einem Banach-Raum  $X$  heißt *schwach mischend*, wenn  $T \oplus T$  topologisch transitiv ist.

Den Zusammenhang zwischen diesen neu eingeführten Begriffen und der topologischen Transitivität gibt die folgende Proposition wieder.

**Proposition 4.1.21.** *Schwache Mischung, Mischung und Topologische Transitivität (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, L. 2.42)*

Sei  $T : X \rightarrow X$  ein linearer Operator auf einem Banach-Raum  $X$ . Dann gilt:

$T$  ist mischend  $\Rightarrow T$  ist schwach mischend  $\Rightarrow T$  ist topologisch transitiv.

Ist der Banach-Raum  $X$  separabel, gilt:

$T$  ist mischend  $\Rightarrow T$  ist schwach mischend  $\Rightarrow T$  ist hyperzyklisch.

Die beiden folgenden Propositionen geben die Antwort auf die Frage, inwiefern sich die Hyperzyklizität der direkten Summe auf ihre Summanden übertragen lässt.

**Proposition 4.1.22.** *Summanden von hyperzyklischen direkten Summen (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, Prop. 2.25)*

Seien  $T : X \rightarrow X$  und  $S : Y \rightarrow Y$  lineare Operatoren auf separablen Banach-Räumen  $X$  und  $Y$ . Ist die direkte Summe  $S \oplus T$  hyperzyklisch, so sind es auch die Operatoren  $S$  und  $T$ .

Uns interessiert nun der umgekehrte Fall. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit die direkte Summe aus hyperzyklischen Operatoren selbst hyperzyklisch ist?

**Proposition 4.1.23.** *Direkte Summe hyperzyklischer Operatoren (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, Prop. 2.40)*

Seien  $T : X \rightarrow X$  und  $S : Y \rightarrow Y$  lineare, hyperzyklische Operatoren auf separablen Banach-Räumen  $X$  und  $Y$ . Ist mindestens einer der Operatoren mischend, so ist die direkte Summe  $S \oplus T$  hyperzyklisch.

**Theorem 4.1.24.** *Kriterium von Gethner-Shapiro (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, Th. 3.10)*

Sei  $T : X \rightarrow X$  ein linearer Operator auf einem separablen Banach-Raum. Angenommen, es gibt zwei dichte Mengen  $Y_0, Z_0 \subset X$  eine Abbildung  $S : Z_0 \rightarrow Z_0$ , und eine wachsende Folge  $(n_k)_k$  positiver ganzer Zahlen, so dass für alle  $y \in Y_0, z \in Z_0$  folgendes gilt:

1.  $T^{n_k}y \rightarrow 0$
2.  $S^{n_k}z \rightarrow 0$
3.  $TSz = z$ ,

dann ist  $T$  schwach mischend und somit  $T \oplus T$  hyperzyklisch.

**Korollar 4.1.25.** *(Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, L. 3.13)*

Sei  $T : X \rightarrow X$  ein linearer Operator auf einem separablen Banach-Raum  $X$ . Erfüllt  $T$  das Hyperzyklizitätskriterium (Theorem 4.1.9), dann ist die  $n$ -fache Summe  $T \oplus \dots \oplus T$  hyperzyklisch.

Wir schließen den Abschnitt mit einem Kriterium, das die Chaotizität der direkten Summe linearer Operatoren mit der Chaotizität der einzelnen Operatoren verbindet.

**Proposition 4.1.26.** *Chaotizität der direkten Summe (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, Prop. 2.50)*

Sei  $T : X \rightarrow X$  ein linearer Operator auf einem separablen Banach-Raum  $X$ . Dann ist  $T \oplus T$  genau dann chaotisch, wenn  $T$  chaotisch ist.

## 4.2 Hyperzyklische und chaotische stark, stetige Halbgruppen

Wir werden in diesem Abschnitt die bisherigen Analysen auf stark stetige Operatorhalbgruppen auf Banach-Räumen übertragen. Dabei werden wir ähnlich wie im vorangegangenen Ab-

schnitt vorgehen. Nach einer Adaption der wichtigen Definitionen und der Diskussion notwendiger und hinreichender Kriterien für die Hyperzyklizität und Chaotizität einer stark stetigen Operatorhalbgruppe in Abschnitt 4.2.1, untersuchen wir die Übertragbarkeit dieser Eigenschaften auf Produkträume in Abschnitt 4.2.2 sowie auf Unterräume in Abschnitt 4.2.3.

Den Untersuchungen vorangestellt sei die Definition verschiedener Mengen, die im Weiteren des Öfteren verwendet werden. Es sei dafür stets  $X$  ein Banach-Raum und  $\mathcal{T} := \{T(t) | t \geq 0\}$  eine stark stetige Halbgruppe auf diesem. Wir betrachten die folgenden Teilmengen von  $X$ .

$$X_0 := \{x \in X | \lim_{t \rightarrow \infty} T(t)x = 0\} \quad (4.2.1)$$

$$X_\infty := \{x \in X | \forall \varepsilon > 0 \quad \exists w \in X, t > 0 : \|w\| < \varepsilon \Rightarrow \|T(t)w - x\| < \varepsilon\} \quad (4.2.2)$$

$$X_p := \{x \in X | \exists t > 0 : T(t)x = x\} \quad (4.2.3)$$

Des Weiteren definieren wir für eine offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{C}$  der komplexen Ebene die Menge  $\mathcal{A}(U, X)$  der analytischen Funktionen  $f : U \rightarrow X$ . Die Potenzreihendarstellung einer derartigen Funktion  $f$  um  $\lambda_0 \in U$  im Punkt  $\lambda \in U$  sei gegeben mit

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n f_{n,\lambda_0} \quad (4.2.4)$$

Diese Darstellung ermöglicht uns die Definition der folgenden zwei Mengen, wobei  $W \subset U$ .

$$\mathcal{C}(f, \lambda_0) := \overline{\text{span}\{f_{n,\lambda_0}, n \in \mathbb{N}\}} \quad (4.2.5)$$

$$\mathcal{V}(f, W) := \overline{\text{span}\{f(\lambda), \lambda \in W\}} \quad (4.2.6)$$

### 4.2.1 Allgemeine Betrachtungen

Wie im Fall der Operatoren basiert auch hier der Begriff der Chaotizität auf der ursprünglich von Devaney benutzten Definition. Er wird, ebenso wie die im vorangegangenen Abschnitt eingeführten Begriffe der topologischen Transitivität und der Hyperzyklizität sowie deren Zusammenhang, für stark stetige Halbgruppen adaptiert. Im Anschluss an die nun folgende Definition der Begriffe diskutieren wir Kriterien für die Hyperzyklizität und Chaotizität stark stetiger Halbgruppen.

**Definition 4.2.1.** *Topologische Transitivität (Desch, Schappacher und Webb 1997)*

Die Halbgruppe  $\{T(t) | t \geq 0\}$  heißt topologisch transitiv auf  $X$ , wenn es für je zwei offene Mengen  $U, V \subset X$  ein  $t > 0$  gibt, so dass  $T(t)U \cap V \neq \emptyset$ .

**Definition 4.2.2.** *Hyperzyklizität (Desch, Schappacher und Webb 1997)*

Die Halbgruppe  $\{T(t) | t \geq 0\}$  heißt hyperzyklisch auf  $X$ , wenn es ein  $x \in X$  gibt, so dass die Menge  $\{T(t)x | t \geq 0\}$  dicht in  $X$  liegt.

**Theorem 4.2.3.** *Zusammenhang zwischen topologischer Transitivität und Hyperzyklizität (Desch, Schapacher und Webb 1997, Th. 2.2)*

Sei  $\mathcal{T} = \{T(t)|t \geq 0\}$  eine stark stetige Halbgruppe auf einem separablen Banach-Raum  $X$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

1.  $\{T(t)|t \geq 0\}$  ist hyperzyklisch.
2.  $\forall y, z \in X$  und  $\forall \varepsilon > 0 \exists v \in X, t > 0 : \|y - v\| < \varepsilon$  und  $\|z - T(t)v\| < \varepsilon$ .
3.  $\forall \varepsilon > 0$  gibt es eine dichte Menge  $D \subset X$  so, dass für alle  $z \in D$  eine dichte Menge  $D' \subset X$  existiert so, dass gilt: Für alle  $y \in D'$  gibt es ein  $v \in X$  und  $t > 0$  so, dass  $\|y - v\| < \varepsilon$  und  $\|z - T(t)v\| < \varepsilon$ .

*Beweis.* (1.  $\Rightarrow$  2.) Sei  $\mathcal{T}$  hyperzyklisch und seien  $y, z \in X$  und  $\varepsilon > 0$  beliebig. Da  $\mathcal{T}$  hyperzyklisch ist, gibt es ein  $x \in X$ , dessen Orbit  $\{T(t)x|t \geq 0\}$  dicht in  $X$  liegt. Es gibt demnach ein  $s > 0$ , sodass  $\|y - T(s)x\| < \varepsilon$ . Mit  $\{T(t)x|t \geq 0\}$  liegt auch  $\{T(t)x|t > s\}$  dicht in  $X$  und folglich gibt es ein  $u > s$ , so dass  $\|z - T(u)x\| < \varepsilon$ . Wir setzen  $v = T(s)x$  und  $t = u - s$ . Dann gilt  $\|y - v\| < \varepsilon$  und  $\|z - T(u)x\| = \|z - T(t)T(s)x\| = \|z - T(t)v\| < \varepsilon$ .

(2.  $\Rightarrow$  1.) Wir wollen zeigen, dass es ein  $x \in X$  gibt, dessen Orbit dicht in  $X$  liegt. Für ein beliebiges  $z \in X$  und ein gegebenes  $\varepsilon > 0$  muss es demnach ein  $t_n \in \mathbb{R}_+$  geben, so dass  $\|T(t_n)x - z\| < \varepsilon$ . Da  $X$  separabel ist, enthält es eine abzählbar dichte Teilmenge  $Z = \{z_n|n \in \mathbb{N}\}$ . Wir konstruieren nun zwei Folgen  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}, (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  iterativ so, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

i)  $y_1 = z_1, t_1 = 0$

ii) für  $n > 1$ :

$$\|y_n - y_{n-1}\| \leq \frac{2^{-n}}{\sup\{\|T(t_j)\||j < n\}} \tag{4.2.7}$$

$$\|z_n - T(t_n)y_n\| \leq 2^{-n} \tag{4.2.8}$$

Derartige Folgen existieren, denn nach Voraussetzung gibt es für alle  $y_{n-1}, z_n, (n \in \mathbb{N})$  und  $\varepsilon = \frac{2^{-n}}{\sup\{\|T(t_j)\||j < n\}}$  ein  $v = y_n$  und ein  $t = t_n > 0$ , so dass (4.2.7) und (4.2.8) gelten. Letztere gilt, da  $\sup\{\|T(t_j)\||j < n\} \geq 1$ , denn  $\|T(t_0)\| = \|T(0)\| = 1$ . Ferner gilt, dass die so konstruierte

Folge  $(y_n)$  gegen ein  $x \in X$  konvergiert, da  $2^{-n} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Für den Grenzwert  $x$  gilt

$$\|z_n - T(t_n)x\| \leq \|z_n - T(t_n)y_n\| + \|T(t_n)y_n - T(t_n)x\| \quad (4.2.9)$$

$$\leq \|z_n - T(t_n)y_n\| + \|T(t_n)\| \|y_n - x\| \quad (4.2.10)$$

$$\leq \|z_n - T(t_n)y_n\| + \|T(t_n)\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \|y_i - y_{i-1}\| \quad (4.2.11)$$

$$\leq 2^{-n} + \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-i} \quad (4.2.12)$$

$$= 2^{-n+1} \quad (4.2.13)$$

Sei nun  $\varepsilon > 0$  und  $x \in X$  o.g. Grenzwert. Da  $Z$  dicht in  $X$  liegt, gibt es für  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$  ein  $z_n \in Z$  mit  $\|z_n - x\| < \varepsilon'$ . Sei nun  $n \in \mathbb{N}$  so gewählt, dass  $2^{-n+1} < \varepsilon'$ . Dann ist

$$\|T(t_n)x - z\| \leq \|T(t_n)x - z_n\| + \|z_n - z\| < \varepsilon \quad (4.2.14)$$

(2.  $\Rightarrow$  3.) Mit  $D = D' = X$  folgt direkt 3.)

(3.  $\Rightarrow$  2.) Seien  $y, z \in X$  und  $\varepsilon > 0$  beliebig gegeben. Wir müssen ein  $v \in X$  und  $t > 0$  finden, so dass  $\|y - v\| < \varepsilon$  und  $\|z - T(t)v\| < \varepsilon$ . Da nach Voraussetzung  $D \subset X$  dicht in  $X$  liegt, gibt es ein  $\tilde{z} \in D$  mit  $\|z - \tilde{z}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Des Weiteren gibt es nach Voraussetzung für diese  $\tilde{z}$  ein  $D' \subset X$ , welches dicht in  $X$  liegt. Es gibt also ein  $\tilde{y} \in D'$  mit  $\|y - \tilde{y}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Ferner gilt nach Voraussetzung:  $\exists v \in X$  mit  $\|\tilde{y} - v\| < \varepsilon$  und  $\|\tilde{z} - T(t)v\| < \varepsilon$ . Somit gilt:

$$\|y - v\| \leq \|y - \tilde{y}\| + \|\tilde{y} - v\| < \varepsilon \quad (4.2.15)$$

$$\|z - T(t)v\| \leq \|z - \tilde{z}\| + \|\tilde{z} - T(t)v\| < \varepsilon. \quad (4.2.16)$$

□

Wir führen nun den Begriff der Chaotizität für stark stetige Operatorhalbgruppen ein.

**Definition 4.2.4.** *Chaotizität (Desch, Schappacher und Webb 1997)*

Eine Halbgruppe  $\{T(t) | t \geq 0\}$  auf einem Banach-Raum  $X$  heißt chaotisch, wenn sie hyperzyklisch ist und  $X_p$  dicht in  $X$  liegt.

#### 4.2.1.1 Hyperzyklizitätskriterien

Wir beginnen diesen Abschnitt mit einem Kriterium, welches die Hyperzyklizität der Halbgruppe mit der jedes einzelnen darin enthaltenen Operators in Verbindung setzt. Für den Beweis verweisen wir auf Conojero, Müller und Peris 2007.

**Theorem 4.2.5.** (Conojero, Müller und Peris 2007, Th. 2.3)

Sei  $\{T(t) | t \geq 0\}$  eine stark stetige Halbgruppe auf einem Banach-Raum  $X$ . Ist  $x \in X$  hyperzyklisch für  $\{T(t) | t \geq 0\}$ , so ist es auch hyperzyklisch für jeden Operator  $T(t)$ ,  $t > 0$ .

Die beiden folgenden Kriterien stellen zunächst den Zusammenhang zwischen der Hyperzyklizität einer stark stetigen Halbgruppe und Eigenschaften ihrer Diskretisierung her, wobei wir unter dieser eine Folge von Operatoren  $(T(t_n))_n$ ,  $t_n \rightarrow \infty$  verstehen. Eine Verallgemeinerung auf den kontinuierlichen Fall, d.h. eine stark stetige Halbgruppe  $\{T(t)|t \geq 0\}$  führt dann auf Kriterium 4.2.9.

**Theorem 4.2.6.** *Hyperzyklizitätskriterium für Halbgruppen (Mourchid 2005, Th. 2.1)*

Sei  $\{T(t)|t \geq 0\}$  eine stark stetige Halbgruppe auf einem separablen Banach-Raum  $X$ . Gibt es eine Folge  $(t_n)_n$  positiver, ganzer Zahlen mit  $t_n \rightarrow \infty$  so, dass die folgenden Teilmengen dicht in  $X$  liegen:

$$Z_0 := \{x \in X, T(t_n)x \rightarrow 0\} \quad (4.2.17)$$

$$Z_\infty := \{y \in X, \exists u_n \rightarrow 0, T(t_n)u_n \rightarrow y\} \quad (4.2.18)$$

Dann ist  $\{T(t)|t \geq 0\}$  hyperzyklisch.

*Beweis.* Wir beweisen die topologische Transitivität der Halbgruppe, aus der ihre Hyperzyklizität auf Grund der Separabilität des Banach-Raumes folgt. Es seien dafür zwei nicht-leere, offene Teilmengen  $U, V$  von  $X$  gegeben. Da  $Z_0$  und  $Z_\infty$  dicht in  $X$  liegen, gibt es  $z_1 \in Z_0 \cap U$  und  $z_2 \in Z_\infty \cap V$ . Für  $z_2$  gibt es eine Folge  $(u_n)$  mit  $u_n \rightarrow 0$  und  $T(t_n)u_n \rightarrow z_2$ . Somit gibt es für genügend große  $t_n$  ein Element  $(z_1 + u_n) \in U$  und  $T(t_n)(z_1 + u_n) \in V$ . Folglich ist  $\{T(t)|t \geq 0\}$  topologisch transitiv und damit hyperzyklisch.  $\square$

Dieses Kriterium ist äquivalent zu der folgenden Aussage.

**Korollar 4.2.7.** *Hyperzyklizitätskriterium für Halbgruppen (Desch und Schappacher 2005, L. 1.2)*

Eine stark stetige Halbgruppe  $\{T(t)|t \geq 0\}$  auf einem separablen Banach-Raum  $X$  erfüllt genau dann das Hyperzyklizitätskriterium aus Theorem 4.2.6, wenn es für alle nicht-leeren offenen Mengen  $U, V \subset X$  und alle Nullumgebungen  $W \subset X$  ein  $t \in [0, \infty)$  gibt, so dass

$$T(t)U \cap W \neq \emptyset \quad \text{und} \quad T(t)W \cap V \neq \emptyset. \quad (4.2.19)$$

Das folgende Kriterium ist eine Reformulierung des Hyperzyklizitätskriteriums 4.2.6 von Mourchid, wobei hier die  $u_n$  durch die explizit geforderten Abbildungen  $S(t_n) : X \rightarrow X$  gebildet werden.

**Theorem 4.2.8.** *Hyperzyklizitätskriterium für Halbgruppen (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, Th. 7.27)*

Sei  $\{T(t)|t \geq 0\}$  eine stark stetige Halbgruppe auf einem separablen Banach-Raum  $X$ . Wenn es dichte Mengen  $Y_0, Z_0 \subset X$  gibt, sowie eine Folge  $(t_n)_n$  in  $\mathbb{R}_+$  mit  $t_n \rightarrow \infty$  und Abbildungen  $S(t_n) : Z_0 \rightarrow X$ ,  $n \in \mathbb{N}$  so, dass  $\forall y \in Y_0, z \in Z_0$  die folgenden Bedingungen gelten:

1.  $T(t_n)y \rightarrow 0$
2.  $S(t_n)z \rightarrow 0$
3.  $T(t_n)S(t_n)z \rightarrow z$

dann ist  $\{T(t)|t \geq 0\}$  hyperzyklisch.

*Beweis.* Der Beweis erfolgt in Anlehnung an die Beweise der Hyperzyklizitätskriterien für Operatoren. Wir weisen die topologische Transitivität der Halbgruppe nach, die auf Grund der Separabilität des Banach-Raumes äquivalent zur Hyperzyklizität ist. Seien dafür  $U, V$  offene, nicht-leere Teilmengen von  $X$ . Da  $Y_0$  und  $Z_0$  nach Voraussetzung dicht in  $X$  liegen, gibt es Elemente  $y, z$  mit  $y \in Y_0 \cap U$  und  $z \in Z_0 \cap V$ . Wir definieren Vektoren  $u(t_n) := S(t_n)z$ . Dann folgt

$$T(t_n)y \rightarrow 0 \quad \text{für } t_n \rightarrow \infty \text{ nach Voraussetzung} \quad (4.2.20)$$

$$u(t_n) = S(t_n)z \rightarrow 0 \quad \text{für } t_n \rightarrow \infty \text{ nach Voraussetzung} \quad (4.2.21)$$

$$T(t_n)u(t_n) = T(t_n)S(t_n)z \rightarrow z \quad \text{für } t_n \rightarrow \infty \text{ nach Voraussetzung} \quad (4.2.22)$$

Es gibt somit Vektoren  $(y + u(t_n)) \in U$  und  $T(t_n)(y + u(t_n)) \in V$  für  $t_n$  genügend groß. Folglich ist  $\{T(t)|t \geq 0\}$  topologisch transitiv und damit hyperzyklisch.  $\square$

Verallgemeinern wir dieses Kriterium auf den kontinuierlichen Fall so erhalten wir die folgende Aussage.

**Theorem 4.2.9.** *Hyperzyklizitätskriterium für Halbgruppen (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, Th. 7.29)*

Sei  $\{T(t)|t \geq 0\}$  eine stark stetige Halbgruppe auf einem separablen Banach-Raum  $X$ . Wenn es dichte Mengen  $Y_0, Z_0 \subset X$  gibt, sowie Abbildungen  $S(t) : Z_0 \rightarrow X, t \geq 0$  so, dass  $\forall y \in Y_0, z \in Z_0$  die folgenden Bedingungen gelten:

1.  $T(t)y \rightarrow 0$
2.  $S(t)z \rightarrow 0$
3.  $T(t)S(t)z \rightarrow z$

dann ist  $\{T(t)|t \geq 0\}$  hyperzyklisch.

*Beweis.* Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Theorem 4.2.8.  $\square$

Das folgende Theorem gibt zum einen selbst hinreichende Bedingungen für Hyperzyklizität einer Operatorhalbgruppe an. Zum anderen werden wir es benötigen, um diverse Kriterien für Hyperzyklizität und Chaotizität stark stetiger Halbgruppen beweisen zu können, unter anderem eines der zentralen und viel genutzten Kriterien von Desch, Schappacher und Webb 1997.

**Theorem 4.2.10.** (Desch, Schappacher und Webb 1997, Th. 2.3)

Sei  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  eine stark stetige Halbgruppe auf einem separablen Banach-Raum  $X$ . Liegt sowohl  $X_\infty$  als auch  $X_0$  dicht in  $X$ , dann ist  $\{T(t)|t \geq 0\}$  hyperzyklisch.

*Beweis.* Wir setzen  $D := X_\infty$  und  $D' = X_0$ . Seien  $z \in D$  und  $y \in D'$  und  $\varepsilon > 0$  beliebig. Für  $z$  gibt es nach Definition von  $X_\infty$  für  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$  ein  $t > 0$  und ein  $w \in X$  mit  $\|w\| < \varepsilon'$  und  $\|T(t)w - z\| < \varepsilon'$ . Ferner gibt es für  $y$  nach Definition von  $X_0$  ein  $t' > 0$  so, dass für alle  $t > t'$  gilt:  $\|T(t)y\| < \varepsilon'$ . Wir setzen  $v = y + w$ . Dann gilt:

$$\|y - v\| = \|w\| < \varepsilon' < \varepsilon \tag{4.2.23}$$

$$\|z - T(t)v\| = \|z - T(t)(y + w)\| \leq \|z - T(t)w\| + \|T(t)y\| < \varepsilon \tag{4.2.24}$$

Mit Theorem 4.2.3 ist  $\{T(t)|t \geq 0\}$  hyperzyklisch. □

Bei Operatoren geben dessen Eigenvektoren Auskunft über Hyperzyklizität (Theorem von Godefroy-Shapiro). Bei Operatorhalbgruppen übernehmen diese Rolle die Eigenvektoren des Erzeugers. Das folgende Kriterium beruht allein auf Bedingungen an die rein imaginären Eigenwerten des Erzeugers der Halbgruppe sowie an die dazugehörigen Eigenvektoren. Erweiterungen dieses Kriteriums werden im folgenden Abschnitt zu hinreichenden Bedingungen für die Chaotizität einer Operatorhalbgruppe führen.

**Theorem 4.2.11.** Hyperzyklizität (Mourchid 2006, Th. 2.1)

Sei  $A$  der Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe  $\mathcal{T} := \{T(t)|t \geq 0\}$  auf einem separablen Banach-Raum  $X$ . Sei  $\sigma_p(A) \cap i\mathbb{R}$  im Intervall  $(i\omega_1, i\omega_2)$  enthalten, wobei  $-\infty \leq \omega_1 < \omega_2 \leq \infty$ . Sei  $f$  eine integrierbare Funktion mit  $f : (\omega_1, \omega_2) \rightarrow X$  mit

1.  $f(s) \in \ker(is - A)$  für fast alle  $s \in (\omega_1, \omega_2)$
2.  $\text{span}\{f(s), s \in (\omega_1, \omega_2) \setminus \Omega\}$  ist dicht in  $X$  für alle Teilmengen  $\Omega$  mit Maß Null.

Dann ist die Halbgruppe  $\mathcal{T}$  hyperzyklisch.

*Beweis.* Wir verwenden für den Beweis Theorem 4.2.10 und weisen nach, dass  $X_0$  und  $X_\infty$  dicht in  $X$  liegen. Dies wiederum zeigen wir, in dem wir eine in  $X$  dichte Menge konstruieren, die sowohl in  $X_0$  als auch in  $X_\infty$  enthalten ist. Sei  $r \in \mathbb{R}$  und sei

$$\psi_r := \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{irs} f(s) ds \tag{4.2.25}$$

Mit dem Riemann-Lebesgue-Lemma folgt, dass  $\psi_r$  und damit  $\text{span}\{\psi_r, r \in \mathbb{R}\} \subset X_0$ . Da wir nur rein imaginäre Eigenwerte betrachten, gilt ferner  $T(t)f(s) = e^{ist}f(s)$  und somit

$$T(t)\psi_r = \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{i(r+t)s} f(s) ds \quad (4.2.26)$$

Wir setzen

$$w_t := \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{i(r-t)s} f(s) ds \quad (4.2.27)$$

und erhalten

$$T(t)w_t = \psi_r. \quad (4.2.28)$$

Wieder folgt mit dem Riemann-Lebesgue-Lemma, dass  $\psi_r$  und damit  $\text{span}\{\psi_r, r \in \mathbb{R}\} \subset X_\infty$ . Es bleibt somit zu zeigen, dass  $Y := \text{span}\{\psi_r, r \in \mathbb{R}\}$  dicht in  $X$  liegt. Wir verwenden eine Schlussfolgerung aus dem Satz von Hahn-Banach, die besagt, dass eine Teilmenge  $Y$  genau dann dicht in  $X$  liegt, wenn aus  $x^* \in X^*$  mit  $x^*|_Y = 0$  folgt, dass  $x^*|_X = 0$ . Sei also  $\phi \in X^*$  ein Element aus dem Dualraum mit  $\phi|_Y = 0$ , d.h.

$$0 = \phi(\psi_r) = \phi\left(\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{irs} f(s) ds\right) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{irs} \phi(f(s)) ds \quad (4.2.29)$$

Für das Verschwinden des Integrals muss gelten  $\phi(f(s)) = 0$  fast überall. Nach Voraussetzung liegt  $\text{span}\{f(s), s \in (\omega_1, \omega_2) \setminus \Omega\}$  dicht in  $X$ , d.h.  $\phi = 0$  auf einer dichten Teilmenge von  $X$ . Nach der oben genannten Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach folgt damit  $\phi = 0$  auf  $X$ . Damit liegt aber die oben gegebene Menge  $Y := \text{span}\{\psi_r, r \in \mathbb{R}\}$  dicht in  $X$ . Es folgt  $X_0$  und  $X_\infty$  liegen dicht in  $X$  und daher ist mit Theorem 4.2.10 die Halbgruppe  $\mathcal{T}$  hyperzyklisch auf  $X$ .  $\square$

Neben den hinreichenden Bedingungen stellen Desch, Schappacher und Webb 1997 und Grosse-Erdmann und Manguillot 2011 auch notwendige Bedingungen für das Vorhandensein von Hyperzyklizität vor. Diese werden vielfach verwendet, um Hyperzyklizität und somit auch Chaotizität auszuschließen.

**Theorem 4.2.12.** (Desch, Schappacher und Webb 1997, Th. 3.3)

Sei  $\{T(t)|t \geq 0\}$  eine hyperzyklische Halbgruppe auf einem Banach-Raum  $X$  mit Erzeuger  $A$ . Dann haben die Adjungierte  $A^*$  von  $A$  und die zu  $\{T(t)|t \geq 0\}$  duale Halbgruppe  $\{T^*(t)|t \geq 0\}$  die folgenden Eigenschaften:

1. Falls  $\phi \in X^*$ ,  $\phi \neq 0$ , so ist der Orbit  $\{T^*(t)\phi|t \geq 0\}$  unbeschränkt.
2. Das Punktspektrum von  $A^*$  ist leer.

*Beweis.* 1.) Wir zeigen:  $\phi \in X^*, \phi \neq 0 \Rightarrow \{T^*(t)\phi | t \geq 0\}$  unbeschränkt. Da  $\{T(t)|t \geq 0\}$  hyperzyklisch ist, gibt es  $x \in X$ , so dass  $\{T(t)x | t \geq 0\}$  dicht in  $X$  liegt. Wir führen den Beweis mit Widerspruch. Angenommen, es gäbe ein  $\phi \in X^*, \phi \neq 0$ , dessen Orbit beschränkt ist, d.h.  $\|T^*(\phi)\| \leq M, \forall t \geq 0$  und  $M \in \mathbb{R}_+$ . Wir wählen ein  $y \in X$  mit  $\|\langle \phi, x \rangle\| > 3M\|x\|$ . Ein solches  $y$  existiert. Setze beispielsweise  $y = \frac{6M\|x\|}{\|\phi\|}$ . Da  $\phi \in X^*$  gilt  $\|\langle \phi, y \rangle\| = \|\phi(y)\| < \|\phi\|\|x\|$  und somit

$$\|\langle \phi, y \rangle\| = \|\phi(y)\| > \frac{1}{2}\|\phi\|\|x\| = \frac{1}{2}\|\phi\| \frac{6M\|x\|}{\|\phi\|} = 3M\|x\| \quad (4.2.30)$$

Sei nun  $\varepsilon = M\frac{\|x\|}{\|\phi\|}$ . Wir wählen nun ein  $t > 0$ , so dass  $\|T(t)x - y\| < \varepsilon$ . Ein solches  $t$  existiert, da nach Voraussetzung  $\{T(t)x | t \geq 0\}$  dicht in  $X$  liegt. Es gälte dann:

$$3M\|x\| < \|\langle \phi, y \rangle\| = \|\langle \phi, T(t)x \rangle - \langle \phi, T(t)x - y \rangle\| \quad (4.2.31)$$

$$= \|\langle \phi, T(t)x \rangle - \langle \phi, T(t)x - y \rangle\| \quad (4.2.32)$$

$$\leq \|\langle \phi, T(t)x \rangle\| + \|\langle \phi, T(t)x - y \rangle\| \quad (4.2.33)$$

$$= \|\langle T^*(t)\phi, x \rangle\| + \|\langle \phi, T(t)x - y \rangle\| \quad (4.2.34)$$

$$\leq \|T^*(t)\phi\|\|x\| + \|\phi\|\|T(t)x - y\| \quad (4.2.35)$$

$$\leq M\|x\| + \|\phi\| \frac{M\|x\|}{\|\phi\|} \leq 2M\|x\| \quad (4.2.36)$$

Dies ist nicht möglich. Folglich ist die Annahme, dass es ein derartiges  $\phi$  gibt falsch.

