01653 Einführung in die Theoretische Informatik A
Klausur vom 21. März 2009

Es müssen Ihnen 10 Seiten Klausurtext vorliegen:

- das Deckblatt für Ihre Lösungen,
- eine Teilnahmebescheinigung zur Vorlage beim Finanzamt,
- diese Vorbemerkungen,
- 5 Blätter mit 10 Aufgaben,
- 2 Seiten Anhang.

Prüfen Sie zunächst die Vollständigkeit Ihrer Klausurunterlagen.

Für die Bearbeitung der Klausuraufgaben haben Sie 3 Stunden Zeit. Einen Leistungsnachweis zum Kurs 01653 erhalten Sie, wenn Sie

- in dieser Klausur mindestens 40 der möglichen 100 Punkte erreichen und zusätzlich
- mindestens 25 % der insgesamt möglichen Punktzahl in den Einsendeaufgaben erreicht haben.

Füllen Sie bitte zunächst das Deckblatt für Ihre Lösungen aus und, falls gewünscht, die Bescheinigung für das Finanzamt. Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben rechts Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Falls es sich um ein Fortsetzungsblatt zu einer Aufgabe handelt, geben Sie bitte zusätzlich die Nummer der Aufgabe an. Bei Abgabe Ihrer Lösungsblätter heften Sie diese bitte – beginnend mit dem Deckblatt und möglichst nach Aufgaben sortiert – zusammen.

Schreiben Sie Ihre Lösungen bitte **nicht mit Bleistift** auf!

Bei der Bearbeitung der Klausuraufgaben wünschen wir Ihnen viel Erfolg.

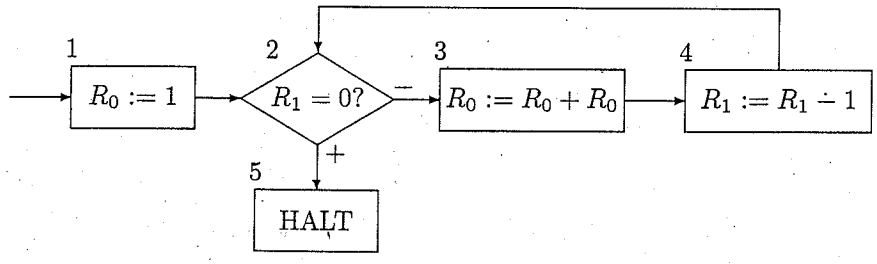
Wir senden Ihnen die korrigierten Klausuren so rasch wie möglich zurück.

Mit freundlichen Grüßen

IHRE KURSBETREUER

Aufgabe 1 *(10 Punkte)*

Eine einstellige verallgemeinerte Registermaschine M sei gegeben durch folgendes Flussdiagramm F :



(a) *(1 Punkt)*

Welche der folgenden beiden Behauptungen trifft zu?

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt

$$\mathrm{ES}^{3k}(2, (1, n, 0, 0, ...)) = (2, (2^k, n - k, 0, 0, ...)) .$$

(ii) Für alle $x \in \mathbb{N}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $x \geq n$ gilt

$$\mathrm{ES}^{3n}(2, (1, x, 0, 0, ...)) = (2, (2 \cdot n, x - n, 0, 0, ...)) .$$

$n = 0.$

(b) *(6 Punkte)*

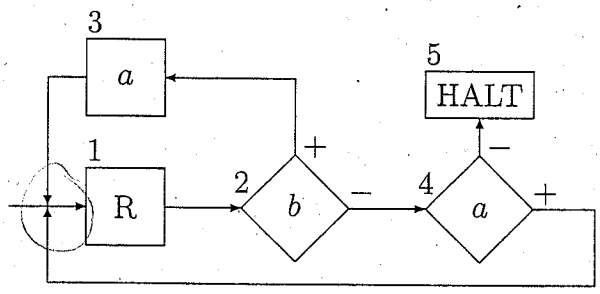
Beweisen Sie die zutreffende Behauptung aus (a).

(c) *(3 Punkte)*

Beweisen Sie $f_M(x) = 2^x$ für alle $x \in \mathbb{N}$ oder $f_M(x) = 2 \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 *(9 Punkte)*

Das Flussdiagramm F einer einstelligen Bandmaschine M über $\Sigma = \{a, b\}$ sei wie folgt gegeben:



Sei $\Gamma := \Sigma \cup \{B\}$. Für alle $w \in \Sigma^*$, $u, v \in \Gamma^*$ und $c \in \Gamma$ gilt dann:

$$(*) \quad (\exists t \in \mathbb{N})\ \mathrm{ES}^t\,(1, (v, c, \underbrace{w}B u)) = \big(5, (vca^{\lg(w)}, B, u)\big),$$

wobei $\lg(w)$ die Länge des Wortes w bezeichne.

