Aufgabe 1

Es seien M, N, X Mengen.

2 Punkte a) Wie ist $M \cap N$ definiert?

4 Punkte b) Es gelte $M \subset N \cup X$ und $M \cap X \subset N$. Beweisen Sie: $M \subset N$.

Aufgabe 2

6 Punkte Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

Aufgabe 3

2 Punkte a) Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Wann heißt eine Teilmenge U von V ein Untervektorraum von V?

b) Stellen Sie (mit Begründung) fest, welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) Untervektorräume des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^n$ sind.

3 Punkte (1) $U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R},\ x_1^2 + x_2^2 = 0 \right\}$,

2 Punkte (2) $U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x+1 \\ x+2 \\ \vdots \\ x+n \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$.

Aufgabe 4

a) Es seien V ein Vektorraum über einem Körper K, $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, \ldots, v_n \in V$ paarweise verschieden.

2 Punkte (1) Wann heißen die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig?

2 Punkte (2) Wann heißt $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V?

2 Punkte (3) Wann heißt $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V?

b) Prüfen Sie (mit Begründung), ob die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

4 Punkte (1) linear unabhängig sind,

2 Punkte (2) ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ bilden,

2 Punkte (3) eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

6 Punkte **Aufgabe 5**

Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$:

$$G \qquad \begin{aligned} -4x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 3 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 &= -5 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -7\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$.

2 Punkte a) Wann heißt eine Matrix $P \in \mathrm{Mat}_n(K)$ invertierbar?
(Gefragt ist nach der *Definition*, *nicht* nach einer dazu äquivalenten Bedingung.)

4 Punkte b) Untersuchen Sie, für welche $a \in \mathbb{C}$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls die zu A inverse Matrix.

Aufgabe 7

a) Es seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Definieren Sie folgende Begriffe:

2 Punkte (1) Eigenwert von A,

2 Punkte (2) Eigenraum $\mathrm{Eig}_A(\lambda)$ von A zum Eigenwert λ.

b) Sei $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

4 Punkte (1) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A.

4 Punkte (2) Geben Sie zu jedem Eigenwert von A eine Basis des zugehörigen Eigenraums an.

2 Punkte (3) Untersuchen Sie (mit Beweis), ob A diagonalisierbar ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls eine Matrix $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, so dass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist.