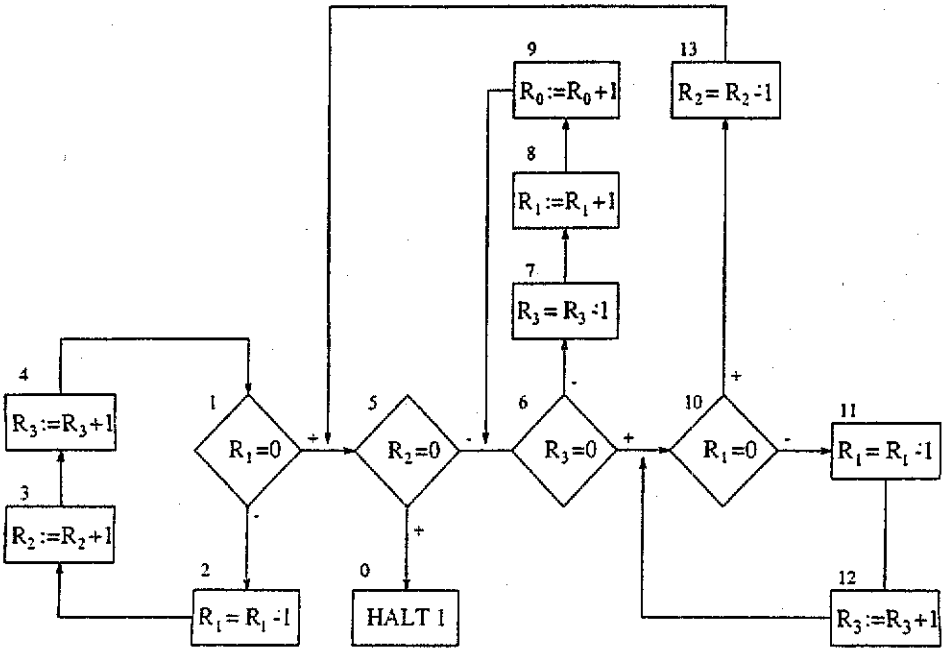
1653 Klausur vom 10.2.2001 (HE)

Allgemeine Hinweise zur Klausur:

Bitte beachten Sie den Anhang. Sie dürfen in dieser Klausur ohne Beweis voraussetzen, dass die im Anhang (Satz 3.5) aufgeführten Funktionen berechenbar sind.

Aufgabe 1 *(15 Punkte)*

Die einstellige Registermaschine M sei durch das folgende Flußdiagramm gegeben:



a) Welche Funktion und welchen Test berechnet M?

(5 Punkte)

b) Beweisen Sie 2 der 3 folgenden Aussagen:

(i) $(\forall x \exists n)(ES^n(1,(0,x,0,0,\ldots)) = (1,(0,0,x,x,0,0,\ldots)))$

(ii) $(\forall x \forall y \forall z \exists n)(ES^n(6,(x,0,y,z,0,\ldots)) = (6,(x+z,z,y,0,0,\ldots)))$

(iii) $(\forall x \forall y \forall z \exists n)(ES^n(10,(x,y,z,0,\ldots)) = (10,(x,0,z,y,0,\ldots)))$

(5 Punkte)

c) Beweisen Sie Ihre Antwort aus Teil a). Hierbei dürfen Sie die Aussagen (i),(ii) und (iii) aus Teil (b) ohne zusätzlichen Beweis nutzen.

(5 Punkte)

Aufgabe 2 *(15 Punkte)*

Zeigen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ das Produkt paarweise verschiedener Primzahlen ist} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(für alle x), ist berechenbar.

(Beispiel für $f(x)$: $f(10) = 1$, da $10 = 5 \cdot 2$, $f(50) = 0$, da $50 = 5 \cdot 5 \cdot 2$.)

Aufgabe 3 *(15 Punkte)*

Zeigen Sie, dass die Wortfunktion $f : \{a\}^* \to \{a\}^*$, definiert durch

$$f(a^n) = \begin{cases} a, & \text{falls } n \text{ Primzahl} \\ \varepsilon, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(für alle $n \in \mathbb{N}$), berechenbar ist.

Aufgabe 4 *(15 Punkte)*

Bezeichne φ die Standardnumerierung von $P^{(1)}$ und Φ die zugehörige Standardkomplexität.

