FernUniversität
Gesamthochschule in Hagen

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität D - 58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(Auslandskennzeichen, PLZ, Wohnort)

FERNUNIVERSITÄT
- Gesamthochschule -
EINGANG

INF

Bitte zurück an:
FERNUNIVERSITÄT
Gesamthochschule
D - 58084 Hagen

Fachbereich Informatik

Kurs 1653 — Einführung in die Theoretische Informatik A

Klausur am 16. März 2002

- ☐ Berlin
- ☐ Bochum
- ☐ Bregenz
- ☐ Frankfurt
- ☐ Hamburg
- ☐ Karlsruhe
- ☐ Kassel
- ☐ Köln
- ☐ München
- ☐ Wien
- ☐ Anderer Ort: .....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
bearbeitet											
erreichte Punktzahl											

Datum: _____ Korrektur: _____

1653 Einführung in die Theoretische Informatik A
Klausur vom 16. März 2002

Es müssen Ihnen 10 Seiten Klausurtext vorliegen:

- das Deckblatt für Ihre Lösungen,
- eine Teilnahmebescheinigung zur Vorlage beim Finanzamt,
- diese Vorbemerkungen,
- 4 Blätter mit 8 Aufgaben,
- 3 Seiten Anhang.

Prüfen Sie zunächst die Vollständigkeit Ihrer Klausurunterlagen.

Für die Bearbeitung der Klausuraufgaben haben Sie 3 Stunden Zeit. Einen Leistungsnachweis zum Kurs 1653 erhalten Sie, wenn Sie in dieser Klausur mindestens 36 der möglichen 90 Punkte erreichen.

Als Hilfsmittel sind nur Papier und Schreibzeug zugelassen. Die Benutzung anderer Hilfsmitteln wie z. B. Kurstext etc. ist nicht erlaubt! Bitte benutzen Sie keinen Bleistift zum Schreiben.

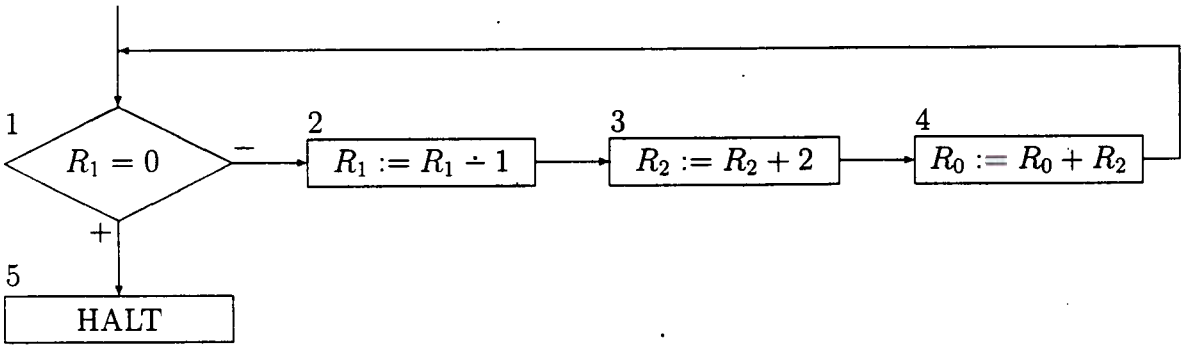
Füllen Sie bitte zunächst das Deckblatt für Ihre Lösungen aus. Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben rechts Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Falls es sich um ein Fortsetzungsblatt zu einer Aufgabe handelt, geben Sie bitte zusätzlich die Nummer der Aufgabe an.
Bei Abgabe Ihrer Lösungsblätter heften Sie diese bitte möglichst nach Aufgaben sortiert, beginnend mit dem Deckblatt und der Bescheinigung für das Finanzamt, zusammen. Die Vorbemerkungen, die Aufgabenblätter und der Anhang brauchen nicht abgegeben zu werden.

Bei der Bearbeitung der Klausuraufgaben wünschen wir Ihnen viel Erfolg. Wir senden Ihnen die korrigierten Aufgaben nach Möglichkeit innerhalb von drei Wochen zurück.

Mit freundlichen Grüßen

IHRE KURSBETREUER

Aufgabe 1 *(11 Punkte)*
Es sei graphisch das Flussdiagramm F einer einstelligen verallgemeinerten Registermaschine M wie folgt gegeben:



(a) Sei $x \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie durch vollständige Induktion nach n :

$$(\forall n)\left(x \geq n \Rightarrow \mathrm{ES}^{4n}\left(1,(0,x,0,\ldots)\right) = \left(1,(n\cdot(n+1), x-n, 2n, 0,\ldots)\right)\right).$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass

$$f_M(x) = x^2 + x$$

für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 2 *(10 Punkte)*
Es seien Q_1, Q_2 WHILE–Programme mit folgenden Eigenschaften:

$$\tau\left(Q_1\right)(0,x,y,0,\ldots) = (0,0,y,x+y,0,\ldots)$$

$$\tau\left(Q_2\right)(w,x,y,z,0,\ldots) = (w+x,x,y,z,0,\ldots),$$

für alle $w,x,y,z \in \mathbb{N}$. Geben Sie unter Benutzung von Q_1 und Q_2 ein WHILE–Programm P an, das die Cantorsche Paarungsfunktion $\pi : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ berechnet, die durch

$$\pi(x,y) := \sum_{i=0}^{x+y} i + y$$

für alle $x, y \in \mathbb{N}$ definiert ist. Benutzen Sie dabei die im Kurs eingeführte Syntax. Ein Korrektheitsbeweis braucht nicht geführt zu werden.

