zu Aufgabe 1 Mengen (6 Punkte)

zu Teil 1 (3 Pkt.):

$$
\begin{aligned}
& (A \times B) \cap (\overline{B} \times \overline{A}) \\
= \; & (\{2,4\} \times \{2,3,5\}) \;\cap\; (\{1,4\} \times \{1,3,5\}) \\
= \; & \{(2,2),(2,3),(2,5),(4,2),(4,3),(4,5)\} \cap \{(1,1),(1,3),(1,5),(4,1),(4,3),(4,5)\} \\
= \; & \{(4,3),(4,5)\}
\end{aligned}
$$

zu Teil 2 (3 Pkt.):

$$
\begin{aligned}
& |\,(\mathcal{P}(B) \cup \mathcal{P}(C)) \times \mathcal{P}(C)\,| \\
= \; & (\,|\,(\mathcal{P}(B)\,| + |\,\mathcal{P}(C)\,| - |\,\mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C)\,|\,) \cdot |\,\mathcal{P}(C)\,| \\
= \; & (2^3 + 2^2 - 1) \cdot 2^2 \\
= \; & 11 \cdot 4 \\
= \; & 44
\end{aligned}
$$

zu Aufgabe 2 Funktionen (14 Punkte)

zu Teil 1 (7 Pkt.):

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{falls } x \text{ durch 2 teilbar} \\ -\frac{x+1}{2} & \text{falls } x+1 \text{ durch 2 teilbar} \end{cases}$$

ist bijektiv.

Das kann man wie folgt zeigen:

f ist injektiv: Sei $f(x) = f(y)$.

Fall 1: $f(x) = f(y) \geq 0$: Dann ist $f(x) = \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = f(y)$, woraus sofort $x = y$ folgt.

Fall 2: $f(x) = f(y) < 0$: Dann ist $f(x) = -\frac{x+1}{2} = -\frac{y+1}{2} = f(y)$, woraus ebenso $x = y$ folgt.

f ist surjektiv: Sei $y \in \mathbb{Z}$.

Fall 1: Für $y < 0$ ist $x := -2y - 1$ ein Urbild, denn $f(-2y-1) = -\frac{(-2y-1+1)}{2} = y$.

Fall 2: Für $y \geq 0$ ist $x := 2y$ ein Urbild, denn $f(2y) = \frac{2y}{2} = y$.

zu Teil 2 (7 Pkt.):

Eine ordnungserhaltende Bijektion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$ kann es nicht geben. Denn angenommen es gäbe ein solches f, dann gäbe es insbesondere ein $x_0 \in \mathbb{N}$ mit $f(x_0) = 0$ und es müsste gelten

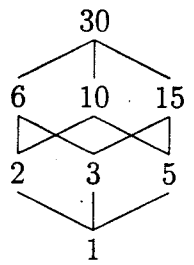
1. $f(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$
2. $f(\mathbb{N}) = \{f(0), f(1), \ldots, f(x_0 - 1), f(x_0), f(x_0 + 1), \ldots\}$,
   wobei $f(0) < f(1) < \cdots < f(x_0) = 0 < f(x_0 + 1) < \ldots$

Das heißt, in $f(\mathbb{N})$ liegen nur endlich viele Werte, die kleiner als 0 sind. Daher kann f nicht surjektiv sein.

