Aufgaben

zur Hauptklausur

Kurs 1182 Mathematik f. Informatiker II

4 Punkte **Aufgabe 1**

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$, $b > 0$. Zeigen Sie: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Aufgabe 2

Sei M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$, und sei $S \in \mathbb{R}$.

2 Punkte **a)** Wann heißt S Supremum von M?

6 Punkte **b)** Zeigen Sie: S ist genau dann Supremum von M, wenn S obere Schranke von M ist und zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ ein $x \in M$ mit $x > S - \varepsilon$ existiert.

Aufgabe 3

2 Punkte **a)** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, und sei $a \in \mathbb{R}$. Formulieren Sie das ε-n_0-Kriterium für die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

4 Punkte **b)** Beweisen Sie folgenden Satz des Kurstextes: Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente reelle Folgen, so konvergiert auch die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Aufgabe 4

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

3 Punkte **a)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 6n + 1}{2n^3}$,

3 Punkte **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

Aufgabe 5

2 Punkte **a)** Seien $a \in D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Formulieren Sie das ε-δ-Kriterium für die Stetigkeit von f in a.

4 Punkte **b)** Sei $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Zeigen Sie, daß $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := g(x) \cdot \sin x \quad \text{für alle } x \in [0,1]$$

in $a = 0$ stetig ist.

Aufgabe 6

2 Punkte **a)** Formulieren Sie den 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

4 Punkte **b)** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Beweisen Sie folgende Aussage des Kurstextes: Ist $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in I mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$, so ist f eine konstante Funktion.

Aufgabe 7

Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und berechnen Sie sie gegebenenfalls:

3 Punkte **a)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin x}$,

5 Punkte **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh x - x}{\cosh x - 1}$.

Aufgabe 8

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$, sei (f_n) eine Folge in $\mathrm{Abb}(D, \mathbb{R})$, und sei $f \in \mathrm{Abb}(D, \mathbb{R})$.

2 Punkte **a)** Formulieren Sie das ε-n_0-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz (Konvergenz im Sinne der Norm) von (f_n) gegen f.

4 Punkte **b)** Sei (a_n) eine Nullfolge in $\mathbb{R}$, für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in D$ gelte

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n.$$

Zeigen Sie, daß (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert.

Aufgabe 9

2 Punkte **a)** Definieren Sie den Begriff des Konvergenzradius einer Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ ($a_n, a \in \mathbb{R}$).

5 + 3 Punkte **b)** Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die folgenden Potenzreihen konvergieren:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$, (ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^n (x-2)^n$.

Aufgabe 10

4 Punkte **a)** Wie ist die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert?
Begründen Sie bei Ihrer Antwort, warum exp auf ganz $\mathbb{R}$ definiert werden kann.

2 Punkte **b)** Beweisen Sie: $\exp' = \exp$.

6 Punkte **c)** Beweisen Sie die Funktionalgleichung $\exp(x) \cdot \exp(-x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
(Alle Aussagen stehen im Kurs, sie sollen hier nochmal bewiesen werden.)

Aufgabe 11

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

3 Punkte **a)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$,

5 Punkte **b)** $\displaystyle\int_a^b e^{\sqrt{x+1}} \, dx$ für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $-1 \leq a < b$.

$f : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ mit $f(x) :=$	Definitionsintervall(e) I	Stammfunktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit $F(x) :=$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N}^0)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x^{-n} \quad (n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$	$]-\infty, 0[,\ ]0, \infty[$	$\frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
x^{-1}	$]0, \infty[$	$\log x\ (= \log \lvert x \rvert)$
x^{-1}	$]-\infty, 0[$	$\log(-x)\ (= \log \lvert x \rvert)$
$x^a \quad (a \in \mathbb{R},\ a \neq -1)$	$]0, \infty[$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$	$\arcsin x$
$e^x\ (= \exp x)$	$\mathbb{R}$	e^x
$a^x\ (= e^{x \log a})$ mit $a > 0,\ a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\log a}a^x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin x$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\cos x$
$\frac{1}{\cos^2 x}\ (= 1 + \tan^2 x)$	$](k - \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi[\quad (k \in \mathbb{Z})$	$\tan x$
$\frac{1}{\sin^2 x}\ (= 1 + \cot^2 x)$	$]k\pi, (k+1)\pi[\quad (k \in \mathbb{Z})$	$-\cot x$
$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$	$\mathbb{R}$	$\sinh x$
$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$	$\mathbb{R}$	$\cosh x$