Lösungsvorschläge zur Klausur zum Kurs 01653 „Einführung in die Theoretische Informatik A“

Aufgabe 1

Die Kreuze geben an, welche der folgenden Aussagen korrekt ist/sind.

korrekt	falsch	
[ ]	[X]	Wenn $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nicht berechenbar sind, so ist auch $f \circ g$ nicht berechenbar.
[ ]	[X]	Die einstelligen primitiv-rekursiven Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ entsprechen genau der Menge $\mathrm{R}^{(1)}$ der einstelligen total-berechenbaren Funktionen
[X]	[ ]	Der $\tilde{\mu}$-Operator darf nur auf totale Funktionen angewendet werden.
[ ]	[X]	Für alle Mengen $A, B \subseteq \mathbb{N}$, so dass A rekursiv und B rekursiv-aufzählbar ist, ist $A \cap (\mathbb{N} \setminus B)$ ebenfalls rekursiv-aufzählbar.
[X]	[ ]	Die charakteristische Funktion des Definitionsbereichs der universellen Funktion u_φ zur Standardnummerierung φ ist nicht berechenbar.
[ ]	[X]	Es existiert eine total-berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = \varphi_n(n)$.
[ ]	[X]	Die Menge $\varphi^{-1}[\mathrm{R}^{(1)}]$ ist rekursiv.
[X]	[ ]	Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \lceil x \rceil$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist nicht berechenbar.

Wir geben noch einige Hinweise dazu, warum die einzelnen Aussagen korrekt bzw. falsch sind. Die Reihenfolge der Hinweise entspricht der Reihenfolge der obigen Aussagen.

- Wähle $g := \mathrm{cf}_{K_\varphi}$ und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) := 1$, falls $n = 0$ oder $n = 1$, und $f(n) := \mathrm{cf}_{K_\varphi}(n)$ für $n > 1$. Da K_φ nicht rekursiv ist, sind g und auch f nicht berechenbar. Es gilt allerdings $f \circ g(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d. h. $f \circ g$ ist berechenbar.
- Siehe Satz 6.2.8 mit der Ackermann-Funktion als Gegenbeispiel.
- Siehe Definition 4.3.3(4).
- Wähle $A := \mathbb{N}$ und $B := K_\varphi$. Dann ist A rekursiv und B rekursiv aufzählbar, aber $A \cap (\mathbb{N} \setminus K_\varphi) = \mathbb{N} \cap (\mathbb{N} \setminus K_\varphi) = \mathbb{N} \setminus K_\varphi$ ist nach Satz 8.3.1 nicht rekursiv-aufzählbar.
- Es gilt $\mathrm{Def}(u_\varphi) = K_\varphi^0$. Das Halteproblem K_φ^0 ist nach Satz 8.3.1 nicht rekursiv. Daher ist die charakteristische Funktion von $\mathrm{Def}(u_\varphi)$ nicht berechenbar.

- Siehe Satz 7.4.1.
- Siehe Satz 8.3.7 (Satz von Rice, $\emptyset \neq \mathrm{R}^{(1)} \neq \mathrm{P}^{(1)}$).
- Siehe Satz 9.4.11 (f ist *nicht* stetig).

Aufgabe 2

Wir geben jeweils die Nummer des entsprechenden Satzes aus dem Kurstext an.

(a) Satz 6.1.6 (Zusammenhang zwischen berechenbaren Zahlen- und Wortfunktionen)

(b) Satz 7.2.2 (utm-Theorem)

(c) Satz 7.2.6 (smn-Theorem)

(d) Satz 8.3.9(1) (Korrektheitsproblem)

Aufgabe 3

Wir geben jeweils die Nummer der entsprechenden Definition aus dem Kurstext an.

(a) Definition 5.2.4 („$f :\subseteq (\Sigma^*)^k \to \Sigma^*$ ist eine berechenbare Funktion“ für ein Alphabet Σ)

(b) Definition 3.2.3 („$A \subseteq \mathbb{N}^k$ ist rekursiv“)

(c) Definition 8.2.7 („$A \subseteq (\Sigma^*)^k$ ist rekursiv-aufzählbar“ für ein Alphabet Σ)

(d) Definition 9.1.3(3) („$f :\subseteq M \to L$ ist (ν, ν')-berechenbar“ für Nummerierungen $\nu :\subseteq \mathbb{N} \to M$ und $\nu' :\subseteq \mathbb{N} \to L$)

Aufgabe 4

Gegeben sei die einstellige verallgemeinerte Registermaschine M mit dem in der Aufgabenstellung (siehe auch Abbildung 1) angegebenen Flussdiagramm F.