Aufgabe 3 *(14 Punkte)*
Es sei $\Sigma := \{a, b\}$. Eine einstellige Wortfunktion $f : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ sei definiert durch

$$f(w) := a^{\lg(w)}$$

für alle $w \in \Sigma^*$.

(a) Geben Sie graphisch das Flussdiagramm F einer Bandmaschine M mit $f_M = f$ an.

(b) Stellen Sie für jede der in F vorkommenden Schleifen eine geeignete Induktionsbehauptung auf, die die Berechnung dieser Schleife allgemein beschreibt.

(c) Beweisen Sie eine dieser Behauptungen.

(d) Folgern Sie mittels der Behauptungen aus (b) die Korrektheit von M.

Aufgabe 4 *(10 Punkte)*
Es sei $\Sigma := \{b\}$. Ferner sei $g : (\Sigma^*)^2 \longrightarrow \Sigma^*$ die Konkatenationsfunktion zu Σ^*, d. h., $g(w_1, w_2) := w_1 w_2$ für alle $w_1, w_2 \in \Sigma^*$. Zeigen Sie unter Verwendung einer geeigneten Funktion $f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ und des Satzes über den Zusammenhang zwischen Zahlen- und Wortberechenbarkeit (7.6 im Kurs 1653), dass g berechenbar ist.

Aufgabe 5 *(11 Punkte)*

(a) Zeigen Sie, dass es eine berechenbare Funktion $s \in R^{(1)}$ gibt mit

$$\varphi_{s(n)}(i) = \varphi_i(n)$$

für alle $i, n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie, dass es eine berechenbare Funktion $r \in R^{(1)}$ gibt mit

$$\varphi_{r(i)}\langle j, x\rangle = \varphi_{\langle i,j\rangle}(x)$$

für alle $i, j, x \in \mathbb{N}$. Hierbei ist durch die spitzen Klammern die Cantorsche Paarungsfunktion bezeichnet.

Aufgabe 6 *(12 Punkte)*
Es sei $u_\Phi : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ die universelle Funktion der Standardkomplexität Φ zu φ, also

$$u_\Phi(i, x) := \Phi_i(x)$$

für alle $i, x \in \mathbb{N}$.

(a) Ist der Definitonsbereich $A = \mathrm{Def}(u_\Phi)$ von u_Φ rekursiv?

(b) Beweisen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 7 *(12 Punkte)*
Es sei $\nu :\subseteq \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definiert durch

$$\nu(n) := \begin{cases} \nu_{\mathbb{Q}}(n) & \text{falls } \nu_{\mathbb{Q}}(n) \in \mathbb{Z} \\ \text{div} & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass

(a) ν eine Nummerierung von $\mathbb{Z}$ und

(b) zur Standardnummerierung $\nu_{\mathbb{Z}}$ von $\mathbb{Z}$ äquivalent ist.

($\nu_{\mathbb{Q}}$ ist die Standardnummerierung von $\mathbb{Q}$.)

Aufgabe 8 *(10 Punkte)*
Zeigen Sie, dass die durch

$$x \mapsto x + 5$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ definierte Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (ρ, ρ)–berechenbar ist.

Anhang

Definition 5.10 *(WHILE–Programme)*

Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei R_i eine Kurzschreibweise für die Zeichenreihe $R0\ldots0$ (R gefolgt von i Nullen).

(1) Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sind R_i+ und R_i- WHILE–Programme.

(2) Wenn die Zeichenreihen P und Q WHILE–Programme sind und $i \in \mathbb{N}$ ist, dann sind auch

$$(P;Q)$$
$$(R_i \mid P \mid Q)$$
$$(R_i : P)$$

WHILE–Programme.

(3) Keine anderen Zeichenreihen sind WHILE–Programme.

