Aufgabe 1

2 Punkte **a)** Sei (a_n) eine reelle Folge, und sei $a \in \mathbb{R}$. Wann heißt (a_n) konvergent gegen a? (Geben Sie die Definition oder eine dazu äquivalente Bedingung an.)

b) Untersuchen Sie (mit Begründung) die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

2 Punkte (1) $a_n = \dfrac{n^2+5n+2}{5n^2+7}$,

3 Punkte (2) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{n}$.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren und stellen Sie fest, ob sie absolut konvergieren. Begründen Sie Ihre Aussagen.

3 Punkte **a)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$,

3 Punkte **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n+3}$.

Aufgabe 3

2 Punkte **a)** Sei $a \in D \subset \mathbb{R}$, und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wann heißt f stetig in a? (Geben Sie die Definition oder ein dazu äquivalentes Kriterium an.)

4 Punkte **b)** Es sei $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ in 0 stetig mit $f(0) = 0$ und $g :]-1,1[\to \mathbb{R}$ beschränkt. Zeigen Sie: $f \cdot g :]-1,1[\to \mathbb{R}$ ist in 0 stetig.

Aufgabe 4

2 Punkte **a)** Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $a \in D$ ein Häufungspunkt von D. Wann heißt eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in a?
(Geben Sie die Definition oder eine dazu äquivalente Bedingung an.)

b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$.

2 Punkte (1) Berechnen Sie $f'(x)$ für $x \neq 0$.

3 Punkte (2) Zeigen Sie, dass f in 0 differenzierbar ist und bestimmen Sie $f'(0)$.

4 Punkte (3) Zeigen Sie, dass $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in 0 nicht stetig ist.

Aufgabe 5

2 Punkte **a)** Formulieren Sie den 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

4 Punkte **b)** Sei I ein Intervall mit mehr als einem Punkt und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Beweisen Sie folgende Aussage des Kurses: Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, so ist f streng monoton wachsend.

Aufgabe 6

3 Punkte **a)** Definieren Sie den Begriff des Konvergenzradius einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ $(a_n, a \in \mathbb{R})$. (Gefragt ist nach der *Definition*, nicht nach einer Formel.)

b) Bestimmen Sie (mit Begründung) die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

4 Punkte (1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} x^n$,

5 Punkte (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3} x^n$.

Aufgabe 7

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

4 Punkte **a)** $\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$,

4 Punkte **b)** $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x \sin(x^2) \, dx$.

Formelsammlung

$f : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ mit $f(x) :=$	Definitionsintervall(e) I	Stammfunktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit $F(x) :=$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N}^0)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x^{-n} \quad (n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$	$]-\infty, 0[,\ ]0, \infty[$	$\frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
x^{-1}	$]0, \infty[$	$\log x\ (= \log \lvert x \rvert)$
x^{-1}	$]-\infty, 0[$	$\log(-x)\ (= \log \lvert x \rvert)$
$x^a \quad (a \in \mathbb{R},\ a \neq -1)$	$]0, \infty[$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$	$\arcsin x$
$e^x\ (= \exp x)$	$\mathbb{R}$	e^x
$a^x\ (= e^{x \log a})$ mit $a > 0,\ a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\log a}a^x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin x$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\cos x$
$\frac{1}{\cos^2 x}\ (= 1 + \tan^2 x)$	$](k - \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi[\quad (k \in \mathbb{Z})$	$\tan x$
$\frac{1}{\sin^2 x}\ (= 1 + \cot^2 x)$	$]k\pi, (k+1)\pi[\quad (k \in \mathbb{Z})$	$-\cot x$
$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$	$\mathbb{R}$	$\sinh x$
$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$	$\mathbb{R}$	$\cosh x$