2.) Wir zeigen:  $\sigma_P(A^*) = \emptyset$ . Angenommen,  $\sigma_P(A^*) \neq \emptyset$ . Dann gibt es  $\lambda \in \sigma_P(A^*)$  mit  $A^*\phi = \lambda\phi, \phi \neq 0$ . Mit Gleichung (4.2.45) gilt  $\xi = T^*(t)\phi = e^{\lambda t}\phi$  als Lösung der Differentialgleichung. Für  $x \in X$  ist

$$\langle \phi, T(t)x \rangle = \langle T^*\phi, x \rangle = \langle e^{\lambda t}\phi, x \rangle = e^{\lambda t}\langle \phi, x \rangle \quad (4.2.37)$$

Wäre  $\phi$  ein Funktional, das den Orbit  $\{T(t)x | t \geq 0\}$  annulliert, wäre, da dieser nach Voraussetzung dicht in  $X$  liegt,  $\phi$  auf ganz  $X$  gleich Null, was ausgeschlossen war. Da mit 1.) der Orbit  $\{T^*(t)\phi | t \geq 0\}$  unbeschränkt ist, können wir  $\Re(\lambda) > 0$  annehmen. Demzufolge gilt

$$|\langle \phi, T(t)x \rangle| > |\langle \phi, x \rangle| \quad \forall t > 0 \quad (4.2.38)$$

Wir wählen nun ein  $y \in X$  und  $\varepsilon > 0$  so, dass  $\langle \phi, x \rangle = \phi(y) = 0$  und  $\varepsilon = \frac{|\langle \phi, x \rangle|}{2\|\phi\|}$ . Da der Orbit von  $x$  dicht in  $X$  liegt, gibt es ein  $t \geq 0$  mit

$$\|T(t)x - y\| < \varepsilon = \frac{|\langle \phi, x \rangle|}{2\|\phi\|} \quad (4.2.39)$$

Dann gilt

$$|\langle \phi, T(t)x \rangle| = |\langle \phi, T(t)x \rangle + \langle \phi, y \rangle - \langle \phi, y \rangle| \quad (4.2.40)$$

$$\leq |\langle \phi, y \rangle| + |\langle \phi, T(t)x - y \rangle| \quad (4.2.41)$$

$$\leq |\langle \phi, y \rangle| + \|\phi\| \|T(t)x - y\| \quad (4.2.42)$$

$$\leq \|\phi\| \frac{|\langle \phi, x \rangle|}{2\|\phi\|} = \frac{1}{2} |\langle \phi, x \rangle| \quad (4.2.43)$$

Dies steht im Widerspruch zu Gleichung (4.2.38). Die Annahme, dass  $\sigma_p(A^*) \neq \emptyset$  ist demzufolge falsch.  $\square$

**Lemma 4.2.13.** (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, Prop. 7.14)

Sei  $X$  separabler Banach-Raum und  $\{T(t) | t \geq 0\}$  hyperzyklisch auf  $X$  mit Erzeuger  $(A, D(A))$ . Dann hat für alle  $t > 0$  die Adjungierte  $T^*(t)$  keine Eigenwerte. Dies ist äquivalent zu der Aussage, dass der Operator  $T(t) - \lambda I$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  dichten Rang besitzt.

#### 4.2.1.2 Chaotizitätskriterien

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir gesehen, dass anhand der Eigenschaften des Erzeugers einer stark stetigen Halbgruppe Aussagen zu deren Hyperzyklizität abgeleitet werden können. Wir hatten angemerkt, dass gleiches auch für die Feststellung ihrer möglichen Chaotizität gilt. In diesem Abschnitt werden wir entsprechende Kriterien vorstellen und beginnen mit dem zentralen Theorem von Desch, Schappacher und Webb.

**Theorem 4.2.14.** (Desch, Schappacher und Webb 1997, Th. 3.1)

Sei  $X$  ein separabler Banach-Raum,  $\mathcal{T} := \{T(t) | t \geq 0\}$  eine stark stetige Halbgruppe auf  $X$  und  $A$  ihr Erzeuger. Sei  $U$  eine offene, zusammenhängende Teilmenge des Punktspektrums von  $A$ , die die imaginäre Achse schneidet. Für jedes  $\lambda \in U$  sei  $x_\lambda$  ein Eigenvektor  $Ax_\lambda = \lambda x_\lambda$ , mit  $x_\lambda \neq 0$ . Für jedes  $\phi \in X^*$  definieren wir eine Funktion  $F_\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $F_\phi(\lambda) = \langle \phi, x_\lambda \rangle$ . Für alle  $\phi \in X^*$  sei  $F_\phi$  analytisch und identisch Null auf  $U$  nur für  $\phi = 0$ . Dann ist die Halbgruppe  $\{T(t) | t \geq 0\}$  chaotisch auf  $X$ .

*Beweis.* Wir wollen zunächst zeigen, dass  $X_\infty$  und  $X_0$  in  $X$  dicht liegen, denn dann ist die Menge  $\{T(t) | t \geq 0\}$  mit Theorem 4.2.10 hyperzyklisch. In einem zweiten Schritt zeigen wir dann, dass  $X_p$  dicht in  $X$  liegt, so dass  $\{T(t) | t \geq 0\}$  dann nach Definition chaotisch ist. Die Beweisführung wird dabei für alle drei Mengen in ähnlicher Weise erfolgen und beruht auf der Tatsache, dass für eine beliebige Teilmenge  $V$  einer offenen Teilmenge  $U \subset \sigma(A)$ , die einen Häufungspunkt in  $U$  besitzt, die Menge  $Y_V = \text{span}\{x_\lambda | \lambda \in V\}$  dicht in  $X$  liegt. Um dies zu zeigen, nehmen wir an, dass dem nicht so ist. Dann gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach ein lineares Funktional

$\phi \in X^*$  mit  $\phi \neq 0$  und  $\langle \phi, x \rangle = 0, \forall x \in Y_V$ . Es gilt demnach  $\forall \lambda \in V: F_\phi(\lambda) = 0$ . Nach Voraussetzung ist  $F_\phi$  analytisch auf  $U$ . Da  $V \subset U$  nach Voraussetzung einen Häufungspunkt in  $U$  hat, gilt mit dem Identitätssatz der Funktionentheorie  $F_\phi = 0$  auf ganz  $U$ , was den Annahmen im Satz widerspricht.  $Y_V$  liegt also dicht in  $X$ . Wir werden nun für jede der Mengen  $X_0, X_\infty$  und  $X_p$  eine derartige Teilmenge  $Y_V$  finden. Aus der Dichtheit von  $Y_V$  folgt dann die Dichtheit der jeweiligen Obermenge.

Wir zeigen nun:  $X_0$  liegt dicht in  $X$ . Sei dafür  $V \subset \{\lambda \in U | \Re(\lambda) < 0\}$  mit Häufungspunkt in  $U$  und sei  $\lambda \in V$ . Dann gilt  $Ax_\lambda = \lambda x_\lambda$  und es ist  $Y_V = \text{span}\{x_\lambda | \lambda \in V\}$  mit den vorangestellten Überlegungen dicht in  $X$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $Y_V$  in  $X_0$  liegt. Es gilt mit Gleichung (2.1.7):

$$\xi_{x_\lambda}(t) = T(t)x_\lambda \quad (4.2.44)$$

$$\dot{\xi}_{x_\lambda}(t) = T(t)\dot{\xi}_{x_\lambda}(0) = T(t)Ax_\lambda = \lambda T(t)x_\lambda = \lambda \xi_{x_\lambda}(t) \quad (4.2.45)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichungen lautet  $\xi_{x_\lambda} = Ce^{\lambda t}, C \in \mathbb{C}$ . Da nach Definition  $\Re(\lambda) < 0$  gilt, folgt  $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t)x_\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \xi_{x_\lambda} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} = 0$ . Somit gilt  $x_\lambda \in X_0, \forall \lambda \in V$ . Da  $X_0$  ein Untervektorraum von  $X$  ist, liegen auch alle Linearkombinationen der  $x_\lambda$  in  $X_0$ , also  $Y_V \subset X_0$ . Mit  $Y_V$  ist nun auch  $X_0$  dicht in  $X$ .

Wir zeigen nun:  $X_\infty$  liegt dicht in  $X$ . Sei dafür  $V \subset \{\lambda \in U | \Re(\lambda) > 0\}$  mit Häufungspunkt in  $U$  und sei  $\lambda \in V$ . Wieder gilt  $Ax_\lambda = \lambda x_\lambda$  und es ist  $Y_V = \text{span}\{x_\lambda | \lambda \in V\}$  mit den vorangestellten Überlegungen dicht in  $X$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $Y_V$  in  $X_\infty$  liegt. Für jedes  $x \in Y_V$  gilt:

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i e^{-\lambda_i t} e^{\lambda_i t} x_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i e^{-\lambda_i t} \xi_{\lambda_i}(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e^{-\lambda_i t} T(t)x_{\lambda_i} \quad (4.2.46)$$

$$= T(t) \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i e^{-\lambda_i t} x_{\lambda_i} \right) \quad (4.2.47)$$

Wir setzen  $w := \sum_{i=1}^n \lambda_i e^{-\lambda_i t} x_{\lambda_i}$ . Dann gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} w = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \lambda_i e^{-\lambda_i t} x_{\lambda_i} = 0$ , denn es ist nach Definition  $\Re(\lambda) > 0$ . Es gibt also  $\forall \varepsilon > 0$  ein  $t > 0$  und ein  $w \in X$ , so dass  $\|w\| = \|\sum_{i=1}^n \lambda_i e^{-\lambda_i t} x_{\lambda_i}\| < \varepsilon$  und  $\|T(t)w - x\| < \varepsilon$ . Somit gilt  $x \in X_\infty$  und somit  $Y_V \subset X_\infty$ . Mit  $Y_V$  ist nun auch  $X_\infty$  dicht in  $X$ .

Wir zeigen nun:  $X_p$  liegt dicht in  $X$ . Sei dafür  $V = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$  eine Menge mit Häufungspunkt in  $U$  und  $\Re(\lambda) = 0$  sowie  $\Im(\lambda) = \frac{k}{n}, k, n \in \mathbb{N}$ . Auch hier gilt  $Ax_\lambda = \lambda x_\lambda$  und es ist  $Y_V = \text{span}\{x_\lambda | \lambda \in V\}$  mit den vorangestellten Überlegungen dicht in  $X$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $Y_V$  in  $X_p$  liegt. Für jedes  $x_\lambda$  liegt der Orbit  $\xi_{x_\lambda}$  als Lösung der Differentialgleichung (4.2.45) in der Form  $\xi_{x_\lambda} = Ce^{\lambda t}$  vor. Mit  $\xi_{x_\lambda}(0) = T(0)x_\lambda = x_\lambda$  gilt  $\xi_{x_\lambda} = x_\lambda e^{\lambda t}$ . Es ist

$$T\left(t = 2\pi \frac{n}{k}\right) x_\lambda = \xi_{x_\lambda}\left(t = 2\pi \frac{n}{k}\right) = x_\lambda e^{\lambda 2\pi \frac{n}{k}} = x_\lambda e^{i \frac{k}{n} 2\pi \frac{n}{k}} \quad (4.2.48)$$

$$= x_\lambda e^{2\pi i} = x_\lambda. \quad (4.2.49)$$

Es gibt also  $t > 0$  mit  $T(t)x_\lambda = x_\lambda$ . Folglich ist  $x_\lambda \in X_p$ . Da  $X_p$  ein Untervektorraum von  $X$  ist, liegen auch alle Linearkombinationen der  $x_\lambda$  in  $X_p$ , also  $Y_V \subset X_p$ . Mit  $Y_V$  ist nun auch  $X_p$  dicht in  $X$ . Somit ist  $\{T(t)|t \geq 0\}$  chaotisch auf  $X$ .  $\square$

Banasiak und Moszynski 2005 leiten daraus ein weiteres Kriterium für Chaotizität ab (Theorem 4.2.18). Für dessen Beweis benötigen wir die folgenden Lemmata 4.2.15, 4.2.16 und Proposition 4.2.17 sowie Lemma 4.2.35 und Theorem 4.2.36.

**Lemma 4.2.15.** (Banasiak und Moszynski 2005, L. 3.5)

Sei  $B : \text{dom}(B) \subset X \rightarrow X$  ein linearer Operator auf  $X$ . Sei  $\phi_n \in \text{dom}(B)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und

$$B\phi_0 = 0, \quad B\phi_n = \phi_{n-1}, n \geq 1 \quad (4.2.50)$$

Wenn  $\ker B = \text{span}\{\phi_0\}$ , dann ist  $\ker B^n = \text{span}\{\phi_0, \dots, \phi_{n-1}\}$ ,  $\forall n \geq 1$ . Insbesondere gilt

$$\ker B^\infty := \bigcup_{n \geq 1} \ker B^n = \text{span}\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\} \quad (4.2.51)$$

.

*Beweis.* Wir zeigen:  $\text{span}\{\phi_0, \dots, \phi_{n-1}\} \subset \ker B^n$ . Dies gilt nach Definition, denn es ist:

$$B^n \left( \sum_{i=0}^{n-1} a_i \phi_i \right) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i B^n \phi_i = 0 \quad (4.2.52)$$

Wir zeigen:  $\ker B^n \subset \text{span}\{\phi_0, \dots, \phi_{n-1}\}$ . Wir führen den Beweis mit vollständiger Induktion. Sei  $n = 1$ . Nach Voraussetzung gilt  $\ker B = \text{span}\{\phi_0\}$ . Der Induktionsanfang ist somit gegeben. Wir nehmen nun an, dass  $\ker B^n \subset \text{span}\{\phi_0, \dots, \phi_{n-1}\}$  und wollen zeigen, dass dann auch  $\ker B^{n+1} \subset \text{span}\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$  gilt. Sei  $\phi \in \ker B^{n+1}$ . Dann gilt  $0 = B^{n+1}\phi = B^n B\phi$ . Es ist also  $B\phi \in \ker B^n$  und damit darstellbar als Linearkombination der  $\phi_i$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ :

$$B\phi = \sum_{k=1}^n c_k \phi_{k-1} = \sum_{k=1}^n c_k B\phi_k \quad (4.2.53)$$

Unter Beachtung der Linearität von  $B$  und der Voraussetzung, dass  $\ker B = \text{span}\{\phi_0\}$ , gilt:

$$B\phi - \sum_{k=1}^n c_k B\phi_k = B\left(\phi - \sum_{k=1}^n c_k \phi_k\right) = B(c_0 \phi_0) = 0. \quad (4.2.54)$$

Somit gilt:

$$\phi = c_0 \phi_0 + \sum_{k=1}^n c_k \phi_k = \sum_{k=0}^n c_k \phi_k \quad (4.2.55)$$

also:  $\phi \in \text{span}\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$ . Somit haben wir insgesamt  $\ker B^n = \text{span}\{\phi_0, \dots, \phi_{n-1}\}$  gezeigt. Insbesondere gilt  $\ker B^\infty = \text{span}\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$ .  $\square$

**Lemma 4.2.16.** (Banasiak und Moszynski 2005, L. 3.6)

Sei  $A$  ein abgeschlossener Operator auf  $X$ . Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen. Sei  $f \in \mathcal{A}(U, X)$  mit  $f(\lambda) \in \ker(A - \lambda I)$ ,  $\forall \lambda \in U$ . Dann haben  $\forall \lambda_0 \in U$  und  $n \in \mathbb{N}$  die Koeffizienten  $f_{n,\lambda_0}$  der Potenzreihendarstellung von  $f$  die folgenden Eigenschaften:

$$f_{n,\lambda_0} \in \text{dom}(A) \quad (4.2.56)$$

$$(A - \lambda_0 I)f_{0,\lambda_0} = 0 \quad (4.2.57)$$

$$(A - \lambda_0 I)f_{n,\lambda_0} = f_{n-1,\lambda_0}, \quad n \geq 1 \quad (4.2.58)$$

**Proposition 4.2.17.** (Banasiak und Moszynski 2005, Prop. 3.7)

Sei  $A$  ein abgeschlossener Operator auf  $X$ . Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und zusammenhängend und sei  $f \in \mathcal{A}(U, X)$  eine analytische Funktion mit  $f(\lambda) \in \ker(A - \lambda I)$ ,  $\forall \lambda \in U$ . Sei  $\lambda_0 \in U$ . Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. Gilt  $\dim \ker(A - \lambda_0 I) = 1$  und  $f(\lambda_0) \neq 0$ , dann ist  $\mathcal{V}(f, U) = \overline{\ker(A - \lambda_0 I)^\infty}$ .
2. Gilt  $\dim \ker(A - \lambda_0 I) = 0$  dann ist  $\mathcal{V}(f, U) = 0$ , d.h.  $f$  ist die Nullfunktion.

*Beweis.* Wir beweisen beide Aussagen unter Verwendung der beiden vorangestellten Lemmata sowie Lemma 4.2.35. Wir setzen dafür  $B := (A - \lambda_0 I)$  und  $\phi_n := f_{n,\lambda_0}$ . Mit Lemma 4.2.16 gilt:

$$\phi_n = f_{n,\lambda_0} \in \text{dom } B = \text{dom}(A - \lambda_0 I) \quad (4.2.59)$$

$$B\phi_0 = (A - \lambda_0 I)f_{0,\lambda_0} = 0 \quad (4.2.60)$$

$$B\phi_n = (A - \lambda_0 I)f_{n,\lambda_0} = f_{n-1,\lambda_0} = \phi_{n-1} \quad (4.2.61)$$

(1.) Es gilt nach Voraussetzung  $B = \ker(A - \lambda_0) = \text{span}\{f_{0,\lambda_0}\}$ , denn  $\dim \ker(A - \lambda_0) = 1$  und  $f(\lambda_0) \neq 0$ . Damit sind alle Voraussetzungen in Lemma 4.2.15 erfüllt und es folgt mit Lemma 4.2.35

$$\ker(A - \lambda_0 I)^\infty = \text{span}\{f_{n,\lambda_0} : n \in \mathbb{N}\} \quad (4.2.62)$$

$$\overline{\ker(A - \lambda_0 I)^\infty} = \overline{\text{span}\{f_{n,\lambda_0} : n \in \mathbb{N}\}} = \overline{\text{span}\{f(\lambda) : \lambda \in U\}} \quad (4.2.63)$$

(2.) Sei nun  $\dim \ker B = \dim \ker(A - \lambda_0 I) = 0$ . Dann folgt  $\text{span}\{\phi_0\} = \ker B = \ker(A - \lambda_0 I) = \{0\}$  und damit  $f_{0,\lambda_0} = \phi_0 = 0$ . Dies gilt auch für alle  $f_{n,\lambda_0}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , denn mit  $\phi_{n-1} = 0$  ist  $\phi_n \in \ker B = \{0\}$ . Somit ist  $f$  die Nullfunktion und es gilt wieder mit Lemma 4.2.35

$$0 = \overline{\text{span}\{f_{n,\lambda_0} : n \in \mathbb{N}\}} = \overline{\text{span}\{f(\lambda) : \lambda \in U\}} \quad (4.2.64)$$

□

**Theorem 4.2.18.** (Banasiak und Moszynski 2005, Th. 3.8)

Sei  $X$  ein separabler Banach-Raum und sei  $A$  der Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe  $\{T(t)|t \geq 0\}$  auf  $X$ . Angenommen, es gibt eine offene, zusammenhängende Menge  $U$  von  $\mathbb{C}$  und eine analytische Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ , die die folgenden Bedingungen erfüllt:

1.  $U \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$
2.  $f(\lambda) \in \ker(A - \lambda I)$  für alle  $\lambda \in U$
3. Es gibt  $\lambda_0 \in U$  für das gilt:  $\dim \ker(A - \lambda_0 I) = 1$ ,  $f(\lambda_0) \neq 0$  und  $\ker(A - \lambda_0 I)^\infty$  liegt dicht in  $X$ , wobei  $\ker(A - \lambda_0 I)^\infty = \cup_{n \geq 1} \ker(A - \lambda_0 I)^n$ .

Dann ist die Halbgruppe  $\{T(t)|t \geq 0\}$  chaotisch auf  $X$ .

*Beweis.* Wir führen den Verweis unter Verwendung der vorangegangenen Proposition 4.2.17 sowie Theorem 4.2.36. Sind die ersten beiden Bedingungen erfüllt, besagt Theorem 4.2.36, dass  $\{T(t)|t \geq 0\}$  chaotisch auf  $\mathcal{V}(f, U)$  ist. Ist zusätzlich die dritte Bedingung erfüllt, dann ist mit Proposition 4.2.17

$$\mathcal{V}(f, U) = \overline{\ker(A - \lambda_0 I)^\infty} = X \quad (4.2.65)$$

Somit ist  $\{T(t)|t \geq 0\}$  chaotisch auf  $X$ . □

Die beiden folgenden Kriterien basieren auf Erweiterungen des in Mourchid 2006 (Theorem (4.2.11)) vorgeschlagenen Kriteriums für den Nachweis der Hyperzyklizität einer stark stetigen Halbgruppe. Diese Erweiterungen implizieren die stärkere Eigenschaft der Chaotizität.

**Theorem 4.2.19.** (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, Th. 7.32)

Sei  $\{T(t)|t \geq 0\}$  eine stark stetige Halbgruppe auf einem komplexen separablen Banach-Raum  $X$  und sei  $(A, D(A))$  ihr Erzeuger. Angenommen, es gibt  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und stetige Funktionen  $f_j : [a, b] \rightarrow X$ ,  $j \in J$ ,  $J$  eine nicht-leere Indexmenge, so dass Folgendes gilt:

1.  $f_j(s) \in \ker(isI - A)$ ,  $\forall s \in [a, b], j \in J$
2.  $\text{span}\{f_j(s)|s \in [a, b], j \in J\}$  ist dicht in  $X$

Dann ist die Halbgruppe  $\mathcal{T} := \{T(t)|t \geq 0\}$  chaotisch.

*Beweis.* Für führen den Beweis unter Verwendung von Theorem 4.2.9. Zunächst erzeugen wir uns dichte Mengen  $Y_0, Z_0 \subset X$ . In einem zweiten Schritt konstruieren wir die Abbildungen  $S(t)$ , so dass die drei Bedingungen von Theorem 4.2.9 erfüllt sind, womit dann die Hyperzyklizität von  $\mathcal{T}$  nachgewiesen ist. In einem letzten Schritt zeigen wir dann die Dichtheit der

periodischen Punkte, so dass die Chaotizität von  $\mathcal{T}$  folgt. Wir definieren

$$\psi_{r,j} := \int_a^b e^{irs} f_j(s) ds \quad (4.2.66)$$

$$X_0 = Y_0 := \{\text{span } f_j(s), r \in \mathbb{R}, j \in J\} \quad (4.2.67)$$

Wie im Beweis zu Theorem 4.2.11 zeigen wir mit dem Theorem von Hahn-Banach, dass  $Y_0, Z_0$  dicht in  $X$  liegen. Dafür sei  $x^* \in X^*$  mit  $x^*(\psi_{r,j}) = 0$ , d.h.  $x^*|_{Y_0} = 0$ . Wir wollen zeigen  $x^*|_X = 0$ , denn dann liegt mit dem Theorem von Hahn-Banach  $Y_0$  dicht in  $X$ . Es ist

$$0 = x^*(\psi_{r,j}) = x^* \left( \int_a^b e^{irs} f_j(s) ds \right) = \int_a^b e^{irs} x^*(f_j(s)) ds \quad (4.2.68)$$

Mit  $x^*$  und  $f_j$  ist auch  $x^* \circ f_j$  stetig und damit Element des Hilbert-Raumes  $L^2(a, b)$ . Dieser ist gleich seinem Dualraum. Ferner besitzt er eine Orthonormalbasis und somit lässt sich jedes Element als Linearkombination dieser Basiselemente schreiben, insbesondere die Elemente  $x^*$  und  $f_j$ . Dies eingesetzt in die obige Integralgleichung führt zu der Forderung  $x^*(f_j(s)) = 0, \forall s \in [a, b], j \in J$ .  $x^*$  verschwindet demnach auf  $\{\text{span } f_j(s), r \in \mathbb{R}, j \in J\}$  und da diese Menge nach Voraussetzung dicht in  $X$  liegt, gilt  $x^* = 0$  auf ganz  $X$ . Aus  $x^*|_{Y_0} = 0$  folgt also  $x^*|_X = 0$ . Ein weiteres Mal schlussfolgern wir mit dem Theorem von Hahn-Banach, dass damit  $Y_0 = Z_0$  dicht in  $X$  liegt. Wir kommen nun zum zweiten Schritt und damit zur Konstruktion der Abbildungen, die die Bedingungen von Theorem 4.2.9 erfüllen. Für den Nachweis der ersten Bedingung benötigen wir nur die Halbgruppe  $\mathcal{T}$ . Wie im Beweis von Theorem 4.2.11 gezeigt, gilt mit dem Riemann-Lebesgue-Lemma  $T(t)x \rightarrow 0$  für  $x \in Y_0$ . Für den Nachweis der zweiten und dritten Bedingung des Theorems 4.2.9 definieren wir uns Abbildungen  $S_t : Z_0 \rightarrow Z_0$  mit  $S_t \psi_{r,j} = \psi_{r-t,j}$ . Sei  $z \in Z_0$ . Wir bilden

$$S_t z_0 = S_t \left( \sum_{k=1}^n a_k \psi_{r_k, j_k} \right) = \sum_{k=1}^n a_k \psi_{r_k - t, j_k} \quad (4.2.69)$$

Somit gilt  $S_t z_0 \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$  mit dem Riemann-Lebesgue-Lemma und die zweite Bedingung von Theorem 4.2.9 ist erfüllt. Des Weiteren gilt, da wir nur rein imaginäre Eigenwerte betrachten

$$T_t S_t z_0 = T_t \sum_{k=1}^n a_k \psi_{r_k - t, j_k} = \sum_{k=1}^n a_k \psi_{r_k - t + t, j_k} = \sum_{k=1}^n a_k \psi_{r_k, j_k} = z_0 \quad (4.2.70)$$

Damit ist auch dritte Bedingung von Theorem 4.2.9 erfüllt und es folgt, dass die Halbgruppe  $\mathcal{T}$  hyperzyklisch ist. Wir wenden uns nun dem Nachweis der Chaotizität zu. Da die  $f_j$  stetig sind, ist mit  $\text{span}\{f_j(s) | s \in [a, b], j \in J\}$  auch die Menge  $P_0 := \text{span}\{f_j(s) | s \in [a, b] \cap \mathbb{Q}, s \neq 0, j \in J\}$  dicht in  $X$ . Da wir nur rein imaginäre Eigenwerte betrachten, ist jedes Element  $p \in P_0$  ein periodischer Punkt für die Halbgruppe  $\mathcal{T}$ . Da also die Menge der periodischen Punkte dicht in  $X$  liegt, ist die Halbgruppe  $\mathcal{T}$  chaotisch in  $X$ .  $\square$

**Theorem 4.2.20.** (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, Th. 7.4.5)

Sei  $\{T(t)|t \geq 0\}$  eine stark stetige Halbgruppe auf einem komplexen separablen Banach-Raum  $X$  und sei  $(A, D(A))$  ihr Erzeuger. Angenommen, es gibt kompakte Intervalle  $I_j = [a_j, b_j]$  und stetige Funktionen  $f_j : I_j \rightarrow X, j \in J, J$  eine nichtleere Indexmenge, so dass folgendes gilt:

1.  $f_j(s) \in \ker(isI - A), \forall s \in I_j, j \in J$
2.  $\text{span}\{f_j(s)|s \in I_j, j \in J\}$  ist dicht in  $X$

Dann ist die Halbgruppe  $\{T(t)|t \geq 0\}$  chaotisch.

*Beweis.* Der Beweis folgt mit einer analogen Argumentation wie im Beweis zum vorangegangenen Theorem 4.2.19. □

Im Anschluss an die Diskussion hinreichender Bedingungen sei nun noch eine notwendige Bedingung für das Auftreten von Chaotizität angeführt.

**Proposition 4.2.21.** (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, Prop 7.18)

Sei  $(A, D(A))$  Erzeuger einer chaotischen Halbgruppe auf einem komplexen Banach-Raum. Dann ist  $\sigma_p(A) \cap i\mathbb{R}$  unendlich und

$$X = \overline{\text{span}} \bigcup_{\lambda \in i\mathbb{R}} \ker(\lambda I - A) \tag{4.2.71}$$

#### 4.2.2 Hyperzyklizität und Chaotizität auf Produkträumen

Ebenso wie für direkte Summen von Operatoren auf Produkträumen können wir die Hyperzyklizität und Chaotizität direkter Summen von Operatorhalbgruppen diskutieren. Dafür definieren wir zunächst die topologische Transitivität derartiger Summen, die im Fall separabler Banach-Räume wieder äquivalent zu ihrer Hyperzyklizität ist.

**Definition 4.2.22.** Topologische Transitivität der direkten Summe (Desch und Schappacher 2005)

Sei  $\{T(t)|t \geq 0\}$  eine stark stetige Halbgruppe auf einem separablen Banach-Raum  $X$  und  $\{S(t)|t \geq 0\}$  eine stark stetige Halbgruppe auf einem separablen Banach-Raum  $Y$ . Dann ist die direkte Summe  $(T(t) \oplus S(t))$  topologisch transitiv, wenn es nicht-leere, offene Teilmengen  $U_x, V_x \subset X$  und  $U_y, V_y \subset Y$  gibt, für die es ein und dasselbe  $t \in \mathbb{R}$  gibt, mit  $T(t)U_x \cap V_x$  und  $S(t)U_y \cap V_y$ .

Wir nehmen zunächst an, dass die direkte Summe auf dem Produktraum  $X \times X$  zweier separabler Banach-Räume  $X$  so gebildet wird, dass jeder Summand der stark stetigen Halbgruppe  $\{T(t)|t \geq 0\}$  entspricht und erhalten mit dem folgenden Theorem eine Aussage darüber, wann eine derartige direkte Summe hyperzyklisch auf  $X \times X$  ist.

**Theorem 4.2.23.** *Hyperzyklizität der direkten Summe durch das HCC (Mourchid 2005, Th. 2.5)*

Sei  $\mathcal{T} := \{T(t) | t \geq 0\}$  eine stark stetige Halbgruppe auf einem separablen Banach-Raum  $X$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1.  $\mathcal{T}$  erfüllt das Hyperzyklizitätskriterium 4.2.6
2.  $\mathcal{T} \oplus \mathcal{T} = \begin{pmatrix} \mathcal{T} & 0 \\ 0 & \mathcal{T} \end{pmatrix}$  ist hyperzyklisch auf  $X \times X$ .

*Beweis.* (1.  $\Rightarrow$  2.) nach Voraussetzung ist  $\mathcal{T}$  hyperzyklisch. Es gibt also für nicht-leere offene Mengen  $U_1, U_2, V_1, V_2 \subset X$  ein  $t_{n_1}$ , so dass für alle  $n \geq n_1$  gilt  $T(t_n)U_1 \cap V_1 \neq \emptyset$  und es gibt ein  $t_{n_2}$ , so dass für alle  $n \geq n_2$  gilt  $T(t_n)U_2 \cap V_2 \neq \emptyset$ . Für  $n \geq \max\{n_1, n_2\}$  gilt somit  $T(t_n)U_1 \cap V_1 \neq \emptyset$  und  $T(t_n)U_2 \cap V_2 \neq \emptyset$ , was bedeutet:

$$\emptyset \neq (T(t_n)U_1 \cap V_1) \times (T(t_n)U_2 \cap V_2) \quad (4.2.72)$$

$$= (T(t_n)U_1 \times T(t_n)U_2) \cap (V_1 \times V_2) \quad (4.2.73)$$

$$= \left( \begin{pmatrix} T(t_n) & 0 \\ 0 & T(t_n) \end{pmatrix} (U_1 \times U_2) \right) \cap (V_1 \times V_2) \quad (4.2.74)$$

Somit ist  $\mathcal{T} \oplus \mathcal{T} = \begin{pmatrix} \mathcal{T} & 0 \\ 0 & \mathcal{T} \end{pmatrix}$  hyperzyklisch auf  $X \times X$ .