Zweite Lösung:
Angenommen, es gäbe ein solches f. Dann müßte gelten: Wenn $0 < y$, so auch $f(0) < f(y)$. Da f surjektiv ist, hiesse die letzte Behauptung, dass sämtliche ganzen Zahlen (bis auf $f(0)$) grösser sind als $f(0)$. Das stünde im Widerspruch mit der Tatsache, dass es beliebig kleine ganze Zahlen gibt.

zu Aufgabe 3 Ordnungen und Verbände (10 Punkte)

zu Teil 1 (6 Pkt.):
Die Menge aller Teiler von 30 ist $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.



zu Teil 2 (4 Pkt.):
Diese Halbordnung ist auch ein Verband. Denn, für jede zweielementige Teilmenge $\{a, b\}$ der Menge $M =_{def} \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, es gibt in der Menge M bezüglich der Teilbarkeitsrelation sowohl das Infimum $\inf(a, b)$ (das ist der grösste gemeinsame Teiler von a, b), als auch das Supremum $\sup(a, b)$ (das ist das kleinste gemeinsame Vielfache von a, b).

zu Aufgabe 4 Aussagenlogik (10 Punkte)

zu Teil 1 (5 Pkt.):
„Wenn es ein $i \in \{1, \ldots n\}$ gibt, so dass D_i unerfüllbar ist, dann ist G bereits unerfüllbar“: Das ist wahr. Das folgt direkt aus der Wahrheitstafel von $\wedge$:

Sei I eine beliebige Belegung der Aussagenvariablen der Formel G mit Wahrheitswerten T, F. Wenn es ein $i \in \{1, \ldots n\}$ gibt, so dass D_i unerfüllbar ist, dann muss auch $Auswertung_I(D_i) = F$ sein. Damit ist auch $Auswertung_I(G) = Auswertung_I(D_1 \wedge \cdots \wedge D_n) = F$. Und weil das für beliebige Belegung I gilt, muss G unerfüllbar sein.

zu Teil 2 (5 Pkt.):
„Wenn G unerfüllbar ist, dann ist bereits eines der D_i unerfüllbar“: Das ist falsch. Gegenbeispiel:

$$\begin{aligned} D_1 &=_{def} A \\ D_2 &=_{def} \neg A \\ G &=_{def} D_1 \wedge D_2 = A \wedge \neg A \end{aligned}$$

Sowohl D_1 als auch D_2 sind offensichtlich erfüllbar, G selbst aber nicht.

zu Aufgabe 5 Aussagenlogik (14 Punkte)

zu Teil 1 (6 Pkt.):

$$
\begin{aligned}
& \big((A \to B) \to C\big) \ \vee \ \neg(C \to A) \\
\equiv \ & \big((\neg A \vee B) \to C\big) \ \vee \ \neg(\neg C \vee A) && (\to \text{ auflösen}) \\
\equiv \ & \big(\neg(\neg A \vee B) \vee C\big) \ \vee \ \neg(\neg C \vee A) && (\to \text{ auflösen}) \\
\equiv \ & (A \wedge \neg B) \ \vee \ C \ \vee \ (\neg A \wedge C) && (\neg \text{ hereinziehen})
\end{aligned}
$$

zu Teil 2 (8 Pkt.):
Die Formel lautet

$$\mathbf{G} =_{def} \neg A \to \big((A \wedge B) \vee (B \leftrightarrow \neg C)\big)$$

Wahrheitstafel:

$\neg A$	$\to$	$\big((A \wedge B)$	$\vee$	$(B \leftrightarrow \neg C)\big)$	A	B	C	$\mathbf{G}$
F	T				T	T	T	T
F	T				T	T	F	T
F	T				T	F	T	T
F	T				T	F	F	T
T	F	F	F	F	F	T	T	F
T	T	F	T	T	F	T	F	T
T	T	F	T	T	F	F	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F	F

zu Aufgabe 6 Aussagenlogik (18 Punkte)

Um die Eigenschaften einer aussagenlogischen Formel zu untersuchen, kann man die Wahrheitstafel aufstellen, mit möglichen Belegungen argumentieren oder Äquivalenzumformungen machen.

zu Teil 1 (6 Pkt.):
$G_1 =_{def} ((A \to \neg B) \vee \neg A) \to \neg C$

ist erfüllbar und falsifizierbar, also weder allgemeingültig noch unerfüllbar. Zum Beispiel:

Jede Belegung I, für die $I(C) = F$ gilt, wird G_1 erfüllen ("verifizieren").