(a) Wir beweisen durch vollständige Induktion über n, dass dann für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(\forall k, m, z \in \mathbb{N})\, \mathrm{ES}^{3n}(3, (z, m, n, k, 0, \ldots)) = (3, (z, m, 0, k + n \cdot m, 0, \ldots))\,. \qquad (1)$$

<u>Induktionsanfang $n = 0$:</u>

Es gilt für alle $k, m, z \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mathrm{ES}^{3\cdot 0}(3, (z, m, 0, k, 0, \ldots)) &= \mathrm{ES}^{0}(3, (z, m, 0, k, 0, \ldots)) \\ &= (3, (z, m, 0, k, 0, \ldots)) \\ &= (3, (z, m, 0, k + 0 \cdot m, 0, \ldots))\,.\end{aligned}$$

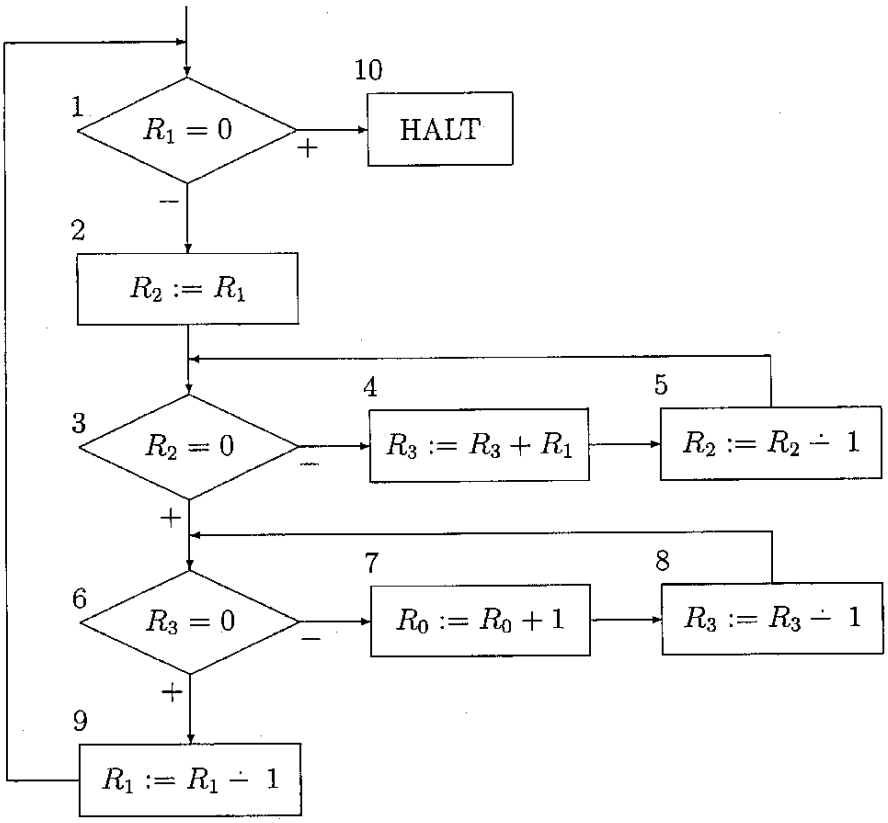

Abbildung 1: Flussdiagramm F der Registermaschine M

<u>Induktionsschritt $n \to n+1$:</u>

Seien $m, k, z \in \mathbb{N}$ gegeben. Nach der Induktionsvoraussetzung (IV), angewendet auf $m' := m$, $k' := k + m$ und $z' := z$, gelte

$$\mathrm{ES}^{3n}(3, (z, m, n, k+m, 0, \ldots)) = (3, (z, m, 0, k+m+n \cdot m, 0, \ldots)) .$$

Hiermit erhalten wir nun

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ES}^{3\cdot(n+1)}(3, (z, m, n+1, k, 0, \ldots)) \\
&\quad = \mathrm{ES}^{3n+3}(3, (z, m, n+1, k, 0, \ldots)) \\
&\quad = \mathrm{ES}^{3n+2}(4, (z, m, n+1, k, 0, \ldots)) && (\text{da } n+1 \neq 0) \\
&\quad = \mathrm{ES}^{3n+1}(5, (z, m, n+1, k+m, 0, \ldots)) \\
&\quad = \mathrm{ES}^{3n}(3, (z, m, n, k+m, 0, \ldots)) \\
&\quad = (3, (z, m, 0, k+m+n \cdot m, 0, \ldots)) && (\text{nach (IV)}) \\
&\quad = (3, (z, m, 0, k+(n+1) \cdot m, 0, \ldots)) .
\end{aligned}$$

Damit ist die anfangs angegebene Behauptung (1) für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

(b) Gegeben seien die folgenden Behauptungen über die äußere Schleife in F:

1. $(\forall m, z)(\exists t)\, \mathrm{ES}^t(1, (z, m, 0, \ldots)) = (1, (z + \sum_{i=1}^{m} i^2, 0, \ldots))$
2. $(\forall m)(\exists t)\, \mathrm{ES}^t(1, (0, m, 0, \ldots)) = (1, (\sum_{i=1}^{m} i^2, 0, \ldots))$
3. $(\forall m)(\forall k \leq m)(\exists t)\, \mathrm{ES}^t(1, (0, m, 0, \ldots)) = (1, (\sum_{i=m-k+1}^{m} i^2, m-k, \ldots))$
4. $(\forall k, m, n, z)(\exists t, y)\, \mathrm{ES}^t(1, (z, k, m, n, 0, \ldots)) = (1, (y, 0, m, n, 0, \ldots))$
5. $(\forall k, m, z)(\exists t, y)\, \mathrm{ES}^t(1, (z, k, m, 0, 0, \ldots)) = (1, (y, 0, 0, 0, 0, \ldots))$
6. $(\forall k, m, n, z)(\exists t, y)\, \mathrm{ES}^t(1, (z, k, m, n, 0, \ldots)) = (1, (y, 0, 0, 0, 0, \ldots))$

Korrekt sind hier die Behauptungen 1, 2, 3, 5 und 6. Nur Behauptung 4 ist falsch.

(c) Von den richtigen Behauptungen 1, 2 und 3 aus Aufgabenteil (b), lassen sich nur 1 und 3 direkt mit vollständiger Induktion beweisen. Bei 2 ist dies nicht möglich.

(d) Wir beweisen mit Hilfe der Aussage 2 aus Aufgabenteil (b), dass M die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) := \sum_{i=1}^{n} i^2$ berechnet. Sei also $m \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann gibt es ein $t \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathrm{ES}^t(1, (0, m, 0, \ldots)) = (1, (\sum_{i=1}^{m} i^2, 0, \ldots)),$$

so dass wir

$$\begin{aligned} \mathrm{ES}^{t+1}(1, (0, m, 0, \ldots)) &= \mathrm{ES}(1, (\sum_{i=1}^{m} i^2, 0, \ldots)) \\ &= (10, (\sum_{i=1}^{m} i^2, 0, \ldots)) \qquad \text{(da } R_1 = 0 \text{ gilt)} \end{aligned}$$

und weiter $\mathrm{SZ}(1, (0, m, 0, \ldots)) = t + 1$ sowie

$$\mathrm{GS}(1, (0, m, 0, \ldots)) = \mathrm{ES}^{t+1}(1, (0, m, 0, \ldots)) = (10, (\sum_{i=1}^{m} i^2, 0, \ldots))$$

erhalten, da $(10, (\sum_{i=1}^{m} i^2, 0, \ldots))$ eine Endkonfiguration ist. Für die Semantik f_F des Flussdiagramms gilt also

$$f_F(0, m, 0, \ldots) = (\sum_{i=1}^{m} i^2, 0, \ldots))$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Mit der Eingabe- und Ausgabecodierung für Registermaschinen ergibt sich dadurch für die von der einstelligen verallgemeinerten Registermaschine M mit dem Flussdiagramm F berechnete Funktion $f_M :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f_M(m) &= \mathrm{AC} \circ f_F \circ \mathrm{EC}^{(1)}(m) &&= \mathrm{AC} \circ f_F(0, m, 0, \ldots) \\ &= \mathrm{AC}(\sum_{i=1}^{m} i^2, 0, \ldots)) &&= \sum_{i=1}^{m} i^2 \end{aligned}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$, d. h. f_M ist sogar eine totale Funktion. Wir erhalten, dass M die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) := \sum_{i=1}^{n} i^2$ berechnet.

(e) Die von M berechnete Funktion f ist auch berechenbar. Dies folgt aus dem Satz 3.2.4 über verallgemeinerte Registermaschinen: M enthält nur die Funktionen S ($R_i := R_i + 1$), V ($R_i := R_i \dot{-} 1$) und die Summe ($R_i := R_j + R_k$), die nach Satz 3.2.5, Teil (3), (4) und (7) berechenbar sind, sowie den Test auf 0 ($R_i = 0$), der nach Satz 3.2.5, Teil (17) oder (18) berechenbar ist. Somit sind alle in M vorkommenden Funktionen und Tests berechenbar und es folgt mit Satz 3.2.4, dass f_M selbst berechenbar ist.

Aufgabe 5

(a) Wir zeigen mit vollständiger Induktion über $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$, dass die k-stellige Summe $f^{(k)} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) := \sum_{i=1}^{k} x_i$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$ primitiv-rekursiv ist. Da die Aussage nur für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$ zu beweisen ist, wählen wir in diesem Fall $k = 1$ für den Induktionsanfang.

Induktionsanfang $k = 1$:

In diesem Fall gilt

$$f^{(1)} : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f^{(k)}(x_1) = \sum_{i=1}^{1} x_i = x_1\,,$$

also $f^{(1)} = \mathrm{pr}_1^{(1)} \in \mathrm{Gr}$. Damit ist $f^{(1)}$ nach Definition 6.2.1 eine primitiv-rekursive Funktion.

Induktionsschritt $k \to k + 1$:

Es sei für $k \geq 1$ nach der Induktionsvorraussetzung (IV) die k-stellige Summe $f^{(k)} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) := \sum_{i=1}^{k} x_i$ primitiv-rekursiv. Für die $k + 1$-stellige

Summe $f^{(k+1)} : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$, $f^{(k+1)}(x_1, \ldots, x_{k+1}) := \sum_{i=1}^{k+1} x_i$ gilt dann

$$f^{(k+1)}(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} x_i = \sum_{i=1}^{k} x_i + x_{k+1} = f^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) + x_{k+1}$$

für alle $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1} \in \mathbb{N}$ und somit

$$f^{(k+1)} = \mathrm{Sub}(s, \mathrm{Sub}(f^{(k)}, \mathrm{pr}_1^{(k+1)}, \ldots, \mathrm{pr}_k^{(k+1)}), \mathrm{pr}_{k+1}^{(k+1)}) .$$

$f^{(k+1)}$ entsteht also durch zweifache Substitution aus $f^{(k)}$, den Projektionen $\mathrm{pr}_i^{(k+1)}$, $i = 1, \ldots, k+1$, und der Summe s. $f^{(k)}$ ist nach der Induktionsvoraussetzung (IV) primitiv-rekursiv, die Projektionen $\mathrm{pr}_i^{(k+1)}$, $i = 1, \ldots, k+1$, gehören nach Definition 6.2.1 zu den primitiv-rekursiven Grundfunktionen Gr und die Summe s ist nach Satz 6.2.2 primitiv-rekursiv. Damit ist $f^{(k+1)}$ nach Definition 6.2.1 ebenfalls eine primitiv-rekursive Funktion.

Damit ist bewiesen, dass $f^{(k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$ primitiv-rekursiv ist.

(b) Wir zeigen, dass die Exponentialfunktion $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $g(x, y) := x^y$ (mit $0^0 := 1$) primitiv-rekursiv ist.

Für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt $g(x, 0) = x^0 = 1 = c_1^{(1)}(x)$, wobei $c_1^{(1)}$ die einstellige konstante Funktion aus Satz 6.2.2 ist. Wir definieren nun eine dreistellige Funktion $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, $h(x, y, z) := x \cdot z$. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{N}$

$$g(x, y+1) = x^{y+1} = x \cdot x^y = x \cdot g(x, y) = h(x, y, g(x, y)) ,$$

Somit gilt nach Definition 4.3.3 $g = \mathrm{Prk}(c_1^{(1)}, h)$, d. h. g entsteht durch primitive Rekursion aus den Funktionen $c_1^{(1)}$ und h. Die Funktion $c_1^{(1)}$ ist nach Satz 6.2.2 primitiv-rekursiv. Für die Funktion h erhalten wir

$$h(x, y, z) = x \cdot z = m(x, z) = m(\mathrm{pr}_1^{(3)}(x, y, z), \mathrm{pr}_3^{(3)}(x, y, z))$$

für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$ und somit $h = \mathrm{Sub}(m, \mathrm{pr}_1^{(3)}, \mathrm{pr}_3^{(3)})$. h entsteht also durch Substitution aus der Multiplikation m, die nach Satz 6.2.2 primitiv-rekursiv ist, und den Projektionen $\mathrm{pr}_1^{(3)}$ und $\mathrm{pr}_3^{(3)}$, die nach Definition 6.2.1 primitiv-rekursive Grundfunktionen sind. Damit ist h nach Definition 6.2.1 ebenfalls eine primitiv-rekursive Funktion. Da g durch primitive Rekursion aus den beiden primitiv-rekursiven Funktionen $c_1^{(1)}$ und h entsteht, ist auch g eine primitiv-rekursive Funktion.

Aufgabe 6

Es seien $\Sigma := \{0, 1\}$ und ν_{Du} die Dualnotation von $\mathbb{N}$.

(a) Wir zeigen durch Angabe einer geeigneten einstelligen Turingmaschine M, dass die folgende Wortfunktion f berechenbar ist:

$$f : \Sigma^* \to \Sigma^*,\ f(w) := \begin{cases} 0 & \text{falls } w \in \mathrm{Def}(\nu_{\mathrm{Du}}) \text{ und } \nu_{\mathrm{Du}}(w) \text{ gerade,} \\ 1 & \text{falls } w \in \mathrm{Def}(\nu_{\mathrm{Du}}) \text{ und } \nu_{\mathrm{Du}}(w) \text{ ungerade,} \\ \varepsilon & \text{sonst, d. h. } w \notin \mathrm{Def}(\nu_{\mathrm{Du}}). \end{cases}$$

Abbildung 2 gibt das Flussdiagramm F unserer Maschine M an. Wir beschreiben nun noch die Arbeitsweise von M, so dass die von ihr berechnete Funktion ersichtlich wird. Einen formalen Korrektheitsbeweis für f_M geben wir nicht an, da dieser in der Aufgabenstellung auch nicht gefordert war.

