Lösungshinweise zur Klausur

01172 Mathematik II / 01182 Mathematik für Informatiker II

Sommersemester 2007

Aufgabe 1

Zu bestimmen sind alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$(*) \quad |3x-1| + 2 \leq |4x-8| \,.$$

Es gilt

$$|3x-1| = \begin{cases} 3x-1, & \text{falls } x \geq \frac{1}{3} \\ -(3x-1), & \text{falls } x < \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$|4x-8| = \begin{cases} 4x-8, & \text{falls } x \geq 2 \\ -(4x-8), & \text{falls } x < 2 \,. \end{cases}$$

Wir unterscheiden drei Fälle:

Fall 1: $x < \frac{1}{3}$

Dann ist auch $x < 2$, also

$$\begin{aligned} |3x-1| + 2 \leq |4x-8| &\iff -(3x-1) + 2 \leq -(4x-8) \\ &\iff x \leq 5 \,. \end{aligned}$$

Da dies eine richtige Aussage ist, ist $(*)$ für alle $x < \frac{1}{3}$ richtig.

Fall 2: $\frac{1}{3} \leq x < 2$

Hier gilt

$$\begin{aligned} |3x-1| + 2 \leq |4x-8| &\iff (3x-1) + 2 \leq -(4x-8) \\ &\iff 7x \leq 7 \\ &\iff x \leq 1 \,. \end{aligned}$$

Daher gilt $(*)$ für $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$, für $1 < x < 2$ hingegen nicht.

Fall 3: $x \geq 2$

Dann ist auch $x \geq \frac{1}{3}$, also

$$\begin{aligned} |3x-1| + 2 \leq |4x-8| &\iff (3x-1) + 2 \leq 4x-8 \\ &\iff 9 \leq x \,. \end{aligned}$$

Daher gilt $(*)$ für $9 \leq x < \infty$, für $2 \leq x < 9$ hingegen nicht.

Zusammenfassend ergibt sich

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |3x-1| + 2 \leq |4x-8|\} =]-\infty, 1] \cup [9, \infty[\,.$$

Aufgabe 2

(a) (i) Zur Untersuchung des Konvergenzverhaltens der angegebenen Folge teilen wir Zähler und Nenner durch die höchste auftretende Potenz von n (nämlich 6) und erhalten

$$a_n = \frac{101n^3 - 7n^6}{n^2(n^2+1)^2} = \frac{101(\frac{1}{n})^3 - 7}{(1+(\frac{1}{n})^2)^2} .$$

Da $(\frac{1}{n})$ eine Nullfolge ist, folgt aus 2.1.12 die Konvergenz von (a_n) mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{0-7}{(1+0)^2} = -7 .$$

(ii) Wir zeigen zunächst mit Hilfe des Monotoniekriteriums:
(b_n) ist konvergent.
Für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigen wir durch Induktion: $b_n \in [\frac{1}{2}, 1]$.
$n = 1 : b_1 = 1 \in [\frac{1}{2}, 1]$ ist klar.
Sei $b_n \in [\frac{1}{2}, 1]$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $b_n + 1 \in [\frac{3}{2}, 2]$, also

$$b_{n+1} = \frac{1}{3}(b_n + 1) \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}] \subset [\frac{1}{2}, 1] .$$

Insbesondere ist (b_n) beschränkt.
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt wegen $\frac{1}{2} \leq b_n$

$$b_{n+1} = \frac{1}{3}(b_n + 1) \leq \frac{1}{3}(b_n + 2b_n) = b_n ,$$

d.h. (b_n) ist monoton fallend und somit nach dem Monotoniekriterium konvergent.
Sei $b := \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Dann gilt (nach 2.2.2) $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_{n+1}$, also nach 2.1.12

$$b = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}(b_n + 1) = \frac{1}{3}(\lim_{n\to\infty} b_n + 1) = \frac{1}{3}(b+1) ,$$

d.h. $3b = b + 1$ und somit $b = \frac{1}{2}$.

(b) (i) Es gilt

$$\cos(n\pi) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -1, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{array} \right\} = (-1)^n ,$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} .$$

Nach dem Leibnizkriterium ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ konvergent, also auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

konvergent.

