Kurs 1653
Einführung in die Theoretische Informatik A
Lösungshinweise zur Klausur vom 18. Februar 2006

Aufgabe 1

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$.
$\underline{n = 0}$ Für $n = 0$ gilt

$$\mathrm{ES}^{4n}(3, (0, w, x, y, z, 0, ...)) = (3, (0, w, x \dot{-} 0, y + 0, z \dot{-} 0, 0, ...))$$

und damit die gewünschte Behauptung.
$\underline{n \to n+1}$ Sei $n + 1 \leq x$. Dann ist insbesondere $n \leq x$ und mit der Induktionsvoraussetzung erhalten wir

$$\begin{aligned} & \mathrm{ES}^{4(n+1)}(3, (0, w, x, y, z, 0, ...)) \\ = \; & \mathrm{ES}^{4}(3, (0, w, x \dot{-} n, y + n, z \dot{-} n, 0, ...)) \text{ da } n \leq x \\ = \; & (3, (0, w, x \dot{-} (n+1), y + (n+1), z \dot{-} (n+1), 0, ...)), \end{aligned}$$

also die Behauptung für $n + 1$. Damit ist die Induktion abgeschlossen.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} & \mathrm{ES}^{4b+4}(1, (0, a, b, 0, 0, ...)) \\ = \; & \mathrm{ES}^{4b+2}(3, (0, a, b, a, a, ...)) \\ = \; & \mathrm{ES}^{2}(3, (0, a, b \dot{-} b, a + b, a \dot{-} b, ...)) \\ = \; & \mathrm{ES}^{2}(3, (0, a, 0, a + b, a \dot{-} b, ...)) \\ = \; & \mathrm{ES}(7, (0, a, 0, a + b, a \dot{-} b, ...)) \\ = \; & (8, ((a + b)(a \dot{-} b), a, 0, a + b, a \dot{-} b, ...)). \end{aligned}$$

Insgesamt folgt daraus $f_M(a, b) = (a + b)(a \dot{-} b)$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$. Für $a \geq b$ gilt nach binomischer Formel

$$(a + b)(a \dot{-} b) = (a + b)(a - b) = a^2 - b^2 = a^2 \dot{-} b^2$$

und falls $a < b$, dann gilt auch $a^2 < b^2$ (da $a, b \geq 0$) und es folgt

$$(a + b)(a \dot{-} b) = (a + b) \cdot 0 = 0 = a^2 \dot{-} b^2.$$

Aufgabe 2

(a) Mit $z := (\langle a, b\rangle, c)$ gilt

$$f(z) = \pi^{(3)}\big(\,\mathrm{pr}_2^{(2)}(z),\ \pi_2(\mathrm{pr}_1^{(2)}(z)),\ \pi(\pi_1(\mathrm{pr}_1^{(2)}(z)), \pi_1(\mathrm{pr}_1^{(2)}(z)))\,\big)$$

(b) Es sei $f' : \mathbb{N}\backslash\{0\} \to \mathbb{N}\backslash\{0\}$ definiert durch

$$f'(m) := 3 \cdot (m-1) + 1.$$

Es gelte $d \operatorname{Sim} d'$, d.h. $d = d' - 1$. Dann existieren $f(d)$ und $f'(d')$. Desweiteren ist $f(d) \operatorname{Sim} f'(d')$ erfüllt, denn nach Definition von f gilt

$$f(d) = 3 \cdot d = 3 \cdot (d'-1) = 3 \cdot (d'-1) + 1 - 1 = f'(d') - 1.$$

Aufgabe 3

(a) Es ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{ES}^5\,(2, (10, B, \varepsilon)) &= \mathrm{ES}^4\,(3, (10, B, \varepsilon)) \\
&= \mathrm{ES}^3\,(4, (1, 0, B)) \\
&= \mathrm{ES}^2\,(3, (1, 0, B)) \\
&= \mathrm{ES}\,(4, (B, 1, 0B)) \\
&= (5, (B, 1, 0B))\,.
\end{aligned}$$

(b) Wir zeigen

$$\mathrm{ES}^{2\cdot n+2}\,(3, (ud0^n, c, v)) = (5, (u, d, 0^n cv))$$

durch vollständige Induktion nach n, wobei u, v, c und d wie in der Aufgabenstellung seien.

<u>$n = 0$:</u>

In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{ES}^{2\cdot 0+2}\,(3, (ud0^0, c, v)) &= \mathrm{ES}^2\,(3, (ud, c, v)) \\
&= \mathrm{ES}\,(4, (u, d, cv)) \\
&= (5, (u, d, cv)) \\
&= (5, (u, d, 0^0 cv))\,,
\end{aligned}$$

und die Behauptung ist bewiesen. (Beachte: $0^0 = \varepsilon$.)

