Kurs 1653 - HK 2004, 21.02.2004

1653 Einführung in die Theoretische Informatik A
Klausur vom 21. Februar 2004

Es sollten Ihnen 9 Seiten Klausurtext vorliegen:

- das Deckblatt für Ihre Lösungen,
- eine Teilnahmebescheinigung zur Vorlage beim Finanzamt,
- diese Vorbemerkungen,
- 4 Blätter mit 8 Aufgaben,
- 2 Seiten Anhang.

Prüfen Sie zunächst die Vollständigkeit Ihrer Klausurunterlagen.

Für die Bearbeitung der Klausuraufgaben haben Sie 3 Stunden Zeit. Einen Leistungsnachweis zum Kurs 1653 erhalten Sie, wenn Sie

- in dieser Klausur mindestens 36 der möglichen 90 Punkte erreichen und zusätzlich mindestens 25% der insgesamt möglichen Punktzahl in den Einsendeaufgaben erreicht haben.

Die Benutzung von Hilfsmitteln (wie z. B. des Kurstextes) ist nicht erlaubt!

Füllen Sie bitte zunächst das Deckblatt für Ihre Lösungen aus. Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben links Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Falls es sich um ein Fortsetzungsblatt zu einer Aufgabe handelt, geben Sie bitte zusätzlich die Nummer der Aufgabe an. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift!
Bei Abgabe Ihrer Lösungsblätter heften Sie diese bitte möglichst nach Aufgaben sortiert, beginnend mit dem Deckblatt und der Bescheinigung für das Finanzamt, zusammen.

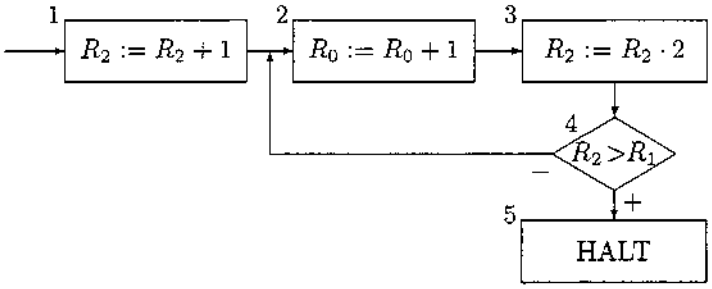
Bei der Bearbeitung der Klausuraufgaben wünschen wir Ihnen viel Erfolg. Wir senden Ihnen die korrigierten Aufgaben so rasch wie möglich – etwa in drei Wochen – zurück.

Mit freundlichen Grüßen

IHRE KURSBETREUER

Aufgabe 1 *(15 Punkte)*

Eine einstellige verallgemeinerte Registermaschine M sei durch das folgende Flußdiagramm gegeben:



Außerdem sei die Funktion $\log : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$\log(n) := \min\{k \geq 1 \mid 2^k > n\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

(Achtung: $\log(n)$ bezeichnet hier anschaulich die Länge der Dualdarstellung der Zahl n, nicht den dyadischen Logarithmus.)

(a) *(7 Punkte)*
Sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie durch vollständige Induktion über t, daß für alle $t \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} & 2^t \leq n \\ \Longrightarrow\ & \mathrm{ES}^{3t}(4, (1, n, 2, 0, 0, 0, \ldots)) = (4, (t+1, n, 2^{t+1}, 0, 0, 0, \ldots)). \end{aligned}$$

(b) *(7 Punkte)*
Folgern Sie aus (a), daß $f_M = \log$ gilt.

(c) *(1 Punkt)*
Begründen Sie, weshalb aus (b) folgt, daß log eine berechenbare Funktion ist.

Aufgabe 2 *(15 Punkte)*

Zeigen Sie unter Verwendung der im Anhang angegebenen primitiv-rekursiven Funktionen, daß die folgenden Funktionen auch primitiv-rekursiv sind:

(a) *(8 Punkte)*
Die Funktion $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$t(n) := \begin{cases} 1 & \text{falls es ein } k \in \mathbb{N} \text{ mit } 2^k = n \text{ gibt} \\ & \text{(d.h. falls } n \text{ eine Zweierpotenz ist)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.
(Hinweis: Sie dürfen ohne weitere Begründung die Identität

$$t(n) = \sum_{i=0}^{n} g(n, e(i))$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit den Funktionen g und e aus dem Satz im Anhang der Klausur verwenden.)

(b) *(7 Punkte)*
Die Funktion $L : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$L(n) := \text{card}(\{k \in \mathbb{N} \mid 2^k \leq n\} \cup \{0\})$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.
(Hinweis: Für die Lösung von (b) dürfen Sie (a) voraussetzen. Übrigens gilt $L = \log$ für die Funktion log aus Aufgabe 1; das spielt aber für die Lösung dieser Aufgabe keine Rolle.)

Aufgabe 3 *(10 Punkte)*

Sei $\Sigma := \{0, 1\}$. Für alle $w \in \Sigma^*$ bezeichne $f(w) \in \Sigma^*$ das längste Suffix (d.h. das längste Endstück) von w, das nicht mit "0" beginnt. Zeigen Sie durch graphische Angabe eines geeigneten Flußdiagramms

(a) *(3 Punkte)*
einer Bandmaschine,

(b) *(7 Punkte)*
einer Turingmaschine,

daß die hierdurch definiert Wortfunktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ berechenbar ist. Ein Korrektheitsbeweis ist nicht erforderlich.