Jede Belegung J, für die $J(A) = F$ und $J(C) = T$ gilt, wird G_1 falsifizieren.

zu Teil 2 (6 Pkt.):
$G_2 =_{def} ((\neg A \to B) \wedge \neg B) \to \neg C \vee \neg B$

ist allgemeingültig, also erfüllbar und nicht falsifizierbar.

Das kann man an der folgenden Umformung sehen:

$$
\begin{aligned}
& ((\neg A \to B) \wedge \neg B) \to \neg C \vee \neg B & \\
\equiv\ & \big((\neg(\neg A) \vee B) \wedge \neg B\big) \to \neg C \vee \neg B & (\to \text{ auflösen}) \\
\equiv\ & \neg\big((\neg(\neg A) \vee B) \wedge \neg B\big) \vee \neg C \vee \neg B & (\to \text{ auflösen}) \\
\equiv\ & \neg\big((A \vee B) \wedge \neg B\big) \vee \neg C \vee \neg B & (\text{Doppelnegation entfernen}) \\
\equiv\ & \neg(A \vee B) \vee B \vee \neg C \vee \neg B & (\neg \text{ hereinziehen, Doppelnegation entfernen}) \\
\equiv\ & \neg(A \vee B) \vee (B \vee \neg B) \vee \neg C & (\text{Assoziativität und Kommutativität von } \vee)
\end{aligned}
$$

Diese Disjunktion enthält als Teilformel $(B \vee \neg B)$, ist also allgemeingültig.

zu Teil 3 (6 Pkt.):
$G_3 =_{def} (\neg A \to B) \wedge \neg A \wedge \neg B$ ist unerfüllbar, wird also von jeder Belegung falsifiziert. Das kann man zum Beispiel an der Wahrheitstafel ablesen:

A	B	$(\neg A \to B)$	$\neg A$	$\neg B$	G_3
T	T	T	F	F	F
T	F	T	F	T	F
F	T	T	T	F	F
F	F	F	T	T	F

zu Aufgabe 7 Prädikatenlogik (9 Punkte)

Man merke: Die Existenz-Quantifizierung $\exists x$ bezieht sich auf die ganze Formel. Das folgt aus den vereinbarten Bindungsprioritäten (Seite 139 des Kurstextes), wonach "$\rightarrow$" stärker bindet als die Quantoren. (Als Hinweis darauf diente im Aufgabentext die Bedingung, dass die Formel geschlossen sei.)

$$
\begin{aligned}
& \exists x\ P(x, f(x)) \rightarrow \big(\forall y\,(Q(y,x) \vee \exists y\, R(g(x), y))\big) \\
= \ & \exists x \Big(P(x, f(x)) \rightarrow \big(\forall y\,(Q(y,x) \vee (\exists y\, R(g(x), y)))\big)\Big) && \text{(Bindungsprioritäten)} \\
\equiv \ & \exists x \Big(\neg P(x, f(x)) \vee \big(\forall y\,(Q(y,x) \vee (\exists y\, R(g(x), y)))\big)\Big) && (\rightarrow \text{ auflösen}) \\
\equiv \ & \exists x \Big(\neg P(x, f(x)) \vee \big(\forall y\ (Q(y,x) \vee (\exists z\ R(g(x), z)))\big)\Big) && \text{(Variable umbenennen)} \\
\equiv \ & \exists x \Big(\neg P(x, f(x)) \vee \big(\forall y\ \exists z\ (Q(y,x) \vee R(g(x), z))\big)\Big) && \text{(Quantor } \exists z \text{ vorziehen)} \\
\equiv \ & \exists x\ \forall y\ \exists z \Big(\neg P(x, f(x)) \vee Q(y,x) \vee R(g(x), z)\Big) && \text{(Quantoren } \forall y \exists z \text{ vorziehen)} \\
= \ & \exists x\ \forall y\ \exists z\ \neg P(x, f(x)) \vee Q(y,x) \vee R(g(x), z) && \text{(Bindungsprioritäten)}
\end{aligned}
$$

