Lösungsskizzen zu den Klausuraufgaben zum Kurs 1142 Algorithmische Mathematik

1142KWL12

Aufgabe 1.

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n}(k^3-k) = \frac{1}{4}(n+2)(n+1)n(n-1)$$

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen die Behauptung per Induktion über n. Für $n=0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n}(k^3-k) = \sum_{k=0}^{0}(k^3-k) = 0^3-0 = 0 = \frac{1}{4}\cdot(0+2)\cdot(0+1)\cdot 0\cdot(0-1) = \frac{1}{4}(n+2)(n+1)n(n-1),$$

d.h. für $n=0$ ist die Behauptung richtig.

Sei nun $n>0$ und die Behauptung bereits für $n-1$ gezeigt, d.h. es gelte

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k^3-k) = \frac{1}{4}(n+1)n(n-1)(n-2). \tag{1}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(k^3-k) &= \sum_{k=0}^{n-1}(k^3-k)+(n^3-n)\\
&\overset{(1)}{=} \frac{1}{4}(n+1)n(n-1)(n-2)+(n^3-n)\\
&= \frac{1}{4}(n+1)n(n-1)(n-2)+n(n^2-1)\\
&= \frac{1}{4}(n+1)n(n-1)(n-2)+n(n+1)(n-1)\\
&= \frac{1}{4}(n+1)n(n-1)(n-2)+\frac{1}{4}\cdot 4(n+1)n(n-1)\\
&= \frac{1}{4}(n+1)n(n-1)(n-2+4)\\
&= \frac{1}{4}(n+2)(n+1)n(n-1),
\end{aligned}$$

d.h. die Behauptung gilt auch für n.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt nun, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 2.

In einer Gruppe von 50 Studenten gibt es genau 20 Studenten, die keines der Spiele Skat, Schach bzw. Fussball spielen. Genau 15 Studenten spielen Schach, genau 12 Skat, genau 5 Schach und Fussball, genau 6 Schach und Skat, genau 3 Fussball und Skat und genau 2 der Studenten spielen alle drei Spiele. Gibt es ein eindeutiges beliebtestes bzw. eindeutiges unbeliebtestes Spiel unter diesen drei Spielen (bezogen auf diese Personengruppe)?

Lösungsvorschlag:
Bezeichne X die Menge aller Studenten, A_1 die Menge der Studenten, die Skat spielen, A_2 die Menge der Studenten, die Schach spielen und A_3 die Menge der Studenten, die Fussball spielen. Ferner sei N die Menge der Studenten, die keines der Spiele spielen.
Die Aufgabenstellung besagt

$$\begin{aligned}
|X| &= 50 \\
|N| &= 20 \\
|A_1| &= 12 \\
|A_2| &= 15 \\
|A_1 \cap A_2| &= 6 \\
|A_1 \cap A_3| &= 3 \\
|A_2 \cap A_3| &= 5 \\
|A_1 \cap A_2 \cap A_3| &= 2
\end{aligned}$$

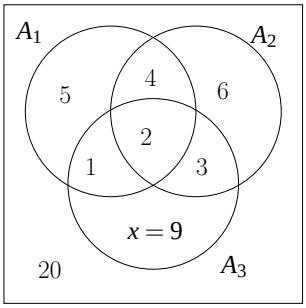
Wir müssen nun $|A_3|$ bestimmen.
Zunächst gilt

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |X \setminus N| = |X| - |N| = 50 - 20 = 30.$$

Ferner gilt nach dem Prinzip von Inklusion und Exklusion (Satz 2.6.2), dass

$$\begin{aligned}
30 &= |A_1 \cup A_2 \cup A_3| \\
&= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\
&= 12 + 15 + |A_3| - 6 - 3 - 5 + 2 \\
&= |A_3| + 15.
\end{aligned}$$

Es folgt $|A_3| = 15$. Damit ist $|A_3| = |A_2| > |A_1|$, also ist Skat das eindeutige unbeliebteste Spiel, während es kein eindeutiges beliebtestes Spiel gibt, da Schach und Fußball von gleich vielen Studenten betrieben wird.