<u>$n \Rightarrow n+1$:</u>

Zunächst stellen wir fest, dass

$$(*) \quad \mathrm{ES}^{2\cdot(n+1)+2}\,\big(3, (ud0^{n+1}, c, v)\big) = \mathrm{ES}^{2\cdot n+2}\,(3, (ud0^n, 0, cv))$$

gilt (einmaliger Schleifendurchlauf). Nun wenden wir auf die rechte Seite die Induktionsvoraussetzung an, und zwar mit ‚0' anstelle von ‚c' und ‚cv' anstelle von ‚v'. (Beachte: In der Behauptung sind die Variablen c und v allquantifiziert.) Danach ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathrm{ES}^{2\cdot n+2}(3,(ud0^n,0,cv)) &= (5,(u,d,0^n0cv)) \\ &= (5,(u,d,0^{n+1}cv)). \end{aligned}$$

Zusammen mit $(*)$ folgt daraus die Behauptung für $n+1$. Damit ist der Induktionsbeweis beendet.

(c) Es sei wie in der Aufgabenstellung $f : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ definiert durch

$$f(w) := \text{das längste Endstück von } w \text{ aus } \{0\}^*,$$

für alle $w \in \Sigma^*$. Wir zeigen $f = f_M$ mit Hilfe von (1) und (2). Dazu spezialisieren wir in (1) wie folgt: $v := \varepsilon$, $c := B$ und $u := \varepsilon$. Wir erhalten dann aus (1)

$$\mathrm{ES}^{2\cdot\lg(w)+2}(1,(\varepsilon,B,wB)) = (3,(Bw,B,\varepsilon)).$$

Es gibt nun ein $n \in \mathbb{N}$, so dass sich w in der Form $w = x0^n$ mit $x \in \Sigma^*$ schreiben lässt, wobei entweder $x = \varepsilon$ oder $x = y1$ für ein $y \in \Sigma^*$ gilt. (In jedem Fall ist also $0^n = f(w)$.) Im ersten Fall setzen wir in (2) $u = \varepsilon$, $d := B$, $c := B$ und $v = \varepsilon$, im zweiten $u = y$, $d := 1$, $c := B$ und $v = \varepsilon$. Mit (2) ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \mathrm{ES}^{2\cdot n+2}(3,(Bw,B,\varepsilon)) &= \mathrm{ES}^{2\cdot n+2}(3,(ud0^n,B,\varepsilon)) \\ &= (5,(u,d,0^nB)). \end{aligned}$$

Insgesamt folgt aus (1) und (2)

$$\mathrm{ES}^{2\cdot\lg(w)+2+n+2}(1,(\varepsilon,B,wB)) = (5,(u,d,0^nB)).$$

Unter Berücksichtigung der Ein- und Ausgabecodierung für Bandmaschinen erhalten wir daraus

$$f_M(w) = f(w).$$

Es folgt $f_M = f$.

Aufgabe 4

(a) Es sei $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definiert durch $f(n) := 2 \cdot n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Diese Funktion ist offenbar berechenbar. Die Standardnummerierung ν_Σ ist definiert durch $\nu_\Sigma(n) := a^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Beachte: Σ ist einelementig.) Es gilt dann

$$\nu_\Sigma^{-1} g \nu_\Sigma(n) = \nu_\Sigma^{-1} g\,(a^n) = \nu_\Sigma^{-1}\,(a^n a^n) = \nu_\Sigma^{-1}\left(a^{2\cdot n}\right) = 2 \cdot n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $\nu_\Sigma^{-1} g \nu_\Sigma = f$. Da f berechenbar ist, ergibt sich mit Satz 7.1.9 die Berechenbarkeit von g.

(b) Die Funktion $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ erfüllt die folgenden Rekursionsgleichungen:

$$f(0) = 1 = c_1^{(0)}$$

und

$$f(x+1) := (x+1) \cdot f(x) = m\,(s(x,1), f(x))$$

für alle $x \in \mathbb{N}$. (Dabei sind m und s wie in Satz 7.2.2.) Definiert man nun $h : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ durch $h(x,y) := m\,(s(x,1), y)$, dann gilt offenbar $f = \mathrm{Prk}(c_1^{(0)}, h)$. Ferner ist sowohl $c_1^{(0)}$ als auch h nach Satz 7.2.2 primitiv rekursiv, denn

$$h = \mathrm{Sub}\left(m, \mathrm{Sub}\left(s, \mathrm{pr}_1^{(2)}, c_1^{(2)}\right), \mathrm{pr}_2^{(2)}\right).$$

Es folgt, dass f primitiv-rekursiv ist.

Aufgabe 5

(a) Wir führen einen Widerspruchsbeweis.