Aufgabe 4 *(10 Punkte)*

Zeigen Sie, daß es eine total-berechenbare Funktion $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt, so daß

$$\varphi_i\langle j, n\rangle = \varphi_{s(i,j)}(n)$$

für alle $i, j, n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 5 *(10 Punkte)*

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ sei definiert durch

$$A := \{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i(0) \leq 2004\}.$$

(a) *(5 Punkte)*
Zeigen Sie, daß A rekursiv-aufzählbar ist.

(b) *(5 Punkte)*
Zeigen Sie, daß A nicht rekursiv ist.

Aufgabe 6 *(10 Punkte)*

Sei

$$H := \{\langle i, n\rangle \in \mathbb{N} \mid n \in \mathrm{Def}(\varphi_i)\}.$$

Für jede Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ gilt

$$A \text{ rekursiv-aufzählbar} \iff A \leq H \quad (*).$$

(a) *(3 Punkte)*
Zeigen Sie, daß H rekursiv-aufzählbar ist.

(b) *(1 Punkt)*
Begründen Sie den Teil "$\Longleftarrow$" der Aussage $(*)$.

(c) *(6 Punkte)*
Beweisen Sie den Teil "$\Longrightarrow$" der Aussage $(*)$.

Aufgabe 7 *(10 Punkte)*

Sei $\nu_{\mathbb{Q}} : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ die durch

$$\nu_{\mathbb{Q}}\langle i, j, k\rangle := \frac{i-j}{k+1}$$

für $i, j, k \in \mathbb{N}$ definierte Numerierung der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen. Zeigen Sie, daß die Minimumfunktion $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, die durch

$$f(p, q) := \min\{p, q\}$$

für alle $p, q \in \mathbb{Q}$ definiert ist, eine $(\nu_{\mathbb{Q}}, \nu_{\mathbb{Q}}, \nu_{\mathbb{Q}})$–berechenbare Funktion ist.

Aufgabe 8 *(10 Punkte)*

Sei $\rho :\subseteq \Sigma^\omega \to \mathbb{R}$ die Cauchy-Darstellung der reellen Zahlen. Zeigen Sie, daß die Funktion $t :\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die definiert ist durch

$$t(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ 1 & \text{falls } x > 0 \\ \text{div} & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, eine (ρ, ρ)–berechenbare Funktion ist.

Anhang

Definition (Substitution, primitive Rekursion)

- Für Funktionen $g :\subseteq \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ und $h_1, \ldots, h_m :\subseteq \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sei die Substitution $\mathrm{Sub}(g, h_1, \ldots, h_m) : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$\mathrm{Sub}(g, h_1, \ldots, h_m)(\bar{x}) := g(h_1(\bar{x}), \ldots, h_m(\bar{x}))$$

  für alle $\bar{x} \in \mathbb{N}^k$.

- Es seien $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$. Die durch die beiden Gleichungen

$$\begin{array}{lcl} f(\bar{x}, 0) & = & g(\bar{x}) \\ f(\bar{x}, y+1) & = & h(\bar{x}, y, f(\bar{x}, y)), \end{array}$$

  die für alle $\bar{x} \in \mathbb{N}^k$ und $y \in \mathbb{N}$ gelten, eindeutig bestimmte Funktion $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ wird mit $\mathrm{Prk}(g, h)$ bezeichnet. Man sagt: f entsteht aus g und h durch *primitive Rekursion.*

Definition (primitiv–rekursive Funktionen) Wir nennen

$$\mathrm{Gr} := \{\tilde{0}, Z, S\} \cup \{\mathrm{pr}_i^{(k)} \mid i, k \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k\}$$

die Menge der *primitiv–rekursiven Grundfunktionen* (die in der Menge Gr enthaltenen Funktionen sind weiter unten nochmals definiert).

Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ heißt *primitiv–rekursiv*, genau dann, wenn sie sich in endlich vielen Schritten aus der Menge Gr durch wiederholtes Anwenden der Operatoren Sub und Prk erzeugen läßt.

Satz (einige primitiv–rekursive Funktionen) *Die wie folgt definierten Funktionen sind primitiv–rekursiv:*

(a) $\tilde{0} : \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}$, $\tilde{0}(\,) := 0$ *(nullstellige Nullfunktion).*

(b) $Z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $Z(x) := 0$ *(einstellige Nullfunktion).*

(c) $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $S(x) := x + 1$ *(Nachfolgerfunktion).*

(d) $\mathrm{pr}_i^{(k)} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $\mathrm{pr}_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) := x_i$ *für* $1 \leq i \leq k$ *(Projektion).*

(e) $c_n^{(k)} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $c_n^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) := n$ *für alle* $k, n \in \mathbb{N}$ *(konstante Funktionen).*

(f) $s : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $s(x,y) := x + y$ *(Summe).*

(g) $V : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $V(x) := x \dot{-} 1$ *(Vorgängerfunktion).*

(h) $d : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $d(x,y) := x \dot{-} y$ *(arithmetische Differenz).*

(i) $m : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $m(x,y) := x \cdot y$ *(Multiplikation).*

(j) $e : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $e(x) := 2^x$ *(Exponentiation mit Basis 2).*

(k) $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $g(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x = y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ *(Gleichheitstest).*