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sqrt{n^2+3} \leq \sqrt{n^2+2n+1} = n+1$, also

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+3}-n &= \frac{(\sqrt{n^2+3}-n)(\sqrt{n^2+3}+n)}{\sqrt{n^2+3}+n} = \frac{3}{\sqrt{n^2+3}+n} \\ &\geq \frac{3}{2n+1} \geq \frac{3}{2n+n} = \frac{1}{n}\,.\end{aligned}$$

Die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent, folglich ist nach dem Minorantenkriterium auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+3}-n)$$

divergent.

Aufgabe 3

(a) Wir verwenden zum Nachweis der Stetigkeit von f in $a = 0$ das ε-δ-Kriterium und haben wegen $f(0) = 0$ zu zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}: \ (|x| < \delta \Longrightarrow |f(x)| < \varepsilon)\,.$$

Da für alle $x \in \mathbb{R}$ $|f(x)| \leq |x|$ gilt, ist diese Bedingung für $\delta := \varepsilon$ stets erfüllt.

(b) Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: $a \in \mathbb{Q}$

Dann gilt $f(a) = a$ und die Folge (a_n) mit

$$a_n := a + \frac{\pi}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

ist konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Wegen $f(a_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \neq a = f(a),$$

also f nach dem Folgenkriterium in a nicht stetig.

Fall 2: $a \notin \mathbb{Q}$

Dann gilt $f(a) = 0$ und da a Häufungspunkt von $\mathbb{Q}$ ist, gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in \mathbb{Q}$ mit $a_n \in U_{\frac{1}{n}}(a)$. Ist z.B. $a = \alpha, \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots$ die Darstellung von a als unendlicher Dezimalbruch, so gilt für $a_n := \alpha, \alpha_1\cdots\alpha_n \in \mathbb{Q}$

$$|a_n - a| = 0,0\cdots0\alpha_{n+1}\cdots \leq \frac{1}{10^n} < \frac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist (a_n) konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Wegen $f(a_n) = a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0 = f(a),$$

also f nach dem Folgenkriterium in a nicht stetig.

Aufgabe 4

(a) (i) Es gilt $f = f_1 \cdot (f_3 \circ f_2)$ mit

$$f_1, f_2 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ f_1(x) := x\,,\ f_2(x) := x^2\,,$$
$$f_3 :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}\,,\ f_3(x) := \log x\,.$$

f_1, f_2, f_3 sind differenzierbar mit Ableitungen

$$f_1', f_2' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ f_1'(x) = 1\,,\ f_2'(x) = 2x\,,$$
$$f_3' :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}\,,\ f_3'(x) = \frac{1}{x}\,.$$

Nach der Kettenregel 4.1.7(v) gilt zunächst: $f_3 \circ f_2$ ist differenzierbar mit Ableitung

$$(f_3 \circ f_2)'(x) = f_3'(f_2(x)) \cdot f_2'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}\,.$$

Nach der Produktregel 4.1.7(iii) ist dann auch $f = f_1 \cdot (f_3 \circ f_2)$ differenzierbar mit Ableitung

$$\begin{aligned} f'(x) &= f_1'(x)(f_3 \circ f_2)(x) + f_1(x)(f_3 \circ f_2)'(x) \\ &= 1 \cdot \log x^2 + x \cdot \frac{2}{x} = 2 + \log x^2\,. \end{aligned}$$

(ii) Es gilt $g = \dfrac{g_2 \circ g_1}{g_1}$ mit $g_1 := \sqrt{\ }|_{]0,\infty[}\,,\ g_2 := \exp\,.$

g_1 und g_2 sind differenzierbar mit Ableitungen

$$g_1' :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}\,,\ g_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,,$$

$$g_2' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ g_2'(x) = e^x\,.$$

Nach der Kettenregel 4.1.7(v) gilt zunächst: $g_2 \circ g_1$ ist differenzierbar mit Ableitung

$$(g_2 \circ g_1)'(x) = g_2'(g_1(x)) \cdot g_1'(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,.$$

Nach der Quotientenregel 4.1.7(iv) ist dann auch $g = \dfrac{g_2 \circ g_1}{g_1}$ differenzierbar mit Ableitung