(2.  $\Rightarrow$  1.) Wir wollen zeigen, dass das Hyperzyklizitätskriterium 4.2.6 gilt. Folglich ist eine Folge  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ganzer Zahlen so zu finden, dass die Mengen  $Z_0$  und  $Z_\infty$  dicht in  $X$  liegen. Wir werden zeigen, dass es ein  $x \in X$  gibt, so dass  $\{T(t)x | t \geq 0\} \in Z_0 \cap Z_\infty$ . Mit  $\{T(t)x | t \geq 0\}$  liegen dann auch  $Z_0$  und  $Z_\infty$  dicht in  $X$ . Sei also  $\mathcal{T} \oplus \mathcal{T}$  hyperzyklisch auf  $X \times X$ . Dann gibt es  $(x, u) \in X \times X$ , so dass  $\{T(t)x, T(t)u\}$  dicht in  $X \times X$  liegt. Sei nun  $u_n := \frac{1}{n}u$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist auch  $(x, u_n)$  ein hyperzyklischer Vektor für  $\mathcal{T} \oplus \mathcal{T}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Es gibt also eine Folge  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  positiver ganzer Zahlen mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x = 0 \quad (4.2.75)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \quad (4.2.76)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)u_n = x \quad (4.2.77)$$

Somit gilt  $x \in Z_0 \cap Z_\infty$ . Dies gilt aber auch für jedes  $T(t)x$  für  $t \geq 0$ , denn unter Nutzung der Gleichungen (4.2.75) bis (4.2.77) und Definition einer Folge  $\tilde{u}_n := T(t)u_n$  für festes  $t \geq 0$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)T(t)x = \lim_{t \rightarrow \infty} T(t)T(t_n)x = 0 \quad (4.2.78)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{u}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}T(t)u = 0 \quad (4.2.79)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(t_n)\tilde{u}_n = \lim_{t \rightarrow \infty} T(t)T(t_n)u_n = T(t)x \quad (4.2.80)$$

Somit gilt  $\{T(t)x | t \geq 0\} \in Z_0 \cap Z_\infty$ . Nach Voraussetzung liegt  $\mathcal{T}$  ferner dicht in  $X$ . und somit auch  $Z_0$  und  $Z_\infty$ . Folglich erfüllt  $\{T(t)x | t \geq 0\}$  das Hyperzyklizitätskriterium 4.2.6.  $\square$

Wir erweitern die Voraussetzungen nun insofern, als dass wir verschiedene stark stetige Halbgruppen auf unterschiedlichen Banach-Räumen zulassen. Mit der Definition der rekurrenten Hyperzyklizität gelingt es uns dann im Folgenden, Kriterien für die Hyperzyklizität bzw. Chaotizität der direkten Summe derartiger Halbgruppen anzugeben.

**Definition 4.2.24.** *Rekurrentes Hyperzyklizitätskriterium, RHCC (Desch und Schappacher 2005)*

Sei  $\mathcal{T} := \{T(t) | t \geq 0\}$  eine stark stetige Halbgruppe. Seien  $U, V \subset X$  nicht-leer und offen. Sei  $W \subset X$  eine Nullumgebung. Dann erfüllt  $\mathcal{T}$  das rekurrente Hyperzyklizitätskriterium (RHCC) genau dann, wenn folgendes gilt:

1. Für alle  $U, W$  gibt es ein Intervall  $[t, t + L_1)$  der Länge  $L_1 > 0$ , so dass es für alle  $t \geq 0$  ein  $s \in [0, \infty) \cap [t, t + L_1)$  gibt mit  $T(s)U \cap W \neq \emptyset$ .
2. Für alle  $V, W$  gibt es ein Intervall  $[t, t + L_2)$  der Länge  $L_2 > 0$ , so dass es für alle  $t \geq 0$  ein  $s \in [0, \infty) \cap [t, t + L_2)$  gibt mit  $T(s)W \cap V \neq \emptyset$ .

Um das folgende Kriterium für die Hyperzyklizität der direkten Summe zweier Halbgruppen beweisen zu können, benötigen wir die folgenden Lemmata, welche wir dem Kriterium ohne Beweis voranstellen.

**Lemma 4.2.25.** (Desch und Schappacher 2005, L. 2.2)

Sei  $\mathcal{T} := \{T(t) | t \geq 0\}$  eine stark stetige Halbgruppe auf einem separablen Banach-Raum  $X$ , die das rekurrente Hyperzyklizitätskriterium erfüllt. Dann erfüllt  $\mathcal{T}$  auch das Hyperzyklizitätskriterium. Für alle nicht-leeren offenen Teilmengen  $U, V$  und jede Nullumgebung  $W$  gibt es eine Konstante  $L > 0$  so, dass jedes Intervall  $[t, t + L)$  ein  $s$  enthält mit  $T(s)U \cap W \neq \emptyset$  und  $T(s)W \cap V \neq \emptyset$ .

**Lemma 4.2.26.** (Desch und Schappacher 2005, L. 5.2)

Sei  $\{T(t) | t \geq 0\}$  eine stark stetige Halbgruppe auf einem separablen Banach-Raum  $Y$ , die das Hyperzyklizitätskriterium erfüllt. Für alle nicht-leeren offenen Teilmengen  $U, V$ , jede Nullumgebung  $W$  und jedes  $L > 0$  gibt es ein  $t \geq 0$  so, dass für alle  $s \in [t, t + L) \cap \mathbb{R}_+$  gilt, dass  $T(s)U \cap W \neq \emptyset$  und  $T(s)W \cap V \neq \emptyset$ .

**Theorem 4.2.27.** *Hyperzyklizität der direkten Summe durch das RHCC (Desch und Schappacher 2005, Th. 5.1)*

Sei  $\mathcal{S} := \{S(t) | t \geq 0\}$  eine stark stetige Halbgruppe auf einem separablen Banach-Raum  $X$  und  $\mathcal{T} := \{T(t) | t \geq 0\}$  eine stark stetige Halbgruppe auf einem separablen Banach-Raum  $Y$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1.  $S$  erfüllt das rekurrente Hyperzyklizitätskriterium.

2. Erfüllt  $\mathcal{T} := \{T(t) | t \geq 0\}$  das Hyperzyklizitätskriterium, so erfüllt  $S \oplus \mathcal{T}$  das Hyperzyklizitätskriterium auf  $X \times Y$ .

*Beweis.* (1.  $\Rightarrow$  2.) Es seien  $U_x, V_x$  nicht-leere offene Teilmengen von  $X$  und  $U_y, V_y$  nicht-leere offene Teilmengen von  $Y$ , sowie  $W_x$  Nullumgebung in  $X$  und  $W_y$  Nullumgebung von  $Y$ . Da  $S$  das RHCC erfüllt, gibt es mit Lemma 4.2.25 eine Konstante  $L$  so, dass für alle  $t \geq 0$  ein  $s \in [t, t + L)$  existiert mit  $S(s)U_x \cap W_x \neq \emptyset$  und  $S(s)W_x \cap V_x \neq \emptyset$ . Nach Voraussetzung erfüllt  $\mathcal{T}$  das Hyperzyklizitätskriterium. Mit Lemma 4.2.26 gibt es daher für die oben existierende Konstante  $L$  ein  $t \geq 0$  so, dass für alle  $s \in [t, t + L)$  folgt:  $T(s)U_y \cap W_y \neq \emptyset$  und  $T(s)W_y \cap V_y \neq \emptyset$ . Mit diesem  $t$  gibt es also ein  $s \in [t, t + L)$ , so dass insgesamt gilt:

$$[S(s) \oplus T(s)](U_x \times U_y) \cap (W_x \times W_y) \neq \emptyset \quad (4.2.81)$$

$$[S(s) \oplus T(s)](W_x \times W_y) \cap (V_x \times V_y) \neq \emptyset \quad (4.2.82)$$

Somit erfüllt  $(S(t) \oplus T(t))$  das Hyperzyklizitätskriterium auf  $X \times Y$ .

(2.  $\Rightarrow$  1.) Wir führen den Beweis mit Widerspruch. Wir nehmen an, dass  $S$  das RHCC nicht erfüllt. Wir werden zeigen, dass es eine Halbgruppe  $\mathcal{T}$  gibt, die das Hyperzyklizitätskriterium erfüllt, jedoch gilt, dass  $(S(s) \oplus T(s))$  nicht hyperzyklisch auf  $X \times Y$  ist. Die Halbgruppe  $\mathcal{T}$  wird die Translationshalbgruppe sein, und wir werden zeigen, dass es eine zulässige Gewichtsfunktion gibt, so dass  $\mathcal{T}$  hyperzyklisch auf  $Y = \mathcal{C}_{0,\rho}([0, \infty], \mathbb{R})$  ist. Sei also  $S$  eine Halbgruppe, die das RHCC nicht erfüllt, mindestens eine der Bedingungen demnach verletzt ist. Es gibt also zwei nicht-leere, offene Teilmengen  $U_x, V_x \in X$ , so dass für alle  $L > 0$  ein Intervall  $[a, a + L)$  existiert mit  $S(s)U_x \cap V_x = \emptyset$  für alle  $s \in [a, a + L)$ . Je nachdem, welche der Bedingungen in der Definition verletzt ist, setzen wir  $U_x = U$  und  $V_x = W$  bzw.  $U_x = W$  und  $V_x = V$ . Wir definieren uns nun eine Folge von Intervallen und darauf eine Funktion, die sich als zulässig erweisen wird. Sei  $0 = b_0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots$  mit  $b_i - a_i \rightarrow \infty$  und  $S(s)U_x \cap V_x = \emptyset$  für alle  $s \in [a_i, b_i)$  und  $b_i = a_i + L_i$ . Für die Längen  $L_i$  der Intervalle gilt daher  $L_i \rightarrow \infty$ . Auf diesen Intervallen definieren wir uns die Funktion  $\rho$  mit

$$\rho(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t \in [b_{i-1}, a_i) \\ e^{-(t-a_i)} & \text{falls } t \in [a_i, b_i) \end{cases} \quad (4.2.83)$$

Die Funktion erfüllt die Anforderungen an eine zulässige Gewichtsfunktion (vgl. Definition 2.3.7). Des Weiteren gilt  $\liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = 0$ . Mit Theorem 4.3.7 ist die Translationshalbgruppe  $\mathcal{T}$  hyperzyklisch auf  $Y = \mathcal{C}_{0,\rho}([0, \infty], \mathbb{R})$ , d.h. sie erfüllt das Hyperzyklizitätskriterium. Wir betrachten nun die direkte Summe  $S \oplus \mathcal{T}$ . Zunächst definieren wir uns zwei offene Mengen in  $Y$

wie folgt

$$U_y = \{f \in Y \mid \|f\| < 1\}$$

$$V_y = \{f \in Y \mid f(0) > 2\}$$

Wir wählen ein beliebiges  $s \in \mathbb{R}_+$  so, dass für  $f \in U_y$  gilt, dass  $T(s)f \in V_y$ , d.h.  $T(s)U_y \cap V_y \neq \emptyset$ . Da  $T(s)f \in V_y$  folgt  $f(s) > 2$ . Da aber für  $f \in U_y$  gilt, dass  $\|f\| < 1$ , muss die zulässige Gewichtsfunktion auf Grund der festgelegten Norm an der Stelle  $s$  einen Wert kleiner Eins annehmen (vgl. Gleichung (2.3.19)). Die Gewichtsfunktion nimmt Werte kleiner Eins jedoch nur auf den Intervallen  $[a_i, b_i]$  an (vgl. Gleichung (4.2.83)) und für diese gilt  $S(s)U_x \cap V_x = \emptyset$ . Folglich gilt  $[S(s) \oplus T(s)](U_x \times U_y) \cap (V_x \times V_y) = \emptyset$  und daher ist  $(S(t) \oplus T(t))$  nicht hyperzyklisch.  $\square$

**Lemma 4.2.28.** *Chaotizität und RHCC (Desch und Schappacher 2005, L. 6.1)*

Sei  $\mathcal{T} = \{T(t) \mid t \geq 0\}$  eine stark stetige Halbgruppe auf einem separablen Banach-Raum  $X$ . Seien  $U, V \in X$  nicht-leer und offen und  $W$  eine Umgebung der Null. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1.  $\mathcal{T}$  erfüllt das rekurrente Hyperzyklizitätskriterium.
2. Die folgenden Bedingungen sind erfüllt:
  - (a) Für alle  $U, W$  gibt es ein  $t \geq 0$ , so dass  $T(t)U \cap W \neq \emptyset$ .
  - (b) Für alle  $V, W$  gibt es ein  $t \geq 0$ , so dass  $T(t)W \cap V \neq \emptyset$ .
  - (c) Für alle  $U$  gibt es eine Konstante  $L > 0$ , so dass für alle  $t \geq 0$  ein  $s \in [t, t + L) \cap [0, \infty)$  existiert, so dass  $T(s)U \cap U \neq \emptyset$ .

*Beweis.* (1.  $\Rightarrow$  2.) Angenommen,  $\mathcal{T}$  erfüllt das RHCC. Dann folgen die Bedingungen 2.(a) und 2.(b) direkt aus der Definition 4.2.24. Es bleibt, die Bedingung 2.(c) nachzuweisen. Sei  $W$  eine Nullumgebung und  $V$  eine nicht-leere Teilmenge, für die gilt, dass  $W + V \subset U$ . Mit Lemma 4.2.25 gibt es ein  $L > 0$  so, dass es in jedem Intervall  $[t, t + L), t \geq 0$  ein  $s$  gibt mit  $T(s)V \cap W \neq \emptyset$  und  $T(s)W \cap V \neq \emptyset$ . Sei  $u = v + w$  für  $v \in V$  und  $w \in W$ . Da  $W + V \subset U$ , gilt  $u \in U$ . Des Weiteren gilt  $T(s)u = T(s)(v + w) = T(s)v + T(s)w \in W + V \subset U$ .

(2.  $\Rightarrow$  1.) Angenommen,  $\mathcal{T}$  erfüllt die Bedingungen (a)-(c). Wir wollen zeigen, dass die beiden Eigenschaften des RHCC erfüllt sind. Wir weisen zunächst die erste Eigenschaft nach. Sei  $U$  eine nicht-leere offene Teilmenge von  $X$  und  $W$  eine Nullumgebung. Mit Bedingung (a) gibt es ein  $h \geq 0$ , so dass ein  $u \in U$  existierte mit  $T(h)u \in W$ . Sei nun  $V \subset U$  eine Umgebung von  $u$ , so dass  $T(h)V \subset W$ . Mit Bedingung (c) gibt es eine Konstante  $L_1 > 0$ , so dass jedes Intervall der Länge  $L_1$  ein  $s$  enthält mit  $T(s)V \subset V \neq \emptyset$ . Mit einem beliebig gewählten  $t \geq 0$  gibt es daher ein  $s \in [t, t + L_1)$  und ein  $v \in V \subset U$  mit  $T(s)v \in V$ . Insgesamt folgt  $T(h + s)v \in W$  und es

gibt ein Intervall  $[t, t + L_1 + h)$ ,  $L_1 + h > 0$ , so dass für alle  $t \geq 0$  ein  $\sigma = s + h \in [t, t + L_1 + h)$  existiert mit  $T(\sigma)U \cap W \neq \emptyset$ . Damit ist die erste Eigenschaft des RHCC gezeigt. Die zweite Eigenschaft ist analog nachzuweisen, wobei wir anstelle der Bedingung (a) die Bedingung (b) verwenden.  $\square$

Aus diesem Lemma folgt unmittelbar ein notwendiges Kriterium für die Chaotizität einer stark stetigen Halbgruppe.

**Korollar 4.2.29.** *Chaotizität der direkten Summe und das RHCC (Desch und Schappacher 2005, Kor. 6.2)*

Sei  $\mathcal{T} := \{T(t) | t \geq 0\}$  eine chaotische, stark stetige Halbgruppe auf einem separablen Banach-Raum  $X$ . Dann erfüllt  $\mathcal{T}$  das rekurrente Hyperzyklizitätskriterium 4.2.24.

*Beweis.* Wir zeigen, dass eine chaotische Halbgruppe die Bedingungen 2. (a)-(c) in Lemma 4.2.28 erfüllt. Da eine chaotische Halbgruppe auf einem separablen Banach-Raum topologisch transitiv ist, sind die Bedingungen (a) und (b) erfüllt. Die Bedingung (c) folgt aus der Dichtheit der periodischen Punkte für chaotische Halbgruppen.  $\square$

### 4.2.3 Hyperzyklizität und Chaotizität auf Unterräumen

Werden die Annahmen im Theorem von Desch, Schappacher und Webb (Theorem 4.2.14) abgeschwächt, können Hyperzyklizität und Chaotizität nur noch auf einem Unterraum  $\tilde{X} \subset X$  des separablen Banach-Raumes  $X$  erreicht werden. Diese sogenannte Sub-Hyperzyklizität bzw. Sub-Chaotizität ist insbesondere in Banasiak und Moszynski 2005 und Banasiak und Moszynski 2008 untersucht worden. Wir wollen die zentralen Aussagen in diesem Abschnitt diskutieren und beginnen dabei mit der Definition der Begriffe.

**Definition 4.2.30.** *Sub-Hyperzyklizität/Sub-Chaotizität (Banasiak und Moszynski 2005, Banasiak und Moszynski 2008)*

Sei  $\mathcal{T} = \{T(t) | t \geq 0\}$  eine stark stetige Halbgruppe auf einem Banach-Raum  $X$ ,  $X \neq \{0\}$ .  $\mathcal{T}$  heißt sub-hyperzyklisch (sub-chaotisch) genau dann, wenn es einen abgeschlossenen Unterraum  $\tilde{X}$  mit  $\{0\} \neq \tilde{X} \subset X$  gibt, der invariant unter  $\mathcal{T}$  ist, so dass  $\tilde{\mathcal{T}} := \{T(t)|_{\tilde{X}} | t \geq 0\}$  hyperzyklisch (chaotisch) als Halbgruppe auf  $\tilde{X}$  ist. Jeder Unterraum  $\tilde{X}$ , der dies erfüllt, heißt hyperzyklischer (chaotischer) Raum für  $\mathcal{T}$ .

Wir stellen nun zunächst hinreichende Kriterien für die Sub-Hyperzyklizität bzw. Sub-Chaotizität vor. Für die ersten beiden Aussagen benötigen wir die Definition einer Menge  $\mathcal{L}_{ess}$ . Sei dafür  $\Omega$  eine Menge,  $U \subset \Omega$  und  $f : \Omega \rightarrow X$ , wobei  $X$  ein Banach-Raum ist. Sei  $(\Omega, \mu)$  ein Maßraum. Für eine messbare Menge  $U$  sei nun folgendes definiert, wobei  $\mathcal{L}(f, U) := \overline{\text{span } f(U)}$

und  $\mathcal{L}(f) := \mathcal{L}(f, \Omega) = \overline{\text{span } f(\Omega)}$  bezeichnet.

$$\mathcal{L}_{ess}(f, U) := \bigcap_{\Omega' \subset U, \mu(\Omega')=0} \mathcal{L}(f, U \setminus \Omega') \quad (4.2.84)$$

$$\mathcal{L}_{ess}(f) := \mathcal{L}_{ess}(f, \Omega) \quad (4.2.85)$$

Im Beweis der Kriterien verwenden wir die Aussagen der folgenden beiden Lemmata aus Banasiak und Moszynski 2008, die wir ohne Beweis angeben.

**Lemma 4.2.31.** (Banasiak und Moszynski 2008, L. 1.1)

Sei  $\mathcal{T} := \{T(t) | t \geq 0\}$  eine stark stetige Halbgruppe auf einem separablen Banach-Raum  $X$  und  $\tilde{X} \neq \{0\}$  ein abgeschlossener Unterraum von  $X$ . Wenn es dichte Unterräume  $Y_0$  und  $Y_A$  von  $\tilde{X}$  gibt, mit  $Y_0 \subset \overline{X_0 \cap \tilde{X}}$  und  $Y_A \subset \overline{X_{\tilde{X}, \infty}}$  mit

$$X_{\tilde{X}, \infty} := \{x \in X | \forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{x} \in \tilde{X}, t > 0 : \|\tilde{x}\| < \varepsilon \Rightarrow \|T(t)\tilde{x} - x\| < \varepsilon\} \quad (4.2.86)$$

dann ist  $\mathcal{T}$  sub-hyperzyklisch und  $\tilde{X}$  der Raum der Hyperzyklizität. Gibt es zusätzlich einen dichten Unterraum  $Y_p$  von  $\tilde{X}$  so, dass  $Y_p \subset \overline{X_p \cap \tilde{X}}$ , so ist  $\mathcal{T}$  sub-chaotisch und  $\tilde{X}$  der Raum der Chaotizität.

**Lemma 4.2.32.** (Banasiak und Moszynski 2008, L. 2.1)

Sei  $\Omega$  ein topologischer Raum,  $X$  ein Banach-Raum und  $f : \Omega \rightarrow X$  schwach stetig. Dann gilt für alle dichten Teilmengen  $D$  von  $\Omega$ :  $\mathcal{L}(f, D) = \mathcal{L}(f)$ .

Unter Verwendung dieser beiden Lemmata lassen sich nun die folgenden Aussagen zur Sub-Hyperzyklizität bzw. Sub-Chaotizität beweisen.

**Theorem 4.2.33.** Sub-Hyperzyklizität (Banasiak und Moszynski 2008, Crit. 1.2)

Sei  $X$  ein Banach-Raum, und  $A$  der Erzeuger einer stark stetigen  $C_0$ -Halbgruppe  $\mathcal{T} := \{T(t) | t \geq 0\}$  auf diesem. Wenn es eine messbare Teilmenge  $I \subset \mathbb{R}$  und eine stark messbare Wahl  $f$  von Eigenvektoren des Erzeugers  $A$  auf  $iI$  gibt (d.h.  $\forall \lambda \in iI : f(\lambda) \in \text{dom}(A)$  und  $Af(\lambda) = \lambda f(\lambda)$ ), die nicht fast überall Null ist, dann gilt  $\mathcal{L}_{ess}(f) \neq \{0\}$  und die  $C_0$ -Halbgruppe  $\mathcal{T}$  ist sub-hyperzyklisch auf  $\mathcal{L}_{ess}(f)$ .

*Beweis.* Wir definieren eine Funktion  $\tilde{f} := \rho \cdot f$  mit

$$\rho : iI \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.2.87)$$

$$\lambda \mapsto \rho(\lambda) = ((1 + \|f(\lambda)\|)(1 + |\lambda|^2))^{-1} \quad (4.2.88)$$

Die Funktion  $\rho$  ist messbar und somit  $\tilde{f}$  stark messbar und Bochner-integrierbar. Wir können daher die folgende Funktion  $F$  definieren

$$F : \mathbb{R} \rightarrow X \quad (4.2.89)$$

$$t \mapsto F(t) := \int_I e^{its} \tilde{f}(is) ds \quad (4.2.90)$$

Sei  $Y_F := \text{span } F(\mathbb{R})$ . Dann ist  $\overline{Y_F} = \mathcal{L}(F)$ . Wir wollen nun zeigen, dass so definierte Menge  $\mathcal{L}(F)$  der Menge  $\mathcal{L}_{\text{ess}}(f)$  entspricht. Wir ziehen allerdings den Nachweis, dass  $\mathcal{T}$  sub-hyperzyklisch auf  $\mathcal{L}(F)$  ist, vor. Dafür überprüfen wir die Voraussetzungen für die Anwendung von Lemma 4.2.31, wenn wir  $\tilde{X} := \mathcal{L}(F)$  und  $Y_0 = Y_A := Y_F$  setzen. Wir haben also nachzuweisen, dass  $\tilde{X}$  abgeschlossen, invariant unter  $\mathcal{T}$ , separabel und ungleich Null ist. Des Weiteren ist zu zeigen, dass  $Y_F$  tatsächlich Teilmenge sowohl von  $\overline{X_0 \cap \tilde{X}}$  als auch von  $\overline{X_{\tilde{X}, \infty}}$  ist. Wir halten zunächst fest, dass  $\tilde{X}$  per Definition abgeschlossen ist und wenden uns daher dem Nachweis der  $\mathcal{T}$ -Invarianz zu. Nach Voraussetzung gilt die folgende Eigenwertgleichung

$$A\tilde{f}(is) = is\tilde{f}(is) \quad (4.2.91)$$

und daher

$$T(t)\tilde{f}(is) = e^{ist}\tilde{f}(is), \quad (4.2.92)$$

denn  $s \in I$  ist rein komplexer Eigenwert. Unter Verwendung von Gleichung (4.2.90) folgt

$$T(t)F(r) = F(t+r) \quad (4.2.93)$$

Somit ist  $Y_F$  und daher  $\tilde{X}$  invariant unter  $\mathcal{T}$ . Wir überprüfen nun  $Y_F \subset X_0$ . Aus dem Riemann-Lebesgue-Lemma (vgl. Arendt u. a. 2001, Th. 1.8.1) und mit Gleichung (4.2.93) gilt für alle  $r \in \mathbb{R}$ :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|T(t)F(r)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|F(t+r)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|F(t)\| = 0 \quad (4.2.94)$$

Folglich gilt  $F(r) \in X_0$  und somit auch jede Linearkombination, also  $Y_F \subset X_0$ . Als nächstes überprüfen wir  $Y_F \subset X_{\tilde{X}, \infty}$ . Sei  $x \in Y_F$  beliebig. Wir zeigen  $x \in X_{\tilde{X}, \infty}$ . Da  $x \in Y_F$  gilt, lässt sich  $x$  als Linearkombination schreiben:

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k F(r_k) \quad (4.2.95)$$

mit  $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ . Wir definieren zusätzlich folgenden  $y_t \in Y_F$  für  $t \geq 0$

$$y_t := \sum_{k=1}^n \alpha_k F(r_k - t) \quad (4.2.96)$$

Es ist  $\|y_t\| \leq \sum_{k=1}^n |\alpha_k| \|F(r_k - t)\|$  und wieder argumentieren wir unter Verwendung des Riemann-Lebesgue-Lemmas

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |\alpha_k| \|F(r_k - t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |\alpha_k| \|F(t)\| = \sum_{k=1}^n |\alpha_k| \lim_{t \rightarrow -\infty} \|F(t)\| = 0. \quad (4.2.97)$$

Es folgt  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_t\| = 0$  und unter Verwendung von Gleichung (4.2.93)  $x = T(t)y_t$  und damit  $x \in X_{Y_F, \infty} \subset X_{\tilde{X}, \infty}$ , also  $Y_F \subset X_{\tilde{X}, \infty}$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $\tilde{X}$  separabel und  $\mathcal{L}(F) \neq \{0\}$  ist.

Da  $F$  eine stetige Funktion ist, ist  $Y_F$  separabel und da  $Y_F$  nach Definition dicht in  $\tilde{X}$  liegt, gilt gleiches für  $\tilde{X}$ . Da  $F$  nicht die Nullfunktion ist, ist  $\mathcal{L}(F) \neq \{0\}$ . Somit sind alle Voraussetzungen für die Anwendung von Lemma 4.2.31 erfüllt und  $\mathcal{T}$  ist subhyperzyklisch auf  $\mathcal{L}(F)$ . Können wir nun noch zeigen, dass  $\mathcal{L}_{ess}(f) = \mathcal{L}(F)$ , so sind die Aussagen dieses Theorems bewiesen. Wir zeigen dafür zunächst  $\mathcal{L}_{ess}(f) \subset \mathcal{L}(F)$  und dann  $\mathcal{L}(F) \subset \mathcal{L}_{ess}(f)$ . Sei  $\phi \in X^*$  und sei  $\phi|_{\mathcal{L}(F)} = 0$ . Wir wollen zeigen, dass daraus  $\phi|_{\mathcal{L}_{ess}(f)} = 0$  folgt, denn dann gilt  $\mathcal{L}_{ess}(f) \subset \mathcal{L}(F)$ . Mit  $\phi|_{\mathcal{L}(F)} = 0$  folgt für beliebiges  $t \in \mathbb{R}$

$$0 = \phi(F(t)) = \phi \left( \int_I e^{its} \tilde{f}(is) ds \right) = \int_I e^{its} (\phi \circ \tilde{f})(is) ds = \int_I e^{its} \rho(\phi \circ f)(is) ds \quad (4.2.98)$$

Es folgt, dass  $(\phi \circ f)$  fast überall auf  $iI$  gleich Null sein muss, d.h.  $(\phi \circ f)|_{iI \setminus \Omega'} = 0$  für eine Nullmenge  $\Omega'$ . Dies ist gleichbedeutend damit, dass  $\phi|_{f(iI \setminus \Omega')} = 0$  und damit  $\phi|_{\text{span } f(iI \setminus \Omega')} = 0$ . Da  $\text{span } f(iI \setminus \Omega')$  dicht in  $\overline{\text{span } f(iI \setminus \Omega')}$  liegt, folgt mit dem Satz von Hahn-Banach, dass  $\phi|_{\overline{\text{span } f(iI \setminus \Omega')}} = \phi|_{\mathcal{L}(f, iI \setminus \Omega')} = 0$ . Da dies für beliebige Nullmengen  $\Omega'$  gilt, folgt  $\phi|_{\mathcal{L}_{ess}(f)} = 0$ . Wir zeigen nun  $\mathcal{L}(F) \subset \mathcal{L}_{ess}(f)$ . Dafür fixieren wir ein  $t \in \mathbb{R}$  und eine Nullmenge  $\Omega' = iI' \subset iI$ . Sei  $\phi \in X^*$  und es gelte  $\phi(f(\lambda)) = 0$  für alle  $\lambda \in iI \setminus \Omega'$ . Das bedeutet  $\phi|_{f(iI \setminus \Omega')} = 0$  und somit gilt  $\phi|_{\text{span } f(iI \setminus \Omega')} = 0$ . Da  $\text{span } f(iI \setminus \Omega')$  dicht in  $\overline{\text{span } f(iI \setminus \Omega')}$  liegt, folgt wiederum mit dem Satz von Hahn-Banach, dass  $\phi|_{\overline{\text{span } f(iI \setminus \Omega')}} = \phi|_{\mathcal{L}(f, iI \setminus \Omega')} = \phi|_{\mathcal{L}_{ess}(f)} = 0$ . Wir wollen nun zeigen, dass daher auch  $\phi|_{\mathcal{L}(F)} = 0$  folgt und somit  $\mathcal{L}(F) \subset \mathcal{L}_{ess}(f)$ . Gilt aber  $\phi(f(\lambda)) = 0$ , so auch

$$\phi(F(t)) = \phi \left( \int_I e^{its} \tilde{f}(is) ds \right) = \int_{I \setminus I'} e^{its} \rho(is) \phi(f(is)) ds = 0 \quad (4.2.99)$$

Da  $t \in \mathbb{R}$  beliebig gewählt ist, bedeutet dies also  $\phi|_{F(\mathbb{R})} = 0$  und daher  $\phi|_{\text{span } F(\mathbb{R})} = 0$ . Da  $\text{span } F(\mathbb{R})$  dicht in  $\overline{\text{span } F(\mathbb{R})}$  liegt, folgt  $\phi|_{\overline{\text{span } F(\mathbb{R})}} = \phi|_{\mathcal{L}(F)} = 0$ .  $\square$

**Theorem 4.2.34.** *Sub-Chaotizität (Banasiak und Moszynski 2008, Crit. 1.3)*

Sei  $X$  ein Banach-Raum, und  $A$  der Erzeuger einer stark stetigen  $C_0$ -Halbgruppe  $\mathcal{T} := \{T(t) | t \geq 0\}$  auf diesem. Wenn es ein Intervall  $I$  auf  $\mathbb{R}$  gibt mit einer Länge größer Null und eine schwach stetige Wahl  $f$  von Eigenvektoren des Erzeugers  $A$  auf  $iI$  (d.h.  $\forall \lambda \in iI : f(\lambda) \in \text{dom}(A)$  und  $Af(\lambda) = \lambda f(\lambda)$ ), die nicht konstant Null ist, dann gilt Theorem 4.2.33 und die Halbgruppe ist sub-chaotisch auf  $\mathcal{L}_{ess}(f)$ . Ferner gilt:  $\mathcal{L}_{ess}(f) = \mathcal{L}(f)$ .