Alternativ kann man das obige Venn-Diagramm von innen nach außen an Hand der Daten auffüllen. Die einzige Größe, die dadurch zunächst nicht ermittelt werden kann, ist x. Diese errechnet sich dann aber unter Berücksichtigung davon, dass die Summe aller Feldgrößen 50 ergeben muss.

Aufgabe 3.
Seien $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ Abbildungen mit

$$\begin{aligned} f(n) &:= n^2 \\ g(n) &:= n^4 - 80 \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie, dass $f = O(g)$.
Lösungsvorschlag:
Für $n \geq n_0 := 4$ gilt $n^2 - 9 \geq 16 - 9 = 7 \geq 1$ und somit weiter

$$|f(n)| = n^2 \leq n^2 + 9 \leq (n^2 + 9) \underbrace{(n^2 - 9)}_{\geq 1 \text{ falls } n \geq 4} = n^4 - 81 \leq n^4 - 80 = c \cdot g(n)$$

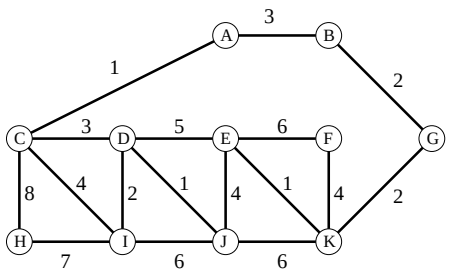
für alle $n \geq n_0$, mit $c = 1$ und $n_0 = 4$. Somit ist $f = O(g)$.

Aufgabe 4.
Zeigen oder widerlegen Sie: $(7,6,5,4,3,2,1,1,1)$ ist Valenzsequenz eines Graphen.
Geben Sie ggf. einen solchen Graphen an.
Lösungsvorschlag:
Wir benutzen das Verfahren nach Havel und Hakimi:

7	6	5	4	3	2	1	1	1	
	5	4	3	2	1	0	0	1	
	5	4	3	2	1	1	0	0	(umsortiert)
		3	2	1	0	0	0	0	
			1	0	-1	0	0	0	

Da $(1,0,-1,0,0,0)$ nicht Valenzsequenz eines Graphen ist, ist nach Havel und Hakimi auch die ursprüngliche Sequenz $(7,6,5,4,3,2,1,1,1)$ nicht Valenzsequenz eines Graphen.

Aufgabe 5.
Gegeben sei folgender Graph mit Kantengewichten (wobei die Kantengewichte nur für (c) eine Rolle spielen, bei (a) und (b) sind sie zu ignorieren):



(a) Zeigen oder widerlegen Sie: Der Graph ist eulersch.
Geben Sie ggf. eine Eulertour an.

Lösungsvorschlag:

Der Graph ist eulersch, denn er ist zusammenhängend und die Knotengrade sind alle gerade.

Nach dem Verfahren im Kurs finden wir zunächst den Kreis

$$A - B - G - K - F - E - D - C - A$$

und sodann, von K aus, die geschlossene Kantenfolge

$$K - E - J - D - I - C - H - I - J - K.$$

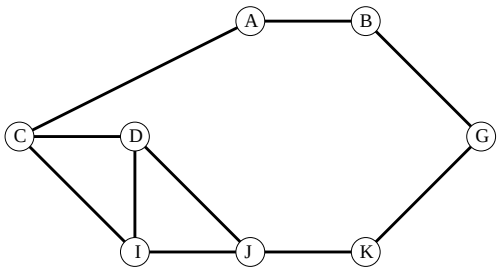
Diese setzen wir zur folgenden Eulertour zusammen:

$$A - B - G - K - E - J - D - I - C - H - I - J - K - F - E - D - C - A.$$

(b) Zeigen oder widerlegen Sie: Der Graph besitzt einen vollständigen Graphen K_4 als Minor.

Lösungsvorschlag:

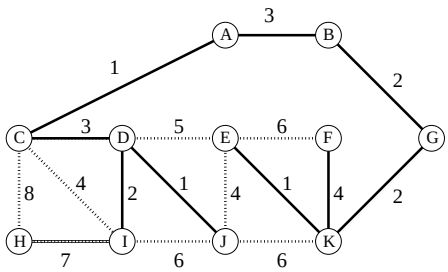
Löschen wir die Knoten E, F und H und die an ihnen hängenden Kanten, so erhalten wir den unten abgebildeten Graphen. Dieser ist offenbar ein K_4-Minor, denn je zwei verschiedene der Knoten C, D, I und J sind entweder durch eine Kante verbunden oder über einen Weg, der im Inneren keine der vier Knoten benutzt.



(c) Bestimmen Sie einen minimalen aufspannenden Baum in dem Graphen bezüglich der angegebenen Kantengewichte.

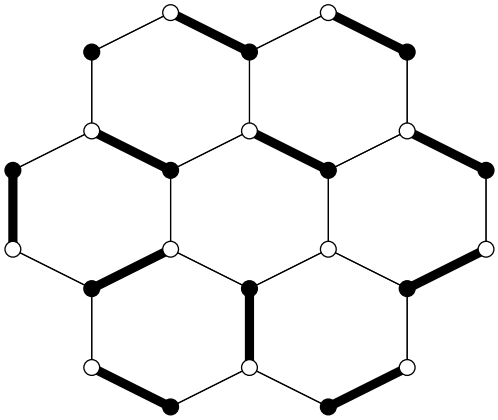
Lösungsvorschlag:

Nach dem Verfahren von Kruskal bestimmen wir folgenden minimalen aufspannenden Baum:

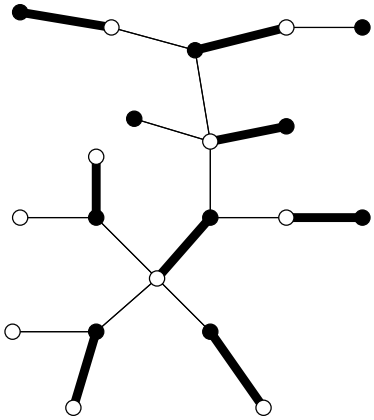


Aufgabe 6.

Zeigen oder widerlegen Sie: Das in (a) bzw. (b) abgebildete Matching (fette Kanten) ist maximal in dem jeweils abgebildeten bipartiten Graphen.



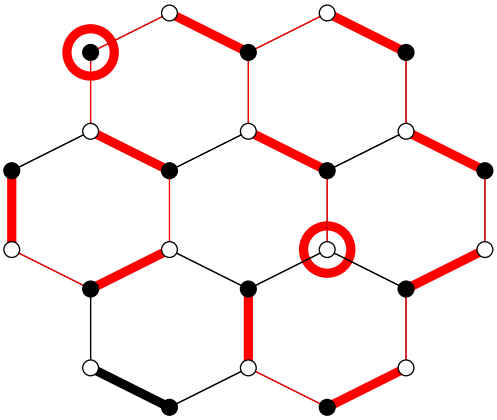
(a)



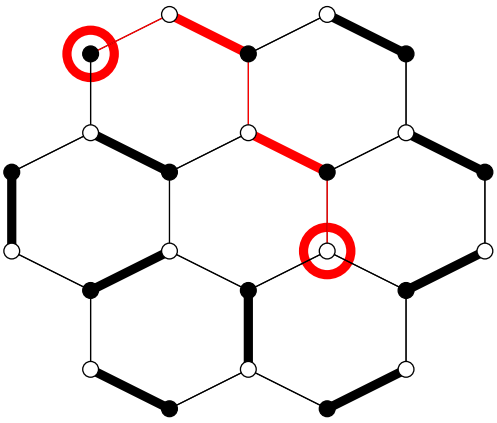
(b)

Lösungsvorschlag:

