Mathematik I / Mathematik für Informatiker I, WS 00/01
Nachklausur vom 07.04.2001:
Lösungshinweise zu den Nachklausuraufgaben

Aufgabe 1

Wir zeigen $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion nach n.

Induktionsanfang $n = 1$: Es gilt $\sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1 \cdot 2 = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$.

Induktionsschritt $n \to n+1$: Sei $n \in \mathbb{N}$, es gelte die Induktionsvoraussetzung $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+2) \\ &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) \quad \text{[nach Induktionsvoraussetzung]} \\ &= \frac{1}{3}(n+1)(n+2)[n+3].\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung durch vollständige Induktion bewiesen.

Aufgabe 2

a) Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Nach Definition 2.3.1 heißt eine Teilmenge U von V *Untervektorraum* von V, wenn

U1 U nicht-leer ist,

U2 $u + u' \in U$ für alle $u, u' \in U$ gilt, und

U3 $au \in U$ für alle $a \in K$ und alle $u \in U$ gilt.

b) (1) Die Menge $U_1 := \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 + x_2 \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3$ ist *kein Untervektorraum* von $\mathbb{R}^3$, da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1-1 \end{pmatrix} \in U_1$ (wegen $1 + 1 \geq 0$), aber $(-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U_1$ (wegen $(-1) + (-1) < 0$).

© 2001 Fernuniversität - Gesamthochschule in Hagen

(2) Die Menge $U_2 := \{ \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^3$ ist ein *Untervektorraum* von $\mathbb{R}^3$:

U1: Wegen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0 \\ 0 \\ 0-0 \end{pmatrix}$ gilt $0_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_2$, also ist U_2 nicht-leer.

U2: Für $\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1' + x_2' \\ x_2' \\ x_2' - x_1' \end{pmatrix} \in U_2$ gilt

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1' + x_2' \\ x_2' \\ x_2' - x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) + (x_1' + x_2') \\ x_2 + x_2' \\ (x_2 - x_1) + (x_2' - x_1') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x_1 + x_1') + (x_2 + x_2') \\ x_2 + x_2' \\ (x_2 + x_2') - (x_1 + x_1') \end{pmatrix} \in U_2,$$

denn $x_1 + x_1', x_2 + x_2' \in \mathbb{R}$.

U3: Für $a \in K$ und $\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} \in U_2$ gilt

$$a \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x_1 + x_2) \\ ax_2 \\ a(x_2 - x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + ax_2 \\ ax_2 \\ ax_2 - ax_1 \end{pmatrix} \in U_2,$$

denn $ax_1, ax_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3

a) (1) Nach Definition 3.1.2 heißen die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ *linear unabhängig*, wenn für alle $a_1, \ldots, a_n \in K$ aus $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0$ notwendig $a_1 = \ldots = a_n$ folgt.
(2) Eine Menge von Vektoren $\{v_1, \ldots, v_n\}$ wird nach Definition 2.5.12 (a) genau dann als *Erzeugendensystem* von V bezeichnet, wenn $\mathrm{Lin}(\{v_1, \ldots, v_n\}) = V$ gilt.
(3) Eine Menge von Vektoren $\{v_1, \ldots, v_n\}$ heißt nach Definition 3.1.8 (b) *Basis* von V, wenn die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind und $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V ist.

b) (1) Die Vektoren $\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sind *linear unabhängig*:

$$x_1\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

ergibt $x_3 = 0$, $3x_1 + 6x_2 = 0$ und $-x_1 + 2x_2 = 0$, also $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

(2) Die Vektoren $\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ bilden eine *Basis* des $\mathbb{R}^3$:

Da diese Vektoren nach (1) linear unabhängig sind, gilt

$$\dim \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}) = 3,$$

also $\mathrm{Lin}(\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}) = \mathbb{R}^3$ nach Satz 3.3.15. Somit bilden die angegebenen Vektoren ein Erzeugendensystem und damit auch eine Basis von $\mathbb{R}^3$ (wegen der in (1) nachgewiesenen linearen Unabhängigkeit).