*Beweis.* Wir zeigen in einem ersten Schritt die Sub-Hyperzyklizität der Halbgruppe auf  $\mathcal{L}$ , indem wir nachweisen, dass die Voraussetzungen von Theorem 4.2.33 erfüllt sind. In einem zweiten Schritt zeigen wir die Dichtheit der periodischen Punkte in  $\mathcal{L}$ , woraus per Definition dann die Chaotizität auf diesem Raum folgt. Sei also  $I$  ein Intervall und  $f$  schwach stetig wie in der Voraussetzung gefordert. Wir betrachten die Menge  $D := i(I \cap \mathbb{Q})$ . Diese ist eine dichte, abzählbare Teilmenge von  $iI$ . Mit Lemma 4.2.32 folgt  $\mathcal{L}(f, D) = \mathcal{L}(f)$  und damit  $\text{span } f(D)$

eine abzählbar dichte Teilmenge von  $\mathcal{L}(f)$ , denn mit  $D$  ist  $f(D)$  abzählbar. Somit ist  $\mathcal{L}(f)$  separabel und mit ihr die Teilmenge  $f(iI)$ . Mit dem Theorem von Pettis folgt, dass  $f$  daher stark messbar ist. Wir haben also die Voraussetzungen von Theorem 4.2.33 erfüllt und  $\mathcal{L}_{ess}$  ist der Raum der Sub-Hyperzyklizität. Wir zeigen nun  $\mathcal{L}_{ess} = \mathcal{L}(f)$ . Für alle  $\Omega' \subset iI$  mit  $|\Omega'| = 0$  ist  $iI \setminus \Omega'$  dicht in  $iI$ . Für alle diese ist also die Voraussetzung von Lemma 4.2.32 erfüllt. Es gilt also  $\mathcal{L}(f, iI \setminus \Omega') = \mathcal{L}(f)$ . Die Behauptung folgt nun aus der Definition von  $\mathcal{L}_{ess}(f)$ . Wir weisen nun die Chaotizität der Halbgruppe  $\mathcal{T}$  auf  $\mathcal{L}(f)$  nach. Dafür betrachten wir die im Beweis von Theorem 4.2.33 definierte Menge  $\tilde{X} := \mathcal{L}(f)$ . Diese ist, wie wir gezeigt haben, gleich der Menge  $\mathcal{L}_{ess}(f)$ . Wie wir so eben gezeigt haben, gilt  $\mathcal{L}_{ess}(f) = \mathcal{L}(f)$  und  $\mathcal{L}(f) = \overline{\text{span } f(D)}$ . Da  $D$  nur rein imaginäre Werte enthält, sind die zugehörigen Eigenvektoren periodisch. Es gilt also  $\text{span } f(D) \subset X_p$ , mit  $X_p$  die Menge der periodischen Punkte von  $\mathcal{T}$  auf dem Banach-Raum  $X$ . Es folgt also zusammenfassend  $\text{span } f(D) \subset X_p \subset X_p \cap \tilde{X}$  und daher mit Lemma 4.2.31 die Chaotizität von  $\mathcal{T}$  auf  $\tilde{X} = \mathcal{L}_{ess}(f) = \mathcal{L}(f)$ .  $\square$

Das folgende Theorem 4.2.36 stellt ein weiteres hinreichendes Kriterium für Chaotizität vor. Es besagt, dass für das Auftreten von Sub-Chaotizität bereits die Erfüllung der ersten beiden Bedingungen im DSW-Kriterium 4.2.14 sowie eine Abschwächung der dort aufgeführten dritten Bedingung genügt. Für den Beweis des Theorem benötigen wir das folgende Lemma, welches wir dem Theorem voranstellen.

**Lemma 4.2.35.** (Banasiak und Moszynski 2005, L. 3.4)

Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und zusammenhängend, sei  $\lambda_0 \in U$  und  $W \subset U$  eine Teilmenge von  $U$  mit Häufungspunkt in  $U$ . Seien  $f \in \mathcal{A}(U, X)$  eine analytische Funktion und  $f_{n,\lambda_0}$  mit  $n \in \mathbb{N}_0$  die Koeffizienten in der Potenzreihendarstellung von  $f$  um  $\lambda_0$ . Dann gilt:  $\mathcal{C}(f, \lambda_0) = \mathcal{V}(f, W) = \mathcal{V}(f, U)$ .

*Beweis.* Sei  $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n f_{n,\lambda_0}$  die Potenzreihenentwicklung von  $f$  um  $\lambda_0$ . Sei  $\varepsilon > 0$  und  $\lambda \in B(\lambda_0, \varepsilon) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\}$ . Sei  $\phi \in X^*$ . Mit  $f$  ist auch  $\phi \circ f$  und analytisch. Für die zugehörige Potenzreihendarstellung gilt:

$$(\phi \circ f)(\lambda) = \phi(f(\lambda)) = \phi \left( \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n f_{n,\lambda_0} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n \phi(f_{n,\lambda_0}) \quad (4.2.100)$$

Es folgt:

$$\phi \in (\mathcal{C}(f, \lambda_0))^{\perp} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \phi(f_{n,\lambda_0}) = 0 \quad (4.2.101)$$

$$\Leftrightarrow (\phi \circ f)|_{B(\lambda_0, \varepsilon)} = 0 \quad (4.2.102)$$

$$\Leftrightarrow (\phi \circ f)|_U = 0 \Leftrightarrow \phi \in (\mathcal{V}(f, U))^{\perp}. \quad (4.2.103)$$

Die letzte Zeile folgt auf Grund der Tatsache, dass eine analytische, lokal konstante Funktion

bereits auf dem ganzen Definitionsbereich konstant ist. In ähnlicher Weise schlussfolgern wir:

$$\phi \in (\mathcal{V}(f, W))^\perp \Leftrightarrow (\phi \circ f)|_W = 0 \quad (4.2.104)$$

$$\Leftrightarrow (\phi \circ f)|_U = 0 \Leftrightarrow \phi \in (\mathcal{V}(f, U))^\perp. \quad (4.2.105)$$

Die letzte Zeile folgt aus dem Identitätssatz der Funktionentheorie. Wir haben also gezeigt, dass die Annihilatoren der gegebenen Mengen übereinstimmen:

$$(\mathcal{C}(f, \lambda_0))^\perp = (\mathcal{V}(f, W))^\perp = (\mathcal{V}(f, U))^\perp. \quad (4.2.106)$$

Da abgeschlossene Unterräume eines Banach-Raumes durch ihre Annihilatoren eindeutig bestimmt sind gilt:

$$\mathcal{C}(f, \lambda_0) = \mathcal{V}(f, W) = \mathcal{V}(f, U). \quad (4.2.107)$$

□

**Theorem 4.2.36.** *Sub-Chaotizität (Banasiak und Moszynski 2005, Th. 3.3)*

Sei  $X$  ein separabler Banach-Raum. Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und zusammenhängend. Angenommen es gibt eine Funktion  $f \in \mathcal{A}(U, X)$ , die nicht die Nullfunktion ist und die die folgenden Bedingungen erfüllt :

1.  $U \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$
2.  $f(\lambda) \in \ker(A - \lambda I)$  für alle  $\lambda \in U$

Dann ist  $\mathcal{T} := \{T(t) | t \geq 0\}$  sub-chaotisch und  $\mathcal{V}(f, U)$  ist der Raum der Chaotizität für  $\mathcal{T}$ .

*Beweis.* Wir führen den Beweis in zwei Schritten. Wir zeigen zunächst, dass  $\mathcal{V}(f, U)$  invariant unter  $\mathcal{T}$  ist. In einem zweiten Schritt zeigen wir dann die Chaotizität von  $\mathcal{T}$  auf  $\mathcal{V}(f, U)$ .

Schritt 1: Da  $f$  nach Voraussetzung nicht die Nullfunktion ist, ist  $\mathcal{V}(f, U) \neq \{0\}$ . Nach Voraussetzung gibt es Eigenwerte  $\lambda$  und zugehörige Eigenvektoren  $f(\lambda)$  von  $A$  und es gilt:  $T(t)f(\lambda) = e^{\lambda t}f(\lambda)$ . Sei nun  $x \in \mathcal{V}(f, U)$ , d.h.  $x = \sum_{\lambda \in F} c_\lambda f(\lambda)$  für eine endliche Teilmenge  $F \subset U$  und  $c_\lambda \in \mathbb{C}$ , ( $\lambda \in F \subset U$ ). Um zu zeigen, dass  $\mathcal{V}(f, U)$  invariant unter  $\mathcal{T}$  ist, müssen wir zeigen, dass auch  $T(t)x \in \mathcal{V}(f, U)$ . Dies gilt aber, denn

$$T(t)x = T(t) \left( \sum_{\lambda \in F} c_\lambda f(\lambda) \right) = \sum_{\lambda \in F} c_\lambda T(t)f(\lambda) = \sum_{\lambda \in F} c_\lambda e^{\lambda t} f(\lambda) \quad (4.2.108)$$

Damit ist auch  $T(t)x$  eine Linearkombination aus Elementen von  $\mathcal{V}(f, U)$ , und somit  $\mathcal{V}(f, U)$   $\mathcal{T}$ -invariant.

Schritt 2: Sei  $\tilde{\mathcal{T}} := \{T(t)|_{\mathcal{V}(f, U)} | t \geq 0\}$ . Um zu zeigen, dass  $\tilde{\mathcal{T}}$  chaotisch auf  $\mathcal{V}(f, U)$  ist, gehen wir wie im Beweis von Theorem 4.2.14 vor. Wir zeigen, dass  $X_0(\tilde{\mathcal{T}}), X_\infty(\tilde{\mathcal{T}})$  und  $X_p(\tilde{\mathcal{T}})$

dicht in  $\mathcal{V}(f, U)$  liegen. Dafür werden wir uns jeweils Teilmengen  $W_1, W_2, W_3$  dieser Mengen konstruieren und deren Dichte in  $\mathcal{V}(f, U)$  zeigen. Genauer werden wir zeigen:

$$W_1 = \text{span}\{f(\lambda) \in X : \lambda \in U, \lambda \in i\mathbb{Q}\} \subset X_p(\tilde{T}) \quad (4.2.109)$$

$$W_2 = \text{span}\{f(\lambda) \in X : \lambda \in U, \Re\{\lambda\} < 0\} \subset X_0(\tilde{T}) \quad (4.2.110)$$

$$W_3 = \text{span}\{f(\lambda) \in X : \lambda \in U, \Re\{\lambda\} > 0\} \subset X_\infty(\tilde{T}) \quad (4.2.111)$$

Alle  $W_i$  haben Häufungspunkte in  $U$ . Mit Lemma 4.2.35 gilt  $\mathcal{V}(f, W_i) = \mathcal{V}(f, U)$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Somit liegen alle  $W_i$  dicht in  $\mathcal{V}(f, U)$  und damit auch die zugehörigen Obermengen  $X_0, X_\infty$  und  $X_p$ . Mit Theorem 4.2.14 ist  $\tilde{T} := \{T(t)|_{\mathcal{V}(f, U)} | t \geq 0\}$  chaotisch auf  $\mathcal{V}(f, U)$  und damit  $\{T(t)|_{\mathcal{V}(f, U)} | t \geq 0\}$  sub-chaotisch. Es bleibt also, die Gleichungen (4.2.109)-(4.2.111) zu zeigen.

Wir zeigen  $W_1 \subset X_p(\tilde{T})$ . Sei  $x \in W_1$ . Dann gilt  $x = \sum_{j=1}^n c_j f(\lambda_j)$  mit  $\lambda_j = iq_j$ ,  $q_j \in \mathbb{Q}$ ,  $c_j \in \mathbb{C}$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Wir schreiben  $q_j$  als  $q_j = \frac{l_j}{m}$ ,  $l_j \in \mathbb{Z}$  und  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Mit  $t = 2\pi m$  gilt:

$$\tilde{T}(t)x = \tilde{T}(t) \left( \sum_{j=1}^n c_j f(\lambda_j) \right) \quad (4.2.112)$$

$$= \sum_{j=1}^n c_j e^{\lambda_j t} f(\lambda_j) = \sum_{j=1}^n c_j e^{i \frac{l_j}{m} 2\pi m} f(\lambda_j) = \sum_{j=1}^n c_j e^{il_j 2\pi} f(\lambda_j) = \sum_{j=1}^n c_j f(\lambda_j) \quad (4.2.113)$$

Demzufolge ist  $x$  periodisch mit  $t = 2\pi m$  und somit  $x \in X_p(\tilde{T})$ . Da  $x \in W_1$  beliebig gewählt ist, folgt  $W_1 \subset X_p(\tilde{T})$ .

Wir zeigen  $W_2 \subset X_0(\tilde{T})$ . Sei  $x \in W_2$ . Dann gilt  $x = \sum_{j=1}^n c_j f(\lambda_j)$  mit  $\Re\{\lambda_j\} < 0$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Daher gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(t)f(\lambda_j) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{it\lambda_j} f(\lambda_j) = 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (4.2.114)$$

Folglich gilt dies auch für jede endliche Linearkombination aus den Eigenvektoren:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(t)x = \lim_{t \rightarrow \infty} T(t) \left( \sum_{j=1}^n c_j f(\lambda_j) \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n c_j e^{it\lambda_j} f(\lambda_j) = 0 \quad (4.2.115)$$

Demzufolge gilt  $x \in X_0(\tilde{T})$ . Da  $x \in W_2$  beliebig gewählt ist, folgt  $W_2 \subset X_0(\tilde{T})$ .

Wir zeigen  $W_3 \subset X_\infty(\tilde{T})$ . Wir können sogar zeigen, dass  $W_3 \subset X_{\infty,0}(\tilde{T}) \subset X_\infty(\tilde{T})$  mit  $X_{\infty,0}(\tilde{T}) := \{x \in \mathcal{V}(f, U) : \forall \varepsilon > 0 \exists t > 0, y \in \mathcal{V}(f, G) : \|y\| < \varepsilon \text{ und } \tilde{T}(t)y = x\}$ . Sei  $x \in W_3$ . Dann gilt  $x = \sum_{j=1}^n c_j f(\lambda_j)$  mit  $\Re\{\lambda_j\} > 0$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Wir wählen nun ein  $t > 0$  so, dass  $\|y\| < \varepsilon$  für

$$y(t) := \sum_{i=1}^n e^{-i\lambda_j t} c_j f(\lambda_j). \quad (4.2.116)$$

Ein solches  $t$  existiert, denn mit  $\Re\{\lambda_j\} < 0$ ,  $\forall j \in \{1, \dots, n\}$  gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-i\lambda_j t} = 0$ . Des Weiteren ist

$$T(t)y = T(t) \left( \sum_{i=1}^n e^{-i\lambda_j t} c_j f(\lambda_j) \right) = \sum_{i=1}^n e^{i\lambda_j t} e^{-i\lambda_j t} c_j f(\lambda_j) = \sum_{i=1}^n c_j f(\lambda_j) = x. \quad (4.2.117)$$

Somit gilt  $x \in X_{\infty,0}(\tilde{T})$ . Da  $x \in W_3$  beliebig gewählt ist, folgt  $W_3 \subset X_{\infty,0}(\tilde{T}) \subset X_\infty(\tilde{T})$ .  $\square$

Die folgenden vier Kriterien geben notwendige Bedingungen für das Auftreten von Sub-Hyperzyklizität bzw. Sub-Chaotizität an.

**Theorem 4.2.37.** *Sub-Chaotizität (Banasiak und Moszynski 2005, Th. 4.1)*

Sei  $X$  ein Banach-Raum. Falls  $\mathcal{T} := \{T(t) \mid t \geq 0\}$  eine stark stetige Halbgruppe mit dichtem Orbit in einem abgeschlossenen Unterraum  $\tilde{X} \subset X$  ist und  $\phi \in X^*$  eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Der Orbit  $\{T^*(t)\phi \mid t \geq 0\}$  ist beschränkt.
2.  $\phi$  ist ein Eigenvektor von  $A^*$ .

Dann ist  $\phi \in \tilde{X}^\perp := \{\phi \in X^* : \forall x \in \tilde{X} \quad \phi(x) = 0\}$ .

*Beweis.* Wir nehmen zunächst an, dass für  $\phi \in X^*$  die erste Bedingung erfüllt ist. Dann gilt  $\|T^*(t)\phi\| \leq M$  für ein  $M \in \mathbb{R}$  und alle  $t \geq 0$ . Nach Voraussetzung gibt es ferner ein  $x \in \tilde{X}$ , so dass  $\{T(t)x \mid t \geq 0\}$  dicht in  $\tilde{X}$  liegt. Für  $\varepsilon > 0$  und  $y \in \tilde{X}$  gibt es somit eine Folge  $(T(t_n)x)_{n \in \mathbb{N}}$ , die gegen  $\varepsilon^{-1}y$  konvergiert und somit  $\lim_{t_n \rightarrow \infty} \varepsilon T(t_n)x = y$ . Es folgt:

$$|\phi(y)| = |\phi(y) - \phi(\varepsilon T(t_n)x) + \phi(\varepsilon T(t_n)x)| \quad (4.2.118)$$

$$\leq |\phi(y - \varepsilon T(t_n)x)| + \varepsilon |\phi(T(t_n)x)| \quad (4.2.119)$$

$$= |\phi(y - \varepsilon T(t_n)x)| + \varepsilon |(T^*(t_n)\phi)(x)| \quad (4.2.120)$$

$$\leq \|\phi\| \|y - \varepsilon T(t_n)x\| + \varepsilon \|(T^*(t_n)\phi)\| \|x\| \quad (4.2.121)$$

$$\leq \|\phi\| \|y - \varepsilon T(t_n)x\| + \varepsilon \|M\| \|x\| \quad (4.2.122)$$

Für  $n \rightarrow \infty$  gilt für den ersten Term  $\|\phi\| \|y - \varepsilon T(t_n)x\| \rightarrow 0$ . Wählen wir zusätzlich  $\varepsilon \rightarrow 0$  gilt für den zweiten Term  $\varepsilon \|M\| \|x\| \rightarrow 0$  und somit  $|\phi(y)| \rightarrow 0$ . Somit folgt  $\forall y \in \tilde{X} : \phi(y) = 0$ .

Wir nehmen nun an, dass die zweite Bedingung erfüllt ist. Für  $\phi \in X^*$  gilt somit

$$T^*(t)\phi = e^{\lambda t} \phi \quad (4.2.123)$$

sowie

$$\phi(T(t)x) = (T^*(t)\phi)(x) = e^{\lambda t} \phi(x) \quad t \geq 0 \quad (4.2.124)$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle anhand des Realteils des Eigenwertes  $\lambda$ . Angenommen, es ist  $\Re\{\lambda\} \leq 0$ . Dann ist der Orbit  $\{T^*(t)\phi \mid t \geq 0\}$  von  $\phi$  beschränkt. Somit ist die erste Bedingung erfüllt und  $\phi \in \tilde{X}^\perp$  wie oben gezeigt. Angenommen  $\Re\{\lambda\} > 0$ . Da es nach Voraussetzung ein  $x \in \tilde{X}$  gibt, so dass  $\{T(t)x \mid t \geq 0\}$  dicht in  $\tilde{X}$  liegt, gibt es eine Folge  $(T(t_n)x)_{n \in \mathbb{N}}$ , die gegen  $y = 0$  konvergiert. Mit Gleichung (4.2.124) gilt dann

$$\lim_{t_n \rightarrow \infty} \phi(x) = \lim_{t_n \rightarrow \infty} e^{-\lambda t_n} \phi(T(t_n)x) = 0 \quad (4.2.125)$$

Somit ist  $\phi = 0$  auf dem gesamten Orbit von  $x$ . Da dieser dicht in  $\tilde{X}$  liegt und  $\phi$  stetig ist, gilt somit  $\phi(x) = 0, \forall x \in \tilde{X}$ . □

**Korollar 4.2.38.** (Banasiak und Moszynski 2005, Kor. 4.2)

Besitzt  $\{T(t)|t \geq 0\}$  einen Orbit, der dicht in einem abgeschlossenen, linearen Unterraum  $\tilde{X} \subset X$  eines Banach-Raumes  $X$  liegt, dann gilt  $\tilde{X} \subset {}^\perp E^w(A^*)$  mit  $E^w(A^*) := \overline{\text{span} \left( \bigcup_{\lambda \in \sigma_p(A^*)} \ker(A^* - \lambda I) \right)}^w$ , wobei mit  $w$  der Abschluss in der schwach\*-Topologie bezeichnet ist.

*Beweis.* Zunächst gilt mit Theorem 4.2.37  $\forall \lambda \in \sigma_p(A^*) : \ker(A^* - \lambda I) \subset \tilde{X}^\perp$ . Sei nun  $\phi \in E^w(A^*)$ . Dann gibt es eine Folge  $\phi_n \in \text{span}\{\bigcup_{\lambda \in \sigma_p(A^*)} \ker(A^* - \lambda I)\}$ , so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\phi(x) - \phi_n(x)\| = \|\phi(x)\| = 0 \quad \forall x \in \tilde{X}. \quad (4.2.126)$$

Daraus folgt  $\phi \in \tilde{X}^\perp$  und somit  $E^w(A^*) \subset \tilde{X}^\perp$ . Da  $\tilde{X}$  abgeschlossen in  $X$  ist, gilt  $\tilde{X} = {}^\perp(\tilde{X}^\perp)$  (Rudin 1991). Und somit

$$\tilde{X} = {}^\perp(\tilde{X}^\perp) \subset {}^\perp(E^w(A^*)). \quad (4.2.127)$$

□

**Theorem 4.2.39.** (Banasiak und Moszynski 2005, Th. 4.3)

Sei  $X$  separabel und  $\dim {}^\perp E^w(A^*) < \infty$  mit  $E^w(A^*) := \overline{\text{span} \left( \bigcup_{\lambda \in \sigma_p(A^*)} \ker(A^* - \lambda I) \right)}^w$ , wobei mit  $w$  der Abschluss in der schwach\*-Topologie bezeichnet ist. Dann ist  $\mathcal{T} := \{T(t)|t \geq 0\}$  nicht sub-chaotisch.

*Beweis.* Angenommen,  $\mathcal{T}$  ist sub-chaotisch. Dann gibt es einen abgeschlossenen  $\mathcal{T}$ -invarianten Unterraum  $\{0\} \neq \tilde{X} \subset X$  und  $x \in \tilde{X}$ , dessen Orbit dicht in  $\tilde{X}$  liegt. Mit Korollar 4.2.38 gilt dann  $\tilde{X} \subset {}^\perp E^w(A^*)$ . Da nach Voraussetzung  $\dim {}^\perp E^w(A^*) < \infty$  folgt  $\dim \tilde{X} < \infty$ . Somit ist  $\tilde{X}$  endlich-dimensional und daher gilt  $\dim \tilde{X} = \dim \tilde{X}^*$ . Da ferner  $\tilde{X} \neq \{0\}$ , gibt es ein Element  $x_1 \neq 0 \in \tilde{X}$  und da  $\tilde{X}$  ein Vektorraum ist, liegen auch die Elemente  $ax_1 \in \tilde{X}$ ,  $a \in \mathbb{C}$ . Als Schlussfolgerung aus dem Satz von Hahn-Banach ist mit  $\tilde{X}$  auch sein Dualraum  $\tilde{X}^*$  nicht trivial. Folglich ist  $\dim \tilde{X}^* \neq 0$ . Insgesamt erhalten wir:

$$0 < \dim \tilde{X}^* = \dim \tilde{X} < \infty. \quad (4.2.128)$$

Für die Erzeuger endlich-dimensionaler Vektorräume ungleich Null ist das Punktspektrum nicht leer. Folglich gilt  $\sigma_p(A^*) \neq \emptyset$ . Mit Theorem 4.2.12 ist  $\mathcal{T}$  nicht hyperzyklisch und somit nicht chaotisch, was der Annahme widerspricht. □

**Theorem 4.2.40.** Sub-Chaotizität (Banasiak und Moszynski 2005, Th. 4.5)

Sei  $X$  ein separabler Banach-Raum. Angenommen, es gibt eine offene Teilmenge  $U$  von  $\mathbb{C}$  und eine analytische Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ , die die folgenden Bedingungen erfüllt:

1.  $f(\lambda) \in \ker(A^* - \lambda I)$  für alle  $\lambda \in U$
2. Es gibt  $\lambda_0 \in U$  mit  $\dim \ker(A^* - \lambda_0 I) = 1$ ,  $f(\lambda_0) \neq 0$  und  $\text{codim} \overline{\ker(A^* - \lambda_0 I)}^\infty < \infty$

Dann ist  $\mathcal{T} := \{T(t) | t \geq 0\}$  nicht sub-chaotisch.

*Beweis.* Um zu zeigen, dass  $\mathcal{T}$  nicht sub-chaotisch ist, gehen wir wie folgt vor. Zunächst zeigen wir, dass  $\overline{\ker(A^* - \lambda_0 I)^\infty}^w \subset E^w(A^*)$ . Dann zeigen wir, dass  $E^w(A^*)$  endlich-dimensional ist, woraus mit (Rudin 1991)

$$\dim({}^\perp E^w(A^*)) = \text{codim}({}^\perp E^w(A^*))^\perp = \text{codim } E^w(A^*) \leq \text{codim } E^w(A^*) \quad (4.2.129)$$

und Theorem 4.2.39 die Behauptung folgt. Auf Grund der ersten Bedingung gilt  $\mathcal{V}(f, U) \subset \overline{\text{span}\{\bigcup_{\lambda \in \sigma_p(A^*)} \ker(A^* - \lambda I)\}} =: E(A^*)$ . Da  $A^*$  Erzeuger von  $\mathcal{T}$  ist, ist  $A^*$  insbesondere abgeschlossen und es gilt mit Prop. 4.2.17 und der zweiten Bedingung:  $\mathcal{V}(f, U) = \overline{\ker(A^* - \lambda_0 I)^\infty}$ . Wir verwenden nun, dass der schwach\*-Abschluss des (Norm-)Abschlusses eines Unterraumes gleich dem schwach\*-Abschluss des Unterraumes selbst ist. Es folgt:

$$\overline{\ker(A^* - \lambda_0 I)^\infty}^w = \overline{\overline{\ker(A^* - \lambda_0 I)^\infty}}^w \subset \overline{E(A^*)}^w = E^w(A^*) \quad (4.2.130)$$

Unter Verwendung der zweiten Bedingung und Gleichung (4.2.129) folgt daraus

$$\dim({}^\perp E^w(A^*)) \leq \text{codim } E^w(A^*) < \text{codim } \overline{\ker(A^* - \lambda_0 I)^\infty}^w < \infty \quad (4.2.131)$$

Mit Theorem 4.2.39 ist  $\mathcal{T}$  daher nicht sub-chaotisch. □

### 4.3 Hyperzyklizität und Chaotizität ausgewählter Operatoren und Operatorhalbgruppen

In diesem Abschnitt werden wir die in Abschnitt 2.3 vorgestellten Operatoren und die von ihnen erzeugten Halbgruppen hinsichtlich einer möglichen Hyperzyklizität bzw. Chaotizität untersuchen, wobei wir für die Beweise auf die entsprechende Literatur verweisen. In Kapitel 3 haben wir gesehen, dass diese Operatoren(-halbgruppen) eng mit Transportprozessen auf Graphen verbunden sind. Die Resultate dieses Abschnitts werden wir somit nutzen können, um in den folgenden Kapiteln Aussagen über chaotische Transportprozesse auf Graphen abzuleiten.

#### 4.3.1 Der Back-Shift und die von ihm erzeugte Halbgruppe

Wir beginnen mit der Zusammenstellung wichtiger Voraussetzungen für die Hyperzyklizität und Chaotizität des Back-Shifts auf gewichteten Folgenräumen, gefolgt von Aussagen zu gewichteten Back-Shifts. Daran anschließend widmen wir uns der Hyperzyklizität und Chaotizität der von ihnen erzeugten Halbgruppen.

**Lemma 4.3.1.** *Hyperzyklizität des Back-Shifts (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, L. 4.4/4.7)*

Sei  $X_v = l_v^p$  oder  $X_v = c_{0,v}$  der Raum der gewichteten Folgen, wobei die Gewichte Lemma 2.3.3 erfüllen.

Dann ist der Back-Shift  $B$  auf  $X_v$ :

1. hyperzyklisch genau dann, wenn  $\inf_{n \in \mathbb{N}} v_n = 0$ .
2. chaotisch genau dann, wenn  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n < \infty$ .

Aus Lemma 4.3.1 folgt unmittelbar, dass der Back-Shift auf den ungewichteten Funktionenräumen  $l^p$  bzw.  $c_0$  weder hyperzyklisch noch chaotisch sein kann. Wir können aus ihnen jedoch Operatoren konstruieren, die diese Eigenschaften besitzen (vgl. Grosse-Erdmann und Manguillot 2011). An Abschnitt 2.3.1 haben wir gesehen, dass  $B_w : X \rightarrow X$  und  $B : X_v \rightarrow X_v$  mit  $X = l^p$  oder  $X = c_0$  bzw.  $X_v = l_v^p$  oder  $X_v = c_{0,v}$  konjugierte Operatoren sind. Da Hyperzyklizität und Chaotizität unter Konjugationen erhalten bleiben, können wir die eben erreichten Resultate auf gewichtete Back-Shifts wie folgt übertragen:

**Lemma 4.3.2.** *Hyperzyklische, mischende und chaotische gewichtete Back-Shifts (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, L. 4.9)*

Sei  $B_w$  der gewichtete Shift auf einem der Folgenräume  $l^p, 1 \leq p < \infty$  oder  $c_0$ , wobei die Gewichte die Bedingungen aus Lemma 2.3.5 erfüllen. Dann ist  $B_w$

1. hyperzyklisch  $\Leftrightarrow \sup_{n \geq 1} \prod_{v=1}^n |w_v| = \infty$  (unabhängig von  $p$ )
2. mischend  $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{v=1}^n |w_v| = \infty$  (unabhängig von  $p$ )
3. chaotisch  $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{v=1}^n |w_v|^p} < \infty$  (abhängig von  $p$ )

Wir schließen diesen Abschnitt mit zwei Aussagen über die Hyperzyklizität und Chaotizität der vom Back-Shift erzeugten Halbgruppe.

**Theorem 4.3.3.** *Hyperzyklizität der vom Back-Shift erzeugten Halbgruppe (Desch, Schappacher und Webb 1997, Th. 5.2) und (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, Th 8.3)*

Sei  $X_v = l_v^p$  oder  $X_v = c_{0,v}$  der Raum der gewichteten Folgen, wobei die Gewichte Lemma 2.3.3 erfüllen.

Sei  $B$  der Back-Shift auf  $X_v$ . Die von ihm erzeugte lineare Halbgruppe  $\{T(t) | t \geq 0\}$  ist hyperzyklisch.

**Theorem 4.3.4.** *Chaotizität der vom Back-Shift erzeugten Halbgruppe (Desch, Schappacher und Webb 1997, Th. 5.3)*

Sei  $X_v = l_v^1$  der Raum der gewichteten Folgen, wobei die Gewichte Lemma 2.3.3 erfüllen. Sei  $B$  der Backshift-Operator auf  $X_v$ . Sei  $\{T(t) | t \geq 0\}$  die von ihm erzeugte Halbgruppe. Sei  $R$  der Konvergenzradius der Potenzreihe  $\sum_{i=1}^{\infty} v_i x^i$  und sei  $\omega \in \mathbb{C}$ . Die Halbgruppe  $\{e^{\omega t} T(t) | t \geq 0\}$  ist genau dann chaotisch, wenn  $|\Re(\omega)| < R$  ist.

### 4.3.2 Der Translationsoperator und die von ihm erzeugte Halbgruppe

Wir widmen uns in diesem Abschnitt der Untersuchung von Hyperzyklizität und Chaotizität des Translationsoperators als Verallgemeinerung des Back-Shifts auf gewichteten Funktionenräumen. In Anlehnung an die im vorangegangenen Abschnitt erlangten Resultate erhalten wir die folgenden Aussagen.

**Lemma 4.3.5.** *Hyperzyklizität des Translationsoperators (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, L. 2.2.4)*

Sei  $T$  der Translationsoperator auf  $X = L^p_\rho(\mathbb{R}_+)$ . Angenommen, es gibt eine Konstante  $M \geq 1$  und ein  $\omega \in \mathbb{R}$ , so dass, wann immer  $y \geq x \geq 0$ , gilt:

$$\rho(x) \leq Me^{\omega(y-x)}\rho(y) \quad (4.3.1)$$

Der Translationsoperator  $T$  ist genau dann hyperzyklisch, wenn  $\liminf_{x \rightarrow \infty} \rho(x) = 0$ .