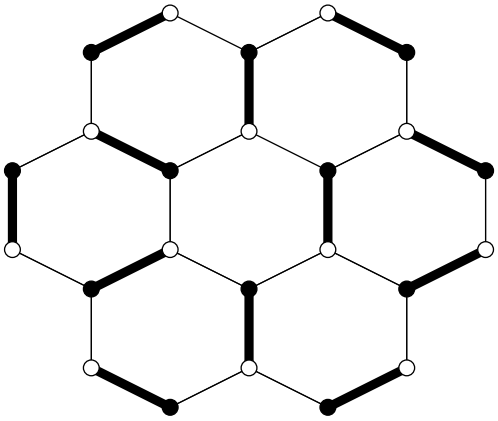
(a) Wir zeigen, dass das Matching nicht maximal ist und konstruieren gleichzeitig ein maximales Matching. Der Graph hat einen ungematchten schwarzen Knoten. Von diesem starten wir den Matchingalgorithmus in Breitensuche. Wir finden den folgenden Baum (rote Kanten):



Da wir den weißen ungematchten Knoten erreichen, haben wir einen alternierenden Weg gefunden, unten rot eingezeichnet:

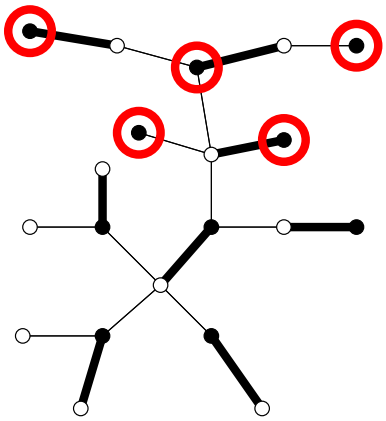


Vertauschen wir auf diesem Weg Matching- und Nichtmatchingkanten, so erhalten wir das folgende größere Matching:

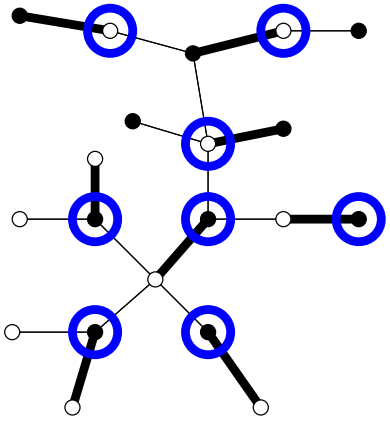


Dieses Matching ist maximal, da es sogar perfekt ist.

(b) Wir zeigen, dass das Matching maximal ist. Dazu betrachte man die Menge folgender fünf rot eingekreister schwarzer Knoten:



Diese 5 Knoten haben nur drei Nachbarn. Man erhält eine Knotenüberdeckung, wenn man diese drei Nachbarn nimmt und alle anderen (nicht zu den 5 gewählten gehörenden) schwarzen Knoten. Die Knoten der Knotenüberdeckung sind unten blau umkreist.



Da die Anzahl der Knoten in der Knotenüberdeckung und die Anzahl der Matchingkanten gleich sind, ist die Knotenüberdeckung minimal und das Matching maximal (nach Satz 4.7.13).

Aufgabe 7.

Schreiben Sie die Dezimalzahl 17,25 ins Dreiersystem (in Kommaschreibweise) um.

Lösungsvorschlag:

Es ist $17,25 = 17\frac{1}{4}$. Wir berechnen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 17\frac{1}{4} & : & 9 & = & 1 \text{ Rest } 8\frac{1}{4} \\
 & & & & 8\frac{1}{4} & : & 3 & = & 2 \text{ Rest } 2\frac{1}{4} \\
 & & & & 2\frac{1}{4} & : & 1 & = & 2 \text{ Rest } \frac{1}{4} \\
\frac{1}{4} & : & \frac{1}{3} & = & \frac{3}{12} & : & \frac{4}{12} & = & 0 \text{ Rest } \frac{1}{4} \\
\frac{1}{4} & : & \frac{1}{9} & = & \frac{9}{36} & : & \frac{4}{36} & = & 2 \text{ Rest } \frac{1}{36} \quad (= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4})
\end{array}$$

Somit liegt eine Periode der Länge 2 vor. Wir erhalten

$$17,25_{(10)} = 122,\overline{02}_{(3)}.$$

Aufgabe 8.

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine LU-Zerlegung und die Cholesky-Faktorisierung von A.

Lösungsvorschlag:

Wir berechnen die LU-Zerlegung wie im Kurstext:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 11 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 10 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit lautet die LU-Zerlegung:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 11 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}$$

Diese ist, da $U = L^{\top}$, bereits die Cholesky-Faktorisierung.