zu Aufgabe 8 (14 Punkte) Logisches Schließen mit Prädikatenlogik

Sei $G =_{def}$

$\forall x \forall y \forall z \, \big(P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z)\big) \wedge P(a,b) \wedge P(b,c) \wedge \big(\forall x \forall y \; P(x,y) \rightarrow \neg P(y,x)\big) \wedge P(c,a)$.

Wir können folgende Inferenzen ziehen:

$$\frac{G}{\forall x \forall y \forall z \; \big(P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z)\big)} \; (\wedge\text{-Elim})$$

$$\frac{\forall x \forall y \forall z \; (P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z))}{P(a,b) \wedge P(b,c) \rightarrow P(a,c)} \; (\forall\text{-Inst})$$

$$\frac{G}{P(a,b) \wedge P(b,c)} \; (\wedge\text{-Elim})$$

$$\frac{G}{P(c,a)} \; (\wedge\text{-Elim})$$

$$\frac{\begin{array}{l} P(a,b) \wedge P(b,c) \rightarrow P(a,c) \\ P(a,b) \wedge P(b,c) \end{array}}{P(a,c)} \; (\text{MP})$$

$$\frac{G}{\forall x \forall y \; P(x,y) \rightarrow \neg P(y,x)} \; (\wedge\text{-Elim})$$

$$\frac{\forall x \forall y \; P(x,y) \rightarrow \neg P(y,x)}{P(a,c) \rightarrow \neg P(c,a)} \; (\forall\text{-Inst})$$

$$\frac{\begin{array}{l} P(a,c) \rightarrow \neg P(c,a) \\ P(a,c) \end{array}}{\neg P(c,a)} \; (\text{MP})$$

$$\frac{\begin{array}{l} P(c,a) \\ \neg P(c,a) \end{array}}{P(c,a) \wedge \neg P(c,a)} \quad \textbf{(}\wedge\textbf{-Einf)}$$

Insgesamt folgt also

$$G \vdash O,$$

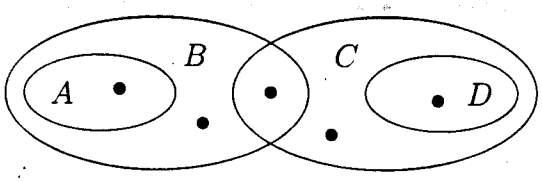
d. h. aus G kann man in unserem Kalkül die unerfüllbare Formel O ableiten. Weil unser Kalkül korrekt ist, entspricht jede Ableitung einer logischen Folgerung, d. h. wenn $A \vdash B$ so auch $A \models B$. In anderen Worten, wir haben

$$G \models O,$$

d. h. aus G folgt die unerfüllbare Formel. Daher ist auch G unerfüllbar.

Etwas mehr Detail zum letzten Satz: Wenn $G \models O$, laut Theorem 3.23 ist $G \to O$ allgemeingültig, oder anders gesagt, $\neg G \vee O$ ist allgemeingültig. Da O unerfüllbar ist, es muss $\neg G$ allgemeingültig sein, oder anders gesagt (laut Theorem 3.24), es muss G unerfüllbar sein.

zu Aufgabe 9 Modellierung (5 Punkte)



Aussage	trifft zu	trifft nicht zu
$\forall x\ D(x) \rightarrow C(x)$	×	
$\forall x\ \neg B(x) \rightarrow \neg A(x)$	×	
$\exists x\ D(x) \wedge \neg B(x)$	×	
$\forall x\ (B(x) \wedge C(x)) \rightarrow \neg A(x)$	×	
$\forall x\ \neg D(x) \rightarrow \big(A(x) \vee C(x)\big)$		×