**Lemma 4.3.6.** *Chaotizität des Translationsoperators (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, L. 2.3.2)*

Sei  $T$  der Translationsoperator auf  $X = L^p_\rho(\mathbb{R}_+)$  und  $\rho$  eine zulässige Gewichtsfunktion. Dann ist  $T$  genau dann chaotisch, wenn gilt  $\int_0^\infty \rho(x)dx < \infty$ .

### 4.3.3 Der Differentialoperator und die von ihm erzeugte Halbgruppe

Im Zentrum dieses Abschnittes steht die durch den Differentialoperator erzeugte Translationshalbgruppe. Ihre Analyse hinsichtlich Hyperzyklizität und Chaotizität ist von großer Bedeutung für die folgenden Kapitel, in denen wir diese Eigenschaften für kontinuierliche Transportprozesse auf Graphen untersuchen wollen. Wir beginnen mit zwei Kriterien, die die Hyperzyklizität der Translationshalbgruppe auf den gewichteten Funktionenräumen charakterisieren.

**Theorem 4.3.7.** *Hyperzyklizität der Translationshalbgruppe (Desch, Schappacher und Webb 1997, Th. 4.7)*

Sei  $I = (-\infty, \infty)$  oder  $I = [0, \infty)$  und  $X = L^p_\rho(I, \mathbb{C})$  oder  $X = C_{0,\rho}(I, \mathbb{C})$  mit zulässiger Gewichtsfunktion  $\rho$ . Die Translationshalbgruppe  $\{T(t) | t \geq 0\}$  auf  $X$  ist genau dann hyperzyklisch, wenn gilt:

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = 0 \quad (4.3.2)$$

**Theorem 4.3.8.** *Hyperzyklizität der Translationshalbgruppe (Desch, Schappacher und Webb 1997, Th. 4.8)*

Sei  $I = (-\infty, \infty)$  oder  $I = [0, \infty)$  und  $X = L^p_\rho(I, \mathbb{C})$  oder  $X = C_{0,\rho}(I, \mathbb{C})$  mit zulässiger Gewichtsfunktion  $\rho$ . Die Translationshalbgruppe  $\{T(t) | t \geq 0\}$  auf  $X$  ist genau dann hyperzyklisch, wenn für jedes  $\theta \in \mathbb{R}$  eine Folge  $(t_j)_{j=1}^\infty$  ganzer reeller Zahlen existiert, so dass gilt:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \rho(t_j + \theta) = \lim_{j \rightarrow \infty} \rho(-t_j + \theta) = 0 \quad (4.3.3)$$

Die folgenden Propositionen charakterisieren die Chaotizität der Translationshalbgruppe auf den gewichteten Funktionenräumen  $X = L_\rho^p(\mathbb{R}_+)$  bzw.  $C_{0,\rho}(\mathbb{R}_+)$ .

**Proposition 4.3.9.** *Chaotizität der Translationshalbgruppe (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, L. 7.19)*

Sei  $\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  eine zulässige Gewichtsfunktion und  $X = L_\rho^p(\mathbb{R}_+)$  und sei  $\{T(t) | t \geq 0\}$  die Translationshalbgruppe auf  $X$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent

1. Die Translationshalbgruppe ist chaotisch.
2.  $\int_0^\infty \rho(x) dx < \infty$ .

**Proposition 4.3.10.** *Chaotizität der Translationshalbgruppe (Grosse-Erdmann und Manguillot 2011, L. 7.2.4)*

Sei  $\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  eine zulässige Gewichtsfunktion und  $X = C_{0,\rho}(\mathbb{R}_+)$  und sei  $\{T(t) | t \geq 0\}$  die Translationshalbgruppe auf  $X$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent

1. Die Translationshalbgruppe ist chaotisch.
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \rho(x) = 0$ .

## Kapitel 5

# Chaotische Transportprozesse auf Graphen von einfacher Struktur

In den vorangegangenen Kapiteln haben wir Transportprozesse auf Graphen beschrieben und wir haben die Eigenschaft der Chaotizität vorgestellt. In diesem Kapitel führen wir diese beiden Themen zusammen. Wir wollen untersuchen, wie Graphen von einfacher Struktur beschaffen sein müssen, um Chaotizität des Transportprozesses zu erzeugen. Dabei bezeichnen wir als einfache Graphenstruktur unendliche Graphen, bei denen Knoten immer nur zu sich selbst oder zu genau einem nächsten Nachbarn adjazent sind. Wie wir bereits in Abschnitt 3.3 gezeigt haben, können wir Transportprozesse als diskrete oder aber als kontinuierliche Prozesse auffassen. In Abschnitt 5.1 diskutieren wir zunächst Voraussetzungen für die Entstehung von Chaotizität bei diskreten Transportprozessen. In Abschnitt 5.2 erfolgen diesbezügliche Überlegungen für kontinuierliche Transportprozesse. Die Erkenntnisse, die wir in diesem Abschnitt vorstellen, gelten dabei auch für allgemeinere Graphen als die von einfacher Struktur. Wir schließen das Kapitel mit Abschnitt 5.3, in dem wir den Zusammenhang des Auftretens von Chaotizität bei diskreten und kontinuierlichen Prozesse diskutieren. Den Untersuchungen stellen wir die folgende Bemerkung voran, die es erlaubt, Unendlichkeit der Graphenstruktur vorauszusetzen.

**Proposition 5.0.1.** *Sei  $G = (V, E)$  ein Graph, der durch eine endlich-dimensionale Adjazenzmatrix  $\mathbb{A}_w$  beschrieben werden kann. Sei  $\mathbb{A}_w : l^p \rightarrow l^p, 1 \leq p < \infty$  oder  $\mathbb{A}_w : c_0 \rightarrow c_0$ . Dann ist die durch  $A := \mathbb{A}_w$  erzeugte Halbgruppe  $\mathcal{T} := \{T(t) | t \geq 0\}$  nicht chaotisch.*

*Beweis.* Wir betrachten den zu  $A$  adjungierten Operator auf dem Dualraum von  $X = l^p, 1 \leq p < \infty$  oder  $x = c_0$ . Dieser ist die zu  $\mathbb{A}_w$  transponierte Matrix. Deren Spektrum ist nicht leer. Mit Theorem 4.2.12 ist daher  $\mathcal{T} := \{T(t) | t \geq 0\}$  nicht chaotisch.  $\square$

## 5.1 Chaotizität diskreter Transportprozesse

Diskrete Geburts- und Sterbeprozesse mit Proliferation sind bereits in Abschnitt 3.3.1 grundlegend beschrieben. Wir werden in diesem Abschnitt verschiedene Varianten der Kombination der einzelnen Teilprozesse (Geburt, Tod, Wachstum) betrachten und diese hinsichtlich der Voraussetzungen an die jeweiligen, die Teilprozesse charakterisierenden Raten diskutieren, die Chaotizität des Prozesses ermöglichen. Diesbezügliche Untersuchungen gehen maßgeblich auf Banasiak und Co-Autoren zurück. Sie verfolgen dabei in verschiedenen Publikationen zwei Ansätze. Sie stellen entweder so restriktive Bedingungen an die Koeffizienten des Zustandsraummodells, dass Chaotizität auf dem gesamten Banach-Raum  $X$  erreicht wird, oder aber sie schränken die Koeffizienten möglichst wenig ein, was jedoch wiederum den Raum einschränkt, auf dem die Halbgruppen chaotisch sind. In diesem Fall arbeiten sie mit dem in Abschnitt 4.2.3 vorgestellten Begriff der Sub-Chaotizität. Ihre Untersuchungen beziehen sich auf verschiedene, im Folgenden vorgestellte Varianten der Geburts- und Sterbeprozesse mit Proliferation, sowohl mit konstanten als auch mit variablen Koeffizienten. Wir beginnen mit reinen Sterbeprozessen mit Proliferation.

**Sterbeprozess mit Proliferation - konstante Koeffizienten.** Gegeben sei ein Sterbeprozess mit Proliferation, der sich durch das folgende Modell beschreiben lässt.

$$\frac{df_n}{dt} = -\alpha f_n + \gamma f_{n+1} \quad n \in \mathbb{N}_0, \gamma > \alpha > 0 \quad (5.1.1)$$

Dabei sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in l^1$ , wobei  $l^1$  mit der Standardnorm  $\|f\| = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$  versehen ist. Des Weiteren gelte für die Koeffizienten die folgende Bedingung:

$$(A1) \quad 0 < \alpha < \gamma < \infty$$

Für einen derartigen Prozess gilt die folgende Proposition.

**Proposition 5.1.1.** (Banasiak und Lachowicz 2001)

Sei  $X = (l^1, \|\cdot\|_{l^1})$  und es gelte die Annahme (A1). Dann ist die Halbgruppe  $\{T(t) | t \geq 0\}$ , die das zu Gleichung 5.1.1 gehörende (ACP) löst chaotisch auf  $X$ .

*Beweis.* Für den Beweis nutzen wir das DSW-Theorem 4.2.14. Dafür zeigen wir zunächst, dass die Menge  $U := \{\lambda : |\lambda + \alpha| < \gamma\}$  zum Punktspektrum der Adjazenzmatrix  $\mathbb{A}_w$  des zugehörigen Graphen gehört. Diese ist, wie wir bereits wissen, der Erzeuger der zugehörigen stark stetigen Halbgruppe, wenn die Koeffizienten beschränkt sind, was hier vorausgesetzt ist. Wir betrachten die Eigenwertgleichung  $\mathbb{A}_w x = \lambda x$ . Wir setzen  $x_0 = 1$  und multiplizieren aus.

Dies führt zu

$$\begin{aligned}
 -\alpha x_0 + \gamma x_1 &= \lambda x_0 & \Rightarrow x_1 &= \frac{\lambda + \alpha}{\gamma} =: \mu \\
 -\alpha x_1 + \gamma x_2 &= \lambda x_1 & \Rightarrow x_2 &= \frac{\lambda + \alpha}{\gamma} x_1 = \mu^2 \\
 & \vdots & & \\
 -\alpha x_{n-1} + \gamma x_n &= \lambda x_{n-1} & \Rightarrow x_n &= \frac{\lambda + \alpha}{\gamma} x_{n-1} = \mu^n
 \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

Gilt  $\lambda \in U$  folgt  $x_i < 1, \forall i \in \mathbb{N}_0$ . Somit ist  $x_\lambda = (x_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \in l^1$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$ . Wir zeigen nun, dass für ein beliebiges Element  $\phi = (\phi_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$  aus dem Dualraum  $X^* = l^\infty$  die Funktion

$$F_\phi : U \rightarrow \mathbb{C} \tag{5.1.3}$$

$$\lambda \mapsto F_\phi(\lambda) = \langle \phi, x_\lambda \rangle \tag{5.1.4}$$

analytisch ist und aus  $F_\phi = 0$  auf  $U$  folgt, dass  $\phi = 0$  ist. Mit Theorem 4.2.14 folgt dann, dass die Halbgruppe  $\{T(t) | t \geq 0\}$  chaotisch auf  $X$  ist. Für  $F_\phi$  gilt

$$F_\phi = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i x_i = \phi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i \mu^i \tag{5.1.5}$$

Da  $\phi$  beschränkt ist und für  $\lambda \in U$  gilt, dass  $|\mu| < 1$ , konvergiert der Summenterm auf der rechten Seite ( für  $\lambda \in U$ ). Folglich ist die Funktion  $F_\phi$  auf  $U$  in eine konvergente Potenzreihe entwickelbar und damit analytisch. Damit  $F_\phi$  auf ganz  $U$  verschwindet, müssen alle  $\phi_i$  gleich Null sein, denn für  $\lambda \neq -\alpha$  ist  $\mu \neq 0$ . Somit folgt aus  $F_\phi = 0 : \phi = 0$ . Daher ist die Halbgruppe  $\{T(t) | t \geq 0\}$  chaotisch auf  $X$ .  $\square$

Wir wollen nun annehmen, dass die Wachstumsrate  $\alpha_1 = \alpha_0$  von den anderen Wachstumsraten  $\alpha_i = \alpha, \forall i > 1$  verschieden ist und nennen diesen Prozess:

**Sterbeprozess mit Proliferation - konstante Sterbe- und variable Wachstumskoeffizienten.**

Gegeben sei ein Sterbeprozess mit Proliferation, der sich durch das folgende Modell beschreiben lässt.

$$\frac{df_n}{dt} = \alpha_0 f_n + \gamma f_{n+1} \quad n = 0 \tag{5.1.6}$$

$$\frac{df_n}{dt} = \alpha f_n + \gamma f_{n+1} \quad n > 0 \tag{5.1.7}$$

Dabei sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in l^p$ , wobei  $l^p$  mit der Standardnorm  $\|f\| = (\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^p)^{\frac{1}{p}}$  versehen ist, oder aber  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in c_0$ , versehen mit der Supremumsnorm. Des Weiteren gelten für die Koeffizienten die folgenden Bedingungen:

(B1)  $\alpha_0, \alpha, \gamma \in \mathbb{C}$  beliebig

(B2)  $\gamma > 0$  ( $\alpha$  muss hingegen nicht notwendigerweise negativ angenommen.)

Das folgende Theorem zeigt, dass auf Grund der sehr schwachen Bedingungen an die Koeffizienten, Chaotizität nur noch auf Unterräumen der untersuchten Banach-Räume erreicht werden kann.

**Theorem 5.1.2.** (Banasiak und Moszynski 2005)

Sei  $X = l^p, 1 \leq p \leq \infty$  oder  $X = c_0$  und es gelten die Annahmen (B1) und (B2). Dann hat die Halbgruppe  $\mathcal{T} := \{T(t) | t \geq 0\}$ , die das zu den Gleichungen (5.1.6) und (5.1.7) gehörende (ACP) löst die in Tabelle 5.1 zusammengestellten Chaotizitätseigenschaften. Dabei sei die Funktion  $\tilde{\beta}$  wie folgt definiert.

$$\tilde{\beta} : X \rightarrow \mathbb{C} \tag{5.1.8}$$

$$u \mapsto \tilde{\beta}(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\gamma}{\alpha_0 - \alpha} \right)^k u_k \quad \text{mit } u = (u_k) \in X \tag{5.1.9}$$

**Tabelle 5.1:** Chaotizität der die Gleichungen (5.1.6)-(5.1.7) lösenden Halbgruppe (Banasiak und Moszynski 2005). Dabei ist die Sub-Chaotizität mit *sub*, die Chaotizität mit *ch* abgekürzt. Es ist  $\tilde{\beta}$  wie in Gleichung 5.1.9 definiert. Fragezeichen sind gegeben für die Fälle, in denen keine Aussage gemacht werden kann.

		X			
		$l^\infty$	$c_0$	$l^p, p \neq 1, \infty$	$l^1$
$ \Re \alpha  <  \gamma $	$ \alpha_0 - \alpha  <  \gamma $	sub. auf $c_0$	ch	ch	ch
	$ \alpha_0 - \alpha  =  \gamma $	sub auf $c_0$	ch	ch	sub auf $\ker \tilde{\beta}$
	$ \alpha_0 - \alpha  >  \gamma $	sub auf $\ker \tilde{\beta}$			
$ \Re \alpha  \geq  \gamma $	$ \alpha_0 - \alpha  <  \gamma $	?	?	?	?
	$ \alpha_0 - \alpha  =  \gamma $	?	?	?	nicht ch
	$ \alpha_0 - \alpha  >  \gamma $	?	nicht ch	nicht ch	nicht ch

*Beweis.* Wir führen den Beweis der Chaotizität bzw. Sub-Chaotizität unter Verwendung der Theoreme 4.2.18 und 4.2.36 sowie den Nachweis der fehlenden Chaotizität unter Verwendung der Theoreme 4.2.12 und 4.2.40. Somit sind die Menge der Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren des Operators  $A$ , d.h. der Adjazenzmatrix  $\mathbb{A}_w$  bzw. des adjungierten Operators  $A^*$  auf dem Dualraum, d.h der zu  $\mathbb{A}_w$  transponierten Matrix  $A^* := A^T$  zu bestimmen und zu analysieren. Des Weiteren sind die Mengen  $\overline{\ker(A - \lambda I)^\infty}$  bzw.  $\overline{\ker(A^* - \lambda I)^\infty}$  von Interesse,

wobei  $\lambda$  ein Eigenwert ist. Betrachten wir zunächst die Eigenwertgleichung  $Ax = \lambda x$  und setzen  $x_0 = 1$ , erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 x_0 + \gamma x_1 &= \lambda x_0 &\Rightarrow x_1 &= \frac{\lambda - \alpha_0}{\gamma} \\
 \alpha x_1 + \gamma x_2 &= \lambda x_1 &\Rightarrow x_2 &= \frac{\lambda - \alpha}{\gamma} x_1 \\
 &\vdots && \\
 \alpha x_{n-1} + \gamma x_n &= \lambda x_{n-1} &\Rightarrow x_n &= \frac{\lambda - \alpha}{\gamma} x_{n-1} = \frac{\lambda - \alpha_0}{\gamma} \left( \frac{\lambda - \alpha}{\gamma} \right)^{n-1}
 \end{aligned} \tag{5.1.10}$$

Damit  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$  ist, muss gelten  $x \in X$ . Für  $\lambda = \alpha_0$  ist  $x = (1, 0, \dots) \in X$ , denn  $\|x\|_X < \infty$ . Für  $|\lambda - \alpha| < \gamma$  gilt ebenfalls  $\|x\|_X < \infty$ . Für  $X = l^\infty$  gilt dies sogar für  $|\lambda - \alpha| \leq \gamma$ . Die Menge der Eigenwerte ergibt sich demnach mit  $G = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda - \alpha| < |\gamma|\}$  zu  $\sigma_P(A) = G \cup \{\alpha_0\}$  für  $X = l^p, 1 \leq p < \infty$  sowie mit  $G = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda - \alpha| \leq |\gamma|\}$  zu  $\sigma_P(A) = G \cup \{\alpha_0\}$  für  $X = l^\infty$ . Des Weiteren gilt, dass die Funktion  $f : \sigma_P \rightarrow X$ , die jedem Eigenwert den zugehörigen Eigenvektor zuordnet, analytisch auf  $G$  ist (Banasiak und Moszynski 2005). Wir nehmen nun Fallunterscheidungen hinsichtlich des Verhältnisses der Parameter  $\alpha, \alpha_0$  und  $\gamma$  vor. Sei zunächst  $|\Re \alpha| < |\gamma|$ . Wir betrachten somit die obere Hälfte der Tabelle 5.1. In diesem Fall folgt  $G \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$ . Um Theorem 4.2.18 für den Fall  $X = l^p, 1 \leq p < \infty$  bzw.  $X = c_0$  anwenden zu können, benötigen wir nun noch eine Aussage zu  $\overline{\ker(A - \lambda I)^\infty}$ , wobei wir  $\lambda = \alpha$  wählen. Diese entnehmen wir Banasiak und Moszynski 2005: Gilt  $|\alpha_0 - \alpha| < |\gamma|$ , folgt  $\overline{\ker(A - \alpha I)^\infty} = X$  für  $X = c_0, X = l^p, 1 \leq p < \infty$ . Mit Theorem 4.2.18 folgt damit die Chaotizität der Halbgruppe  $\mathcal{T} = \{T(t) \mid t \geq 0\}$ . Betrachten wir nun  $\mathcal{T} = \{T(t) \mid t \geq 0\}$  auf  $X = l^\infty$ . Zunächst ist  $c_0$  ein abgeschlossener Unterraum von  $X$ , der invariant unter  $\mathcal{T} = \{T(t) \mid t \geq 0\}$  und auf dem  $\mathcal{T}$ , wie soeben gezeigt, chaotisch ist. Daher ist  $\mathcal{T}$  auf  $l^\infty$  per Definition sub-chaotisch und  $c_0$  der Raum der Chaotizität. Somit ist die erste Zeile der Tabelle 5.1 bewiesen. Es gelte nun weiterhin  $|\Re \alpha| < |\gamma|$ . Wir betrachten den Fall  $|\alpha_0 - \alpha| = |\gamma|$ . Für  $X = c_0$  und  $X = l^p, 1 < p < \infty$  gilt wie oben  $\overline{\ker(A - \alpha I)^\infty} = X$  (Banasiak und Moszynski 2005) und daher die Chaotizität der Halbgruppe mit Theorem 4.2.18. Für  $X = l^\infty$  argumentieren wir wie soeben und erhalten die Sub-Chaotizität der Halbgruppe auf dem Unterraum  $c_0$ . Für  $X = l^1$  gilt nach Banasiak und Moszynski 2005  $\overline{\ker(A - \alpha I)^\infty} = \ker \tilde{\beta}$ . Mit Proposition 4.2.17 gilt auch  $\overline{\ker(A - \alpha I)^\infty} = \mathcal{V}(f, G)$ . Mit Theorem 4.2.36 folgt, dass die Halbgruppe  $\mathcal{T}$  auf  $l^1$  sub-chaotisch ist und der Raum der Chaotizität  $\mathcal{V}(f, G) = \overline{\ker(A - \alpha I)^\infty} = \ker \tilde{\beta}$ . Somit ist die zweite Zeile der Tabelle 5.1 bewiesen. Für den Fall  $|\Re \alpha| < |\gamma|$  verbleibt nun noch die Untersuchung für  $|\alpha_0 - \alpha| > |\gamma|$ . Sei  $X = c_0$  oder  $X = l^p, 1 \leq p < \infty$ . Nach Banasiak und Moszynski 2005 gilt wie soeben:  $\overline{\ker(A - \alpha I)^\infty} = \ker \tilde{\beta}$ . Wieder gilt mit Proposition 4.2.17 und Theorem 4.2.36, dass die Halbgruppe  $\mathcal{T}$  auf  $X$  sub-chaotisch ist und der Raum der Chaotizität  $\ker \tilde{\beta}$ . Sei

nun  $X = l^\infty$ . Da  $\ker \tilde{\beta}$  abgeschlossener,  $\mathcal{T}$ -invarianter Unterraum von  $c_0$  ist, ist er dies auch für  $l^\infty$ . Folglich ist die auf  $X = l^\infty$  definierte Halbgruppe  $\mathcal{T}$  sub-chaotisch und  $\ker \tilde{\beta}$  der Raum der Chaotizität.

Wir wenden uns nun dem Fall  $|\Re \alpha| \geq |\gamma|$  und damit dem unteren Teil der Tabelle 5.1 zu. In diesem Fall schneidet das Punktspektrum  $\sigma_p = G \cup \{\alpha_0\}$  für  $X = c_0$  oder  $X = l^p, 1 \leq p < \infty$  die imaginäre Achse nicht und wir können die oben angeführten Theoreme nicht verwenden. Es ist jedoch möglich, in bestimmten Fällen Chaotizität auszuschließen. Hierfür sehen wir uns den zu  $A$  adjungierten Operator  $A^* = \mathbb{A}_w^T$  und sein Punktspektrum an. Wir betrachten die Eigenwertgleichung  $\mathbb{A}_w^T x^* = \lambda x^*$  mit  $x^* \in X^*$ . Wir setzen  $x_0^* = 1$  und erhalten

$$\begin{aligned} \alpha_0 x_0^* &= \lambda x_0^* &\Rightarrow \lambda &= \alpha_0 \\ \gamma x_0^* + \alpha x_1^* &= \lambda x_1^* &\Rightarrow x_1^* &= \frac{\gamma}{\lambda - \alpha} = \frac{\gamma}{\alpha_0 - \alpha} \\ &\vdots && \\ \gamma x_{n-1}^* + \alpha x_n^* &= \lambda x_n^* &\Rightarrow x_n^* &= \frac{\gamma}{\lambda - \alpha} x_{n-1}^* = \left( \frac{\gamma}{\alpha_0 - \alpha} \right)^n \end{aligned} \tag{5.1.11}$$

Gilt  $\alpha_0 = \alpha$ , so gibt es keine Eigenwerte, denn die Folgenglieder  $x_i^*$  von  $x^*$  sind für  $i > 0$  unbeschränkt. Gilt  $\alpha_0 \neq \alpha$ , ist zu untersuchen, unter welchen Bedingungen  $x^* = (x_i^*)_{i \geq 0} = (\frac{\gamma}{\alpha_0 - \alpha})_{i \geq 0} \in X^*$ . Gilt  $|\alpha_0 - \alpha| < \gamma$ , ist  $x^* \notin X^*, X^* = X^* = l^p, 1 \leq p \leq \infty$ , und somit  $\sigma_p(A^*) = \emptyset$ . Für  $|\alpha_0 - \alpha| = \gamma$  ist  $\sigma_p(A^*) = \emptyset$  für  $X^* = l^p, 1 \leq p < \infty$  und  $\sigma_p(A^*) = \alpha_0$  für  $X^* = l^\infty$ . Für  $|\alpha_0 - \alpha| > \gamma$  ist  $\sigma_p(A^*) = \alpha_0$  für  $X^* = l^p, 1 \leq p \leq \infty$ . Sei nun  $X = l^p, 1 < p < \infty$ . Dann ist  $X^* = l^q$  mit  $p^{-1} + q^{-1} = 1$  der zugehörige Dualraum. Sei  $A^*$  der zu  $A$  adjungierte Operator auf dem Dualraum. Dessen Punktspektrum ist für  $|\alpha_0 - \alpha| < \gamma$  nicht leer. Gleiches gilt, wenn wir  $X = c_0$  und damit  $X^* = l^1$  betrachten. Ist  $X = l^1$ , also  $X^* = l^\infty$  gilt dies zusätzlich im Fall  $|\alpha_0 - \alpha| < \gamma$ . Mit Theorem 4.2.12 folgt, dass die Halbgruppe  $\mathcal{T}$  daher nicht chaotisch auf  $X$  ist. Damit sind die beiden letzten Zeilen von Tabelle 5.1 gezeigt. Im Gegensatz zu den Fällen der dritten Zeile von Tabelle ( $|\Re \alpha| < |\gamma|, |\alpha_0 - \alpha| > |\gamma|$ ), in denen durch die Forderung  $|\Re \alpha| < |\gamma|$  noch Sub-Chaotizität erreicht werden kann, ist dies für  $|\Re \alpha| \geq |\gamma|$  nach Theorem 4.2.40 nicht möglich. Für den Beweis verwenden wir die in Banasiak und Moszynski 2005 ermittelten schwach\* Abschlüsse von  $\overline{\ker(A^* - \lambda I)^\infty}^w$ . Es ist  $\overline{\ker(A^* - \lambda I)^\infty}^w = \ker \tilde{\beta}$  für  $X^* = l^p, 1 \leq p \leq \infty$  und  $|\alpha_0 - \alpha| > 0$ . Die in Gleichung (5.1.9) gegebene Funktion  $\tilde{\beta}$  wird dabei auf  $X^*$  betrachtet, d.h.  $\tilde{\beta} : X^* \rightarrow \mathbb{C}$ .  $\square$

Wir wollen nun im Folgenden alle Sterbe- und Wachstumsraten, d.h. alle Koeffizienten variabel annehmen. Dies führt uns zu dem folgenden Prozess:

**Sterbeprozess mit Proliferation - variable Koeffizienten.** Gegeben sei ein Sterbeprozess mit Proliferation, dessen Dynamik sich mit Gleichung (5.1.12) beschreiben lässt.

$$\frac{df_n}{dt} = -\alpha_n f_n + \gamma_{n+1} f_{n+1} \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (5.1.12)$$

Dabei sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in l^p$ , wobei  $l^p$  mit der Standardnorm  $\|f\| = (\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^p)^{\frac{1}{p}}$  versehen ist, oder aber  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in c_0$ , versehen mit der Supremumsnorm. Ferner seien für die Koeffizienten folgenden Annahmen getroffen

$$(C1) \quad 0 < \alpha_n < \gamma_n < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$(C2) \quad \alpha_n = \alpha + a'_n \quad (n \in \mathbb{N}_0) \text{ für ein } \alpha \geq 0 \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} a'_n = 0$$

$$(C3) \quad \gamma_n = \gamma b_n \quad (n \in \mathbb{N}_0) \text{ für ein } \gamma > \alpha \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$$

(C4) Die Koeffizienten erfüllen die Voraussetzungen von Lemma 5.1.3.

Der Aussage, dass unter diesen Voraussetzungen Chaotizität der lösenden Halbgruppe erreicht wird, stellen wir das in Annahme (C4) erwähnte Lemma voran, das wir für den Beweis der Aussage benötigen. Für den Beweis dieses Lemmas verweisen wir auf Banasiak und Lachowicz 2001.

**Lemma 5.1.3.** (Banasiak und Lachowicz 2001)

Sei  $\mathcal{A}$  eine Matrix mit Einträgen wie in Gleichung (5.1.16) definiert. Es existiert  $q < 1$  so, dass wenn  $|a_k| = \left| \frac{a'_k}{\gamma} \right| \leq q^{k+1}$  für  $k \in \mathbb{N}_0$  gilt,  $\mathcal{A} : l^\infty \rightarrow l^\infty$  ein Isomorphismus ist.

**Theorem 5.1.4.** (Banasiak und Lachowicz 2001)

Sei  $X = l^p$  mit  $1 \leq p < \infty$ , versehen mit der Standardnorm oder  $X = c_0$ , versehen mit der Supremumsnorm. Es seien die Folgen  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  and  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  gegeben und es gelten die Annahmen (C1)-(C4). Dann ist die Halbgruppe  $\{T(t) | t \geq 0\}$ , die das zu Gleichung (5.1.12) gehörende (ACP) löst chaotisch auf  $X$ .