Definition 5.11 *(Semantik der WHILE–Programme, WHILE–Berechenbarkeit)*

Für jedes WHILE–Programm P sei eine Funktion $\tau(P) :\subseteq D \longrightarrow D$, wobei $D = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, definiert durch:

(1) $\tau(R_i+)(a_0, a_1, \ldots) := (a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + 1, a_{i+1}, \ldots)$
$\tau(R_i-)(a_0, a_1, \ldots) := (a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i \dot{-} 1, a_{i+1}, \ldots)$

(2) $\tau(P;Q) := \tau(Q) \circ \tau(P)$

(3) $\tau(R_i \mid P \mid Q)(d) := \begin{cases} \tau(P)(d) & \text{falls } d(i) = 0 \\ \tau(Q)(d) & \text{sonst} \end{cases}$

(4) $\tau(R_i : P)(d) := \begin{cases} \tau(P)^t(d) & \text{falls } t := \min\{s \mid \tau(P)^s(d)(i) = 0\} \text{ existiert} \\ \text{div} & \text{sonst.} \end{cases}$

(5) $f :\subseteq \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ heißt WHILE–berechenbar, gdw. $f = \mathrm{AC} \circ \tau(P) \circ \mathrm{EC}$ für ein WHILE–Programm P gilt (wobei EC und AC die Eingabe– und Ausgabecodierung der k–stelligen Registermaschinen ist).

für alle $i \in \mathbb{N}$ und alle WHILE–Programme P und Q;

Satz 7.6

Es sei Σ ein Alphabet, es sei $\nu : \mathbb{N} \longrightarrow \Sigma^*$ eine Standardnumerierung von Σ^*, und es sei $k \in \mathbb{N}$. Die Funktion $\vec{\nu} : \mathbb{N}^k \longrightarrow (\Sigma^*)^k$ sei definiert durch $\vec{\nu}(i_1, \ldots, i_k) := (\nu(i_1), \ldots, \nu(i_k))$ für $i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}$. Es sei $g :\subseteq (\Sigma^*)^k \longrightarrow \Sigma^*$. Dann gilt:

$$g \text{ berechenbar} \iff \nu^{-1} g \vec{\nu} :\subseteq \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N} \text{ berechenbar.}$$

Satz 8.7 *(Φ–Theorem)*

Die Standardkomplexität Φ zu φ hat folgende Eigenschaften:

(1) $(\forall i \in \mathbb{N})\, \Phi_i \in P^{(1)}$,

(2) $(\forall i \in \mathbb{N})\, \mathrm{Def}(\Phi_i) = \mathrm{Def}(\varphi_i)$,

(3) die Funktion $g : \mathbb{N}^3 \longrightarrow \mathbb{N}$ definiert durch

$$g(i, x, t) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \Phi_i(x) \leq t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist berechenbar.

Definition 10.2 *(einige Standardnumerierungen)*

(3) $\nu_{\mathbb{Z}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $\nu_{\mathbb{Z}} \langle i, j \rangle := i - j$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$;

(4) $\nu_{\mathbb{Q}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $\nu_{\mathbb{Q}} \langle i, j, k \rangle := \frac{i-j}{1+k}$ für alle $i, j, k \in \mathbb{N}$;

Definition 10.7 *(Reduzierbarkeit, Äquivalenz)*

Es seien $\nu_1 :\subseteq \mathbb{N} \longrightarrow M_1$ und $\nu_2 :\subseteq \mathbb{N} \longrightarrow M_2$ Numerierungen.

(1) Es gelte $\nu_1 \leq \nu_2$, gdw. es eine berechenbare Funktion $f :\subseteq \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ gibt mit $\nu_1(i) = \nu_2 f(i)$ für alle $i \in \mathrm{Def}(\nu_1)$.
Wir sagen: "ν_1 ist *reduzierbar* auf ν_2" oder "f *übersetzt* ν_1 nach ν_2".

(2) Es gelte $\nu_1 \equiv \nu_2 :\Longleftrightarrow (\nu_1 \leq \nu_2$ und $\nu_2 \leq \nu_1)$.
Wir sagen: "ν_1 ist *äquivalent* zu ν_2".

Beispiel 10.1.6

(3) Dualnotation $\nu_{rat} :\subseteq \Sigma^* \longrightarrow \mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen:
Für $u, v \in \mathrm{Def}(\nu_{Du})$ mit $\nu_{Du}(v) \neq 0$ sei

$$\begin{aligned} \nu_{rat}(u¢v) &:= \nu_{Du}(u)/\nu_{Du}(v) \\ \nu_{rat}(-u¢v) &:= -\nu_{Du}(u)/\nu_{Du}(v) \end{aligned}$$

Für alle anderen $w \in \Sigma^*$ sei $\nu_{rat}(w) := \mathrm{div}$.

Definition 10.17 *(Cauchy–Darstellung)*

Für $w \in \mathrm{Def}(\nu_{rat})$ sei $\bar{w} := \nu_{rat}(w)$ (s. Beispiel 10.1.6). Die Cauchy–Darstellung $\rho :\subseteq \Sigma^\omega \longrightarrow \mathbb{R}$ der reellen Zahlen sei wie folgt definiert:

$$\rho(p) = x :\Longleftrightarrow \quad \text{es gibt } u_0, u_1, \ldots \in \mathrm{Def}(\nu_{rat}), \text{ so daß } p = u_0\sharp u_1\sharp\ldots, \\ (\forall k \in \mathbb{N})\,(\forall i > k)\,|\bar{u}_i - \bar{u}_k| \leq 2^{-k} \text{ und } x = \lim_{k\to\infty} \bar{u}_k.$$