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(g_2 \circ g_1)'(x) \cdot g_1(x) - (g_2 \circ g_1)(x) \cdot g_1'(x)}{(g_1(x))^2} \\ &= \frac{\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} - e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}{x} \cdot \frac{e^{\sqrt{x}}}{2} \\ &= \frac{x - \sqrt{x}}{2x^2} \cdot e^{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

(b) Wir setzen $f, g :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}\,,\ f(x) := x - \log(x+1)\,,\ g(x) := 1 - \cos x.$
Dann gilt $f(0) = 0 = g(0)$ und f, g sind differenzierbar mit Ableitungen

$$f', g' :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}\,,\ f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1}\,,\ g'(x) = \sin x\,.$$

Es gilt $f'(0) = 0 = g'(0)$ und f', g' sind differenzierbar mit Ableitungen

$$f'', g'' :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}\,,\ f''(x) = \frac{1}{(x+1)^2}\,,\ g''(x) = \cos x\,.$$

Da f'' und g'' offenbar stetig sind, gilt dies auch für $\dfrac{f''}{g''}$ und es folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{f''(0)}{g''(0)} = \frac{1}{1} = 1\,.$$

Wegen $g''(x) = \cos x \neq 0$ für alle $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$ gilt nach der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = 1\,.$$

Wegen $g'(x) = \sin x \neq 0$ für alle $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$ gilt nach der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1\,.$$

(Beachten Sie: $-\frac{\pi}{2} < -1 < 1 < \frac{\pi}{2}$.)

Aufgabe 5

(a) (i) Die Funktion f ist differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = x - \frac{1}{x^2} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,.$$

Es gilt $\mathbb{R}\setminus\{0\} = I_1 \cup I_2$ mit $I_1 :=]-\infty, 0[= \mathring{I}_1$, $I_2 :=]0,\infty[= \mathring{I}_2$. Hat f in $a \in I_1$ oder in $a \in I_2$ ein lokales Extremum, so muss nach 4.3.13 gelten:

$$0 = f'(a) = a - \frac{1}{a^2}\,,$$

also $a^3 = 1$, d.h. $a = 1 \in I_2 = \mathring{I}_2$.
f' ist differenzierbar mit Ableitung

$$f''(x) = 1 + \frac{2}{x^3} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,.$$

Es gilt $f''(1) = 3 > 0$ und nach 4.3.14 besitzt f an der Stelle $a = 1$ ein lokales Minimum, nämlich $f(1) = \frac{3}{2}$. Dies ist das einzige lokale Extremum, da jeder Punkt des Definitionsbereichs von f im Inneren des Intervalls I_1 oder des Intervalls I_2 liegt.

(ii) Es gilt

$$f'(x) = x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^3-1}{x^2} \begin{cases} < 0 & \text{für } 0 < x < 1 \\ = 0 & \text{für } x = 1 \\ > 0 & \text{für } 1 < x \leq 2\,. \end{cases}$$

f ist also in $]0,1]$ streng monoton fallend, in $[1,2]$ streng monoton wachsend (vgl. 4.2.4), d.h.

$$\min f(]0,2]) = f(1) = \frac{3}{2}\,.$$

$\max f(]0,2])$ existiert hingegen nicht. Denn andernfalls gäbe es ein $x_0 \in]0,2]$ mit $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in]0,2]$. Da f in $]0,1]$ streng monoton fällt, in $[1,2[$ streng monoton wächst, gilt $x_0 \notin]0,2[$. Es bleibt $x_0 = 2$. Es gilt jedoch

$$f(2) = \frac{5}{2} < 3 < f(\frac{1}{3})\,,$$

d.h. auch $x_0 = 2$ ist nicht möglich, im Widerspruch zu $x_0 \in]0,2]$.