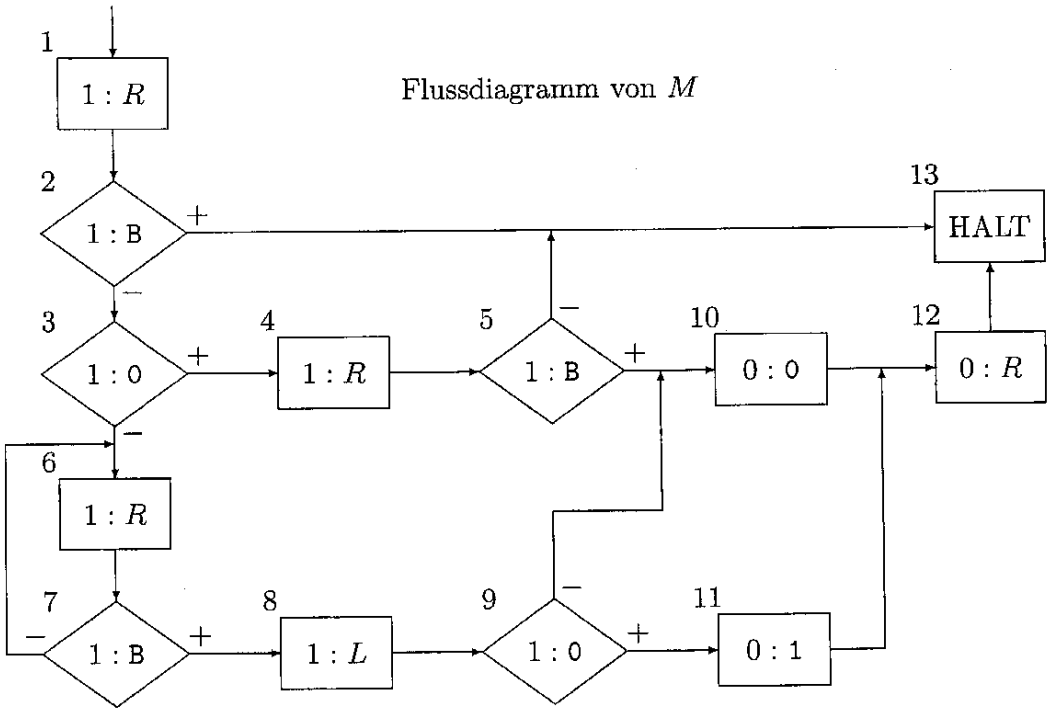

Abbildung 2: Flussdiagramm F der Turingmaschine M

Die Turingmaschine M geht bei Eingabe eines Wortes $w \in \Sigma^*$ geht zunächst an Marke 1 ein Zeichen auf dem Eingabeband nach rechts, so dass der Schreib-/Lesekopf dort auf dem ersten Zeichen der Eingabe w steht, sofern diese nicht leer ist. Bei Marke 2 wird dann überprüft, ob nun unter dem Kopf auf Band 1 ein B steht, d. h. ob die Eingabe w leer war. Ist dies der Fall, liegt kein gültiges Wort aus

dem Definitionsbereich von ν_{Du} vor und M hält mit leerer Ausgabe (Marke 13). Ist die Eingabe w nicht leer, wird bei Marke 3 überprüft, ob w mit einer 0 beginnt. Ist dies der Fall, so wird überprüft, ob w nur aus der 0 besteht. Dies ist der Fall, wenn das Zeichen rechts von der 0 wieder ein B ist. Dieses wird bei Marke 4 und 5 überprüft. Besteht die Eingabe w nur aus der 0, so ist sie gültig und $\nu_{\mathrm{Du}}(w)$ ist gerade. In diesem Fall verzweigt M bei Marke 5 nach Marke 10 (und hält dann mit der Ausgabe 0, Marken 10 und 11). Beginnt w mit 0 und besteht aus mehr als diesem einen Zeichen, so ist w kein gültiges Wort aus dem Definitionsbereich von ν_{Du} und M verzweigt bei Marke 5 direkt nach Marke 13, d. h. hält mit leerer Ausgabe. Wird bei Marke 3 festgestellt, dass w nicht mit einer 0 beginnt, so wird nach Marke 6 verzweigt. In diesem Fall beginnt w mit einer 1 und ist damit in jedem Fall ein gültiges Wort aus dem Definitionsbereich von ν_{Du}. In der Schleife über die Marken 6 und 7 wird hinter das Ende von w und dann bei Marke 8 auf das letzte Zeichen von w gegangen. Liegt hier eine 0 vor, so ist $\nu_{\mathrm{Du}}(w)$ gerade und M verzweigt zu Marke 10. Dort wird dann eine 0 auf das Ausgabeband geschrieben und weiter zu Marke 12 gegangen. Liegt eine 1 als letztes Zeichen von w vor, so ist $\nu_{\mathrm{Du}}(w)$ ungerade und M verzweigt zu Marke 11. Dort wird eine 1 auf das Ausgabeband geschrieben und dann ebenfalls zu Marke 12 gegangen. Bei Marke 12 geht M auf dem Ausgabeband ein Zeichen nach rechts, so dass die Ausgabe 0 bzw. 1 im Fall, dass $w \in \mathrm{Def}(\nu_{\mathrm{Du}})$ gilt, links vom Schreib-/Lesekopf auf Band 0 liegt. Danach hält M ebenso wie bei ungültigen Eingaben mit Marke 13 an.