*Beweis.* Da die Koeffizienten der Adjazenzmatrix  $\mathbb{A}_w$  nach Voraussetzung ((C1) und (C2)) beschränkt sind, ist  $\mathbb{A}_w$  Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe. Um zu zeigen, dass dieser eine chaotische Halbgruppe generiert, weisen wir die im DSW-Kriteriums 4.2.14 geforderten Eigenschaften nach. Wir gehen dafür wie im Beweis von Theorem 5.1.1 vor, wobei wir uns zunächst auf  $X = l^1$  beschränken. Wir zeigen als erstes, dass die Menge  $U := \{\lambda : |\lambda + \alpha| < \gamma\}$  zum Punktspektrum von  $\mathbb{A}_w : l^1 \rightarrow l^1$  gehört. Dafür betrachten wir die Eigenwertgleichung  $\mathbb{A}_w x = \lambda x$ , setzen  $x_0 = 1$  und erhalten  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit  $x_n = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda + \alpha_{i-1}}{\gamma_i}$ ,  $\forall n \geq 1$ . Wir müssen nun zeigen, dass  $x \in l^1$ , denn dann ist  $x$  Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$ . Gilt  $\lambda \in U$  finden wir ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $|\lambda + \alpha| = \gamma - \varepsilon$ . Des Weiteren existiert nach Voraussetzung (C2) ein  $n_0 \in \mathbb{N}_0$  so, dass  $\forall n > n_0 : |\gamma_n - \gamma| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Es gilt dann die folgende Abschätzung:

$$\left| \frac{\lambda + \alpha_{n-1}}{\gamma_n} \right| \leq \left| \frac{\lambda + \alpha}{\gamma_n} \right| + \left| \frac{\alpha'_{n-1}}{\gamma_n} \right| \leq \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma - \frac{\varepsilon}{2}} + \left| \frac{\alpha'_{n-1}}{\gamma_n} \right| \quad (5.1.13)$$

Wir betrachten die rechte Seite. Der erste Term ist kleiner Eins, der zweite konvergiert gegen 0. Wählen wir demnach  $n_0$  groß genug, gibt es ein  $q < 1$  so, dass  $\left| \frac{\lambda + \alpha_{n-1}}{\gamma_n} \right| \leq 1$ . Damit gilt für alle  $x_i, i \in \mathbb{N} : x_i < 1$  und damit  $x \in l^1$ . In einem zweiten Schritt zeigen wir nun, wie im Beweis von Theorem 5.1.1, dass für ein beliebiges  $\tilde{\phi} \in l^\infty$  die Funktion  $F_{\tilde{\phi}} : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $F_{\tilde{\phi}}(\lambda) = \langle \tilde{\phi}, x \rangle$ ,  $x$  Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$  analytisch ist und aus  $F_{\tilde{\phi}} = 0$  folgt, dass  $\tilde{\phi} = 0$ . Es ist  $F_{\tilde{\phi}}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\phi}_i x_i$  gleichmäßig konvergent auf  $U$ , somit auf  $U$  in eine konvergente Potenzreihe entwickelbar und daher analytisch auf  $U$ . Wir setzen  $\mu = \frac{\lambda + \alpha}{\gamma}, a_n = \frac{a'_n}{\gamma}$  sowie  $\phi_0 = \tilde{\phi}_0$  und  $\phi_k = \frac{\tilde{\phi}_k}{\prod_{i=1}^k b_i}$  und schreiben

$$F_{\tilde{\phi}}(\lambda) = \tilde{\phi}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\phi}_i x_i = \tilde{\phi}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\phi}_i \prod_{i=1}^k \frac{\lambda + \alpha_{i-1}}{\gamma_i} = \phi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k \prod_{i=0}^{k-1} (\mu + a_i) =: F_\phi(\mu) \quad (5.1.14)$$

Wir wollen im Weiteren mit  $F_\phi$  weiterarbeiten und halten daher folgendes fest. Wählen wir  $\tilde{\phi} \in l^\infty$  beliebig aus, so ist mit Voraussetzung (C2) auch  $\phi \in l^\infty$ . Können wir aus  $F_\phi = 0$  folgern, dass  $\phi = 0$ , folgt gleiches auch für  $\tilde{\phi}$ . Ist  $F_{\tilde{\phi}}$  analytisch für  $|\lambda + \alpha| < \gamma$ , so ist  $F_\phi$  analytisch für  $|\mu| < 1$ . Wir können daher  $F_\phi$  als Potenzreihe in  $\mu$  schreiben, wobei wir auf Grund der absoluten Konvergenz die folgenden Umformungen durchführen dürfen:

$$F_\phi(\mu) = \phi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k \prod_{i=0}^{k-1} (\mu + a_i) = \phi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k \sum_{i=0}^k \mu^i a_{ik} = \phi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i \sum_{n=i}^{\infty} \phi_n a_{in} \quad (5.1.15)$$

mit

$$a_{in} = \begin{cases} 0 & \text{für } i > n \\ 1 & \text{für } i = n \\ \sum_{0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{n-j} \leq n-1} \prod_{k=1}^{n-j} a_{i_k} & \text{für } i < n \end{cases} \quad (5.1.16)$$

Um zu zeigen, dass aus  $F_\phi = 0$  folgt, dass  $\phi = 0$ , müssen  $\phi_0$  sowie alle Summen  $\sum_{n=i}^{\infty} \phi_n a_{in}$  gleich Null und die einzige Lösung dieses Gleichungssystems  $\phi = 0$  sein. In Lemma 5.1.3 haben wir gezeigt, dass  $\mathcal{A}$  ein Isomorphismus in  $l^\infty$  ist, womit aus  $\mathcal{A}\phi = 0$  folgt, dass  $\phi = 0$ . Somit sind die Voraussetzungen des DSW-Theorems erfüllt und die Halbgruppe  $\{T(t) | t \geq 0\}$ , die das zu Gleichung (5.1.12) gehörende (ACP) löst chaotisch auf  $X = l^1$ . Wir betrachten nun  $X = l^p, 1 < p < \infty$  bzw.  $X = c_0$ . Unsere Überlegungen zu Eigenwerten und Eigenvektoren in  $X = l^1$  können wir übertragen. Denn mit  $\left| \frac{\lambda + \alpha_n}{\gamma_n} \right| < 1$  gilt

$$\|x\|_p^p = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda + \alpha_i}{\gamma_i} \right|^p < \infty \quad (5.1.17)$$

Somit sind die Vektoren  $x$  Eigenvektoren, denn sie lösen die Eigenwertgleichung in  $l^p$ . Für die Erfüllung der Voraussetzungen im DSW-Theorem bleibt zu zeigen, dass aus  $F_\phi = 0$  folgt  $\phi = 0$

mit  $\phi \in X^* = l^r, \frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$  bzw.  $X^* = l^1$  für  $X = c_0$ . Wir nehmen ein beliebiges Element  $\phi$  aus dem jeweiligen Dualraum von  $X$ . Da aber gilt, dass  $l^r \subset l^q$  für  $r < q$ , gilt insbesondere  $l^r \subset l^\infty$  und somit  $\phi \in l^\infty$ . Wir haben aber bereits gezeigt, dass für derartige  $\phi$  die Gleichung  $\mathcal{A}\phi = 0$  nur für  $\phi = 0$  gelöst wird. Folglich ist die Halbgruppe  $\{T(t)|t \geq 0\}$ , die das zu Gleichung (5.1.12) gehörende (ACP) löst, chaotisch auf  $X = l^p, 1 < p < \infty$  bzw.  $X = c_0$ .  $\square$

Fordern wir (C1) nicht mehr für alle Koeffizienten, sondern nur noch für die Grenzwerte  $\alpha, \gamma$  und setzen aber voraus, dass die Sterberaten nicht zu gering werden, ergeben sich die folgenden, in Banasiak und Lachowicz 2002 angenommenen Bedingungen an die Koeffizienten, die dann zu Theorem 5.1.5 führen.

$$(D1) \quad \alpha_n = \alpha + a'_n \quad (n \in \mathbb{N}_0) \text{ für ein } \alpha \in ]0, \infty[ \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} a'_n = 0 \text{ und } \alpha_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$(D2) \quad \gamma_n > 0 \quad (n \in \mathbb{N}) \text{ und } \exists \gamma \in ]0, \infty[ : \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \gamma \text{ und } \inf_{n \in \mathbb{N}} \prod_{k=1}^n \frac{\gamma_n}{\gamma} > 0$$

$$(D3) \quad 0 < \alpha < \gamma < \infty$$

$$(D4) \quad |a_k| = \left| \frac{a'_k}{\gamma} \right| \leq q^{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \text{ für ein } q \in ]0, 1[.$$

**Theorem 5.1.5.** (Banasiak und Lachowicz 2002)

Sei  $X = l^p$  mit  $1 \leq p < \infty$ , versehen mit der Standardnorm oder  $X = c_0$ , versehen mit der Supremumsnorm. Es seien die Folgen  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  and  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  gegeben und es gelten die Annahmen (D1)-(D4). Dann ist die Halbgruppe  $\{T(t)|t \geq 0\}$ , die das zu Gleichung (5.1.12) gehörende (ACP) löst, chaotisch auf  $X$ .

*Beweis.* Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Theorem 5.1.4.  $\square$

Bevor wir Geburts- und Sterbeprozesse miteinander kombinieren, wollen wir uns zunächst nach der Betrachtung reiner Sterbeprozesse den reinen Geburtsprozessen mit Wachstum zuwenden. Wir werden sehen, dass hier keine Chaotizität erreicht werden kann.

**Geburtsprozess mit Proliferation - konstante Geburts- und variable Wachstumskoeffizienten.** Gegeben sei ein Geburtsprozess mit Proliferation, der sich durch das folgende Modell beschreiben lässt.

$$\frac{df_n}{dt} = \alpha_0 f_n \quad n = 0 \quad (5.1.18)$$

$$\frac{df_n}{dt} = \alpha f_n + \beta f_{n-1} \quad n > 0 \quad (5.1.19)$$

Dabei sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in l^p$ , wobei  $l^p$  mit der Standardnorm  $\|f\| = (\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^p)^{\frac{1}{p}}$  versehen ist, oder aber  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in c_0$ , versehen mit der Supremumsnorm. Des Weiteren gelten für die Koeffizienten die folgende Bedingungen.

(E1)  $\alpha_0, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$  beliebig

(E2)  $\beta > 0$  ( $\alpha$  muss hingegen nicht notwendigerweise negativ angenommen.)

Wir sehen, dass die Bedingungen (E1)-(E2) den Bedingungen (B1)-(B2) ähneln. Allein Sterbe- und Geburtsrate haben die Rollen getauscht. Bei Vergleich der jeweiligen Modelle wird deutlich, dass die Erzeuger der die zugehörigen (ACP) lösenden Halbgruppen adjungiert sind. Unter Verwendung von Theorem 4.2.12 können wir daher die folgende Aussage ableiten.

**Theorem 5.1.6.** (Banasiak und Moszynski 2005)

Sei  $X = l^p$  mit  $1 \leq p < \infty$ , versehen mit der Standardnorm oder  $X = c_0$ , versehen mit der Supremumsnorm. Für die Koeffizienten  $\alpha_0, \alpha$  und  $\beta$  gelten die Annahmen (E1)-(E2). Dann ist die Halbgruppe  $\mathcal{T} := \{T(t) | t \geq 0\}$ , die das zu den Gleichungen (5.1.18) und (5.1.19) gehörende (ACP) löst für keine Wahl der Koeffizienten chaotisch auf  $X$ .

*Beweis.* Für das in den Gleichungen (5.1.18) und (5.1.19) gegebene System ist der zum Erzeuger, d.h. der zugehörigen Adjazenzmatrix adjungierte Operator gerade die Adjazenzmatrix, die zu den Gleichungen (5.1.6) und (5.1.7) gehört. Wie im Beweis zu Theorem 5.1.2 gezeigt, ist ihr Punktspektrum nie leer. Mit Theorem 4.2.12 ist daher die Halbgruppe  $\mathcal{T}$  nicht chaotisch.  $\square$

Wie im Fall der reinen Sterbeprozesse mit Proliferation sollen nun alle Koeffizienten variieren dürfen.

**Geburtsprozess mit Proliferation - variable Koeffizienten.** Gegeben sei ein Geburtsprozess mit Proliferation, dessen Dynamik sich mit den Gleichungen (5.1.20)- (5.1.21) beschreiben lässt.

$$\frac{df_0}{dt} = -\alpha_0 f_0 \quad n = 0 \quad (5.1.20)$$

$$\frac{df_n}{dt} = -\alpha_n f_n + \beta_{n-1} f_{n-1} \quad n > 0 \quad (5.1.21)$$

Dabei sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in l^p$ , wobei  $l^p$  mit der Standardnorm  $\|f\| = (\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^p)^{\frac{1}{p}}$  versehen ist, oder aber  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in c_0$ , versehen mit der Supremumsnorm. Ferner seien für die Koeffizienten folgenden Annahmen getroffen.

(F1)  $\beta_n > \alpha_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$

(F2)  $\alpha_n = \alpha + a'_n$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) für ein  $\alpha \geq 0$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a'_n = 0$

(F3)  $\beta_n = \beta b_n$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) für ein  $\beta > \alpha$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$

(F4) Die Koeffizienten erfüllen die Voraussetzungen von Lemma 5.1.3.

Wie im vorangegangenen Beispiel ist zu erkennen, dass Sterbe- und Geburtsrate lediglich die Rollen getauscht haben, die Bedingungen (F1)-(F4) demnach den Bedingungen (C1)-(C4) entsprechen. Ebenso ist ersichtlich, dass die Erzeuger der das jeweils zugehörige (ACP) lösenden Halbgruppen adjungiert sind. Unter Verwendung von Theorem 4.2.12 können wir daher wie folgt schlussfolgern.

**Theorem 5.1.7.** (Banasiak und Lachowicz 2001)

Sei  $X = l^p$  mit  $1 \leq p < \infty$ , versehen mit der Standardnorm oder  $X = c_0$ , versehen mit der Supremumsnorm. Für die Koeffizienten  $\alpha_n$  und  $\beta_n$  gelten die Annahmen (F1)-(F4). Dann ist die Halbgruppe  $\mathcal{T} := \{T(t) | t \geq 0\}$ , die das zu den Gleichungen (5.1.20) und (5.1.21) gehörende (ACP) löst für keine Wahl der Koeffizienten chaotisch auf  $X$ .

*Beweis.* Wir werden wie auch im Beweis zum vorangegangenen Theorem das Theorem 4.2.12 verwenden, argumentieren hier jedoch nicht über das Punktspektrum des adjungierten Operators, sondern verwenden die Aussagen zur adjungierten Halbgruppe. Wir werden zeigen, dass diese beschränkt ist und daher die Halbgruppe  $\mathcal{T}$  nicht hyperzyklisch, und daher nicht chaotisch sein kann. Die zu den Gleichungen (5.1.20) und (5.1.21) gehörende Adjazenzmatrix  $\mathbb{A}_w$ , d.h. der Erzeuger  $A := \mathbb{A}_w$  der zugehörigen Halbgruppe ist beschränkt und somit die Halbgruppe gleichmäßig stetig. Der zu  $A$  adjungierte Operator, d.h. die zu  $\mathbb{A}_w$  transponierte Matrix erzeugt somit die zu  $\mathcal{T}$  adjungierte Halbgruppe  $\mathcal{S} := \{S(t) | t \geq 0\}$  auf  $l^q$  mit  $p^{-1} + q^{-1} = 1$  für  $X = l^p, 1 \leq p < \infty$  bzw. auf  $l^1$  für  $X = c_0$ . Es gilt also  $\{T^*(t) | t \geq 0\} = \{S(t) | t \geq 0\}$ . Wir betrachten zunächst den Fall  $X = l^p, 1 < p < \infty$  oder  $X = c_0$ . Angenommen  $\mathcal{T}$  wäre hyperzyklisch, dann wären nach Theorem 4.2.12 alle Orbits der adjungierten Halbgruppe  $\mathcal{S}$  unbeschränkt. Diese ist aber genau die das (ACP) lösende Halbgruppe aus Theorem 5.1.4. Da sie chaotisch ist, besitzt sie periodische Orbits und diese sind nicht unbeschränkt. Folglich ist  $\mathcal{T}$  nicht hyperzyklisch und daher nicht chaotisch. Sei nun  $X = l^1$  und wieder nehmen wir an, dass  $\mathcal{T}$  hyperzyklisch und daher alle Orbits von  $\mathcal{S}$  unbeschränkt wären. Da  $X = l^1$  gilt, sind der adjungierte Operator  $A^*$  und die adjungierte Halbgruppe  $\mathcal{S}$  Operatoren auf  $l^\infty$ . Wir betrachten den auf den abgeschlossenen Unterraum  $c_0 \subset l^\infty$  eingeschränkten Operator  $A^*$ . Dieser erzeugt die auf  $c_0$  eingeschränkte Halbgruppe  $\mathcal{S}|_{c_0}$ . Es gibt eine nicht-leere Teilmenge  $X_0 \subset c_0 \subset l^\infty$ , für die gilt, dass für  $x \in X_0$  folgt, dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|S(t)x\|_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \|S(t)|_{c_0}x\|_\infty = 0$ . Diese zu den  $x$  gehörenden Orbits sind daher beschränkt. Folglich ist mit Theorem 5.1.4 die Halbgruppe  $\mathcal{T}$  nicht hyperzyklisch und damit nicht chaotisch.  $\square$

Wir wollen nun Geburts- und Sterbeprozesse mit Proliferation kombinieren und beginnen mit solchen Prozessen, die konstante Raten für alle Teilprozesse aufweisen.

**Geburts-und Sterbeprozess mit Proliferation - konstante Koeffizienten.** Gegeben sei ein Geburts-und Sterbeprozess mit Proliferation, dessen Dynamik durch das folgende Modell beschrieben ist.

$$\frac{df_1}{dt} = \alpha f_1 + \gamma_1 f_2 \quad (5.1.22)$$

$$\frac{df_n}{dt} = \alpha f_n + \beta f_{n-1} + \gamma f_{n+1} \quad n \geq 2 \quad (5.1.23)$$

Dabei sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in l^p$ , wobei  $l^p$  mit der Standardnorm  $\|f\| = (\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^p)^{\frac{1}{p}}$  versehen ist, oder aber  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in c_0$ , versehen mit der Supremumsnorm. Ferner seien für die Koeffizienten folgenden Annahmen getroffen.

$$(G1) \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \beta, \gamma \neq 0$$

$$(G2) \quad 0 < |\beta| < |\gamma|, |\alpha| < |\beta + \gamma|$$

Für Chaotizitätsaussagen der Halbgruppe, die das das zu den Gleichungen (5.1.22) und (5.1.23) gehörende (ACP) löst, benötigen wir einige Aussagen zu der dazugehörigen charakteristischen Gleichung und deren Nullstellen. Wir fassen diese Aussagen in der folgenden Proposition zusammen und verweisen für die Beweise auf Banasiak und Moszynski 2011.

**Proposition 5.1.8.** *Charakteristische Gleichung und ihre Nullstellen (Banasiak und Moszynski 2011)*

1. Die zu den Gleichungen (5.1.22) und (5.1.23) gehörende charakteristische Gleichung lautet:

$$\gamma z^2 + (\alpha - \lambda)z + \beta = 0, \quad z \in \mathbb{C} \quad (5.1.24)$$

Ist  $z$  eine Nullstelle der Gleichung, so auch  $\tau = \frac{\beta}{z}$ , falls  $z^2 \neq \frac{\beta}{\gamma}$ .

2. Die zu  $\lambda \in \mathbb{C}$  gehörenden Eigenvektoren sind Folgen  $x = (x_n)_{n \geq 1}$  mit Folgengliedern  $x_n = z^n - \tau^n$ .
3. Gilt die Annahme (G1) und  $\lambda = iy$  mit  $y \in \mathbb{R}$ , so folgt, dass der Betrag der Nullstellen  $z$  kleiner Eins ist, genau dann wenn die Annahme (G2) gilt, und  $y \in (-c, c)$  mit

$$c := \frac{|\beta - \gamma|}{|\beta + \gamma|} \sqrt{(\beta + \gamma)^2 - \alpha^2} \quad (5.1.25)$$

4. Gilt die Annahme (G2) und  $\lambda = iy$  mit  $y \in \mathbb{R}$ , so hat die charakteristische Gleichung eine doppelte Nullstelle für nicht mehr als zwei Elemente  $y \in (-c, c)$ . Die Menge  $S$  der  $y$ , für die nur

einfache Nullstellen vorliegen ist die Menge

$$S := \begin{cases} (-c, c) & \text{für } \alpha = 0, \beta\gamma > 0 \\ (-c, -c') \cup (-c', c') \cup (c', c) & \text{für } \alpha = 0, \beta\gamma < 0 \\ (-c, 0) \cup (0, c) & \text{für } \alpha \neq 0, \alpha^2 = 4\beta\gamma \\ (-c, c) & \text{für } \alpha \neq 0, \alpha^2 \neq 4\beta\gamma \end{cases} \quad (5.1.26)$$

mit

$$c' := 2\sqrt{|\beta||\gamma|}. \quad (5.1.27)$$

5. Sei  $\lambda \in iS$ . Dann ergeben sich die Nullstellen  $z_{\pm}$  der charakteristischen Gleichung zu

$$z_{\pm}(\lambda) = \frac{\pm\xi(\lambda) + (\lambda - \alpha)}{2\gamma}. \quad (5.1.28)$$

mit  $\xi : iS \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion mit  $\xi^2 = (\lambda - \alpha)^2 - 4\beta\gamma$ . Es gilt  $z_+z_- = \frac{\beta}{\gamma}$ ,  $z_+ \neq z_-$  und  $|z_{\pm}| < 1$ .

6. Die Funktion  $x : iS \rightarrow l^1$ , die jedem Eigenwert  $\lambda \in iS$  den zugehörigen Eigenvektor zuordnet, ist normstetig und damit schwach stetig.

Wir sind nun in der Lage, die nachfolgende Behauptung zu beweisen.

**Theorem 5.1.9.** (Banasiak und Moszynski 2011)

Sei  $X = l^p$  mit  $1 \leq p < \infty$ , versehen mit der Standardnorm oder  $X = c_0$ , versehen mit der Supremumsnorm. Für die Koeffizienten  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  gelten die Annahmen (G1)-(G2). Dann ist die Halbgruppe  $\mathcal{T} := \{T(t) | t \geq 0\}$ , die das zu den Gleichungen (5.1.22) und (5.1.23) gehörende (ACP) löst, chaotisch auf  $X$ .

*Beweis.* Zunächst gilt auch hier, dass auf Grund der beschränkten Koeffizienten die zu den Gleichungen (5.1.22) und (5.1.23) gehörende Adjazenzmatrix ein beschränkter Operator ist, der demzufolge eine gleichmäßig und damit stark stetige Halbgruppe auf  $X$  erzeugt. Zu zeigen ist im Folgenden demnach die Chaotizität der Halbgruppe. Wir beginnen mit dem Fall  $X = l^1$ . Der Beweis beruht auf Theorem 4.2.34. Wir wollen zeigen, dass die Voraussetzungen für dieses Theorem erfüllt sind und  $\mathcal{L} = l^1$  gilt. Wir benötigen somit ein Intervall  $S'$  in  $\mathbb{R}$  mit Länge ungleich Null und eine schwach stetige Menge an Eigenvektoren  $x$  der Adjazenzmatrix zu Eigenwerten  $\lambda \in iS'$ , die nicht fast überall gleich Null sind und für die gilt, dass  $\mathcal{L} = \overline{\text{span } x(iS')} = l^1$  ist. Um die Dichtheit zu zeigen, verwenden wir eine Schlussfolgerung aus dem Theorem von Hahn-Banach, die besagt, dass ein Unterraum  $Y \subset X$  dicht in  $X$  liegt, genau dann, wenn für  $x^* \in X^*$  mit  $x^*|_Y = 0$  folgt, dass  $x^* = 0$ . In unserem Fall zeigen wir, dass für  $\phi \in l^\infty|_{x(iS')}$  folgt,

dass  $\phi = 0$  gilt. Sei  $S' \subset S$  eine nicht-leere, zusammenhängende Teilmenge von  $S$ , wobei  $S$  wie in 5.1.8 definiert ist. Wir definieren zwei Mengen  $\Lambda$  und  $D$  wie folgt:

$$\Lambda := \{z \in \mathbb{C} : \left| \frac{\beta}{\gamma} \right| < |z| < 1\}, \quad D := \{z_+(\lambda) : \lambda \in iS'\} \quad (5.1.29)$$

Es gilt  $D \subset \Lambda$ . Wir wählen nun eine Folge  $\phi \in l^\infty$ , für die für alle  $\lambda \in iS', z \in D$  gilt

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n x_n(\lambda) \quad (5.1.30)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \left( z^n - \frac{\left(\frac{b}{d}\right)^n}{z^n} \right) \quad (5.1.31)$$

Wir definieren nun eine Funktion  $g : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$  durch Ihre Laurent-Reihe

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n z^n \quad (5.1.32)$$

mit

$$g_n = \begin{cases} \phi_n & \text{für } n \geq 1 \\ 0 & \text{für } n = 0 \\ -\phi_m \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^m & \text{für } n = -m \leq -1 \end{cases} \quad (5.1.33)$$

Die Funktion  $g$  ist analytisch auf  $\Lambda$  und mit Gleichung (5.1.31) folgt  $g(z) = 0, z \in D$ . Da  $D$  einen Häufungspunkt in  $\Lambda$  besitzt, folgt aus der analytischen Eigenschaft von  $g$ , dass diese auf ganz  $\Lambda$  die Nullfunktion ist. Damit gilt für alle Folgeglieder  $g_n = 0$  und somit auch für die Folgeglieder  $\phi_n = 0$  und daher  $\phi = 0$ .

Wir betrachten nun die Fälle  $X = l^p, 1 < p < \infty$  und  $X = c_0$ . Es gilt  $l^1 \subset X$  und die Einbettung von  $l^1$  in  $X$  ist stetig. Die Trajektorien von  $x \in l^1 \subset X$  unter der Halbgruppe  $\mathcal{T}$  stimmen auf  $l^1$  und  $X$  daher überein. Da  $\mathcal{T}$  für  $X = l^1$  chaotisch ist und die Einbettung von  $l^1$  in  $X$  dicht, ist  $\mathcal{T}$  auch chaotisch für  $X = l^p, 1 < p < \infty$  und  $X = c_0$ , denn Trajektorien und periodische Punkte die dicht in  $l^1$  liegen, liegen damit auch dicht in  $X = l^p, 1 < p < \infty$  und  $X = c_0$ .  $\square$

Wie wir bereits bei der Analyse reiner Sterbe- bzw. Geburtsprozesse gesehen haben, ändern die vertauschten Rollen von Geburts- und Sterberaten die Charakteristik des Prozesses hinsichtlich der Chaotizität. Im Gegensatz zu den Sterbeprozessen sind die betrachteten Geburtsprozesse nicht chaotisch. Und so ist es naheliegend, dass auch bei kombinierten Geburts- und Sterbeprozessen die Eigenschaft der Chaotizität verloren geht, wenn ein derartiger Rollentausch stattfindet, wie das folgende Theorem zeigt.

**Theorem 5.1.10.** (Banasiak und Moszynski 2011)

Sei  $X = l^p$  mit  $1 \leq p < \infty$ , versehen mit der Standardnorm oder  $X = c_0$ , versehen mit der Supremumsnorm. Gilt für die Koeffizienten für  $1 < p \leq \infty$ :  $|\gamma| < |\beta|$  oder für  $p = 1$ :  $|\gamma| \leq |\beta|$ , so ist die Halbgruppe  $\{T(t) | t \geq 0\}$ , die das zu den Gleichungen (5.1.22) und (5.1.23) gehörende (ACP) löst, nicht chaotisch auf  $X$ .

*Beweis.* Der Beweis erfolgt wieder über das Negativ-Kriterium (4.2.12). □

Es folgt nun die Betrachtung solcher Geburts- und Sterbeprozesse mit Proliferation, bei denen die Koeffizienten für alle drei Teilprozesse variieren dürfen. Wir werden zum einen sehr strenge Bedingungen an die Koeffizienten stellen, um Chaotizität auf dem gesamten Banach-Raum  $X$  zu gewährleisten (Banasiak und Lachowicz 2002). Zum anderen werden wir nur sehr schwache, realitätsnähere Annahmen für die Koeffizienten treffen, mit dem Ergebnis, dass Chaotizität dann nur noch auf einem Teilraum des Banach-Raums  $X$  erreicht werden kann (Banasiak, Lachowicz und Moszynski 2005).

**Geburts- und Sterbeprozess mit Proliferation - variable Koeffizienten.** Den Ausführungen in diesem Abschnitt liegt das folgende Modell eines Geburts- und Sterbeprozess mit Proliferation zugrunde.

$$\frac{df_0}{dt} = -\alpha_0 f_0 + \gamma_1 f_1 \quad n = 0 \quad (5.1.34)$$

$$\frac{df_n}{dt} = -\alpha_n f_n + \beta_{n-1} f_{n-1} + \gamma_{n+1} f_{n+1} \quad n > 0 \quad (5.1.35)$$

Dabei sei wie bereits in den vorangegangenen Abschnitten  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in l^p$ , wobei  $l^p$  mit der Standardnorm  $\|f\| = (\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^p)^{\frac{1}{p}}$  versehen ist, oder aber  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in c_0$ , versehen mit der Supremumsnorm. Wir beginnen die Analyse dieses Modells mit den folgenden (strengen) Annahmen an die Koeffizienten.

(H1)  $\alpha_n = \alpha + a'_n$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) für ein  $\alpha \in ]0, \infty[$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a'_n = 0$  und  $\alpha_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}_0$

(H2)  $\gamma_n > 0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) und  $\exists \gamma \in ]0, \infty[ : \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \gamma$  und  $\inf_{n \in \mathbb{N}} \prod_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{\gamma} > 0$

(H3) Für ein  $\beta \in [0, \infty]$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta, \beta_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}_0$

(H4)  $0 < \alpha + \beta < \gamma$

(H5)  $\forall n \in \mathbb{N}_0$  und ein  $q \in ]0, q_0[$  mit  $q_0 \in ]0, 1[$  erfüllen die Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = (\frac{a'_n}{\gamma})_{n \in \mathbb{N}_0}$  und  $(\beta_n \gamma_{n+1})_{n \in \mathbb{N}_0}$  die folgenden Bedingungen:  $|a_n| \leq q^{n+1}, |\frac{\beta_n \gamma_{n+1}}{\gamma^2}| \leq q^{2n+4}$

Unter Einhaltung dieser Bedingungen gilt das folgende Theorem 5.1.13. Der Beweis erfolgt ähnlich wie der Beweis zu Theorem 5.1.4 und wir verwenden die beiden folgenden Lemmata, die wir Banasiak und Lachowicz 2002 ohne Beweis entnehmen.

**Lemma 5.1.11.** Sei  $X = l^1$  und  $A := \mathbb{A}_w$  ein Operator auf  $l^1$  mit  $\mathbb{A}_w$  die zu den Gleichungen (5.1.34) und (5.1.35) gehörende Adjazenzmatrix. Sind die Annahmen (H1)-(H4) erfüllt, so existiert ein  $r > 0$ , so dass gilt

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < r\} \subset \sigma_P(A). \quad (5.1.36)$$

**Lemma 5.1.12.** Es seien die Voraussetzungen von Lemma 5.1.11 erfüllt. Gilt zusätzlich Bedingung (H5), so ist der Operator  $B$  ein Isomorphismus auf  $l^\infty$ . Dabei ist der Operator eine Matrix mit Einträgen  $b_{n,k}$  mit  $n, k \in \mathbb{N}_0$ , die wie folgt definiert sind:

$$b_{in} = \begin{cases} 0 & \text{für } i < n \\ 1 & \text{für } i = n \\ b_{n-1,i-1} + \alpha_{i-1}b_{n,i-1} - \gamma_{i-2}b_{n,k-2} & \text{für } i > n, \end{cases} \quad (5.1.37)$$

wobei  $\forall k : b_{-1,k} = 0$  gilt.

**Theorem 5.1.13.** (Banasiak und Lachowicz 2002)

Sei  $X = l^p$  mit  $1 \leq p < \infty$ , versehen mit der Standardnorm oder  $X = c_0$ , versehen mit der Supremumsnorm. Für die Koeffizienten  $\alpha_n, \beta_n$  und  $\gamma_n$  gelten die Annahmen (H1)-(H5), wobei  $q_0 \geq 0.15$ . Dann ist die Halbgruppe  $\mathcal{T} := \{T(t) | t \geq 0\}$ , die das zu den Gleichungen (5.1.34) und (5.1.35) gehörende (ACP) löst, chaotisch auf  $X$ .

*Beweis.* Der Beweis erfolgt wieder über das DSW-Kriterium (4.2.14). Wir beginnen mit dem Fall  $X = l^1$ . Mit Lemma 5.1.11 ist die erste Voraussetzung des DSW-Kriteriums erfüllt, denn das Punktspektrum enthält einen offenen Kreis  $U$ , der die imaginäre Achse schneidet. Wir betrachten nun die Eigenvektoren  $x = (x_i)_{i \geq 0}$  zu den Eigenwerten aus  $U$ . Die Folgenglieder  $x_i$  ergeben sich aus dem folgenden Eigenwertgleichungssystem

$$\begin{aligned} -\alpha_0 x_0 + \gamma_1 x_1 &= \lambda x_0 & \Rightarrow x_1 &= \frac{\lambda + \alpha_0}{\gamma_1} x_0 \\ -\alpha_1 x_1 + \beta_0 x_0 + \gamma_2 x_2 &= \lambda x_1 & \Rightarrow x_2 &= \frac{\lambda + \alpha_1}{\gamma_2} x_1 + \frac{\beta_0}{\gamma_2} x_0 \\ & \vdots & & \\ -\alpha_n x_n + \beta_{n-1} x_{n-1} + \gamma_{n+1} x_{n+1} &= \lambda x_n & \Rightarrow x_{n+1} &= \frac{\lambda + \alpha_n}{\gamma_{n+1}} x_n - \frac{\beta_{n-1}}{\gamma_{n+1}} x_{n-1} \end{aligned} \quad (5.1.38)$$

Unter den gegebenen Voraussetzungen sind die  $x \in l^1$  und damit Eigenvektoren zum jeweiligen  $\lambda \in U$  (vgl. Banasiak und Lachowicz 2002). Für die Überprüfung der dritten Bedingung des DSW-Kriteriums wählen wir ein beliebiges Element  $\Phi = (\Phi_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \in l^\infty$  und untersuchen für  $\lambda \in U$  die Funktion  $F_\Phi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n x_n(\lambda)$ . Zu zeigen ist abermals, dass aus  $F_\Phi = 0$  folgt, dass  $\Phi = 0$ . Wie im Beweis von Theorem 5.1.4 folgern wir, dass  $F_\Phi$  analytisch auf  $U$  ist und

schreiben  $F_\Phi$  als Potenzreihe. Wieder setzen wir die Bedingungen für die Koeffizienten in die Potenzreihe ein und ersetzen  $\mu = \frac{\lambda+a}{\gamma}$ . Wir schreiben

$$F_\Phi(\Lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\Phi_k}{\prod_{j=1}^k \frac{\gamma_j}{\gamma}} b_{n,k} \right) \quad (5.1.39)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \left( \sum_{k=n}^{\infty} \tilde{\Phi}_k b_{n,k} \right), \quad (5.1.40)$$

wobei die  $b_{n,k}$  die Einträge der Matrix  $B$  aus Lemma 5.1.12 sind. Damit  $F_\Phi$  auf  $U$  identisch Null ist, müssen alle Koeffizienten der Potenzreihe verschwinden, was äquivalent zu der Forderung  $B\tilde{\Phi} = 0$  ist. Da  $B : l^\infty \rightarrow l^\infty$  mit Lemma 5.1.12 ein Isomorphismus ist, ist die einzige Lösung der Gleichung  $B\tilde{\Phi} = 0$  die Folge  $\tilde{\Phi} = 0$ . Gäbe es also eine nicht-triviale Folge  $\Phi \in l^\infty$ , für die  $F_\Phi = 0$  auf  $U$ , wäre  $\tilde{\Phi}$  eine nicht-triviale Lösung, ein Widerspruch zu der soeben erlangten Aussage. Somit sind alle Forderungen des DSW-Kriteriums erfüllt und die Halbgruppe  $\mathcal{T}$  ist daher chaotisch auf  $l^1$ . Die Aussagen zu den Fällen  $X = l^p, 1 < p < \infty$  oder  $X = c_0$  erfolgen analog wie in Theorem 5.1.4 aus den Betrachtungen zu  $X = l^1$ .  $\square$

Wie auch im vorangegangenen Abschnitt wird die Eigenschaft der Chaotizität zerstört, wenn die Rollen von Geburts- und Sterberaten getauscht werden, wie Theorem 5.1.14 zeigt.