Wenn die Funktion f berechenbar wäre, dann müsste es eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ geben mit $f = \varphi_{n_0}$, da die Standardnumerierung φ surjektiv ist. Insbesondere würde

$$f(n_0+1) = \varphi_{n_0}(n_0+1)$$

gelten. Weil die Funktion f eine totale Funktion ist, hätten wir außerdem $(n_0+1) \in \mathrm{Def}(f)$, also auch $(n_0+1) \in \mathrm{Def}(\varphi_{n_0})$ und

$$f(n_0+1) = \varphi_{n_0}(n_0+1) + 1.$$

Nun widersprechen sich aber die beiden obigen Gleichungen. Damit haben wir unsere Annahme, dass f berechenbar ist, widerlegt, und auf diese Weise gezeigt, dass f nicht berechenbar ist.

(b) Wir definieren eine Funktion $f :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ durch

$$f(i,n) := \varphi_{\varphi_n(i)}(n)$$

für alle $i, n \in \mathbb{N}$. Die Funktion f wird durch Substitution aus der Funktion u_φ (berechenbar nach dem utm–Theorem) und den Projektionsfunktionen (berechenbar nach Satz 2.5.5) gewonnen:

$$\begin{aligned} f(i,n) &= \varphi_{\varphi_n(i)}(n) \\ &= u_\varphi(u_\varphi(n,i), n) \\ &= u_\varphi(u_\varphi(\mathrm{pr}_2^{(2)}(i,n), \mathrm{pr}_1^{(2)}(i,n)), \mathrm{pr}_2^{(2)}(i,n)). \end{aligned}$$

Also ist f berechenbar. Nach dem smn-Theorem gibt es eine totale berechenbare Funktion $r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(i,n) = \varphi_{r(i)}(n)$ für alle $i, n \in \mathbb{N}$. Das war zu zeigen.

Aufgabe 6

(a) Da T_0 rekursiv ist, folgt mit dem Projektionssatz, dass T_1 rekursiv-aufzählbar ist.

(b) Nach Satz 9.2.3 des Kurses ist mit T_1 auch die Menge $T_2 = \pi^{(3)}[T_1] \subseteq \mathbb{N}$ rekursiv. auf 2.

(c) Nach dem utm-Theorem ist die Funktion g mit $g(i,x) := 0 \cdot \varphi_i(i)$ berechenbar. Nach dem smn-Theorem gibt es eine Funktion $h \in R^{(1)}$ mit $\varphi_{h(i)}(x) = 0 \cdot \varphi_i(i)$. Dann gilt $f \in R^{(1)}$ für $f(i) := \langle h(i), 0, 0\rangle$. Es folgt für alle $i \in \mathbb{N}$,

$$i \in K_\varphi \iff \varphi_i(i) \text{ exist.} \iff \varphi_{h(i)}(0) = 0 \iff f(i) \in T_2\,.$$

Damit gilt $K_\varphi \leq T_2$. Da K_φ nicht rekursiv ist, kann nach Satz 9.3.5 auch T_2 nicht rekursiv sein.

(d) Da $T_2 = \pi^{(3)}[T_1]$ nicht rekursiv ist, kann nach Satz 9.1.8 auch T_1 nicht rekursiv sein.

Aufgabe 7

(a) Da X ν-rekursiv ist, gibt es eine funktion $f \in P^{(1)}$ so dass für alle $i \in \mathrm{Def}(\nu)$,

$$f(i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \nu(i) \in X \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Sei $g(i) := 1$, falls $f(i) = 1$ und $g(i) :=$ div sonst. Dann ist g berechenbar, und es gilt für alle $i \in \mathrm{Def}(\nu)$,

$$g(i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \nu(i) \in X \\ \text{div} & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Damit ist X ν-r.a. nach Def. 10.3.1.

(b) Wir nehmen an, dass es eine Typ-2-Maschine M gibt, dir alle unendlichen Dualbrüche in äquivalente unendliche Dezimalbrüche übersetzt. Wir wählen den (eindeutig bestimmten) Dualnamen p von $1/5$ als Eingabe. Die Maschine muss als Ausgabe entweder "$0.2000\ldots$" oder "$0,1999\ldots$" liefern.

Wir betrachten zunächst den ersten Fall. Es gibt dann eine Zahl t, so dass die Maschine M nach t Schritten das Wort "0.2" geschrieben hat. In t Schritten kann M höchsten das Anfangsstück $p^{<t}$ von p der Länge t gelesen haben. Wir betrachten nun das Verhalten der Maschine bei Eingabe der Folge $q := p^{<t}000\ldots$. Offensichtlich kann sie auch hier in den ersten t Schritten höchstens das Anfangsstück $p^{<t}$ von q lesen und gibt somit ebenfalls 0.2 aus. Da aber $\delta_2(q) < \delta_2(p) = 1/5$ gilt, darf die Ausgabe bei Eingabe von q nicht mit 2.0 beginnen. Widerspruch.
Der 2. Fall wird analog behandelt mit $q := p^{<t}111\ldots$.