Aufgabe 4

a) Siehe 4.2.1.

b) (1) $x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ liegt genau dann im Kern von f, wenn $f(x) = 0$ ist und dies ist genau dann der Fall, wenn x Lösung des folgenden homogenen, linearen Gleichungssystems ist:

$$G \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 0 \\ x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 0\,. \\ -2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Dieses lösen wir, indem wir zunächst die dritte Gleichung nach x_3 auflösen und $x_3 = -2x_2$ erhalten. Einsetzen in die zweite Gleichung liefert $0 = x_1 + 6x_2 - 2x_3 = x_1 + 6x_2 + 4x_2 = x_1 + 10x_2$, also $x_1 = -10x_2$. Damit besagt die erste Gleichung $0 = x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -10x_2 + 2x_2 + 8x_2 = 0$ und liefert damit keine weitere Bedingung an x.

Jedes $x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}\, f$ hat damit notwendig die Gestalt $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10x_2\\x_2\\-2x_2\end{pmatrix} =$

$x_2 \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Folglich ist $\operatorname{Kern} f \subset \operatorname{Lin}(\begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix})$. (vgl. 3.3.9 c)).

Ist umgekehrt $a \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Lin}(\begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix})$ beliebig, so zeigt Einsetzen in f, dass $f(a \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}) = 0$, also $a \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Kern} f$. Damit ist $\operatorname{Kern} f = \operatorname{Lin}(\begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix})$ gezeigt. Also erzeugt $\{\begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\}$ den Untervektorraum $\operatorname{Kern} f$ des $\mathbb{R}^3$ und da $\begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \neq 0$ ist, ist $\begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ linear unabhängig (3.4.4 a)) und somit $\{\begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\}$ insgesamt definitionsgemäß eine Basis von $\operatorname{Kern} f$ (vgl. 3.4.8).

(2) Da nach (1) $\operatorname{Kern} f = \operatorname{Lin}(\begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}) \neq \{0\}$ ist, ist f nach dem Injektivitätskriterium 4.2.9 nicht injektiv.

Aufgabe 5

Wir bestimmen alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$G \qquad \begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 2 \\ -4x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

über $\mathbb{R}$ mit dem Gaußschen Algorithmus.

Koeffizientenmatrix			rechte Seite	Umformungen / Umbenennungen
3	3	−1	1	$Z_2 \longmapsto \frac{1}{2}Z_2$
2	2	0	2	dann $Z_1 \leftrightarrow Z_2$
−4	−4	2	0	
1	1	0	1	$Z_2 \longmapsto Z_2 - 3Z_1$
3	3	−1	1	$Z_3 \longmapsto Z_3 + 4Z_1$
−4	−4	2	0	
1	1	0	1	$Z_3 \longmapsto Z_3 + 2Z_2$
0	0	−1	−2	
0	0	2	4	

Koeffizientenmatrix			rechte Seite	Umformungen / Umbenennungen
1	1	0	1	$S_2 \leftrightarrow S_3$
0	0	-1	-2	$x_2 = x_3',\ x_3 = x_2'$
0	0	0	0	
1	0	1	1	
0	-1	0	-2	
0	0	0	0	

Das Gleichungssystem ist lösbar, man kann $x_3' = x_2$ beliebig vorgeben und erhält

$$-x_2' = -2, \text{ also } x_3 = x_2' = 2,$$
$$x_1 = 1 - x_3' = 1 - x_2,$$

also ist

$$L(G) = \{ \begin{pmatrix} 1-x \\ x \\ 2 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \}.$$

Aufgabe 6

a) Siehe 5.4.1.

b) Siehe Beweis zu 5.4.2.

Aufgabe 7

a) (1) Siehe 7.5.4, (2) siehe 7.5.1.

b) Seien λ_1, λ_2 Eigenwerte von A mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Wir zeigen

$$\mathrm{Eig}_A(\lambda_1) \cap \mathrm{Eig}_A(\lambda_2) = \{0\}.$$

Wegen $0 \in \mathrm{Eig}_A(\lambda_1)$, $0 \in \mathrm{Eig}_A(\lambda_2)$ ist $\{0\} \subset \mathrm{Eig}_A(\lambda_1) \cap \mathrm{Eig}_A(\lambda_2)$.
Ist umgekehrt $v \in \mathrm{Eig}_A(\lambda_1) \cap \mathrm{Eig}_A(\lambda_2)$, so folgt

$$\lambda_1 v = Av = \lambda_2 v,$$

also $(\lambda_1 - \lambda_2)v = 0$. Wegen $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ folgt $v = 0$. Damit ist die Behauptung gezeigt.