Aufgabe 1

4 Punkte Es seien P, Q Aussageformen. Untersuchen Sie, ob die folgende Aussageform immer wahr ist:
$(P \vee Q) \Rightarrow \big((P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)\big)$.

Aufgabe 2

5 Punkte Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

Aufgabe 3

2 Punkte **a)** Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Wann heißt eine Teilmenge U von V ein Untervektorraum von V?

b) Stellen Sie (mit Begründung) fest, welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$) Untervektorräume des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^n$ sind.

3 Punkte (1) $U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R},\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0 \right\}$,

3 Punkte (2) $U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R},\ x_1 \leq 2x_2 \leq \ldots \leq 2x_n \right\}$.

Aufgabe 4

a) Es seien V ein Vektorraum über einem Körper K, $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, \ldots, v_n \in V$ paarweise verschieden.

2 Punkte (1) Wann heißen die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig?

2 Punkte (2) Wann heißt $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V?

2 Punkte (3) Wann heißt $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V?

b) Prüfen Sie (mit Begründung), ob die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

3 Punkte (1) linear unabhängig sind,

3 Punkte (2) ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ bilden,

2 Punkte (3) eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

Aufgabe 5

Seien V, W Vektorräume über einem Körper K und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung.

4 Punkte **a)** Definieren Sie folgende Begriffe: $\operatorname{Kern} f$, $\operatorname{rang} f$.

b) Durch

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ 4x_1 - 5x_3 \end{pmatrix}$$

wird eine lineare Abbildung definiert. (Das brauchen Sie nicht zu zeigen.)

3 Punkte (1) Bestimmen Sie $\operatorname{rang} f$.

3 Punkte (2) Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern} f$.

Aufgabe 6

Seien K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$.

2 Punkte **a)** Wann heißt eine Matrix $P \in \operatorname{Mat}_n(K)$ invertierbar?
(Gefragt ist nach der *Definition*, *nicht* nach einer dazu äquivalenten Bedingung.)

4 Punkte **b)** Es sei $A \in \operatorname{Mat}_{m,n}(K)$ mit $({}^tA)A = \mathbf{1}_n$, es sei $P := \mathbf{1}_m - 2A({}^tA)$.
Zeigen Sie: P ist invertierbar mit $P^{-1} = P$.

Aufgabe 7

Es seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$ und $\lambda \in K$.

2 Punkte **a)** Wann heißt λ Eigenwert von A?

6 Punkte **b)** Zeigen Sie: A ist invertierbar $\iff$ 0 ist kein Eigenwert von A.