Welche der folgenden Funktionen können berechenbar gewählt werden?
(Beweisen Sie Ihre Antwort.)

a) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\varphi_{g(i)}(x) = \varphi_{\varphi_i(x)}(x) + 1$ für alle $i, x \in \mathbb{N}$,
(5 Punkte)

b) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $\varphi_{f(i,x)}(y) = (\Phi_i(x))^{\varphi_i(y)}$ für alle $i, x, y \in \mathbb{N}$, (es sei $0^0 = 1$).
(5 Punkte)

c) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\varphi_{h(i)}(x) = max(\{0\} \cup \{\varphi_i(y) \mid y \leqq x \wedge y \in Def(\varphi_i)\})$ für alle $i, x \in \mathbb{N}$.
(5 Punkte)

Hierbei bezeichne $\max A$ für $A \subseteqq \mathbb{N}$ das Maximum von A.

Aufgabe 5 *(15 Punkte)*

Zeigen Sie:

Weder die Menge $A = \{\langle i, j, k\rangle \mid \varphi_i = \varphi_j \text{ oder } \varphi_j = \varphi_k\}$ noch ihr Komplement $\mathbb{N} \setminus A$ ist rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 6 *(15 Punkte)*

Bezeichne im Folgenden $p(i)$ die i-te Primzahl, d.h. $p(0) = 2, p(1) = 3, p(2) = 5$ etc. Weiter sei $\nu_p : \mathbb{N} \to E(\mathbb{N})$ die folgende Numerierung der endlichen Teilmengen $E(\mathbb{N}) = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ endlich}\}$ von $\mathbb{N}$:

$$\nu_p(x) = \{i \in \mathbb{N} \mid p(i) \text{ teilt } x + 1\}$$

a) Zeigen Sie: Die Vereinigungs- und Durchschnittsoperation

$$\cup : E(\mathbb{N})^2 \to E(\mathbb{N}), \cup(A, B) = A \cup B$$

$$\cap : E(\mathbb{N})^2 \to E(\mathbb{N}), \cap(A, B) = A \cap B$$

sind (ν_p, ν_p, ν_p) berechenbar.

(7 Punkte)

b) Geben Sie eine Numerierung ν von $E(\mathbb{N})$ an, die nicht zu ν_p äquivalent ist, d.h. $\nu \not\equiv \nu_p$.

(8 Punkte)

ANHANG

Satz 3.5 Die wie folgt definierten Funktionen f und Tests t sind berechenbar.

(1) $\tilde{0} : \mathbb{N}^0 \longrightarrow \mathbb{N}, \tilde{0}() := 0$ (nullstellige Nullfunktion).

(2) $Z : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, Z(x) := 0$ (einstellige Nullfunktion).

(3) $S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, S(x) := x + 1$ (Nachfolgerfunktion).

(4) $V : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, V(x) := x \dot{-} 1$ (Vorgängerfunktion).

(5) $pr_i^{(k)} : \mathbb{N}^k \longrightarrow, pr_i^{(k)}(x_1, ..., x_k) := x_i$ für $1 \leq i \leq k$ (Projektion).

(6) $f(x_1, ..., x_n) := k$ für $n, k \in \mathbb{N}$ (konstante Funktionen).

(7) $f(x, y) := x + y$ (Summe).

(8) $f(x, y) := x \dot{-} y$ (arithmetische Differenz).

(9) $f(x, y) := x \cdot y$ (Produkt).

(10) $q, r : \subseteq \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $x = q(x, y) \cdot y + r(x, y)$ und $r(x, y) < y$ für $y \neq 0$ und $q(x, y) = r(x, y) = div$ für $y = 0$ (Quotient und Rest).

(11) $f(x, y) := x^y$ mit $0^0 := 1$ (Exponentiation).

(12) $f(x) := (\sqrt{x}$ falls x Quadratzahl, div sonst).

(13) $max(x, y)$.

(14) $min(x, y)$.

(15) $t(x) := (1$ falls x Primzahl, 2 sonst).

(16) $f(x) :=$ die x-te Primzahl.

(17) $t(x, y) := (1$ falls $x < y, 2$ sonst). (Entsprechend für $\leq, =, \geq, >, \neq$ anstelle von $<$.)

(18) Es sei $A \subseteq \mathbb{N}$ endlich. $f(x) := (0$ falls $x \in A, 1$ sonst).

(19) Es sei $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ berechenbar. $f(x) :=$ (die kleinste Zahl y mit $g(y) = x$ falls $x \in Bild(g), div$ sonst).

(20) Es sei $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ berechenbar, und es gelte $(\forall y) g(y) < g(y + 1)$. Dann sei $f(x) := max\{y \mid g(y) \leq x\}$.