(b) Berechnen Sie die Inverse A^{-1}.

Lösungsvorschlag:

Aus (a) errechnen wir

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt direkt

$$\begin{aligned} A^{-1} &= (LU)^{-1} = (LL^\top)^{-1} = (L^\top)^{-1}L^{-1} = (L^{-1})^\top L^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 & -23 & 7 \\ -23 & 10 & -3 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) Berechnen Sie $\|A\|_1$, $\|A^{-1}\|_1$ sowie $\operatorname{cond}_1(A)$.

Lösungsvorschlag:

Es ist $\|A\|_1 = 13$. Unter Benutzung von (b) ersehen wir $\|A^{-1}\|_1 = 84$. Somit folgt

$$\operatorname{cond}_1(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 = 13 \cdot 84 = 1092.$$

Aufgabe 9.

Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lrcl} \min & 2y^2 + xy - 2xz - 2yz + 3x & & \\ \text{unter} & x - y + 2z & = & 1 \end{array}$$

Lösungsvorschlag:

Mittels der Substitution $z = \frac{1}{2}(y - x + 1)$ ist das Problem äquivalent zum unrestringierten Problem $\min f(x,y)$, wobei

$$f(x,y) = 2y^2 + xy - 2x\frac{1}{2}(y - x + 1) - 2y\frac{1}{2}(y - x + 1) + 3x = x^2 + y^2 + xy + 2x - y.$$

Wir berechnen den Gradienten

$$\nabla f(x,y) = (2x + y + 2, x + 2y - 1)$$

und die Hessematrix

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notwendige Bedingung dafür, dass bei (x,y) ein Minimum vorliegt, ist, dass $\nabla f(x,y) = 0$, d.h.

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & -2 \\ x & + & 2y & = & 1, \end{array}$$

was die Lösung $y = \frac{4}{3}$ und $x = -\frac{5}{3}$ hat.
Weil

$$(s,t)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = 2s^2 + 2st + 2t^2 = s^2 + t^2 + (s+t)^2 > 0$$

im Falle $(s,t) \neq (0,0)$ gilt, ist $\nabla^2 f(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3})$ positiv definit. Also liegt bei $(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3})$ ein lokales Minimum. Dieses ist ein globales, da die Funktion f konvex ist wegen der positiven Definitheit der Hessematrix an jeder Stelle.
Bezogen auf die ursprüngliche Optimierungsaufgabe heißt dies, dass deren einziges lokales und globales Minimum bei $(x,y,z) = (-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 2)$ liegt mit einem Zielfunktionswert von $-\frac{7}{3}$.

Aufgabe 10.
Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \frac{1}{2}x^2 + 2xy + \frac{5}{2}y^2 - x.$$

Führen Sie, ausgehend von $(0,0)^\top$, eine Iteration des Newtonverfahrens zur Bestimmung eines stationären Punktes von f durch.
Lösungsvorschlag:
Wir berechnen den Gradienten

$$\nabla f(x,y) = (x + 2y - 1, 2x + 5y)$$

und die Hessematrix

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse der Hessematrix errechnet sich als

$$(\nabla^2 f(x,y))^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir starten bei $(x_0, y_0) = (0,0)$ und iterieren einmal per Newtonschritt:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1)^\top &= (x_0, y_0)^\top - (\nabla^2 f(x_0, y_0))^{-1} \nabla f(x_0, y_0)^\top \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (5, -2)^\top \end{aligned}$$

Wegen $\nabla f(x_1, y_1) = (0,0)$ bricht das Verfahren nach einem Schritt ab und ein stationärer Punkt ist gefunden.

Aufgabe 11.
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine konvexe Menge, die die Punkte $(0,0)^\top$, $(0,1)^\top$, $(1,0)^\top$ und $(1,1)^\top$ enthält. Zeigen Sie, dass für alle $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ gilt: $(x,y)^\top \in D$.