(b) Es liegt die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ vor mit $a = 1$, $a_0 = 0$ und $a_n = \frac{5^n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \frac{(n+1)\cdot 5^n}{5^{n+1}\cdot n} = \frac{1}{5}\cdot(1+\frac{1}{n})\,,$$

also ist nach Ü 5.3.1

$$r = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \frac{1}{5}$$

der Konvergenzradius, und die Potenzreihe ist nach 5.3.2 für $|x-1| < \frac{1}{5}$, d.h. für $\frac{4}{5} < x < \frac{6}{5}$ konvergent und für $|x-1| > \frac{1}{5}$, d.h. für $x < \frac{4}{5}$ oder $x > \frac{6}{5}$ divergent.
Es sind noch die Punkte $x = \frac{4}{5}$ und $x = \frac{6}{5}$ zu untersuchen.
Für $x = \frac{4}{5}$ liegt die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n}(\frac{4}{5}-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n}(-\frac{1}{5})^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$$

vor, die nach dem Leibnizkriterium konvergiert.
Für $x = \frac{6}{5}$ liegt die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n}(\frac{6}{5}-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n}(\frac{1}{5})^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

vor, das ist die harmonische Reihe und folglich divergent.
Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n}(x-1)^n$ konvergiert also im Intervall $[\frac{4}{5}, \frac{6}{5}[$, außerhalb dieses Intervalls divergiert sie.

Aufgabe 6

(a) Wir verwenden die Methode der partiellen Integration 6.2.10 und setzen

$$f, g : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f(x) := (x+1)^2\ ,\ g(x) := -\cos x\ .$$

f und g sind stetig differenzierbar mit Ableitungen

$$f'(x) = 2(x+1)\ ,\ g'(x) = \sin x\ .$$

Es gilt dann wegen $\cos\frac{\pi}{2} = 0 = \cos(-\frac{\pi}{2})$

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x+1)^2 \sin x &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f'(x)g(x)dx \\ &= -(x+1)^2\cos x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2(x+1)(-\cos x)dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2(x+1)\cos x\, dx\ .\end{aligned}$$

Erneute partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2(x+1)\cos x\, dx &= 2(x+1)\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\, dx \\ &= 2(\tfrac{\pi}{2}+1) - 2(-\tfrac{\pi}{2}+1)(-1) - 2(-\cos x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi + 2 - \pi + 2 = 4\ ,\end{aligned}$$

da $\cos\frac{\pi}{2} = 0 = \cos(-\frac{\pi}{2})$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$. Folglich

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x+1)^2 \sin x\, dx = 4\ .$$

(b) Wir verwenden die Substitutionsregel 6.2.11.
Im Integranden finden wir die Funktion

$$\varphi : [0, \sqrt{5}] \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ \varphi(x) := 9 - x^2$$

und deren Ableitung $\varphi'(x) = -2x$ (bis auf den konstanten Faktor -2), so dass mit

$$f : [\varphi(\sqrt{5}), \varphi(0)] = [4, 9] \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f(y) := \frac{-2}{\sqrt{y}}$$

gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{5}} \frac{4x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx &= \int_0^{\sqrt{5}} \frac{-2}{\sqrt{\varphi(x)}}\,\varphi'(x)dx = \int_0^{\sqrt{5}} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx \\
&= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\sqrt{5})} f(y)dy = \int_9^4 \frac{-2}{\sqrt{y}}\,dy = 2\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy \\
&= 2\cdot 2\sqrt{y}\,\Big|_4^9 = 4(\sqrt{9}-\sqrt{4}) = 4(3-2) = 4\ .
\end{aligned}$$

Die Voraussetzungen der Substitutionsregel waren erfüllt, da f stetig, φ stetig differenzierbar und $\varphi([0, \sqrt{5}]) = [4, 9]$ gilt (φ ist monoton fallend). Die Stammfunktion für die Funktion $y \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{y}}$ erhält man aus der Ableitungsregel für die allgemeine Potenz $(\mathrm{id}^a)'(y) = ay^{a-1}$ für $a = \frac{1}{2}$.
Einen anderen Lösungsweg erhält man aus der Beobachtung, dass für die Funktion

$$F : [0, \sqrt{5}] \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ F(x) := -4\sqrt{9-x^2}$$

$F'(x) = -4 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{9-x^2}} \cdot (-2x) = \dfrac{4x}{\sqrt{9-x^2}}$ gilt, d.h. F ist eine Stammfunktion des Integranden. Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung folgt dann

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{5}} \frac{4x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx &= -4\sqrt{9-x^2}\,\Big|_0^{\sqrt{5}} = -4\sqrt{4} - (-4\sqrt{9}) \\
&= -8 + 12 = 4\ .
\end{aligned}$$