(b) Wir zeigen, dass die Wortmenge

$$G := \{w \in \Sigma^* \mid \nu_{\mathrm{Du}}(w) \text{ ist gerade}\} \subseteq \Sigma^*$$

rekursiv ist. Die in Aufgabenteil (a) angegebene Funktion f läßt sich zu einer ebenfalls total-berechenbaren Funktion

$$g : \Sigma^* \to \Sigma^*,\ g(w) := \begin{cases} \varepsilon & \text{falls } w \in \mathrm{Def}(\nu_{\mathrm{Du}}) \text{ und } \nu_{\mathrm{Du}}(w) \text{ gerade,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

abwandeln. Eine Maschine, die g berechnet, könnte sich z. B. zunächst genauso wie die in Aufgabenteil (a) angegebene Maschine für Funktion f verhalten. Bevor die Maschine für g jedoch anhält, testet sie nochmal das Zeichen auf dem Ausgabeband direkt links vom Schreib-/Lesekopf. Nach der Definition von f steht dort 0, 1 oder B. Dieses Zeichen wird ggfs. ersetzt, und zwar 0 durch B bzw. B und 1 durch 0. Danach hält die Maschine für g an. Offensichtlich berechnet eine solche Maschine gerade g. Außerdem gilt für alle $w \in \Sigma^*$

$$w \in G \iff \nu_{\mathrm{Du}}(w) \text{ ist gerade} \iff g(w) = \varepsilon\,,$$

also $G = g^{-1}\{\varepsilon\}$. Nach Definition 8.1.9 ist damit die Wortmenge G berechenbar.

Aufgabe 7

(a) Wir zeigen, dass die Funktion

$$f :\subseteq \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N},\ f(i,j,x) := \max(\varphi_i(x), \Phi_j(x))$$

berechenbar ist. Für alle $i, j, x \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(i,j,x) = \max(\varphi_i(x), \Phi_j(x)) = \max(u_\varphi(i,x), u_\Phi(j,x))$$

und somit

$$f = \mathrm{Sub}(\max, \mathrm{Sub}(u_\varphi, \mathrm{pr}_1^{(3)}, \mathrm{pr}_3^{(3)}), \mathrm{Sub}(u_\Phi, \mathrm{pr}_2^{(3)}, \mathrm{pr}_3^{(3)}))\,.$$

f entsteht also durch Substitution aus den Funktionen max, u_φ, u_Φ und $\mathrm{pr}_i^{(3)}$, $i = 1, 2, 3$. max ist nach Satz 3.2.5(13) berechenbar, u_φ ist nach dem utm-Theorem (Satz 7.2.2), u_Φ nach Lemma 7.2.3 berechenbar und die Projektionen $\mathrm{pr}_i^{(3)}$, $i = 1, 2, 3$, sind nach Satz 3.2.5(5) berechenbar. Somit ist f als Substitution berechenbarer Funktionen nach Satz 4.3.5 ebenfalls berechenbar.

(b) Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ rekursiv. Wir zeigen, dass es dann eine berechenbare Funktion $r : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\varphi_{r(i,j)}(x) := \begin{cases} \varphi_i(x) & \text{falls } x \in A, \\ \varphi_j(x) & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle $i, j, x \in \mathbb{N}$ gilt. Da A rekursiv ist, ist nach Definition 3.2.3 die charakteristische Funktion cf_A von A berechenbar. Wir definieren nun eine Funktion $h :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ durch

$$h(\langle i,j\rangle, x) := \begin{cases} \varphi_i(x) & \text{falls } x \in A, \\ \varphi_j(x) & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle $i, j, x \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$h(\langle i,j\rangle, x) = u_\varphi(\mathrm{cf}_A(x) \cdot i + (1 \dot{-} \mathrm{cf}_A(x)) \cdot j, x)$$

für alle $i, j, x \in \mathbb{N}$. h entsteht also durch Substitution aus der universellen Funktion u_φ von φ, der charakteristischen Funktion cf_A von A, der Addition, der arithmetischen Differenz, der Multiplikation, der konstanten Funktion mit dem Wert 1, sowie den Projektionen $\mathrm{pr}_i^{(2)}$, $i = 1, 2$ und den Projektionen π_1 und π_2 der Umkehrung der Cantorschen Tupelfunktion π. u_φ ist nach dem utm-Theorem (Satz 7.2.2) berechenbar und cf_A ist berechenbar, da A rekursiv ist. Addition, arithmetische Differenz, Multiplikation, konstante Funktion und die Projektionen $\mathrm{pr}_i^{(2)}$, $i = 1, 2$ sind nach Satz 3.2.5 (Teil (7), (8), (9), (6) und (5)) berechenbar. π_1 und π_2 sind nach Satz 4.2.2 berechenbar. h entsteht daher durch Substitution

