Aufgabe 1

4 Punkte Es seien P, Q Aussageformen. Beweisen Sie das De Morgansche Gesetz:

$$\neg(P \wedge Q) \sim (\neg P) \vee (\neg Q).$$

(Die Aussage steht im Kurs, sie soll nochmal bewiesen werden.)

Aufgabe 2

5 Punkte Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ gilt

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

Aufgabe 3

2 Punkte **a)** Es sei V ein reeller Vektorraum. Wann heißt eine Teilmenge U von V ein Untervektorraum von V?

b) Stellen Sie (mit Begründung) fest, welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$, Untervektorräume des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^n$ sind.

3 Punkte (1) $U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R},\ x_1 = 0 \text{ oder } x_2 = 0 \right\},$

3 Punkte (2) $U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R},\ x_1 = x_2 + \ldots + x_n = 0 \right\}.$

Aufgabe 4

a) Es sei V ein reeller Vektorraum.

2 Punkte (1) Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ seien paarweise verschieden ($n \in \mathbb{N}$). Wann heißen $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig?

2 Punkte (2) Wie ist für eine Teilmenge $M \neq \emptyset$ von V die lineare Hülle $\mathrm{Lin}(M)$ definiert?

b) Gegeben seien die Vektoren $v_1, w_1, v_2, w_2 \in \mathbb{R}^3$ mit

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ w_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ w_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4 Punkte (1) Bestimmen Sie jeweils eine Basis der folgenden Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$:

$$U_1 := \mathrm{Lin}(v_1, w_1), \quad U_2 := \mathrm{Lin}(v_2, w_2).$$

5 Punkte (2) Berechnen Sie $\dim(U_1 + U_2)$ und $\dim(U_1 \cap U_2)$.
Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 5

2 Punkte **a)** Es seien V und W reelle Vektorräume. Wann heißt eine Abbildung $f : V \longrightarrow W$ linear? Geben Sie die Definition oder eine äquivalente Bedingung an.

b) Untersuchen Sie (mit Begründung), ob die folgenden Abbildungen linear sind:

2 Punkte (1) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto 3x_1 - 2x_2 + 1,$

2 Punkte (2) $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto 2x_1 + 3x_2.$

Aufgabe 6

Seien V, W reelle Vektorräume und $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung.

4 Punkte **a)** Definieren Sie folgende Begriffe: $\operatorname{Kern} f$, $\operatorname{rang} f$.

b) Durch

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} 4x_1 + 4x_2 - 5x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}$$

wird eine lineare Abbildung definiert. (Das brauchen Sie *nicht* zu zeigen.)

3 Punkte (1) Bestimmen Sie $\operatorname{rang} f$.

5 Punkte (2) Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern} f$.

Aufgabe 7

2 Punkte **a)** Sei $n \in \mathbb{N}$. Wann heißt eine Matrix $P \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$ invertierbar?
(Gefragt ist nach der *Definition*, *nicht* nach einer dazu äquivalenten Bedingung.)

4 Punkte **b)** Es sei $A \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$ mit $A^2 = 0$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{1}_n + A$ invertierbar ist.

FernUniversität in Hagen

Fachbereich Mathematik

Matrikelnummer

Postanschrift: FernUniversität D - 58084 Hagen

Name, Vorname

Straße,Nr.

PLZ, Wohnort

Kurs: 01151 Mathematik für Informatiker I (Bachelor)
Klausur am 14.02.2004,
10.00 – 12.00 Uhr

Gasthörer/in? Ja ○ Nein ○

Geb.-Datum: