6 Punkte **Aufgabe 1.**

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} (k^3 - k) = \frac{1}{4}(n+2)(n+1)n(n-1)$$

5 Punkte **Aufgabe 2.**

In einer Gruppe von 50 Studenten gibt es genau 20 Studenten, die keines der Spiele Skat, Schach bzw. Fussball spielen. Genau 15 Studenten spielen Schach, genau 12 Skat, genau 5 Schach und Fussball, genau 6 Schach und Skat, genau 3 Fussball und Skat und genau 2 der Studenten spielen alle drei Spiele. Gibt es ein eindeutiges beliebtestes bzw. eindeutiges unbeliebtestes Spiel unter diesen drei Spielen (bezogen auf diese Personengruppe)?

7 Punkte **Aufgabe 3.**

Seien $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ Abbildungen mit

$$\begin{aligned} f(n) &:= n^2 \\ g(n) &:= n^4 - 80 \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, dass $f = O(g)$.

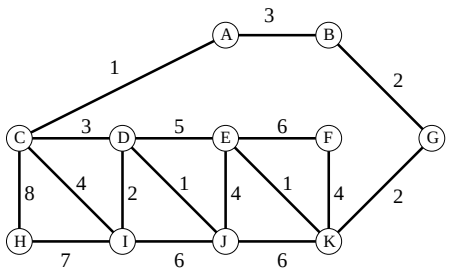
5 Punkte **Aufgabe 4.**

Zeigen oder widerlegen Sie: $(7,6,5,4,3,2,1,1,1)$ ist Valenzsequenz eines Graphen.

Geben Sie ggf. einen solchen Graphen an.

Aufgabe 5.

Gegeben sei folgender Graph mit Kantengewichten (wobei die Kantengewichte nur für (c) eine Rolle spielen, bei (a) und (b) sind sie zu ignorieren):



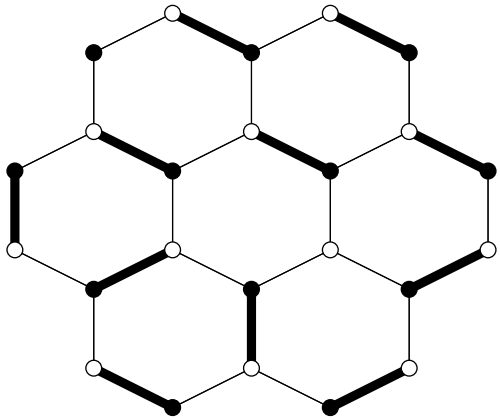
4 Punkte (a) Zeigen oder widerlegen Sie: Der Graph ist eulersch.
Geben Sie ggf. eine Eulertour an.

4 Punkte (b) Zeigen oder widerlegen Sie: Der Graph besitzt einen vollständigen Graphen K_4 als Minor.

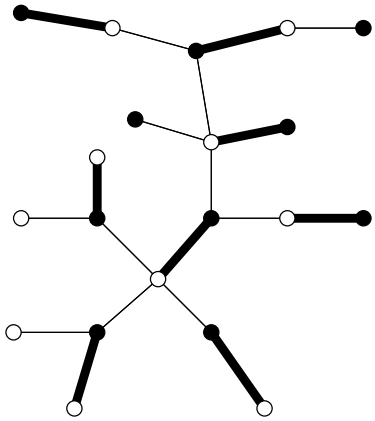
4 Punkte (c) Bestimmen Sie einen minimalen aufspannenden Baum in dem Graphen bezüglich der angegebenen Kantengewichte.

Aufgabe 6.

8 Punkte Zeigen oder widerlegen Sie: Das in (a) bzw. (b) abgebildete Matching (fette Kanten) ist maximal in dem jeweils abgebildeten bipartiten Graphen.



(a)



(b)

4 Punkte **Aufgabe 7.**

Schreiben Sie die Dezimalzahl 17,25 ins Dreiersystem (in Kommaschreibweise) um.

Aufgabe 8.

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

6 Punkte (a) Bestimmen Sie eine LU-Zerlegung und die Cholesky-Faktorisierung von A.

5 Punkte (b) Berechnen Sie die Inverse A^{-1}.

3 Punkte (c) Berechnen Sie $\|A\|_1$, $\|A^{-1}\|_1$ sowie $\operatorname{cond}_1(A)$.

9 Punkte **Aufgabe 9.**

Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lrcl} \min & 2y^2 + xy - 2xz - 2yz + 3x & & \\ \text{unter} & x - y + 2z & = & 1 \end{array}$$

6 Punkte **Aufgabe 10.**

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \frac{1}{2}x^2 + 2xy + \frac{5}{2}y^2 - x.$$

Führen Sie, ausgehend von $(0,0)^\top$, eine Iteration des Newtonverfahrens zur Bestimmung eines stationären Punktes von f durch.

7 Punkte **Aufgabe 11.**

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine konvexe Menge, die die Punkte $(0,0)^\top$, $(0,1)^\top$, $(1,0)^\top$ und $(1,1)^\top$ enthält. Zeigen Sie, dass für alle $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ gilt: $(x,y)^\top \in D$.

7 Punkte **Aufgabe 12.**

Lösen Sie das folgende lineare Optimierungsproblem (graphisch oder mit dem Simplexalgorithmus):

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & 3x & - & y & & \\ \text{unter} & x & + & y & \geq & 1 \\ & 2x & + & y & \leq & 4 \\ & & & y & \leq & 3 \\ & & & x,y & \geq & 0 \end{array}$$