aus berechenbaren Funktionen und ist somit nach Satz 4.3.5 ebenfalls berechenbar, d. h. es gilt $h \in \mathrm{P}^{(2)}$. Nach dem smn-Theorem (Satz 7.2.6) gibt es damit eine total-berechenbare Funktion $s \in \mathrm{R}^{(1)}$, so dass $\varphi_{s(i)}(n) = h(i,n)$ für alle $i, n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir definieren nun eine Funktion $r : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ durch $r(i,j) := s\langle i,j\rangle$. Da s total ist, ist r tatsächlich ebenfalls total. Da $r = s \circ \pi = \mathrm{Sub}(s,\pi)$ gilt und neben s auch die Cantorsche Tupelfunktion π nach Satz 4.2.2 berechenbar ist, ist r als Substitution berechenbarer Funktionen nach Satz 4.3.5 ebenfalls berechenbar. Für diese berechenbare Funktion $r : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ gilt außerdem

$$\varphi_{r(i,j)}(x) = \varphi_{s(i,j)}(x) = h(\langle i,j\rangle, x) = \begin{cases} \varphi_i(x) & \text{falls } x \in A, \\ \varphi_j(x) & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle $i, j, x \in \mathbb{N}$.

(c) Wir geben eine nicht berechenbare Funktion $g :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\mathrm{Bild}(g) \subseteq \{0\}$ an und beweisen Sie, dass diese Funktion g nicht berechenbar ist. Hierzu definieren wir $g :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$g(n) := \begin{cases} 0 & \text{falls } n \notin K_\varphi, \\ \mathrm{div} & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt offensichtlich $\mathrm{Bild}(g) \subseteq \{0\}$. Wir zeigen nun, dass g nicht berechenbar ist. Es gilt

$$\mathrm{Def}(g) = \{n \in \mathbb{N} \mid g(n) \text{ existiert}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin K_\varphi\} = \mathbb{N} \setminus K_\varphi\,.$$

Nach Satz 8.3.1 ist $\mathbb{N} \setminus K_\varphi$ nicht rekursiv-aufzählbar, so dass $\mathrm{Def}(g) = \mathbb{N} \setminus K_\varphi$ ebenfalls nicht rekursiv-aufzählbar ist. Damit kann nach Definition 8.2.1 aber g nicht berechenbar sein, da ansonsten $\mathrm{Def}(g) = \mathbb{N} \setminus K_\varphi$ rekursiv-aufzählbar wäre.

Aufgabe 8

Wir zeigen, dass die Menge

$$A := \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi_n(1653) = 1653\} \subseteq \mathbb{N}$$

rekursiv-aufzählbar, aber nicht rekursiv ist. Die durch das folgende Flussdiagramm gegebene verallgemeinerte einstellige Registermaschine M hält bei Eingabe von $n \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn $n \in A$ gilt:

1: $R_0 := u_\varphi(R_1, 1653)$, 2 ;
2: $R_0 = 1653$, 3 , 2 ;
3: HALT .

Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Def}(f_M) &= \{n \in \mathbb{N} \mid M \text{ hält bei Eingabe von } n\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi_n(1653) = 1653\} \\ &= A\,.\end{aligned}$$

Nach dem utm-Theorem (Satz 7.2.2) ist u_φ berechenbar. Da auch die konstante Funktion und der Test auf "=" nach Satz 3.2.5 berechenbar sind, sind alle im Flussdiagramm von M vorkommenden Funktionen und Tests berechenbar. Nach Satz 3.2.4 über verallgemeinerte Registermaschinen ist damit die von M berechnete Funktion f_M berechenbar. Mit Definition 8.2.1 folgt, dass $A = \mathrm{Def}(f_M)$ rekursiv-aufzählbar ist. A ist aber nicht rekursiv. Dies zeigen wir mit Hilfe des Satzes von Rice (Satz 8.3.7). Hierzu definieren wir eine Menge

$$B := \{f \in \mathrm{P}^{(1)} \mid f(1653) = 1653\} \subseteq \mathrm{P}^{(1)}\,.$$

Dann ist die konstante Funktion $f^{(1653)} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f^{(1653)}(n) := 1653$, die nach Satz 3.2.5 berechenbar ist, ein Element von B, d. h. es gilt $f^{(1653)} \in B \neq \emptyset$. Die überall divergente Funktion $d :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $d(n) = \mathrm{div}$ ist dagegen zwar berechenbar, aber offensichtlich kein Element von B, d. h. es gilt $d \in \mathrm{P}^{(1)} \setminus B \neq \emptyset$. Damit erhalten wir insgesamt $\emptyset \neq B \neq \mathrm{P}^{(1)}$. B ist also eine nicht-triviale Teilmenge von $\mathrm{P}^{(1)}$. Nach dem Satz von Rice (Satz 8.3.7) ist damit die Menge

$$\varphi^{-1}[B] = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n) \in B\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n)(1653) = 1653\} = A$$

nicht rekursiv.

Aufgabe 9

(a) Es sei $\nu_\mathbb{Z} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $\nu_\mathbb{Z}\langle i, j\rangle := i - j$ die im Kurstext eingeführte Nummerierung der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. Wir zeigen, dass die Multiplikation

$$m_\mathbb{Z} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z},\ m_\mathbb{Z}(x, y) := x \cdot y$$

auf $\mathbb{Z}$ eine $(\nu_\mathbb{Z}, \nu_\mathbb{Z}, \nu_\mathbb{Z})$-berechenbare Funktion ist. Hierzu definieren wir eine Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ durch $f(\langle i, j\rangle, \langle k, l\rangle) := \langle ik + jl, il + jk\rangle$ für alle $i, j, k, l \in \mathbb{N}$. Da die Addition und Multiplikation nach Satz 3.2.5 berechenbar sind und die Cantorsche Tupelfunktion und die Projektionen ihrer Umkehrung nach Satz 4.2.2, ist Funktion f als Substitution berechenbarer Funktionen nach Satz 4.3.5 ebenfalls

berechenbar. Es gilt

$$\begin{aligned} m_{\mathbb{Z}}(\nu_{\mathbb{Z}}\langle i,j\rangle, \nu_{\mathbb{Z}}\langle k,l\rangle) &= (\nu_{\mathbb{Z}}\langle i,j\rangle)\cdot(\nu_{\mathbb{Z}}\langle k,l\rangle) \\ &= (i-j)\cdot(k-l) \\ &= (ik+jl)-(il+jk) \\ &= \nu_{\mathbb{Z}}\langle ik+jl, il+jk\rangle \\ &= \nu_{\mathbb{Z}}\circ f(\langle i,j\rangle,\langle k,l\rangle) \end{aligned}$$

für alle $i,j,k,l \in \mathbb{N}$. Nach Definition 9.1.3 (einschließlich der nachfolgenden Bemerkungen zur Verallgemeinerung auf mehrstellige Funktionen) ist damit $m_{\mathbb{Z}}$ eine $(\nu_{\mathbb{Z}}, \nu_{\mathbb{Z}}, \nu_{\mathbb{Z}})$-berechenbare Funktion.

(b) Es sei φ die Standardnummerierung von $\mathrm{P}^{(1)}$. Wir zeigen, dass die Funktion

$$M : \mathrm{P}^{(1)} \times \mathrm{P}^{(1)} \to \mathrm{P}^{(1)},\ M(f,g) = f\cdot g$$

$(\varphi,\varphi,\varphi)$-berechenbar ist. (Die Multiplikation auf $\mathrm{P}^{(1)}$ ist hierbei punktweise definiert, d. h. es gilt $(f\cdot g)(x) := f(x)\cdot g(x)$ für alle $f,g \in \mathrm{P}^{(1)}$ und $x \in \mathbb{N}$.) Hierzu definieren wir zunächst eine Funktion $h :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ durch $h(\langle i,j\rangle, x) := \varphi_i(x)\cdot\varphi_j(x)$ für alle $i,j,x \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$h(\langle i,j\rangle, x) = \varphi_i(x)\cdot\varphi_j(x) = u_\varphi(i,x)\cdot u_\varphi(j,x)$$

für alle $i,j,x \in \mathbb{N}$. Die Funktion u_φ ist nach dem utm-Theorem (Satz 7.2.2) berechenbar. Die Multiplikation ist nach Satz 3.2.5 berechenbar und die Projektionen der Umkehrung der Cantorschen Tupelfunktion nach Satz 4.2.2. Daher ist h als Substitution berechenbarer Funktionen nach Satz 4.3.5 auch berechenbar, d. h. es gilt $h \in \mathrm{P}^{(2)}$. Nach dem smn-Theorem (Satz 7.2.6) gibt es also eine totalberechenbare Funktion $r \in \mathrm{R}^{(1)}$ mit $\varphi_{r\langle i,j\rangle}(x) = h(\langle i,j\rangle, x)$ für alle $i,j,x \in \mathbb{N}$. Wir definieren nun eine Funktion $s : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ durch $s(i,j) := r\langle i,j\rangle$ für alle $i,j \in \mathbb{N}$. Da die Cantorsche Tupelfunktion total und berechenbar ist, ist auch s total und berechenbar. Es gilt

$$M(\varphi_i,\varphi_j)(x) = \varphi_i(x)\cdot\varphi_j(x) = h(\langle i,j\rangle, x) = \varphi_{r\langle i,j\rangle}(x) = \varphi_{s(i,j)}(x)$$

für alle $i,j,x \in \mathbb{N}$ und somit

$$M(\varphi(i),\varphi(j)) = M(\varphi_i,\varphi_j) = \varphi_{s(i,j)} = \varphi\circ s(i,j)$$

für alle $i,j \in \mathbb{N}$. Nach Definition 9.1.3 (einschließlich der nachfolgenden Bemerkungen zur Verallgemeinerung auf mehrstellige Funktionen) ist damit M eine $(\varphi,\varphi,\varphi)$-berechenbare Funktion.