Mathematik für Informatiker I (Bachelor), WS 05/06

Klausur vom 11.02.2006:

Lösungshinweise zu den Klausuraufgaben

Aufgabe 1

Gegeben sei die Aussage „Für jede reelle Zahl a hat die Gleichung $x^2 = a$ eine reelle Lösung x."

a) „Für jede reelle Zahl a hat die Gleichung $x^2 = a$ eine reelle Lösung x." lässt sich mit dem Prädikat $G(x,a) : x^2 = a$ schreiben als $\forall a\ \exists x\ G(x,a)$.

b) Die Negation der Aussage ist: $\exists a\ \forall x\ \neg G(x,a)$.

c) Die sprachliche Negation ist: „Es gibt eine reelle Zahl a, so dass für alle reellen Zahlen x gilt: $x^2 \neq a$."

Aufgabe 2

Es seien $f : M \to N$ und $g : N \to M$ Abbildungen mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$.
Sind $x, y \in M$ mit $f(x) = f(y)$, so folgt durch Anwendung von g wegen $g \circ f = \mathrm{id}_M$

$$x = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = (g \circ f)(y) = y.$$

Also ist f injektiv.
Ist $y \in M$ beliebig, so ist $g(f(y)) = (g \circ f)(y) = y$, für $x := f(y) \in N$ gilt also $g(x) = y$, damit ist g surjektiv.

Aufgabe 3

Wir zeigen $2^n < n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ durch vollständige Induktion.
Induktionsanfang $n = 4$: $2^4 = 16 < 24 = 4!$.
Induktionsschritt $n \to n+1$: Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. Mit der Induktionsannahme $2^n < n!$ folgt (wegen $n \geq 4$)

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n < 2 \cdot n! < (n+1) \cdot n! = (n+1)!.$$

Damit ist die Behauptung durch vollständige Induktion gezeigt.

Aufgabe 4

a) Seien die Vektoren von M mit v_1, v_2, v_3 bezeichnet. Um die lineare Unabhängigkeit zu testen, lösen wir das lineare Gleichungssystem $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0$, also:

© 2006 Fernuniversität in Hagen

$$
\begin{array}{rcrcrcl|l}
x_1 & & & + & 2x_3 & = & 0 & Z_2 \mapsto Z_2 - 2Z_1 \\
2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 & Z_3 \mapsto Z_3 - 3Z_1 \\
3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 & \\
\hline
x_1 & & & + & 2x_3 & = & 0 & Z_3 \mapsto Z_3 - Z_2 \\
 & & x_2 & - & 3x_3 & = & 0 & \\
 & & x_2 & - & 3x_3 & = & 0 & \\
\hline
x_1 & & & + & 2x_3 & = & 0 & \\
 & & x_2 & - & 3x_3 & = & 0 & .
\end{array}
$$

$$\Rightarrow L(G) = \{x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Es gilt z. B. für $x_3 = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren sind also linear abhängig und wir können z. B. den 3. Vektor streichen, denn mit

$$M' := \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

gilt $\operatorname{Lin} M = \operatorname{Lin} M'$. M' ist linear unabhängig, da die Vektoren kein Vielfaches voneinander sind.

b) Wie in a) gezeigt ist $\dim \operatorname{Lin} M = 2 < \dim \mathbb{R}^3 = 3$. Also ist M kein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$. Der Vektor $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt nicht in $\operatorname{Lin} M'$, also ist $M' \cup \{e_1\}$ maximal linear unabhängig und damit eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

c) M ist keine Basis, weder von $\mathbb{R}^3$ noch von einem Untervektorraum, da M linear abhängig ist.

Aufgabe 5

a) siehe Beweis zu 6.1.4 a).

b) siehe Beweis zu 6.1.9.

Aufgabe 6

$$
\begin{array}{rcrcrcr|l}
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 & Z_3 \mapsto Z_3 - 2Z_1 \\
 & & -x_2 & + & 3x_3 & = & 1 & Z_2 \mapsto -Z_2 \\
2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 5 & \\
\hline
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 & Z_3 \mapsto Z_3 + Z_2 \\
 & & x_2 & - & 3x_3 & = & -1 & Z_1 \mapsto Z_1 - Z_2 \\
 & & -x_2 & + & 3x_3 & = & 1 & \\
\hline
x_1 & & & + & 2x_3 & = & 3 & \\
 & & x_2 & - & 3x_3 & = & -1 &
\end{array}
$$

$$
\Rightarrow L(G) = \{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_3 \in \mathbb{R} \}.
$$

Aufgabe 7

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{R})$ mit $BA = \mathbf{1}_n$. Mit dem Assoziativgesetz für das Matrizenprodukt folgt (wegen $BA = \mathbf{1}_n$)

$$
\begin{aligned}
P \cdot P &= (\mathbf{1}_m - 2AB)(\mathbf{1}_m - 2AB) = \mathbf{1}_m - 2AB - 2AB + 4(AB)(AB) \\
&= \mathbf{1}_m - 4AB + 4A(BA)B = \mathbf{1}_m - 4AB + 4A\mathbf{1}_n B \\
&= \mathbf{1}_m - 4AB + 4AB = \mathbf{1}_m,
\end{aligned}
$$

also ist P invertierbar mit $P^{-1} = P$.