Mathematik I / Mathematik für Informatiker I, WS 00/01
Klausur vom 17.02.2001:
Lösungshinweise zu den Klausuraufgaben

Aufgabe 1
Wir zeigen

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion nach n.
Induktionsanfang $n = 1$: Es gilt

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1}.$$

Induktionsschritt $n \to n+1$: Sei $n \in \mathbb{N}$, es gelte

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}. \qquad \text{(Induktionsvoraussetzung)}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \qquad \text{[nach Induktionsvor.]} \\
&= \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung durch vollständige Induktion bewiesen.

Aufgabe 2
a) Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Nach Definition 2.3.1 heißt eine Teilmenge U von V *Untervektorraum* von V, wenn

U1 U nicht-leer ist,

U2 $u + u' \in U$ für alle $u, u' \in U$ gilt, und

U3 $au \in U$ für alle $a \in K$ und alle $u \in U$ gilt.

© 2001 Fernuniversität - Gesamthochschule in Hagen

b) (1) Die Menge $U_1 := \{ \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^3$ ist nach Proposition 2.3.2 *kein Untervektorraum* von $\mathbb{R}^3$, da $0_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U_1$ (wegen $1 \neq 0$).

(2) Die Menge $U_2 := \{ \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^3$ ist ein *Untervektorraum* von $\mathbb{R}^3$:

U1: Wegen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0 \\ 0 \\ 0-0 \end{pmatrix}$ gilt $0_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_2$, also ist U_2 nicht-leer.

U2: Für $\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1' + x_2' \\ x_1' \\ x_1' - x_2' \end{pmatrix} \in U_2$ gilt

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1' + x_2' \\ x_1' \\ x_1' - x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) + (x_1' + x_2') \\ x_1 + x_1' \\ (x_1 - x_2) + (x_1' - x_2') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x_1 + x_1') + (x_2 + x_2') \\ x_1 + x_1' \\ (x_1 + x_1') - (x_2 + x_2') \end{pmatrix} \in U_2,$$

denn $x_1 + x_1', x_2 + x_2' \in \mathbb{R}$.

U3: Für $a \in K$ und $\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} \in U_2$ gilt

$$a \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x_1 + x_2) \\ ax_1 \\ a(x_1 - x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + ax_2 \\ ax_1 \\ ax_1 - ax_2 \end{pmatrix} \in U_2,$$

denn $ax_1, ax_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3

a) (1) Nach Definition 3.1.2 heißen die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ *linear unabhängig*, wenn für alle $a_1, \ldots, a_n \in K$ aus $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0$ notwendig $a_1 = \ldots = a_n$ folgt.

(2) Eine Menge von Vektoren $\{v_1, \ldots, v_n\}$ wird nach Definition 2.5.12 (a) genau dann als *Erzeugendensystem* von V bezeichnet, wenn $\mathrm{Lin}(\{v_1, \ldots, v_n\}) = V$ gilt.
(3) Eine Menge von Vektoren $\{v_1, \ldots, v_n\}$ heißt nach Definition 3.1.8 (b) *Basis* von V, wenn die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind und $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V ist.

b) (1) Die Vektoren $\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\7\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9\\10\\11\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sind *nicht linear unabhängig*, sondern *linear abhängig*: $1\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix}6\\7\\8\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}9\\10\\11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

(2) Die Vektoren $\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\7\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9\\10\\11\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ bilden *kein Erzeugendensystem* von $\mathbb{R}^3$, denn nach (1) gilt $\dim \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\7\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9\\10\\11\end{pmatrix}) \leq 2$ (vgl. Basissatz 3.3.1), also

$$\mathrm{Lin}(\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\7\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9\\10\\11\end{pmatrix}) \neq \mathbb{R}^3 \text{ nach Satz 3.3.15.}$$

(3) Die Vektoren $\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\7\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9\\10\\11\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ bilden *keine Basis* des $\mathbb{R}^3$, da diese Vektoren nach (1) nicht linear unabhängig sind.

Aufgabe 4

a) Siehe 4.2.1.

b) $x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ liegt genau dann im Kern von f, wenn $f(x) = 0$ ist und dies ist genau dann der Fall, wenn x Lösung des folgenden homogenen, linearen Gleichungssystems ist:

$$G \qquad \begin{aligned} 2x_1 \phantom{{}+3x_2} + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0. \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Dieses lösen wir, indem wir zunächst die erste Gleichung nach x_3 auflösen und $x_3 = -2x_1$ erhalten. Einsetzen in die zweite Gleichung liefert $0 = x_1 + x_2 + x_3 =$

$x_1 + x_2 - 2x_1 = -x_1 + x_2$ also $x_2 = x_1$. Damit besagt die dritte Gleichung $0 = x_1 + 3x_2 + 2x_3 = x_1 + 3x_1 - 4x_1 = 0$ und liefert damit keine weitere Bedingung an x.

Jedes $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \operatorname{Kern} f$ hat damit notwendig die Gestalt $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ -2x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Folglich ist $\operatorname{Kern} f \subset \operatorname{Lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix})$. (vgl. 3.3.9 c)).

Ist umgekehrt $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix})$ beliebig, so zeigt Einsetzen in f, dass $f(a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}) = 0$, also $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Kern} f$. Damit ist $\operatorname{Kern} f = \operatorname{Lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix})$ gezeigt.

Also erzeugt $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\}$ den Untervektorraum $\operatorname{Kern} f$ des $\mathbb{R}^3$ und da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \neq 0$ ist, ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ linear unabhängig (3.4.4 a)) und somit $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\}$ insgesamt definitionsgemäß eine Basis von $\operatorname{Kern} f$ (vgl. 3.4.8).

Aufgabe 5

Wir bestimmen alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$G \qquad \begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 + x_3 &= -5 \\ 2x_1 - 2x_2 \qquad &= 4 \\ -5x_1 + 5x_2 - x_3 &= -9 \end{aligned}$$

über $\mathbb{R}$ mit dem Gaußschen Algorithmus.

Koeffizientenmatrix			rechte Seite	Umformungen / Umbenennungen
-2	2	1	-5	$Z_2 \longmapsto \frac{1}{2}Z_2$
2	-2	0	4	dann $Z_1 \leftrightarrow Z_2$
-5	5	-1	-9	
1	-1	0	2	$Z_2 \longmapsto Z_2 + 2Z_1$
-2	2	1	-5	$Z_3 \longmapsto Z_3 + 5Z_1$
-5	5	-1	-9	

Koeffizientenmatrix			rechte Seite	Umformungen / Umbenennungen
1	−1	0	2	$Z_3 \longmapsto Z_3 + Z_2$
0	0	1	−1	
0	0	−1	1	
1	−1	0	2	$S_2 \leftrightarrow S_3$
0	0	1	−1	$x_2 = x_3',\ x_3 = x_2'$
0	0	0	0	
1	0	−1	2	
0	1	0	−1	
0	0	0	0	

Das Gleichungssystem ist lösbar, man kann $x_3' = x_2$ beliebig vorgeben und erhält

$$x_3 = x_2' = -1,$$
$$x_1 = 2 + x_3' = 2 + x_2,$$

also ist

$$L(G) = \{ \begin{pmatrix} 2+x \\ x \\ -1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \}.$$

Aufgabe 6

a) Siehe 5.4.1.

b) Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Wir beweisen die Äquivalenz folgender Aussagen:

(1) A ist invertierbar.

(2) Für alle $B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ mit $AB = 0$ ist $B = 0$.

(1)$\Rightarrow$(2): Ist A invertierbar und $B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ mit $AB = 0$, so folgt

$$B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}0 = 0.$$

(2)$\Rightarrow$(1): Es gelte (2). *Annahme:* A ist nicht invertierbar. Nach dem Äquivalenzsatz für Invertierbarkeit (5.4.8) ist dann $l_A : K^n \longrightarrow K^n,\ v \longmapsto Av$ nicht injektiv, es gibt also ein $v \in K^n,\ v \neq 0$ mit $Av = 0$. Nun sei

$$B := (v, 0, \ldots, 0) \in \mathrm{Mat}_n(K).$$

(Die Spalten $2, \ldots, n$ von B enthalten also nur Nullen.) Dann ist

$$AB = (Av, A0, \ldots, A0) = (0, 0, \ldots, 0) = 0.$$

Aus (2) folgt nun $B = 0$ im Widerspruch zu $v \neq 0$. Also war die Annahme falsch.

Aufgabe 7

a) Siehe 7.5.4.

b) Seien v_1 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_1 und v_2 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_2. Es gelte $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Wir zeigen: v_1, v_2 sind linear unabhängig. Es seien $a, b \in K$ mit

$$av_1 + bv_2 = 0. \tag{1}$$

Wir multiplizieren (1) von links mit A, wegen $Av_1 = \lambda_1 v_1$, $Av_2 = \lambda_2 v_2$ erhalten wir

$$a\lambda_1 v_1 + b\lambda_2 v_2 = 0. \tag{2}$$

Von (2) subtrahieren wir nun das λ_2-fache von (1):

$$a(\lambda_1 - \lambda_2)v_1 = 0. \tag{(2)$-\lambda_2$(1)}$$

Wegen $v_1 \neq 0$ und $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ folgt $a = 0$. Aus (1) folgt dann $b = 0$. Also sind v_1, v_2 linear unabhängig.