(a) *(7 Punkte)*

Beweisen Sie $(*)$.

(b) *(2 Punkte)*

Es sei $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ sei definiert durch

$$f(w) := a^{\lg(w)}$$

für alle $w \in \Sigma^*$. Folgern Sie $f_M = f$ mit Hilfe von $(*)$.

Aufgabe 3 *(11 Punkte)*

(a) *(4 Punkte)*

Es sei $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$f(x, y) := y + \sum_{i=0}^{y} i^{x+1}$$

für alle $x, y \in \mathbb{N}$. Geben Sie Funktionen g und h an, so dass $f = \mathrm{Prk}(g, h)$ gilt.

(b) *(7 Punkte)*

Es sei $\mathrm{thrt} :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$\mathrm{thrt}(x) := \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{falls } (\exists y \in \mathbb{N})\ x = y^3 \\ \mathrm{div} & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle $x \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass thrt durch μ-Rekursion aus einer berechenbaren Funktion g entsteht.

Aufgabe 4 *(10 Punkte)*

Es sei $\chi : \mathbb{N} \to \mathrm{PRK}^{(1)}$ eine totale Nummerierung der einstelligen primitiv-rekursiven Funktionen. Ferner sei eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$f(i) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi(i)(i) = 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Ist f primitiv-rekursiv? Beweisen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 5 *(10 Punkte)*

Es sei $u_\Phi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ die universelle Funktion der Standardkomplexität Φ zu φ, also

$$u_\Phi(i, x) := \Phi_i(x)$$

für alle $i, x \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass der Definitonsbereich $A = \mathrm{Def}(u_\Phi)$ von u_Φ rekursiv-aufzählbar, aber nicht rekursiv ist.

Aufgabe 6 *(10 Punkte)*

Es sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$.

(a) *(5 Punkte)*

Unter welchen der folgenden, im Kurs betrachteten Operationen sind die rekursiven bzw. die rekursiv-aufzählbaren Teilmengen von $\mathbb{N}^k$ abgeschlossen: Vereinigung, Durchschnitt, Komplement, Urbild unter totalen berechenbaren Funktionen, Urbild unter partiell-rekursiven Funktionen, Bild unter der Cantorschen Tupelfunktion?

(b) *(5 Punkte)*

Beweisen Sie, dass die jeweils ggf. fehlende(n) Eigenschaft(en) nicht gilt (gelten).

Aufgabe 7 *(10 Punkte)*

Es sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathrm{P}^{(1)}$ die Standardnummerierung der einstelligen berechenbaren Funktionen. Ferner sei Z die einstellige Nullfunktion, und eine Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei definiert durch

$$g(i) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \varphi(i) = Z \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Ist g berechenbar? Beweisen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 8 *(11 Punkte)*

Es sei $\nu_{\mathbb{Q}}$ ist die Standardnummerierung von $\mathbb{Q}$. Eine partielle Funktion $\nu :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ sei definiert durch

$$\nu(n) := \begin{cases} \nu_{\mathbb{Q}}(n) & \text{falls } \nu_{\mathbb{Q}}(n) \in \mathbb{Z} \\ \text{div} & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie:

(a) *(3 Punkte)*

ν ist eine Nummerierung von $\mathbb{Z}$.

(b) *(8 Punkte)*

ν ist zur Standardnummerierung $\nu_{\mathbb{Z}}$ von $\mathbb{Z}$ äquivalent.

Aufgabe 9 *(10 Punkte)*

Erläutern Sie die Arbeitsweise einer Typ-2-Maschine und definieren Sie dann, wann eine Funktion $f :\subseteq (\Sigma^\omega)^k \to \Sigma^\omega$, wobei Σ ein Alphabet ist, *berechenbar* heißt.

Aufgabe 10 *(9 Punkte)*

Welche der folgenden Behauptungen sind richtig und welche falsch?

(Bei dieser Aufgabe erhalten Sie für jede richtige Antwort (entweder „richtig" oder „falsch") einen Punkt. Für eine falsche Antwort wird Ihnen dagegen ein Punkt abgezogen. Nicht beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet. Insgesamt kann keine negative Punktzahl erzielt werden. Ihre Antworten brauchen Sie nicht zu begründen.)

(a) Ist die von einer verallgemeinerten Registermaschine M berechnete Funktion f_M berechenbar, dann sind alle Funktionen und Tests im Flussdiagramm von M ebenfalls berechenbar.

(b) Ist die Wortfunktion $f :\subseteq \Sigma^* \to \Sigma^*$ berechenbar und ist Δ ein Alphabet mit $\Delta \supseteq \Sigma$, dann ist auch die durch $g(w) = f(w)$ für alle $w \in \Sigma^*$ definierte Funktion $g :\subseteq \Delta^* \to \Delta^*$ mit $\mathrm{Def}(g) = \mathrm{Def}(f)$ berechenbar.

(c) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $R^{(k)} \subseteq P^{(k)}$.

(d) Wenn die Churchsche These zutrifft, dann ist jede maschinell berechenbare Funktion μ-rekursiv.

(e) Ist $A \subseteq \mathbb{N}$ rekursiv-aufzählbar, dann ist auch $\nu_\Sigma[A]$ rekursiv-aufzählbar, wobei ν_Σ die Standardnummerierung von Σ^* sei.

(f) Die Menge $\{\langle i, j\rangle \mid i, j \in \mathbb{N},\ i \neq j\}$ ist nicht rekursiv-aufzählbar.

(g) Ist $A \subseteq \mathbb{N}$ rekursiv und gilt $A \leq B$ für die Teilmenge $B \subseteq \mathbb{N}$, dann ist auch B rekursiv.

(h) Die Menge der in einem Beweissystem beweisbaren Sätze ist im Allgemeinen nicht rekursiv-aufzählbar.

(i) Die Multiplikation mit 3 ist eine berechenbare reelle Funktion.

Anhang

Berechenbare Zahlenfunktionen

Die wie folgt definierten Funktionen f und Tests t auf den natürlichen Zahlen sind berechenbar.

1. $\tilde{0} : \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}$, $\tilde{0}() := 0$ (nullstellige Nullfunktion).
2. $Z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $Z(x) := 0$ (einstellige Nullfunktion).
3. $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $S(x) := x + 1$ (Nachfolgerfunktion).
4. $V : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $V(x) := x \dot{-} 1$ (Vorgängerfunktion).
5. $\mathrm{pr}_i^{(k)} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $\mathrm{pr}_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) := x_i$ für $1 \leq i \leq k$ (Projektion).
6. $f(x_1, \ldots, x_n) := k$ für $n, k \in \mathbb{N}$ (konstante Funktionen).
7. $f(x, y) := x + y$ (Summe).
8. $f(x, y) := x \dot{-} y$ (arithmetische Differenz).
9. $f(x, y) := x \cdot y$ (Produkt).
10. $q, r :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $x = q(x, y) \cdot y + r(x, y)$ und $r(x, y) < y$ für $y \neq 0$ und $q(x, y) = r(x, y) = \uparrow$ für $y = 0$ (Quotient und Rest).
11. $f(x, y) := x^y$ mit $0^0 := 1$ (Exponentiation).
12. $f(x) := (\sqrt{x}$ falls x Quadratzahl, $\uparrow$ sonst).
13. $\max(x, y)$.
14. $\min(x, y)$.
15. $f(x) := (1$ falls x Primzahl, 0 sonst).
16. $f(x) :=$ die x-te Primzahl.
17. $f(x, y) := |x \dot{-} y|$ (Absolutbetrag).

Primitive Rekursion, μ-Rekursion

1. Es sei $Q(x)$ eine Eigenschaft, in der eine natürliche Zahl x als Parameter vorkommt. Dann sei

$$\mu x[Q(x)] := \begin{cases} \min M & \text{falls } M := \{k \in \mathbb{N} \mid Q(k)\} \neq \emptyset \\ \uparrow & \text{sonst.} \end{cases}$$

2. Es seien $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$. Die durch die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} f(\bar{x}, 0) &= g(\bar{x}) \\ f(\bar{x}, y + 1) &= h(\bar{x}, y, f(\bar{x}, y)) \end{aligned}$$

(für alle $\bar{x} \in \mathbb{N}^k$ und $y \in \mathbb{N}$) eindeutig bestimmte Funktion $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ wird mit $\mathrm{Prk}(g, h)$ bezeichnet. Man sagt: f entsteht aus g und h durch *primitive Rekursion.*