**Theorem 5.1.14.** (Banasiak und Lachowicz 2002)

Sei  $X = l^p$  mit  $1 \leq p < \infty$ , versehen mit der Standardnorm oder  $X = c_0$ , versehen mit der Supremumsnorm. Für die Koeffizienten  $\alpha_n, \beta_n$  und  $\gamma_n$  gelten die Annahmen (H1)-(H5), wobei  $q_0 \geq 0.15$ . Seien ferner die Rollen von Geburts- und Sterberaten getauscht. Dann ist die Halbgruppe  $\{T(t) | t \geq 0\}$ , die das dazu gehörende (ACP) löst, nicht chaotisch auf  $X$ .

*Beweis.* Der Beweis erfolgt wieder über das Negativ-Kriterium 4.2.12. Betrachten wir den adjungierten Operator zur Adjazenzmatrix des Problems, so ist dieser gerade die Adjazenzmatrix des in den Gleichungen (5.1.34) und (5.1.35) dargestellten Problems. Dieser hat, wie im Beweis gezeigt stets nicht-leeres Punktspektrum. Mit Theorem 4.2.12 folgt, dass die zugehörige Halbgruppe nicht hyperzyklisch und damit nicht chaotisch auf  $X$  ist.  $\square$

Wir wollen nun schwächere Bedingungen an die Koeffizienten stellen, werden damit aber, wie bereits angemerkt nur noch Sub-Chaotizität erzielen können. Banasiak, Lachowicz und Moszynski 2005 wählen das in den Gleichungen (5.1.41)- (5.1.42) gegebene Modell mit Koeffizienten  $\alpha_n$  ohne negatives Vorzeichen. Um die Ergebnisse aus Banasiak, Lachowicz und Moszynski 2005 zu nutzen, werden wir demnach ebenfalls diese Schreibweise verwenden.

$$\frac{df_0}{dt} = \alpha_0 f_0 + \gamma_1 f_1 \quad n = 0 \quad (5.1.41)$$

$$\frac{df_n}{dt} = \alpha_n f_n + \beta_{n-1} f_{n-1} + \gamma_{n+1} f_{n+1} \quad n > 0 \quad (5.1.42)$$

Wieder sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in l^p$ , wobei  $l^p$  mit der Standardnorm  $\|f\| = (\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^p)^{\frac{1}{p}}$  versehen ist, oder aber  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in c_0$ , versehen mit der Supremumsnorm. Die Beschränktheit der in den vorangegangenen Abschnitten verwendeten Koeffizientenfolgen ist aus biologischer Sicht nicht sinnvoll (vgl. Banasiak, Lachowicz und Moszynski 2005) und so wollen wir daher die folgenden Annahmen treffen.

$$(I1) \quad \alpha_n = \alpha n + a, \gamma_{n+1} = \gamma n + d, \beta_{n-1} = \beta n + b$$

$$(I2) \quad \alpha + \beta + \gamma \leq 0$$

$$(I3) \quad \beta, \gamma \geq 0, a, b, d \in \mathbb{R}$$

$$(I4) \quad \beta = 0 \Rightarrow b \geq 0, \gamma = 0 \Rightarrow d \geq 0$$

$$(I5) \quad \gamma > \beta$$

$$(I6) \quad \alpha = -(\beta + \gamma)$$

Durch die Unbeschränktheit der Koeffizientenfolgen stellt auch die gewichtete Adjazenzmatrix des zugehörigen Graphen keinen beschränkten Operator mehr dar. Wir definieren aus diesem Grund einen Operator  $A$  wie folgt:

$$D(A) = \{f \in l^p : \mathbb{A}_w f \in l^p\} \quad (5.1.43)$$

$$A = \mathbb{A}_w|_{D(A)} \quad (5.1.44)$$

Wir können zeigen, dass sich dieser Operator unter den gegebenen Annahmen sub-chaotisch verhält (Theorem 5.1.18). Wir benötigen dafür das folgende Theorem 5.1.15, sowie die beiden Lemmata 5.1.16 und 5.1.17, welche wir ohne Beweis angeben.

**Theorem 5.1.15.** (Banasiak, Lachowicz und Moszynski 2006)

Seien die Annahmen (I1)-(I3) erfüllt. Dann gilt:

1.  $A$  ist der Erzeuger einer  $C_0$ -Halbgruppe vom  $\omega$ -Typ in  $l^p$  für ein  $\omega \in \mathbb{R}$ .
2. Gilt zusätzlich die Annahme (I4), dann ist:  $\sigma(A) = \mathcal{H}_p \cup \mathcal{F}_p$  mit

$$\mathcal{H}_p \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re \lambda \leq \omega_p\} \quad \text{mit}$$

$$\omega_p = \begin{cases} a + bd + \beta - \gamma & \text{for } p = 1 \\ a + b + d + \beta & \text{for } p > 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{F} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re \lambda > \omega_p\} \quad \text{mit}$$

$$\mathcal{K} \cap \mathcal{F}_p \quad \text{endlich für jedes kompakte } \mathcal{K} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re \lambda > \omega_p\}$$

$$\Re \mathcal{F}_p \quad \text{beschränkt}$$

3. Gelten zusätzlich die Annahmen (I5) und (I6), dann gilt

$$\begin{aligned}\Pi_p &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re \lambda < \xi_p\} \subset \sigma_P(A) \quad \text{mit} \\ \xi_p &:= a + b + d + \frac{\beta - \gamma}{p}\end{aligned}$$

**Lemma 5.1.16.** (Banasiak, Lachowicz und Moszynski 2005)

Seien die Annahmen (I1), (I3), (I5) und (I6) erfüllt. Sei  $N'_0 := \max\{n \geq 0 : \gamma_n = 0\}$ . Für jedes  $\lambda \in \mathbb{C}$  gibt es ein eindeutiges  $x(\lambda) = (x_n(\lambda))_{n \geq 0}$ , für das  $\mathbb{A}_w x(\lambda) = \lambda x(\lambda)$  mit  $x_n(\lambda) = 0$  für  $n < N'_0$  und  $f_{N'_0}(\lambda) = 1$  gilt. Des Weiteren gilt

1.  $x_n(\lambda)$  ist polynomial in  $\lambda$  mit Grad  $n - N'_0$  für  $n \geq N'_0$ .
2. Für alle  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  und  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $K > 0$  so, dass falls  $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$  und  $n \geq N'_0 + 1$  folgt, dass  $|x_n(\lambda)| \leq Kn^{\frac{a+b+d+\Re \lambda}{\gamma-\beta}}$ .

**Lemma 5.1.17.** (Banasiak, Lachowicz und Moszynski 2005)

Sei  $X = l^p, 1 \leq p < \infty$  und  $A$  der in den Gleichungen (5.1.43) und (5.1.44) definierte Operator. Sei  $\Pi_p := \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re \lambda < \xi_p\}$  mit  $\xi_p = a + b + d + \frac{\beta - \gamma}{p}$ . Gelten die Annahmen (I1), (I3), (I5) und (I6), so ist  $\Pi_p \subset \sigma_P(A)$  und für jedes  $\lambda \in \Pi_p$  ist die Folge  $x(\lambda)$  aus Lemma 5.1.16 Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ . Des Weiteren ist die Funktion  $\Pi_p \ni \lambda \rightarrow x(\lambda) \in l^p$  analytisch.

**Theorem 5.1.18.** (Banasiak, Lachowicz und Moszynski 2005)

Sei  $X = l^p$  mit  $1 \leq p < \infty$ , versehen mit der Standardnorm. Für die Koeffizienten  $\alpha_n, \beta_n$  und  $\gamma_n$  gelten die Annahmen (I1)-(I6), sowie  $\xi_p > 0$ . Dann ist die durch  $A$  erzeugte  $C_0$ -Halbgruppe  $\mathcal{T} := \{T(t) | t \geq 0\}$  in  $X$  sub-chaotisch und  $\mathcal{V}(x, \Pi_p)$  ist der Raum der Chaotizität.

*Beweis.* Mit Theorem 5.1.15 erzeugt  $A$  die stark steigte Halbgruppe  $\mathcal{T}$ . Mit Lemma 5.1.17 sind die Voraussetzungen für Theorem 4.2.36 erfüllt. Folglich ist  $\mathcal{T}$  sub-chaotisch auf  $\mathcal{V}(x, \Pi_p)$ .  $\square$

Wir schließen diese Analysen mit Annahmen, für die der Operator  $A$  nicht chaotisch ist und benötigen ein Lemma, welches wir Banasiak, Lachowicz und Moszynski 2005 ohne Beweis entnehmen.

**Lemma 5.1.19.** (Banasiak, Lachowicz und Moszynski 2005)

Seien die Annahmen (I1), (I3) und (I6) erfüllt. Sei  $A$  der in den Gleichungen (5.1.43) und (5.1.44) definierte Operator auf  $X = l^p, 1 \leq p < \infty$ . Gibt es ein  $x^* \in l^q$  (mit  $p^{-1} + q^{-1} = 1$ ) so, dass  $x_n^* = O(\frac{1}{n})$  und  $\mathbb{A}_w^T x^* = \lambda x^*$  für ein  $\lambda \in \mathbb{C}$ , dann gilt  $x^* \in \ker(A^* - \lambda I)$ .

**Theorem 5.1.20.** (Banasiak, Lachowicz und Moszynski 2005)

Sei  $X = l^p$  mit  $1 \leq p < \infty$ , versehen mit der Standardnorm oder  $X = c_0$ , versehen mit der Supremumsnorm. Für die Koeffizienten  $\alpha_n, \beta_n$  und  $\gamma_n$  gelten die Annahmen (I1), (I3) und (I6). Gilt zusätzlich

eine der beiden nachfolgenden Annahmen, so ist die durch den in den Gleichungen (5.1.43) und (5.1.44) definierten Operator  $A$  erzeugte  $C_0$ -Halbgruppe  $\mathcal{T} := \{T(t) | t \geq 0\}$  nicht chaotisch.

1.  $\beta > \gamma$
2.  $\gamma_{m_0} = 0$  für ein  $m_0 \geq 1$

*Beweis.* Wir beweisen die Aussagen mit dem Negativ-Kriterium 4.2.12 und zeigen, dass das jeweilige Punktspektrum des adjungierten Operators  $A^*$  nicht leer ist. Mit Lemma 5.1.19 reicht es, einen Eigenwert mit zugehörigem Eigenvektor der transponierten Adjazenzmatrix  $\mathbb{A}_w^T$  zu finden, für dessen Folgenglieder gilt, dass  $x_n = O(\frac{1}{n})$ . Wir betrachten zunächst den ersten Fall ( $\beta > \gamma$ ). Die Koeffizienten von  $\mathbb{A}_w^T$  erfüllen die Voraussetzungen von Lemma 5.1.16. Somit sind wiederum die Voraussetzungen von Lemma 5.1.19 erfüllt. Damit ist das Punktspektrum von  $A^*$  nicht leer und  $\mathcal{T}$  nicht chaotisch. Wir wenden uns nun dem Fall  $\gamma_{m_0} = 0$  für ein  $m_0 \geq 1$  zu. Wir bilden die  $m_0 \times m_0$ -Matrix  $\mathbb{A}_{w,0}^T$ , die aus  $\mathbb{A}_w^T$  hervorgeht, indem wir nur die Einträge  $(i, j), 0 \leq i, j \leq m_0$  als eigenständige Matrix betrachten. Sei  $\lambda$  ein beliebiger Eigenwert dieser Matrix und  $v$  der zugehörige Eigenvektor. Da  $\gamma_n = 0$  für  $n \geq m_0$  ist, erfüllt die Folge mit den Folgegliedern

$$x_n = \begin{cases} v_n & 0 \leq n \leq m_0 - 1 \\ 0 & n \geq m_0 \end{cases}$$

die Eigenwertgleichung. Wieder sind die Voraussetzungen von Lemma 5.1.19 erfüllt, das Punktspektrum von  $A^*$  daher nicht leer und  $\mathcal{T}$  nicht chaotisch. □

## 5.2 Chaotizität kontinuierlicher Transportprozesse

Bei den im vorangegangenen Abschnitt vorgestellten diskreten Transportprozessen stimmt der Erzeuger der zugehörigen Halbgruppe auf seinem Definitionsbereich mit der Adjazenzmatrix des Graphen überein. Aussagen zur Hyperzyklizität und zur Chaotizität der Halbgruppe können daher auf Grundlage spektraler Eigenschaften (Eigenwerte, Eigenvektoren) dieser Adjazenzmatrix getroffen werden (vgl. Abschnitt 4.2). Bei der Betrachtung kontinuierlicher Transportprozesse spielt, wie bereits in Abschnitt 3.3.2 gezeigt, die Adjazenzmatrix des zugehörigen Kantengraphen eine wichtige Rolle, da sie direkt in die Darstellung der Halbgruppe eingeht. In Namayanja 2018 wird gezeigt, dass von der Hyperzyklizität und Chaotizität dieser Matrix direkt auf entsprechende Eigenschaften der Halbgruppe geschlossen werden kann. Wir korrigieren diese Aussagen in Korollar 5.2.3 und Theorem 5.2.4 insofern, als dass wir zeigen, dass die Eigenschaft der schwachen Mischung der Matrix benötigt wird, wobei wir uns bei den

Aussagen nicht auf Adjazenzmatrizen beschränken, sondern allgemeine lineare beschränkte Operatoren zulassen. Für den Beweis benötigen wir Aussagen, die wir in den folgenden beiden Theoremen voranstellen.

**Theorem 5.2.1.** *Hyperzyklizität der Transporthalbgruppe und schwache Mischung des Operators  $K$*   
 Sei  $Z$  ein separabler Banach-Raum und  $K \in L(Z)$  ein beschränkter, linearer Operator auf diesem. Sei  $X := L^p([0, 1], Z)$  mit  $\|f\|_X^p := \int_0^1 \|f(s)\|_Z^p ds$ , wobei  $1 \leq p < \infty$ . Sei  $A$  der Operator  $A := \frac{d}{dx}$  mit Definitionsbereich  $D(A) = \{v \in W^{1,p}([0, 1], Z) | v(1) = Kv(0)\}$ . Ist die durch  $A$  erzeugte Halbgruppe  $\mathcal{T} := \{T(t) | t \geq 0\}$  mit

$$T(t)f(s) = K^n f(t + s - n) \quad \text{für } n \leq t + s < n + 1, f \in X, n \in \mathbb{N}_0 \quad (5.2.1)$$

hyperzyklisch, so ist der Operator  $K$  schwach mischend.

*Beweis.* Es ist  $T(1) = \mathcal{K}$  mit  $[\mathcal{K}f](s) = Kf(s), s \in [0, 1]$ . Da die Halbgruppe  $\mathcal{T}$  nach Voraussetzung hyperzyklisch ist, folgt mit dem Theorem von Conojero, Müller und Peris (Theorem 4.2.5), dass dies auch für  $T(1)$  und damit für  $\mathcal{K}$  gilt. Es gibt daher ein  $f \in L^p([0, 1], Z)$ , so dass der Orbit  $\{\mathcal{K}^n f | n \geq 0\}$  dicht in  $(L^p([0, 1]; Z))$  liegt. Da  $Z$  nach Voraussetzung separabel ist, gilt dies auch für  $Z \oplus Z$ . Folglich gibt es eine abzählbare Menge  $((a_m, b_m))_{m \in \mathbb{N}}$  mit  $\overline{\{(a_m, b_m) | m \in \mathbb{N}\}} = Z \oplus Z$ . Da  $\mathcal{K}$  hyperzyklisch ist, finden wir für jedes  $m \in \mathbb{N}$  eine Folge  $((n_k^m)_{k \in \mathbb{N}})$  mit

$$\mathcal{K}^{n_k^m} f \rightarrow g := a_m \chi_{(0, \frac{1}{2})} + b_m \chi_{(\frac{1}{2}, 1)} \quad (5.2.2)$$

in  $L^p([0, 1]; Z)$ . Da  $\mathcal{K}^{n_k^m} f$  in  $X$ -Norm konvergiert, finden wir eine Teilfolge  $(\tilde{n}_k^m)$  aus  $(n_k^m)_{k \in \mathbb{N}}$ , für die  $\lim_{\tilde{n}_k^m \rightarrow \infty} \|\mathcal{K}^{\tilde{n}_k^m} f(s) - g(s)\|_Z = 0$  f.ü. gilt. Es gibt folglich für jedes  $m \in \mathbb{N}$  eine Nullmenge  $N_m \subset [0, 1]$  mit

$$\mathcal{K}^{n_k^m} f(s) = [\mathcal{K}^{n_k^m} f](s) \rightarrow \begin{cases} a_m, & s \in (0, \frac{1}{2}) \setminus N_m \\ b_m, & s \in (\frac{1}{2}, 1) \setminus N_m \end{cases} \quad (5.2.3)$$

Sei  $N := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} N_m$ . Dann ist  $N$  eine Nullmenge und wir können  $s_1 \in (0, \frac{1}{2}) \setminus N$  und  $s_2 \in (\frac{1}{2}, 1) \setminus N$  wählen. Mit Gleichung (5.2.3) liegt der Orbit  $\{(K^n f(s_1), K^n f(s_2)) | n \in \mathbb{N}_0\}$  dicht in  $\{(a_m, b_m) | m \in \mathbb{N}\}$  und damit dicht in  $Z \oplus Z$ . Es folgt, dass  $K \oplus K$  hyperzyklisch und daher  $K$  schwach mischend ist.  $\square$

Wir wollen nun zeigen, dass auch die Umkehrung gilt, die durch Gleichung (5.2.1) gegebene Halbgruppe  $\mathcal{T}$  also genau dann hyperzyklisch ist, wenn der Operator  $K$  schwach mischend ist. Wir beweisen dafür das folgende Theorem.

**Theorem 5.2.2.** Schwache Mischung von  $\mathcal{K} = T(1)$  und  $K$

Sei  $Z$  ein separabler Banach-Raum Und  $K \in L(Z)$  ein linearer beschränkter Operator auf diesem. Sei  $X := L^p([0,1], Z)$  mit  $\|f\|_X^p := \int_0^1 \|f(s)\|_Z^p ds$ , wobei  $1 \leq p < \infty$  und  $\mathcal{K} : L^p([0,1]; Z) \rightarrow L^p([0,1]; Z)$  ein linearer beschränkter Operator mit

$$[\mathcal{K}f](s) = Kf(s), \quad s \in [0,1]. \quad (5.2.4)$$

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i)  $K$  ist schwach mischend;
- (ii)  $\mathcal{K}$  ist hyperzyklisch;
- (iii)  $\mathcal{K}$  ist schwach mischend.

*Beweis.* (iii) $\Rightarrow$ (ii). Dies folgt aus der Tatsache, dass jeder schwach mischende Operator hyperzyklisch ist.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sei  $\mathcal{K}$  hyperzyklisch. Dann ist  $K$  schwach mischend, wie in Theorem 5.2.1 gezeigt.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Sei  $K$  schwach mischend. Mit dem Theorem von Bes und Peris (Bes und Peris 1999) erfüllt  $K$  das Hyperzyklizitätskriterium. Es gibt daher dichte Mengen  $X_0, Y_0 \subset Z$  sowie eine wachsende Folge  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  und Abbildungen  $S_k : Y_0 \rightarrow Z, k \in \mathbb{N}$ , so dass die folgenden Bedingungen gelten:

- (a)  $K^{n_k} x \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty \forall x \in X_0$ ,
- (b)  $S_k y \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty \forall y \in Y_0$ ,
- (c)  $K^{n_k} S_k y \rightarrow y$  für  $k \rightarrow \infty \forall y \in Y_0$ .

Wir wollen nun zeigen, dass auch  $\mathcal{K}$  das Hyperzyklizitätskriterium erfüllt und definieren uns dafür Mengen  $\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0 \subset L^p([0,1]; Z)$  wie folgt

$$\tilde{X}_0 := \left\{ \sum_{j=1}^m x_j \chi_{A_j} \mid m \in \mathbb{N}, x_j \in X_0, A_j \subset [0,1] \text{ messbar, paarweise disjunkt mit } \bigcup_{j=1}^m A_j = [0,1] \right\}$$

$$\tilde{Y}_0 := \left\{ \sum_{j=1}^m y_j \chi_{A_j} \mid m \in \mathbb{N}, y_j \in Y_0, A_j \subset [0,1] \text{ messbar, paarweise disjunkt mit } \bigcup_{j=1}^m A_j = [0,1] \right\}$$

wobei  $\chi_{A_j}$  die charakteristische Funktion bezüglich einer Menge  $A_j \subset [0,1]$  bezeichnet. Die Mengen  $\tilde{X}_0$  und  $\tilde{Y}_0$  liegen dicht in der Menge der Treppenfunktionen, da  $X_0$  und  $Y_0$  nach Voraussetzung dicht in  $Z$  liegen. Die Menge der Treppenfunktionen liegt wiederum dicht in  $L^p([0,1]; Z)$ , so dass damit  $\overline{\tilde{X}_0} = \overline{\tilde{Y}_0} = L^p([0,1]; Z)$  folgt. Des Weiteren definieren wir die folgenden Abbildungen für  $k \in \mathbb{N}$ :

$$\tilde{S}_k : \tilde{Y}_0 \rightarrow L^p([0, 1]; Z), \sum_{j=1}^m y_j \chi_{A_j} \mapsto \sum_{j=1}^m S_k y_j \chi_{A_j}. \quad (5.2.5)$$

Wir überprüfen nun für  $\mathcal{K}$  die Bedingungen des Hyperzyklizitätskriteriums und zeigen zunächst  $\mathcal{K}^{n_k} \tilde{x}_0 \rightarrow 0, \forall \tilde{x}_0 \in \tilde{X}_0$ . Sei  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}_0$ . Dann existieren  $m \in \mathbb{N}, x_j \in X_0$  sowie messbare, paarweise disjunkte Teilmengen  $A_j \subset [0, 1]$  mit  $\bigcup_j A_j = [0, 1]$  und  $\tilde{x}_0 = \sum_j x_j \chi_{A_j}$ . Für  $n_k \in \mathbb{N}$  gilt

$$\mathcal{K}^{n_k} \tilde{x}_0 = \sum_{j=1}^m K^{n_k} x_j \chi_{A_j} \quad (5.2.6)$$

und somit folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{K}^{n_k} \tilde{x}_0 = \sum_{j=1}^m \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{[K^{n_k} x_j]}_{=0} \chi_{A_j} = 0. \quad (5.2.7)$$

Wir zeigen nun  $\tilde{S}_k \tilde{y}_0 \rightarrow \tilde{y}_0, \forall \tilde{y}_0 \in \tilde{Y}_0$ . Sei  $\tilde{y}_0 \in \tilde{Y}_0$  beliebig gewählt. Dann existieren  $m \in \mathbb{N}, y_j \in Y_0$  sowie messbare, paarweise disjunkte Teilmengen  $A_j \subset [0, 1]$  mit  $\bigcup_j A_j = [0, 1]$  und  $\tilde{y}_0 = \sum_j y_j \chi_{A_j}$ . Für  $k \in \mathbb{N}$  gilt

$$\tilde{S}_k \tilde{y}_0 = \sum_{j=1}^m S_k y_j \chi_{A_j} \quad (5.2.8)$$

und damit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{S}_k \tilde{y}_0 = \sum_{j=1}^m \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{[S_k y_j]}_{=0} \chi_{A_j} = 0. \quad (5.2.9)$$

Und auch die dritte Bedingung des Hyperzyklizitätskriteriums  $\mathcal{K}^{n_k} \tilde{S}_k \tilde{y}_0 \rightarrow \tilde{y}_0$  weisen wir dementsprechend nach. Sei wieder  $\tilde{y}_0 \in \tilde{Y}_0$ . Dann existieren  $m \in \mathbb{N}, y_j \in Y_0$  sowie messbare, paarweise disjunkte Teilmengen  $A_j \subset [0, 1]$  mit  $\bigcup_j A_j = [0, 1]$  und  $\tilde{y}_0 = \sum_j y_j \chi_{A_j}$ . Es gilt

$$\mathcal{K}^{n_k} \tilde{S}_k \tilde{y}_0 = \mathcal{K}^{n_k} \sum_{j=1}^m S_k y_j \chi_{A_j} = \sum_{j=1}^m K^{n_k} S_k y_j \chi_{A_j} \quad (5.2.10)$$

und somit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{K}^{n_k} \tilde{S}_k \tilde{y}_0 = \sum_{j=1}^m \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{[K^{n_k} S_k y_j]}_{=y_j} \chi_{A_j} = \tilde{y}_0 \quad (5.2.11)$$

Damit ist  $\mathcal{K}$  schwach mischend. □

Mit diesen Überlegungen können wir nun das folgende Korollar beweisen.

**Korollar 5.2.3.** *Hyperzyklizität der Transporthalbgruppe und schwache Mischung des Operators  $K$  II*  
Die Transporthalbgruppe  $\mathcal{T}$  in Theorem 5.2.1 ist genau dann hyperzyklisch, wenn der Operator  $K$  schwach mischend ist.

*Beweis.* ( $\Rightarrow$ ) Sei  $\mathcal{T}$  hyperzyklisch. Dann ist der Operator  $K$  mit Theorem 5.2.1 schwach mischend. ( $\Leftarrow$ ) Sei  $K$  schwach mischend. Mit Theorem 5.2.2 ist dann der Operator  $\mathcal{K}$  und damit  $T(1)$  hyperzyklisch. Folglich ist  $\mathcal{T}$  hyperzyklisch.  $\square$

Aufbauend auf dieser Aussage zeigen wir nun, dass von der Chaotizität des Operators  $K$  auf die Chaotizität der Transporthalbgruppe  $\mathcal{T}$  geschlossen werden kann.

**Theorem 5.2.4.** *Chaotizität der Transporthalbgruppe und des Operators  $K$*   
Die Transporthalbgruppe  $\mathcal{T}$  in Theorem 5.2.1 ist chaotisch, wenn der Operator  $K$  chaotisch ist.

*Beweis.* Sei  $K$  chaotisch. Dann erfüllt  $K$  das Hyperzyklizitätskriterium und ist daher schwach mischend. Mit Korollar 5.2.2 ist  $\mathcal{T}$  hyperzyklisch. Es bleibt zu zeigen, dass die Menge  $\tilde{X}_p$  der bezüglich  $\mathcal{T}$  periodischen Punkte dicht in  $L^p([0, 1], Z)$  liegt. Sei  $X_p$  die Menge der bezüglich  $K$  periodischen Punkte in  $Z$ . Da  $K$  chaotisch ist, liegt diese Menge dicht in  $Z$ . Wir definieren die Menge

$$\tilde{X}_p := \left\{ \sum_{j=1}^m x_j \chi_{A_j} \mid m \in \mathbb{N}, x_j \in X_p, A_j \subset [0, 1] \text{ messbar, paarweise disjunkt mit } \bigcup_{j=1}^m A_j = [0, 1] \right\}$$

wobei  $\chi_{A_j}$  die charakteristische Funktion bezüglich einer Menge  $A_j \subset [0, 1]$  bezeichnet. Die Menge  $\tilde{X}_p$  liegt dicht in der Menge der Treppenfunktionen, da  $X_p$  nach Voraussetzung dicht in  $Z$  liegt. Die Menge der Treppenfunktionen liegt wiederum dicht in  $L^p([0, 1]; Z)$ , so dass damit  $\overline{\tilde{X}_p} = L^p([0, 1]; Z)$  folgt. Es bleibt zu zeigen, dass die Elemente der Menge  $\tilde{X}_p$  periodische Punkte bezüglich  $\mathcal{T}$  sind. Sei  $\tilde{x}_p \in \tilde{X}_p$ . Es ist

$$[T(n)\tilde{x}_p](s) = [T^n(1)\tilde{x}_p](s) = K^n \tilde{x}_p(s) = \tilde{x}_p(s), \quad (5.2.12)$$

also  $T(n)\tilde{x}_p = \tilde{x}_p$ . Es gibt daher ein  $t = n \geq 0$ , so dass  $T(t)\tilde{x}_p = \tilde{x}_p$  für alle  $\tilde{x}_p \in \tilde{X}_p$ .  $\square$

### 5.3 Zusammenhang der Chaotizität diskreter und kontinuierlicher Transportprozesse

Für die Chaotizität des diskreten Transportprozesses ist die Adjazenzmatrix  $A_w$  von Bedeutung, für die Chaotizität des kontinuierlichen Transportprozesses die Adjazenzmatrix des Kantengraphen  $B_w$ . Um den Zusammenhang zwischen der Chaotizität der beiden Prozesse zu

diskutieren, werden wir daher die beiden Adjazenzmatrizen in Verbindung bringen. Des Weiteren werden wir den diskreten Transportprozess als Grenzwert des kontinuierlichen diskutieren. Wir halten zunächst einen Zusammenhang zwischen einem ungewichteten, ungerichteten Graphen und seinem zugehörigen Kantengraphen fest.