Lösungsvorschlag:

Sei $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$. Dann gilt mit

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &:= \min\{x,y\} \\
\lambda_2 &:= x - \min\{x,y\} \\
\lambda_3 &:= y - \min\{x,y\} \\
\lambda_4 &:= 1 - \max\{x,y\},
\end{aligned}$$

dass

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und $0 \leq \lambda_i \leq 1$ für $i = 1,2,3,4$, sowie

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4} \lambda_i &= \min\{x,y\} + x - \min\{x,y\} + y - \min\{x,y\} + 1 - \max\{x,y\} \\
&= x + y - \underbrace{(\min\{x,y\} + \max\{x,y\})}_{=x+y} + 1 \\
&= 1,
\end{aligned}$$

somit ist $(x,y)^\top$ Konvexkombination von $(1,1)^\top$, $(1,0)^\top$, $(0,1)^\top$ und $(0,0)^\top$, da letztere in D liegen und D konvex ist, ist also auch $(x,y)^\top \in D$.

Aufgabe 12.

Lösen Sie das folgende lineare Optimierungsproblem (graphisch oder mit dem Simplexalgorithmus):

$$\begin{array}{lrcrcl}
\max & 3x & - & y & & \\
\text{unter} & x & + & y & \geq & 1 \\
 & 2x & + & y & \leq & 4 \\
 & & & y & \leq & 3 \\
 & & & x,y & \geq & 0
\end{array}$$

Lösungsvorschlag:

1. Variante: 2-Phasen-Simplexalgorithmus

Das Starttableau von Phase I lautet

$$\begin{array}{rrrrr|r|r}
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\boxed{1} & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3
\end{array}$$

Wir pivotieren in Spalte 1 und Nebenbedingungszeile 1 und erhalten:

$$\begin{array}{rrrrr|r|r}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
\hline
0 & -4 & 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \\
\hline
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & -1 & 2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3
\end{array}$$

Da der Zielfunktionswert in der Hilfszielfunktion gleich 0 ist, haben wir eine zulässige Startbasis für Phase II gefunden. Nach Streichen der Hilfszielfunktion und der künstlichen Variablenspalte verbleibt als Starttableau für Phase II:

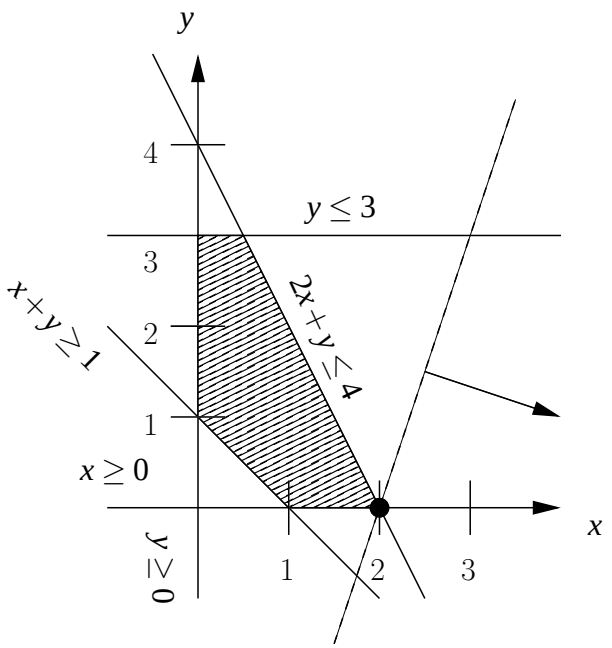
$$\begin{array}{rrrrr|r}
0 & -4 & 3 & 0 & 0 & -3 \\
\hline
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & -1 & \boxed{2} & 1 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3
\end{array}$$

Wir müssen in Spalte 3 in der Nebenbedingungszeile 2 pivotieren und erhalten:

$$\begin{array}{rrrrr|r}
0 & -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & -6 \\
\hline
1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\
0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3
\end{array}$$

Dieses Tableau ist final. Wir lesen die Optimallösung $(x,y) = (2,0)$ mit optimalem Zielfunktionswert 6 ab.

2. Variante: Graphische Lösung



Wie eben lesen wir die Optimallösung $(x,y) = (2,0)$ mit optimalem Zielfunktionswert 6 ab.