Protokoll zur Prüfung Funktionentheorie I , 1340

Datum : 1.4.2003
Dauer : ca. 25 Min
Prüfer : Prof. Duma
Beisitzer: Hr. Scheja
Note: 1,0

Fragengebiete

* Zentrales Thema der Funktionentheorie: komplexe Differenzierbarkeit
Definition, äquivalente Aussagen (Cauchy - Riemann) , Wirtinger Ableitungen

* Sätze , die in der komplexen Analysis, nicht aber in IR gelten :
Maximumprinzip, Offenheitssatz, Liouville, Weierstraß'scher Entwicklungssatz etc.

* Fundamentalsatz der Algebra, Definition und Beweis mit Satz von Liouville,
Beweis von Liouville (Abschätzung über Taylorkoeffizienten)

* Singularitäten : Definition isolierte Singularität , Typen von Singularitäten allgemein (hebbar, Pole, wesentliche) mit Beispielen und Charakterisierung (hebbar: in z0 durch stetige Fkt. Fortsetzbar, Pole: darstellbar als g(z)/(z-z0)^m

*Zusammenhang Singularitäten mit Laurentreihen
Definition Laurentreihe
Singularität ablesbar aus LR über die Koeffizienten der LR (hebbar: Koeffizienten mit negativen Indices verschwinden, Pole : bei Pol m.ter Ordnung verschwinden Koeffizienten mit Index µ=-(m+1), wesentliche: unendliche viele Koeffizienten mit negativen Indices verschwinden nicht)

*Werteverhalten / Konvergenzverhalten bei Singularität in z0 (Pol: Konvergenz gegen unendlich, wesentlich: fast alle Werte werden angenommen)

*Cauchy Integralsatz
Definition und Beweis nach Goursat (komplett)

*Residuensatz
Definition Residuum, Residuenformel
Erläuterung Zusammenhang mit LR

Prof. Duma ist ein sehr netter Prüfer, die Prüfungsatmosphäre sehr entspannt und locker. Prüfungs“strategie“: Zu allen angeschnittenen Themen möglichst ausführlich antworten, Zusammenhänge darstellen, Beweise von sich aus anbieten, wichtige Definitionen auch formal korrekt beherrschen .

Diplomprüfung Reine Mathematik (Funktionentheorie I und II) Okt 2001
Prüfer: Prof. Dr. Duma
Beisitzer: Herr Scheja
Dauer: 50 Min.

Frage: Worin unterscheiden sich reelle Analysis und Funktionentheorie?
Antwort: z. B. Gültigkeit des Maximumprinzips, einmal differenzierbar – immer differenzierbar.
Frage: Definition der komplexen Differenzierbarkeit. Welche äquivalente Bedingung gibt es?
Antwort: Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen
Frage nach dem Wirtinger-Kalkül
Antwort: Differenzieren nach z und z quer als unabhängige Variablen
Frage nach dem Zusammenhang der Differenzierbarkeit nach z und z quer mit der nach x und y
Als Antwort wurden die entsprechenden Wirtinger-Formeln verlangt.
Frage: Woran liegt es, dass eine Funktion, die einmal differenzierbar ist, unendlich oft differenzierbar ist?
Antwort: Entwickelbarkeit in eine Taylorreihe, Weierstraßscher Entwicklungssatz, Beweis mit Cauchy-Kern und dessen Entwickelbarkeit in eine geometrische Reihe, die kompakte Konvergenz nach sich zieht.
Frage: Formulierung des Maximumprinzips und seines Beweises
Erwartet wurde hier der Offenheitssatz.
Frage nach dem Offenheitssatz und seines Beweises
Frage: Cauchy-Integralsatz mit Beweis
Als Antwort wurde die genaue Kenntnis des Beweises gefordert, ohne dass ich allerdings alles aufschreiben musste.
Frage nach dem Residuensatz und seines Beweises
Den Beweis brauchte ich nicht ausführlich darzulegen, sondern wurde unterbrochen mit einer Skizze (Weg, Singularitäten, Integration um die Singularitäten herum) und der Frage nach ihrer Interpretation.
Frage nach den Anwendungen des Residuensatzes.
Frage: Möchten Sie lieber den Satz von Montel oder den Riemannschen Abbildungssatz erläutern?
Antwort: Ich wählte den Satz von Montel mit dem Hinweis, dass mir beide Sätze gleich lieb sind.
Frage nach Definition von gleichgradiger Stetigkeit, gleichartiger Beschränktheit und normalen Familien.
Frage nach der Beweisidee des Satzes von Montel (mit Satz von Arzela, Anwendung des Cauchy-Integralsatzes)
Frage: Wie geht der Satz von Montel in den Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes ein?
Antwort: Nennen des Riemannschen Abbildungssatzes, allgemeines Erläutern der Beweisidee bis zum Eingang des Satzes von Montel.
Frage nach einem wichtigen Satz, der die Automorphismen betrifft.
Antwort: Lemma von Schwarz, Hinweis auf die Form der nullpunkttreuen Automorphismen des Einheitskreises.
Frage: Kennt man die Automorphismen der oberen Halbebene schon dadurch, dass man die Automorphismen des Einheitskreises kennt?
Antwort: Die Menge der biholomorphen Abbildungen zwischen Gebieten ist gleich groß wie die Menge der Automorphismen des Einheitskreises (Daraufhin wurde nicht mehr weitergefragt).
Frage. Möchten Sie lieber etwas zu Mittag-Leffler oder zu den elliptischen Funktionen sagen?
Antwort: Ich wählte Mittag-Leffler, genauer Wortlaut des Satzes, Beweisidee, Rolle der Polverschiebungsbedingung und der kompakten Konvergenz.

Bemerkungen:
Die Prüfung fand in einer sehr lockeren, freundlichen Atmosphäre statt. Prof. Duma war von vornherein positiv eingestellt. Auch bei einer falschen Antwort blieb er unverändert freundlich, machte erklärende Anmerkungen und fand tröstende, aufmunternde Worte („Das macht nichts, wenn Sie das nicht wissen“). Die Note (1,7) spiegelte exakt meinen Wissensstand wider.