**Lemma 5.3.1.** *Gleichmäßige lokale Endlichkeit eines Graphen und seines Kantengraphen (Mugnolo 2018)*

*Ein Graph  $G$  ist genau dann gleichmäßig lokal endlich, wenn es sein zugehöriger Kantengraph  $L(G)$  ist.*

Da die gleichmäßige lokale Endlichkeit eines Graphen nach Theorem 3.4.7 gleichbedeutend damit ist, dass die zugehörige Adjazenzmatrix ein beschränkter Operator auf  $l^p$  ist, ergibt sich die folgende Aussage:

**Korollar 5.3.2.** *Die Adjazenzmatrix  $\mathbb{A}$  des Graphen  $G$  ist genau dann ein beschränkter Operator auf  $l^p, 1 \leq p \leq \infty$ , wenn es die Adjazenzmatrix  $\mathbb{B}$  des zugehörigen Kantengraphen  $L(G)$  ist.*

Wir wollen eine ähnliche Aussage für die in dieser Arbeit untersuchten gewichteten, gerichteten Graphen treffen und behaupten:

**Proposition 5.3.3.** *Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter, gewichteter Graph und  $L(G) = (V', E')$  der zugehörige Kantengraph. Ist  $G$  gleichmäßig lokal endlich, so ist es auch sein Kantengraph.*

*Beweis.* Sei  $G$  gleichmäßig lokal endlich. Dann gibt es sowohl für die Eingangsgrade  $\deg_{\text{in}}(v)$  als auch für die Ausgangsgrade  $\deg_{\text{out}}(v)$  aller Knoten  $v \in V$  obere Schranken  $\deg_{\text{in}}^{\text{max}}$  bzw.  $\deg_{\text{out}}^{\text{max}}$ . Sei  $e \in E$  beliebig gewählt. Sei  $\deg_{\text{in}}(v)$  der Eingangsgrad des Anfangsknotens und  $\deg_{\text{out}}(w)$  der Ausgangsgrad des Endknotens von  $e$ . Im Kantengraphen sei  $e$  durch  $v'$  dargestellt. Für den Eingangsgrad  $\deg_{\text{in}}(v')$  von  $v'$  gilt  $\deg_{\text{in}}(v') = \deg_{\text{in}}(v) \leq \deg_{\text{in}}^{\text{max}}$ , für den Ausgangsgrad  $\deg_{\text{out}}(v')$  von  $v'$  gilt  $\deg_{\text{out}}(v') = \deg_{\text{out}}(v) \leq \deg_{\text{out}}^{\text{max}}$ . Folglich ist der Kantengraph gleichmäßig lokal endlich.  $\square$

Wie für Lemma 5.3.1 folgern wir:

**Korollar 5.3.4.** *Ist die Adjazenzmatrix  $\mathbb{A}_w$  des Graphen  $G$  ein beschränkter Operator auf  $l^p, 1 \leq p \leq \infty$ , dann ist es auch die Adjazenzmatrix  $\mathbb{B}_w$  des zugehörigen Kantengraphen  $L(G)$ .*

Eine Umkehrung wie für ungerichtete Graphen gilt nicht. Sei beispielsweise ein Graph gegeben, für den gilt  $\deg_{\text{in}}(v_i) = i$  und  $\deg_{\text{out}}(v_i) = 0$  für  $i$  gerade, sowie  $\deg_{\text{in}}(v_i) = 0$  und  $\deg_{\text{out}}(v_i) = i$  für  $i$  ungerade. Dann gilt  $(\deg_{\text{in}}(v))_{v \in V} \rightarrow \infty, (\deg_{\text{out}}(v))_{v \in V} \rightarrow \infty$ , also  $G$  nicht gleichmäßig lokal endlich. Der Kantengraph besteht hingegen nur aus isolierten Knoten. Es

gilt somit  $\deg_{\text{in}}(v') = \deg_{\text{out}}(v') = 0, \forall v' \in V'$  und daher  $L(G)$  gleichmäßig lokal endlich.

Die folgende Proposition stellt einen Zusammenhang zwischen den Punktspektren der beiden Adjazenzmatrizen her.

**Proposition 5.3.5.** *Punktspektren der Adjazenzmatrizen des Graphen und seines Kantengraphen*

Sei  $X = l^p, 1 \leq p \leq \infty$ . Sei  $G$  ein gleichmäßig ausgehend lokal endlicher gewichteter, gerichteter Graph, ohne isolierte Knoten. Ferner seien zu jedem Knoten nur endlich viele Kanten inzident. Dann haben die Adjazenzmatrix  $\mathbb{A}_w$  des Graphen und die Adjazenzmatrix  $\mathbb{B}_w$  des zugehörigen Kantengraphen das gleiche Punktspektrum.

*Beweis.* Sei  $\lambda$  ein Eigenwert von  $\mathbb{A}_w$ . Unter Verwendung der Ausgangs- und Eingangsinzidenzmatrizen (Def. 3.1.10) sowie der Definition der Adjazenzmatrizen des Graphen und des Kantengraphen (Def. 3.1.11) erhalten wir die folgenden Zusammenhänge.

$$\mathbb{A}_w x = \lambda x \quad \text{für ein } x \in X, x \neq 0 \quad (5.3.1)$$

$$\Phi^+(\Phi_w^-)^T x = \lambda x \quad (5.3.2)$$

$$(\Phi_w^-)^T \Phi^+(\Phi_w^-)^T x = \lambda (\Phi_w^-)^T x \quad (5.3.3)$$

$$\mathbb{B}_w y = \lambda y \quad \text{für } y = (\Phi_w^-)^T x \quad (5.3.4)$$

Damit  $\lambda$  ein Eigenwert von  $\mathbb{B}_w$  ist, müssen wir zeigen, dass  $y \in X$  liegt mit  $y \neq 0$ . Für  $x \in X$  muss daher gelten  $y = (\Phi_w^-)^T x \in X$ . Nach Voraussetzung ist der Graph gleichmäßig ausgehend lokal endlich. Für jeden Knoten  $v_i$  gilt daher  $\deg_{\text{out}}(v_i) = \sum_{e \in E_{\text{out}}} \rho(e) < \infty$ . Dies ist gleichbedeutend mit einer endlichen Zeilensumme von  $(\Phi_w^-)$  für jede Zeile der Matrix. Auch die Spaltensummen sind endlich, denn aus  $\deg_{\text{out}}(v_i) < \infty$  folgt, dass auch jedes einzelne Gewicht und damit der einzige nicht Nulleintrag einer jeden Spalte  $\rho(e) < \infty$ . Mit Proposition 3.4.1 ist die Matrix  $(\Phi_w^-)$  und damit ihre auch Transponierte ein beschränkter Operator auf  $l^p$  für alle  $1 \leq p \leq \infty$ . Somit liegt für  $x \in X$  auch  $y \in X$ . Wir müssen noch zeigen, dass  $y \neq 0$  gilt. Sei  $x_i$  ein Eintrag ungleich Null in  $x$ . (Dieser existiert, da  $x \neq 0$ ) Da der Graph nach Voraussetzung keine isolierten Knoten besitzt, gibt es in  $(\Phi_w^-)$  keine Nullzeile und damit keine Nullspalte in  $(\Phi_w^-)^T$ . Es gibt also eine Zeile  $k$  in  $(\Phi_w^-)^T$ , so dass  $(\Phi_w^-)_{ki}^T \neq 0$ . Somit gilt für  $y_k = (\Phi_w^-)_{ki}^T x_i \neq 0$ , also  $y \neq 0$ . Folglich ist  $y = (\Phi_w^-)^T x, y \neq 0$  ein Eigenvektor von  $\mathbb{B}_w$  zum Eigenwert  $\lambda$ . Sei nun  $\lambda$  ein Eigenwert von  $\mathbb{B}_w$ . Unter Nutzung der Definitionen 3.1.10 und 3.1.11



$$\mathbb{A}_w = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \gamma_1 & & & \\ \beta_0 & \alpha_1 & \gamma_2 & & \\ & \beta_1 & \alpha_2 & \gamma_3 & \\ & & \beta_2 & \alpha_3 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (5.3.10)$$

Wir definieren nun Untervektorräume  $X_1, X_2, X_3$  von  $X$  wie folgt:

$$X_1 = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \mid x_i = 0 \text{ für } i \bmod 3 = 1, i \bmod 3 = 2\} \quad (5.3.11)$$

$$X_2 = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \mid x_i = 0 \text{ für } i \bmod 3 = 0, i \bmod 3 = 2\} \quad (5.3.12)$$

$$X_3 = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \mid x_i = 0 \text{ für } i \bmod 3 = 0, i \bmod 3 = 1\} \quad (5.3.13)$$

Es ist  $X = X_1 \oplus X_2 \oplus X_3$ . Diese repräsentieren den Proliferations-, Geburts- bzw. Sterbeprozess und damit den jeweils zugehörigen induzierten Teilgraphen. Die Adjazenzmatrix  $\mathbb{B}_w$  induziert jeweils  $X_j$ -invariante Operatoren  $\mathbb{B}_{w,j}, j \in \{1, 2, 3\}$  auf den  $X_j$ , indem die Zeilen und Spalten zu Null gesetzt werden, deren Index gleich dem Index ist, für den die Elemente der Vektoren in den Unterräumen  $X_j$  gleich Null sind. Wir identifizieren nun die Unterräume  $X_j$  mit Vektorräumen  $X_j^{red} \subset X$  mit

$$X_1^{red} = \{(x_k^{red})_{k \in \mathbb{N}_0} \mid x_k^{red} = x_i, i = 3k, k \in \mathbb{N}_0, (x_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \in X_1\} \quad (5.3.14)$$

$$X_2^{red} = \{(x_k^{red})_{k \in \mathbb{N}_0} \mid x_k^{red} = x_i, i = 3k + 1, k \in \mathbb{N}_0, (x_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \in X_2\} \quad (5.3.15)$$

$$X_3^{red} = \{(x_k^{red})_{k \in \mathbb{N}_0} \mid x_k^{red} = x_i, i = 3k + 2, k \in \mathbb{N}_0, (x_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \in X_3\}. \quad (5.3.16)$$

Wir streichen demnach die Nulleinträge der Folgen in  $X_i$ . Ähnlich verfahren wir mit den Operatoren  $\mathbb{B}_{w,j}$ . Wir streichen jeweils Nullzeilen und -spalten und identifizieren die  $\mathbb{B}_{w,j}$  mit den reduzierten Matrizen  $\mathbb{B}_{w,j}^{red}$ :

$$\mathbb{B}_{w,1}^{red} = \begin{pmatrix} -\alpha_0 & 0 & & & \\ 0 & -\alpha_1 & 0 & & \\ & 0 & -\alpha_2 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad \mathbb{B}_{w,2}^{red} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ \beta_0 & 0 & & & \\ 0 & \beta_1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{B}_{w,3}^{red} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 & & & \\ & 0 & \gamma_2 & & \\ & & 0 & \gamma_3 & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (5.3.17)$$

Die Operatoren  $\mathbb{B}_{w,1}^{red}$  und  $\mathbb{B}_{w,2}^{red}$ , welche den Proliferations- bzw. den Geburtsprozess charakterisieren, sind mit Proposition 4.1.15 nicht hyperzyklisch und damit nicht chaotisch auf  $X_1^{red}$  bzw.

$X_2^{red}$ . Der Operator  $\mathbb{B}_{w,3}^{red}$  ist der gewichtete Back-Shift auf  $X_3^{red}$  (Lemma 2.3.5), denn es gilt nach Voraussetzung  $\sup_{n \geq 1} \gamma_n < \infty$ . Diese Voraussetzung gewährleistet auch, dass  $(\mathbb{B}_{w,3}^{red})^n x \in X_3^{red}$ . Erfüllen die Sterberaten zusätzlich die Bedingungen aus Lemma 4.3.2, so ist der Back-Shift chaotisch. Betrachten wir also den induzierten Teilgraphen, der den Sterbeprozess darstellt und die zugehörige Adjazenzmatrix  $\mathbb{B}_{w,3}^{red}$  des Kantengraphen. Dann ist die dadurch definierte Transporthalbgruppe  $\{T(t) | t \geq 0\}$  mit

$$T(t)f(s) = (\mathbb{B}_{w,3}^{red})^n f(t + s - n) \quad (5.3.18)$$

mit Theorem 5.2.4 chaotisch auf  $X_3^{red} \subset X$ . Wir können also folgendes zusammenfassend festhalten.

**Proposition 5.3.6.** *Gegeben seien die in Abschnitt 5.1 vorgestellten diskreten Transportprozesse, wobei die Koeffizientenfolgen beschränkt seien, die Bedingungen für die Chaotizität der Prozesse erfüllen und die Sterberaten die Bedingungen von Lemma 4.3.2 erfüllen. Dann wird auf dem induzierten Teilgraphen, der den Sterbeprozess repräsentiert durch die zugehörige Adjazenzmatrix des Kantengraphen ein chaotischer, kontinuierlicher Transportprozess realisiert. Auf den induzierten Teilgraphen, die den Proliferations- bzw. Sterbeprozess repräsentieren, kann ein derartiger kontinuierlicher Prozess nicht hervorgerufen werden.*

Wir wollen zum Abschluss des Kapitels noch einen anderen Blickwinkel einnehmen und einen Zusammenhang zwischen kontinuierlichem und diskretem Transportprozess herstellen, indem wir sie als mikroskopisches bzw. makroskopisches Modell verstehen. Wir beziehen uns bei den folgenden Ausführungen auf Banasiak, Falkiewicz und Namayanja 2016. Die Aussagen gelten allerdings nur für endliche Graphen, Graphen also, auf denen eine Chaotizität der Transportprozesse nicht auftreten kann. Wir nehmen an, dass ein makroskopisches Modell eines Prozesses vorliegt, welches durch den diskreten Transportprozess dargestellt wird, z.B. die Änderung der Individuenanzahl in verschiedenen Subpopulationen (vgl. Abschnitt 3.3.1). Gehen wir nun davon aus, dass jede Subpopulation eine interne Dynamik besitzt und/oder der Einfluss, den die Subpopulationen aufeinander ausüben einer zusätzlichen Dynamik folgt, beschreiben wir diese als mikroskopisches Modell, als kontinuierlichen Transportprozess. Dieser läuft sehr viel schneller ab als der makroskopische Prozess. Wir bezeichnen die beiden Modelle als konsistent, wenn die Forderung erfüllt ist, dass die Lösungen der beiden Transportprozesse auf der makroskopischen Skala genügend gut übereinstimmen. Wir wollen nun zeigen, wie wir zu einem passenden Paar gelangen. Dafür sei ein diskreter Transportprozess wie in Abschnitt 3.3.1 gegeben, wobei die Adjazenzmatrix hier mit  $\mathbb{A}$  bezeichnet sei.

$$\frac{\partial}{\partial t} f = \mathbb{A}f, f(0) = \mathring{f} \quad (5.3.19)$$

Sei  $\bar{f}$  die Lösung des (ACP). Sei zusätzlich der folgende kontinuierliche Transportprozess gegeben.

$$\frac{\partial}{\partial t} u_\epsilon(x, t) = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial x} u_\epsilon(x, t), \quad x \in ]0, 1[ \times \mathbb{R}_+ \quad (5.3.20)$$

$$u_\epsilon(1, t) = (I + \epsilon \mathbb{A}) u_\epsilon(0, t), \quad t > 0 \quad (5.3.21)$$

$$u_\epsilon(x, 0) = \hat{u}(x), \quad x \in ]0, 1[ \quad (5.3.22)$$

Wir wollen uns hier beispielhaft auf den Fall  $\epsilon = 1$  beschränken. Sei  $\mathbb{B} := I + \epsilon \mathbb{A}$  und sei

$$f(t) = \left( \int_0^1 u_1(x, t) dx, \dots, \int_0^1 u_m(x, t) dx \right) \quad (5.3.23)$$

mit

$$f(0) = \left( \int_0^1 \hat{u}_1(x) dx, \dots, \int_0^1 \hat{u}_m(x) dx \right) \quad (5.3.24)$$

Angenommen, die Funktion  $u$  variiert nur gering entlang der Kanten, dann gilt  $u(x, t) \approx u(t) \approx f(t)$ . Wir integrieren Gleichung (5.3.20) über  $x$  und erhalten unter Beachtung der Adjazenzbedingungen

$$\frac{\partial}{\partial t} u_\epsilon(x, t) = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial x} u_\epsilon(x, t) \quad (5.3.25)$$

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} u_\epsilon(x, t) dx = u(1, t) - u(0, t) \quad (5.3.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t) = (\mathbb{B} - I) f(t) \quad (5.3.27)$$

$$= \mathbb{A} f(t) \quad (5.3.28)$$

Wir können somit folgendes festhalten. Für einen gegebenen kontinuierlichen Transportprozess auf einem Graphen mit Adjazenzmatrix  $\mathbb{B}$  des Kantengraphen, für den gilt, dass die Funktion  $u$  räumlich durch eine Konstante approximiert werden kann, ergibt sich die Lösung als Lösung eines diskreten Transportprozesses mit Adjazenzmatrix  $\mathbb{A}$ .

Üblicherweise wird davon ausgegangen, dass der kontinuierliche Prozess auf den Kanten sehr schnell abläuft, d.h.  $\epsilon$  sehr klein ist. Die Frage ist dann, inwieweit es einen diskreten Transportprozess gibt, dessen Lösungen die Lösungen des kontinuierlichen Prozesses geeignet approximieren. Wir definieren dafür die Projektion  $\mathcal{P}$  von  $u_\epsilon$  auf den hydrodynamischen Unterraum  $V$  (vgl. Banasiak, Falkiewicz und Namayanja 2016) wie folgt

$$\mathcal{P} u_\epsilon = \left( \int_0^1 u_{1,\epsilon}(x, t) dx, \dots, \int_0^1 u_{m,\epsilon}(x, t) dx \right) \quad (5.3.29)$$

Es gilt dann das folgende Theorem.

**Theorem 5.3.7.** *Zusammenhang der Lösungen kontinuierlicher und diskreter Transportprozesse (Banasiak, Falkiewicz und Namayanja 2016, Th. 4.2)*

Gegeben sei ein kontinuierliche Transportprozess (Gleichungen (5.3.20) - (5.3.22)) mit  $A := \partial_x$  und  $D(A) = \{u \in W_1^1([0,1], \mathbb{R}^m); u(1) = \mathbb{B}u(0)\}$ ,  $\mathbb{B} = I + \mathbb{A}$ . Für jedes  $T \in ]0, \infty[$  gibt es eine Konstante  $C$ , abhängig von  $T$  und  $\mathbb{A}$ , so dass für gegebene Anfangsbedingungen  $\dot{u} \in W_1^1([0,1], \mathbb{R}^m)$  und jedes  $\epsilon > 0$ , das genügend klein ist, für die Lösung  $u_\epsilon$  des kontinuierlichen Transportprozesses und die Lösung  $\bar{f}(t)$  des diskreten Transportprozesses auf  $[0, T]$  gilt

$$|\mathcal{P}u_\epsilon(t) - \bar{f}(t)| \leq \epsilon C(T, \mathbb{A}) \|\dot{u}\|_{W_1^1} \quad (5.3.30)$$

## Kapitel 6

# Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit werden chaotische Transportprozesse auf Netzwerken beschrieben und analysiert. In einem ersten Schritt stellen wir dafür wichtige Grundlagen aus den verschiedenen benötigten Teilgebieten der Mathematik zusammen. Dies betrifft zunächst die dynamischen Systeme. Wir stellen das abstrakte Cauchy-Problem vor und geben eine Einführung in die verwendeten Grundlagen der Theorie der Operatorhalbgruppen. Des Weiteren stellen wir die benötigten Begriffe und Zusammenhänge der Graphentheorie zusammen. Wir definieren Folgen und Funktionen auf den Knoten und Kanten von Graphen und sind damit in der Lage, diskrete und kontinuierliche Transportprozesse auf Netzwerken mathematisch als Differentialgleichungssysteme bzw. abstrakte Cauchy-Probleme zu formulieren und Aussagen zu Lösbarkeitsbedingungen zu treffen. Im Fall diskreter Transportprozesse ist die Adjazenzmatrix des Graphen der Erzeuger der stark stetigen Operatorhalbgruppe, die die Lösung des Prozesses beschreibt. Für kontinuierliche Transportprozesse ist der Differentialoperator der Erzeuger einer stark stetigen Operatorhalbgruppe, die von der Adjazenzmatrix des Kantengraphen abhängig ist. Des Weiteren diskutieren wir die Eigenschaft der Chaotizität, zunächst für lineare Operatoren auf Banach-Räumen und im Anschluss daran für Operatorhalbgruppen. Dabei beziehen wir uns insbesondere auf Resultate aus den Publikationen von Desch, Schappacher und Webb sowie Banasiak und Co-Autoren. Während die erstgenannten Autoren insbesondere Chaotizität auf Banach-Räumen und daraus gebildeten Produkträumen betrachten, untersuchen die Autoren um Banasiak vor allem Chaotizität auf Teilräumen von Banach-Räumen.

In einem zweiten Schritt verknüpfen wir die vorgestellten Inhalte der Teilgebiete und diskutieren die aus der Literatur bekannten Ergebnisse zur Chaotizität diskreter und kontinuierlicher Transportprozesse. Für die diskreten Transportprozesse sind das insbesondere die Resultate aus den zahlreichen Publikationen von Banasiak und Co-Autoren. Diskutiert werden hier verschiedene Bedingungen, die die Elemente der Adjazenzmatrix  $A_w$  des Graphen erfüllen

müssen, damit diese Erzeuger einer chaotischen stark stetigen Operatorhalbgruppe ist. Für die kontinuierlichen Transportprozesse bilden die Arbeiten von Dorn den Ausgangspunkt. Diese beschreiben die stark stetige Operatorhalbgruppe, die durch den Differentialoperator erzeugt wird, als Funktion der Adjazenzmatrix  $\mathbb{B}_w$  des Kantengraphen.

In einem dritten Schritt erweitern wir die von Dorn in Dorn 2008a vorgestellten Ergebnisse. Die kontinuierlichen Transportprozesse werden dort für den Bochner-Raum  $L^1([0, 1], l^1)$  und Adjazenzmatrizen  $\mathbb{B}_w$  des Kantengraphen diskutiert, deren Einträge durch die Bedingung  $\sum_{j:w_i \rightarrow e_j} w_{ij} = 1$  an die Gewichte  $w_{ij}$  beschränkt sind. Wir erweitern in Kapitel 3 die unter diesen Voraussetzungen getroffenen Aussagen auf allgemeine Bochner-Räume  $L^p([0, 1], Z)$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $Z$  ein Banach-Raum sowie allgemeine beschränkte Operatoren  $K$  anstelle der Adjazenzmatrix  $\mathbb{B}_w$  des Kantengraphen in den Theoremen 3.3.4 und 3.3.5.

Es folgt in einem vierten Schritt die Korrektur der Aussagen aus Namayanja 2018, wonach die Adjazenzmatrizen  $\mathbb{B}_w$  des Kantengraphen genau dann hyperzyklisch sind, wenn es die durch den Differentialoperator erzeugte Transporthalbgruppe ist. Wir zeigen in den Theoremen 5.2.1 - 5.2.3, dass die Hyperzyklizität der Adjazenzmatrix nicht ausreichend ist und die Eigenschaft der schwachen Mischung benötigt wird. Diese Aussagen zeigen wir dabei für allgemeine beschränkte Operatoren  $K$  anstelle der Adjazenzmatrix sowie allgemeine Bochner-Räume  $L^p([0, 1], Z)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , wobei  $Z$  ein Banach-Raum ist. Die Aussage in Namayanja 2018, dass von der Chaotizität der Adjazenzmatrix auf die Chaotizität der Transporthalbgruppe geschlossen werden kann, bleibt richtig, der Beweis ist jedoch anzupassen. Dies wird mit dem Beweis zu Theorem 5.2.4 getan, wobei wir auch hier die Aussage für allgemeine beschränkte Operatoren  $K$  anstelle der Adjazenzmatrix sowie allgemeine Bochner-Räume  $L^p([0, 1], Z)$  mit  $1 \leq p < \infty$ ,  $Z$  ein Banach-Raum, führen.

Hinsichtlich der Zusammenführung der Ergebnisse für diskrete und kontinuierliche Transportprozesse in einem fünften Schritt interessiert, unter welchen Bedingungen von der Chaotizität des einen Prozesses auf die Chaotizität des anderen Prozesses geschlossen werden kann. Auf Grundlage der Vorarbeiten sehen wir, dass dies eine Frage der Eigenschaften der beiden Adjazenzmatrizen  $\mathbb{A}_w$  und  $\mathbb{B}_w$  ist. Es ist bekannt, dass die Adjazenzmatrix  $\mathbb{A}$  eines Graphen genau dann ein beschränkter Operator auf  $l^p$ ,  $1 \leq p < \infty$  ist, wenn der Graph von beschränktem Grad ist. Wir formulieren eine derartige Aussage in Proposition 3.4.8 für gerichtete, gewichtete Graphen. Des Weiteren wissen wir, dass mit einem Graphen auch sein zugehöriger Kantengraph gleichmäßig lokal endlich ist. Damit ist die Adjazenzmatrix  $\mathbb{A}$  genau dann ein beschränkter Operator, wenn es die Adjazenzmatrix  $\mathbb{B}$  des Kantengraphen ist. Im Fall von gerichteten, ge-

wichteten Graphen gilt nur eine Richtung. Aus der gleichmäßigen lokalen Endlichkeit des Graphen folgt die des Kantengraphen (Proposition 5.3.3) und somit folgt aus der Beschränktheit der Adjazenzmatrix  $\mathbb{A}_w$  die der Adjazenzmatrix  $\mathbb{B}_w$  des Kantengraphen (Korollar 5.3.4). Wir schlussfolgern daher in 5.3.6, dass ein chaotischer kontinuierlicher Transportprozess auf einem Teilgraphen induziert werden kann, wenn die Voraussetzungen derart gewählt werden, dass der diskrete Transportprozess chaotisch ist und zusätzliche Bedingungen an eine Teilmenge der Elemente der Adjazenzmatrix  $\mathbb{A}_w$  gestellt werden.

Die Ergebnisse dieser Arbeit bieten Anknüpfungspunkte für weiterführende Analysen. Hier seien zunächst Untersuchungen zum Zusammenhang zwischen der Chaotizität des diskreten und des kontinuierlichen Transportprozesses genannt. Vielversprechend erscheint die gemeinsame Diskussion der Punktspektren der Adjazenzmatrizen  $\mathbb{A}_w$  und  $\mathbb{B}_w$ . Eine erste Aussage, unter welchen Voraussetzungen die Punktspektren gleich sind, ist Inhalt von Proposition 5.3.5. Ein weiteres großes Thema ist die Untersuchung der Chaotizität sowohl diskreter als auch kontinuierlicher Transportprozesse auf komplexeren Strukturen. Hier bieten sich zunächst Sternstrukturen an, die im Weiteren dann durch zusätzliche, die einzelnen Strahlen verbindende Kanten ergänzt werden. Mathematisch bedeutet die Untersuchung der Chaotizität auf diesen Strukturen die Anwendung der Chaotizitätstheoreme auf Produkträume. Ein erster Überblick zu diesem Themengebiet ist in dieser Arbeit enthalten.

# Literatur

- Agrawal, A. u. a. (2018). *Norms, Kernels and Eigenvalues of some Infinite Graphs*. arXiv: 1812.08276 [math.FA].
- Arendt, W. u. a. (2001). *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems*. Basel: Birkhäuser.
- Banasiak, J., A. Falkiewicz und P. Namayanja (2016). „Asymptotic state lumping in transport and diffusion problems on networks with applications to population problems“. In: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 26.2, S. 215–247.
- Banasiak, J. und M. Lachowicz (2001). „Chaos for a class of linear kinetic models“. In: *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics* 329.6, S. 439–444.
- Banasiak, J. und M. Lachowicz (2002). „Topological Chaos for Birth-and-Death-Type Models with Proliferation“. In: *Mathematical Models and methods in Applied Sciences* 12.6, S. 755–775.
- Banasiak, J., M. Lachowicz und M. Moszynski (2005). „Chaotic behaviour of semigroups related to the process of gene amplification-deamplification with cell proliferation“. In: *Mathematical Biosciences* 206.2, S. 200–215.
- Banasiak, J., M. Lachowicz und M. Moszynski (2006-10). „Semigroups for Generalized Birth-and-Death Equations in  $l_p$  Spaces“. In: *Semigroup Forum* 73.2, S. 175–193.
- Banasiak, J. und M. Moszynski (2005). „A generalization of Desch-Schappacher-Webb criteria for chaos“. In: *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 12.5, S. 959–972.
- Banasiak, J. und M. Moszynski (2008). „Hypercyclicity and Chaoticity spaces of  $C_0$  Semigroups“. In: *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 20.3, S. 577–587.
- Banasiak, J. und M. Moszynski (2011). „Dynamics of birth-and-death processes with proliferation - stability and chaos“. In: *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 29.1, S. 67–79.
- Banks, J. u. a. (1992). „On Devaney's definition of chaos“. In: *The American Mathematical Monthly* 99.4, S. 332–334.
- Bes, J. und A. Peris (1999). „Hereditarily hypercyclic operators“. In: *Journal of Functional Analysis* 167.1, S. 92–112.
- Bollobás, B. (1998). *Modern Graph Theory*. Springer.
- Bondy, J. A. und U. S. R. Murty (2008). *Graph Theory*. Springer.

- 
- Borwein, D. und A. Jakimovski (1979). „MATRIX OPERATORS ON  $l_p$ “. In: *The Rocky Mountain Journal of Mathematics* 9.3, S. 463–477.
- Conojero, J. A., V. Müller und A. Peris (2007). „Hypercyclic behaviour of operators in a hypercyclic  $C_0$ -semigroup“. In: *Journal of Functional Analysis* 244.1, S. 342–348.
- Desch, W. und W. Schappacher (2005). „On Products of Hypercyclic Semigroups“. In: *Semigroup Forum* 71, S. 301–311.
- Desch, W., W. Schappacher und G. F. Webb (1997). „Hypercyclic and chaotic semigroups of linear operators“. In: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 17.4, S. 793–819.
- Devaney, B. (1989). *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison Wesley P.C.
- Dorn, B. (2008a). „Flows in infinite networks - a semigroup approach“. Dissertation. Eberhard Karls Universität Tübingen.
- Dorn, B. (2008b). „Semigroups for flows in infinite networks“. In: *Semigroup Forum* 76, S. 341–356.
- Dorn, B., V. Keicher und E. Sikolya (2009). „Asymptotic periodicity of recurrent flows in infinite networks“. In: *Mathematische Zeitschrift* 263, S. 69–87.
- Engel, K.-J. und R. Nagel (2000). *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*. Springer-Verlag, New York.
- Gajewski, H., K. Gröger und K. Zacharias (1975). „Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen“. In: *Mathematische Lehrbücher und Monographien, II. Abteilung: Mathematische Monographien*. Bd. 38. Akademie-Verlag Berlin.
- Grosse-Erdmann, K.-G. und A. P. Manguillot (2011). *Linear Chaos*. Springer.
- Kramar, M. und E. Sikolya (2005). „Spectral properties and asymptotic periodicity of flows in networks“. In: *Mathematische Zeitschrift* 249, S. 139–162.
- Mourchid, S. E. (2005-07). „On hypercyclicity criteria for strongly continuous semigroups“. In: *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 13.2, S. 271–275.
- Mourchid, S. E. (2006-10). „The Imaginary Point Spectrum and Hypercyclicity“. In: *Semigroup Forum* 73.2, S. 313–316.
- Mugnolo, D. (2014). *Semigroup Methods for Evolution Equations on Networks*. Springer International Publishing.
- Mugnolo, D. (2018). „Dynamical systems associated with adjacency matrices“. In: *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B* 23.5, S. 1945–1973.
- Namayanja, P. (2018). „Chaotic Dynamics in a Transport Equation on a Network“. In: *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B* 23.8, S. 3415–3426.
- Rudin, W. (1991). *Functional analysis*. 2. ed. McGraw-Hill.
- Williams, J. J. und Q. Ye (2013). „Infinite matrices bounded on weighted  $l_1$  spaces“. In: *Linear Algebra and its Applications* 438.12, S. 4689–4700.
-

# Selbstständigkeitserklärung

Name: Angelika Hirrle  
Matrikel-Nr.: 7360541  
Fach: Mathematik  
Modul: Diplomarbeit (Diplom II)  
Thema: Chaotische Transportprozesse auf Netzwerken

Ich erkläre, dass ich die Diplomarbeit selbstständig und ohne unzulässige Inanspruchnahme Dritter verfasst habe. Ich habe dabei nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet und die aus diesen wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht. Die Versicherung selbstständiger Arbeit gilt auch für die enthaltenen Zeichnungen, Skizzen oder graphischen Darstellungen. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form weder derselben noch einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht. Mit der Abgabe der elektronischen Fassung der endgültigen Version der Arbeit nehme ich zur Kenntnis, dass diese mit Hilfe eines Plagiatserkennungsdienstes auf enthaltene Plagiate geprüft werden kann und ausschließlich für Prüfungszwecke gespeichert wird.

Datum:

Unterschrift: