Relevanz von Information in konditionalen Entscheidungsmodellen

Elmar Reucher und Wilhelm Rödder

Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre,
insb. Operations Research
FernUniversität in Hagen

elmar.reucher@fernuni-hagen.de
wilhelm.roedder@fernuni-hagen.de

Zusammenfassung Die Lösung von Entscheidungsproblemen unter unvollständiger Information ist aufgrund der praktischen Relevanz ein in der Literatur oft diskutierter Forschungsgegenstand. Dem Informationsbeschaffungsprozeß, der den Handlungsentscheidungen zeitlich vorgelagert ist, kommt dabei eine äußerst wichtige Bedeutung zu. Ziel ist es hierbei, unvollständiges Wissen durch Zusatzinformation weiter zu verdichten, um somit Entscheidungssituationen verbessern zu können. Aufgrund zeitlicher und finanzieller Restriktionen ist man dabei jedoch gezwungen, eine effiziente Auswahl aus einer Menge verfügbarer Informationsangebote zu treffen. Basierend auf der entropieoptimalen Verarbeitung unvollständigen Wissens wird in diesem Beitrag ein Bewertungskriterium für alternative Informationsangebote mit dem Ziel der Reduktion verbleibender Ungewißheit hinsichtlich des Erwartungsnutzens vorgestellt. Anhand eines abschließenden Beispiels, das unter Anwendung der Expertensystem-Shell SPIRIT verarbeitet wird, findet das entwickelte Bewertungskonzept seine praktische Anwendung.

1 Einleitung

In der Realität sind Entscheidungen unter Unsicherheit zu treffen, die gemeinhin durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung repräsentiert wird; in ihr sind alle bekannten Informationen über eine Wissensdomäne abgelegt. Bei vollständigem Informationsstand ist die Verteilung eindeutig bestimmt, womit insbesondere auch der Erwartungsnutzen festgelegt ist. Dabei handelt es sich um ein Entscheidungsproblem unter Risiko, das unter Anwendung des Bernoulli-Prinzips gelöst werden kann [6]. Diese Situation ist aber realitätsfremd, da der Entscheidungsträger im allgemeinen nur einen unvollständigen Informationsstand über eine Domäne besitzt. In diesem Fall existiert eine Familie überabzählbar vieler zulässiger Verteilungen; es liegt ein Entscheidungsproblem unter partieller Information vor [4]. Insbesondere ist noch ungewiß, welcher der für jede Verteilung berechenbare Erwartungsnutzen der richtige ist, da sich die Menge aller Wahrscheinlichkeitsverteilungen nach dem Erwerb zusätzlicher Information noch verändern kann. Im Zuge eines Informationsbeschaffungsprozesses wird man natürlich daran interessiert sein, diese

Ungewißheit durch weitere Information soweit zu reduzieren, bis Informationsvollständigkeit besteht. Aufgrund zeitlicher und finanzieller Restriktionen kann dieses Ziel aber ohne Verwendung einer effizienten Methode zur Informationsbeschaffung und -bewertung kaum erreicht werden [8]. Ob nun weitere Information *relevant* bezüglich der Entscheidungssituation ist, hängt dabei von dem schon bekannten Wissen ab. Die Relevanz von Information wird dahingehend gemessen, ob und wie stark durch ihren Erwerb die verbleibende Ungewißheit in Bezug auf den Erwartungsnutzen reduziert wird. Da die Beschaffung von Information zumeist mit (monetären) Kosten verbunden ist, ist schließlich durch einen Kosten-Nutzen-Vergleich zu entscheiden, ob die Beschaffung weiterer Information ökonomisch sinnvoll ist oder nicht.

2 Mathematische Grundlagen

2.1 Probabilistische Konditionale

Auf einer Menge $\mathcal{V} = \{V_1, ..., V_n\}$, wobei jede Variable V_i eine endliche Anzahl diskreter Ausprägungen v_i besitzt, sei eine Verteilung P definiert. p bezeichne dabei die Wahrscheinlichkeitsfunktion mit $P(\mathcal{V} = \mathbf{v}) = p(\mathbf{v})$ für alle Vollkonjunkte $\mathbf{v} = v_1, ..., v_n$. Faßt man die Variablenrealisationen v_i als Literale auf, so läßt sich eine Sprache $\mathcal{L}$ bestehend aus syntaktischen Ausdrücken formulieren, indem die Literale durch Disjunktion $\vee$, Negation $\neg$ und Konjunktion $\wedge$ miteinander verknüpft werden. Solche aussagelogischen Formeln werden als Fakten bezeichnet und die Elemente aus $\mathcal{L}$ werden im folgenden durch Großbuchstaben $A, B, C, ...$ symbolisiert. Regeln sind nun Ausdrücke der Form $B|A(v)$, wobei das Konditional entsprechend der dreiwertigen Logik von CALABRESE wohldefiniert ist. Zu lesen ist dieser Ausdruck dabei in der Form *Wenn A dann B*. $B|A(v)$ ist wahr, falls die Realisation BA unter v wahr, falsch, für $\overline{B}A$ unter v wahr und nicht definiert für $\overline{B}$ unter v [1]. Bei dem im folgenden vorgestellten Bewertungsansatz werden Sachverhalte über Variablenabhängigkeiten in Form probabilistischer Konditionale formuliert.

2.2 Informationstreue Wissensverarbeitung

Sachverhalte in Form einer Regelmenge $\mathcal{R} = \{B_i|A_i\ [x_i]\ i = 1, ..., I\}$ werden in diesem Beitrag entropieoptimal durch Lösen der Aufgabe

$$P^* = \arg\min R(Q, P^0) = \arg\min \sum_{\mathbf{v}} q(\mathbf{v}) \cdot \log(\frac{q(\mathbf{v})}{p^0(\mathbf{v})}) \qquad (1)$$

$$\text{u. d. N.:} \qquad (1 - x_i) \cdot Q(B_i A_i) - x_i \cdot Q(\overline{B}_i A_i) = 0 \ \forall i = 1, ..., I$$

zu Wissen verarbeitet; P^0 bezeichnet dabei die Gleichverteilung [11]. Das in (1) formulierte Prinzip der *Minimierung Relativer Entropie* haben verschiedene Autoren unabhängig voneinander axiomatisch fundiert; es garantiert eine informationstreue Wissensverarbeitung [3], [12]. Die auf diese Weise erzeugte Verteilung P^* ist gerade jene unter allen Verteilungen $Q \in \mathcal{P}$, in der alle in $\mathcal{R}$ explizit formulierten Abhängigkeiten repräsentiert sind - und keine weiteren. Gelöst wird die Aufgabe (1) mit einem verallgemeinerten *Iterative Proprotional Scaling* IPS-Verfahren, dessen Konvergenz von Csiszàr bewiesen wurde [2], [11].

3 Informationsbewertung in konditionalen Entscheidungsmodellen

3.1 Problembeschreibung

Im Rahmen einer konditionalen Umgebung lassen sich beliebige Entscheidungsmodelle abbilden und die Abhängigkeiten der Variablen untereinander mit dem entropieoptimalen Ansatz (1) informationstreu verarbeiten [10]. Als Grundlage der weiteren Ausführungen wird ein Entscheidungsmodell betrachtet, dessen Variablenmenge $\mathcal{V}$ aus einer Aktionsvariablen A mit Ausprägungen a, einer endlichen Menge von Zustandsvariablen $\{Z_1, ..., Z_n\}$ mit jeweils endlichen Ausprägungen z_i und einer Nutzenvariablen U mit einer endlichen Anzahl von reellwertigen Nutzenausprägungen u besteht. Eine Konfiguration auf dem Gesamtraum der Dimension $|A| \cdot |Z_1| \cdot .... \cdot |Z_n| \cdot |U|$ ist dann durch $\dot{\mathbf{v}} = \dot{a}, \dot{z}_1, ..., \dot{z}_n, \dot{u}$ mit $u(\dot{\mathbf{z}}, \dot{a}) = \dot{u}$ gegeben.
Es sei partielles Wissen in Form einer Regelmenge $\mathcal{R}$ über die Domäne gegeben, das nach Lösung der Aufgabe (1) durch die entropieoptimale Verteilung P^* repräsentiert wird. Das in P^* vorhandene Wissen soll nun weiter ergänzt werden. Dazu steht eine endliche Menge alternativer Informationspakete $\{\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_K\}$ zur Verfügung, wobei ein Informationspaket $\mathcal{I}_k$ aus einer endlichen Menge von probabilistischen Konditionalen $\mathcal{I}_k = \{B_{ik}|A_{ik}\ [x_{ik}],\ i = 1, ..., I_k\}$ besteht, die sowohl untereinander als auch mit dem a-priori Wissen $\mathcal{R}$ konsistent sind.

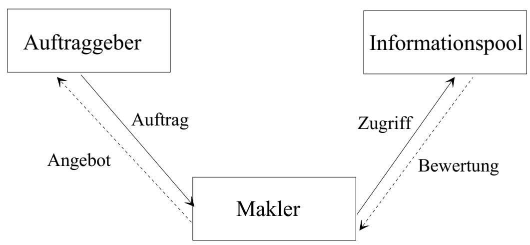

Abbildung1. Modell für einen Informationsmarkt.

Man betrachte das Informationsbeschaffungsmodell aus Abbildung 1. Ein Auftraggeber (Entscheider) ist an der Beschaffung neuer Information zwecks

Verbesserung seiner momentanen Entscheidungssituation interessiert. Er beauftragt einen Makler, der Zugriff auf eine Menge verschiedener Informationspakete hat, die in einem Informationspool zusammengefaßt sind. Der Auftraggeber stellt dem Makler sein a-priori Wissen $\mathcal{R}$ zur Verfügung. Der Makler bewertet daraufhin die verfügbaren Pakete und nennt dem Auftraggeber Preise, zu dem die einzelnen Pakete erworben werden können. Jedes Informationspaket $\mathcal{I}_k$ wird durch Lösung der Aufgabe

$$P_k^* = arg \min_{\mathcal{I}_k \cup \mathcal{R} \models Q} R(Q, P^0) \tag{2}$$

entropieoptimal verarbeitet, womit sich ein Erwartungsnutzen für eine Aktion $A = a$ von

$$eu_k(a) = \sum_{\mathbf{z}} p_k^*(\mathbf{z}) \cdot u(a, \mathbf{z}) \tag{3}$$

ergibt. Der Wert in (3) kann aber im Zuge weiterer Informationsbeschaffungen noch variieren; er ist noch ungewiß.

3.2 Relevanz von Information

Die noch verbleibende Ungewißheit bezüglich des Erwartungsnutzens wird durch ein Intervall repräsentiert, das, abgesehen von der enormen Größe des dabei zu lösenden Optimierungsproblems bei einem hochdimensionalen Zustandsraum, durch Lösung der Aufgaben

$$eu_k^-(a) = \min_{\mathcal{R} \cup \mathcal{I}_k \models P_k} \sum_{\mathbf{z}} p_k(\mathbf{z}) \cdot u(a, \mathbf{z}) \tag{4}$$

$$eu_k^+(a) = \max_{\mathcal{R} \cup \mathcal{I}_k \models P_k} \sum_{\mathbf{z}} p_k(\mathbf{z}) \cdot u(a, \mathbf{z}) \tag{5}$$

prinzipiell mittels kommerziell verfügbarer Software bestimmt werden kann [7]. $\Delta eu_k(a) := [eu_k^-(a); eu_k^+(a)]$ ist dann das Erwartungsnutzen-Ungewißheitsintervall zum Informationspaket $\mathcal{I}_k$ für eine Aktion $A = a$. Dieses Intervall gibt somit, ausgehend von dem Wissen $\mathcal{R} \cup \mathcal{I}_k$, die im Zuge noch weiterer Informationsbeschaffungen möglichen Erwartungsnutzen an, von denen jeder letzendlich der unter vollständiger Information "wahre" sein kann; insbesondere auch der minimale Erwartungsnutzen $eu_k^-(a)$. Das Informationsentscheidungsproblem läßt sich nun folgendermaßen formulieren:
Aus einer Menge von Informationspaketen ist dasjenige zu bestimmen, welches die noch verbleibende Ungewißheit bezüglich des Erwartungsnutzens am stärksten reduziert.
Die Bewertung der Informationspakete mittels des minimalen Erwartungsnutzens erscheint nach folgender Überlegung gerechtfertigt. Der Wert einer Information ergibt sich aus der Differenz der Erwartungsnutzen, die aus der besten Aktion *vor* und *nach* der Informationsbeschaffung resultieren [6].

Durch die Hinzunahme zusätzlicher Information wird schon vorhandenes Wissen weiter verdichtet, der Informationswert kann nicht daher nicht negativ sein. Aus dem Nutzenungewißheitsintervall ist aber $eu_k^-(a)$ der einzige Wert, der im Zuge weiterer Informationsbeschaffungen auf keinen Fall mehr unterschritten wird, so daß der Wert eines Informationspakets $W(\mathcal{I}_k)$ durch

$$W(\mathcal{I}_k) := \max_a eu_k^-(a) - \max_a eu^-(a) \geq 0 \qquad (6)$$

definiert werden kann. $eu^-(a)$ bezeichnet dabei den minimalen Erwartungsnutzen bei Aktion $A = a$ *vor* der Informationsbeschaffung. Diese Überlegungen führen schließlich zur Definition der Relevanz von Information in konditionalen Entscheidungsmodellen.

Ein Informationspaket $\mathcal{I}_k$ heißt <u>relevant</u>, wenn sein Wert $W(\mathcal{I}_k)$ aus (6) echt positiv ist.

Aus der Menge relevanter Informationsangebote läßt sich schließlich das optimale Paket bestimmen [6], [8], [9]. Bezeichnen $K(\mathcal{I}_k)$ die Kosten für den Erwerb des Informationspaketes $\mathcal{I}_k$, so ist dasjenige $\mathcal{I}_{opt}$ optimal, für das gilt:

$$\mathcal{I}_{opt} = \arg\max_k (W(\mathcal{I}_k) - K(\mathcal{I}_k)). \qquad (7)$$

Im folgenden wird ein Verfahren vorgestellt, mit dem die Aufgaben (4) und (5) und somit die Beurteilung über die Relevanz von Information auch mit einem entropieoptimalen Ansatz in der Expertensystem-Shell SPIRIT gelöst werden können. Dem Benutzer steht damit eine systemimmanente Methode zur Auslotung der verbleibenden Nutzenungewißheit unter einem aktuellen Informationsstand zur Verfügung.

4 Ein Näherungsverfahren zur Messung der Relevanz von Information

Gegeben sei schon vorhandenes Wissen $\mathcal{R}$ in Form probabilistischer Abhängigkeiten über Zustandsvariable eines Entscheidungsmodells und eine Menge alternativer Informationsangebote $\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_K$, um die $\mathcal{R}$ ergänzt werden kann. Es bezeichne $u_{min}(a) = min_{\mathbf{z}} u(a, \mathbf{z})$ den minimal realisierbaren Nutzen bei einer Aktion $A = a$.

1. Schritt: Man bestimme die entropieoptimale Verteilung mit einem Erwartungswert $u_{min}(a) + \epsilon$ zum Niveau $\epsilon > 0$ durch Lösen der Aufgabe:

$$\begin{aligned} \overline{P}^0_{u_{min},\epsilon} &= \arg\min R(Q, P^0) \qquad (8)\\ \text{u. d. N.}: \quad & \sum_{\mathbf{z}} q(\mathbf{z}) \cdot u(a, \mathbf{z}) = u_{min}(a) + \epsilon. \end{aligned}$$

Da die lineare Restriktion eine andere Form als die der Konditionale in (1) hat, bedarf es zur Lösung von (8) anderer Verfahren. Hier wird das Newton-Verfahren genommen [13].

2. Schritt: Man adaptiere das in 1. erzeugte a-priori Wissen an $\mathcal{I}_k$.

$$P^{k,0}_{u_{min},\epsilon} = \arg \min_{\mathcal{I}_k \cup \mathcal{R} \models Q} R(Q, \overline{P}^{0}_{u_{min},\epsilon}).$$

In der Verteilung $P^{k,0}_{u_{min},\epsilon}$ wird der minimale Erwartungswert zum Niveau ϵ im informationstheoretischen Sinne soweit wie möglich beibehalten, wie es das Wissen aus $\mathcal{R} \cup \mathcal{I}_k$ zuläßt. Ein erste Näherung für den minimalen Erwartungsnutzen unter der Information $\mathcal{R} \cup \mathcal{I}_k$ ist dann durch

$$eu^{-}_{k,\epsilon}(a) = \sum_{\mathbf{z}} p^{k,0}_{u_{min},\epsilon}(\mathbf{z}) \cdot u(a, \mathbf{z})$$

gegeben. Ob er noch weiter reduziert werden kann, wird mit den beiden folgenden Schritten überprüft.

3. Schritt: Lösen der Aufgabe

$$\begin{aligned} \overline{P}^{k,1}_{u_{min},\epsilon} &= \arg\min R(Q, P^{k,0}_{u_{min},\epsilon}) \\ \text{u. d. N.}: \quad & \sum_{\mathbf{z}} q(\mathbf{z}) \cdot u(a, \mathbf{z}) = u_{min}(a) + \epsilon. \end{aligned}$$

4. Schritt: Lösen der Aufgabe

$$P^{k,1}_{u_{min},\epsilon} = \arg \min_{\mathcal{I}_k \cup \mathcal{R} \models Q} R(Q, \overline{P}^{1}_{u_{min},\epsilon}).$$

5. Schritt: Überprüfung, ob die erzeugten Verteilungen in Schritt 2 und 4 noch voneinander differieren.
Gilt

$$\begin{aligned} R(P^{k,1}_{u_{min},\epsilon}, P^{k,0}_{u_{min},\epsilon}) = 0: &\ \text{Abbruch des Verfahrens.} \\ R(P^{k,1}_{u_{min},\epsilon}, P^{k,0}_{u_{min},\epsilon}) > 0: &\ \text{Man setze } P^{k,1}_{u_{min},\epsilon} = P^{k,0}_{u_{min},\epsilon} \ \text{ und gehe zu 3.} \end{aligned}$$

Entsprechend kann auch die Obergrenze des Erwartungsnutzen-Ungewißheitsintervall berechnet werden, wobei dann die Restriktion in Schritt 1 durch $u_{max} - \epsilon$, den maximalen Erwartungsnutzen zum Niveau ϵ, ersetzt wird. Das Ergebnis ist dann ein Erwartungsnutzen-Ungewißheitsintervall zum Niveau ϵ: $\Delta eu_{k,\epsilon}(a) = [eu^{-}_{k,\epsilon}(a); eu^{+}_{k,\epsilon}(a)]$ bezüglich der Aktion $A = a$ und dem Informationspaket $\mathcal{I}_k$.

5 Ein Beispiel

Anhand des folgenden Beispiels sollen die theoretischen Aussagen näher illustriert werden. Dabei wurden Teile des Modells aus einem unveröffentlichten

Arbeitspapier entnommen [5]. Eine Unternehmung steht vor einer Investitionsentscheidung im kommenden Jahr. Es stehen zwei alternative Projekte $P1$ und $P2$ zur Verfügung, die je nach Projektverlauf mit den Gewinnen in [Tausend Geldeinheiten], kurz [TGE], in der Entscheidungsmatrix in Tabelle 1 bewertet werden; a_i bezeichnet dabei die Aktion *Investition in Projekt Pi*. Die

Tabelle1. Entscheidungsmatrix.

	Projektverlauf PV		
Aktion	*gut*	*mittel*	*schlecht*
a_1	780	300	-550
a_2	420	270	-180

Unternehmung besitzt das a-priori Wissen $\mathcal{R} = \{PV = g \vee PV = m\ [0.7]\}$. Der Algorithmus wird zur Berechnung der minimalen Gewinnerwartung bei Aktion a_1 mit $u_{min}(a_1) = -550$ gestartet, das Ergebnis ist $eu^-(a_1) = 45$ [TGE]. Entsprechend erhält man die übrigen Werte aus Tabelle 2 [1]. Unter dem Wissen aus $\mathcal{R}$ ist dann a_2 mit einer minimalen Gewinnerwartung von 135 [TGE] optimal. Zur Reduktion der noch verbleibenden Ungewißheit bezüglich der Erwartungswerte beauftragt die Unternehmung einen Makler, der von zwei unabhängigen Experten *E1*, *E2* entsprechend ihrer Verlaufsprognosen das Zusatzwissen in Form von Informationspaketen erhält:

Tabelle2. Erwartungsnutzen-Ungewißheit, Wert von Information [TGE].

$\mathcal{R}$	$eu^-(a_1) = 45;\ eu^+(a_1) = 381$	$eu^-(a_2) = 135;\ eu^+(a_2) = 240$	
$\mathcal{I}_1$	$eu^-(a_1) = 45;\ eu^+(a_1) = 381$	$eu^-(a_2) = 135;\ eu^+(a_2) = 240$	$W(\mathcal{I}_1) = 0$
$\mathcal{I}_2$	$eu^-(a_1) = 253;\ eu^+(a_1) = 353$	$eu^-(a_2) = 200;\ eu^+(a_2) = 232$	$W(\mathcal{I}_2) = 118$

$\mathcal{I}_1 = \{PV = g|E1 = g\ [0.95], PV = m|E1 = m\ [0.85], PV = s|E1 = s\ [0.99]\}$,
$\mathcal{I}_2 = \{PV = g|E2 = g \vee E2 = m\ [0.65], PV = s|E2 = m \vee E2 = s\ [0.90]\}$.
Aus den Werten in der Tabelle 2 erkennt man, daß das Informationspaket $\mathcal{I}_1$ in Ergänzung zu dem schon bekannten Wissen aus $\mathcal{R}$ mit einem Wert von $W(\mathcal{I}_1) = 0$ nicht relevant ist, wohingegen das Wissen des Experten $E2$ aus Paket $\mathcal{I}_2$ einen positiven Wert von $W(\mathcal{I}_2) = 253 - 135 = 118$ [TGE] besitzt und daher sehr relevant ist. Aus ökonomischer Sicht sollte es von der Unternehmung erworben werden, solange die Kosten für den Informationserwerb unterhalb dieses Wertes liegen. Es ist dann Aktion a_1 optimal mit einer minimalen Gewinnerwartung von 253 [TGE].

[1] Die Werte wurden mit dem Algorithmus für $\epsilon = 10^{-3}$ berechnet und gerundet.

6 Fazit und Ausblick

In dem vorliegenden Beitrag wurde auf der Grundlage eines informationstreuen Wissensverarbeitungsprozesses die Relevanz zusätzlicher Information in Form probabilistischer Konditionale unter ökonomischen Aspekten gemessen. Durch die Orientierung an dem minimalen Erwartungsnutzen wurde die Philosophie der vorsichtigen Vorwegnahme zukünftiger Informationsentwicklungen verfolgt. Die Berechnungen der Erwartungsnutzen-Ungewißheitsintervalle sind mit einem Näherungsverfahren unter Verwendung der Expertensystem-Shell SPIRIT durchführbar, womit die Grundlagen weiterer Forschungsaktivitäten auf dem Gebiet der Benutzerunterstützung bei einer effizienten Informationsbeschaffung mit der Shell geschaffen sind.

Literatur

1. Calabrese, P. M. (1991) Deduction and Inference Using Conditional Logic and Probability, Conditional Logic in Expert Systems. I. R. Goodman, M. M. Gupta, H. T. Nguyen, G. S. Rogers (editors), Elsevier Science Publishers B. V.
2. Csiszàr, I. (1975) I-divergence Geometry of Probability Distributions and Minimization Problems. The Annals of Probability, Vol.**3**.
3. Kern-Isberner, G. (1998) Characterizing the principle of minimum cross-entropy within a conditional-logical framework. Artificial Intelligence, Vol. **98**, 169-208.
4. Kofler, E., Menges, G. (1976) Entscheidungen bei unvollständiger Information. Springer, Berlin.
5. Kopittke, B. (1997) Investititonsentscheidung mit stochastsicher dynamischer Programmierung. Interner Arbeitsbericht des Lehrstuhls für Operations Research, FernUniversität in Hagen.
6. Laux, H. (1998) Entscheidungstheorie. Springer, Berlin, Heidelberg.
7. Lingo (2000) Optimization Modelling with LINGO. Lindo Systems Inc. http://www.lindo.com.
8. Mag, W. (1977) Entscheidung und Information. Vahlen, München.
9. Müller, A. (1992) Informationsbeschaffung in Entscheidungssituationen. Wissenschaft und Praxis, Ludwigsburg, Berlin.
10. Reucher, R., Rödder, W. (2000) Modellierung von Entscheidungsproblemen unter Verwendung probabilistischer Konditionale. OR Proceedings, SOR2000 in Dresden, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 254–259.
11. Rödder, W., Meyer, C.-H. (1996) Coherent knowledge processing at maximum entropy by SPIRIT. Proceedings 12^{th} Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence, Morgan Kaufmann, San Francisco, 470–476.
12. Shore, J.-E., Johnson R.-W. (1980) Axiomatic Derivation of the Principle of Maximum Entropy and the Principle of Minimum Cross-Entropy, IEEE Transact Inf Theory IT-**26**(1): 26–37.
13. Xu, L. (2001) Interner Arbeitsbericht des Lehrstuhl für Operations Research, FernUniversität in Hagen.