Aufgabe 1 *(15 Punkte)*

Es wird jede **richtig beantwortete Frage mit 1 Punkt**, jede **falsch beantwortete Frage mit -1 Punkt** und jede nicht beantwortete Frage mit 0 Punkten bewertet. Insgesamt können nur nicht negative Punktzahlen erzielt werden.

Um eine Frage zu beantworten kreuzen Sie das entsprechenden Kästchen in der Zeile an. Falls Sie eine Frage nicht beantworten wollen, dann machen Sie bitte kein Kreuz in der Zeile.

Sei $\Sigma = \{0,1\}$ und $A, B \subseteq \Sigma^*$. Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

korrekt	falsch	
[ ]	[ ]	$\forall k \in \mathbb{N}.(\log n)^k \in O(\log n)$
[ ]	[ ]	Falls $f \in O(n)$ gilt, dann ist f berechenbar.
[ ]	[ ]	Aus $\tilde{t}_M \in O(n)$ folgt, dass die Turingmaschine M für jede Eingabe hält.
[ ]	[ ]	Sei M eine Kontrollturingmaschine mit Eingabealphabet Σ. Wenn es für $x \in \Sigma^*$ ein $y \in \{0,1\}^*$ gibt, so dass $\tau_M(x,y) = 2$ gilt, dann gilt $x \notin L_M$.
[ ]	[ ]	log n ist zeitkonstruierbar
[ ]	[ ]	Ist $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bandkonstruierbar, dann gibt es eine TM M mit $f_M(0^n) = 0^{f(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
[ ]	[ ]	ZEIT(n) $\subsetneq$ZEIT(n log n)
[ ]	[ ]	Für $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gilt NZEIT$(f) \subseteq \bigcup_{c \in \mathbb{N}}$ ZEIT $(c^{f(n)})$
[ ]	[ ]	Für alle $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gilt: $O(f) \subseteq O(g) \Longrightarrow$ ZEIT$(f) \subseteq$ ZEIT(g).
[ ]	[ ]	NPSPACE $\neq$ PSPACE
[ ]	[ ]	P=LOGSPACE $\Leftrightarrow \{\varepsilon\}$ ist P-vollständig
[ ]	[ ]	Für alle $A \in$ P gilt $A \in$ NP.
[ ]	[ ]	Wenn P$\neq$NP gilt, dann folgt SAT $\in$ NP\P.
[ ]	[ ]	Aus $A \leq_{log} B$ und $A \in$ PSPACE folgt $B \in$ PSPACE.
[ ]	[ ]	Aus A ist NP-vollständig folgt SAT $\leq_{pol} A$.

Aufgabe 2 *(10 Punkte)*

Beweisen Sie $\mathsf{BAND}((\log n)^2) \subsetneq \mathsf{BAND}((\log n)^3)$.
(Falls Sie in Ihrer Lösung eine Maschine konstruieren, brauchen Sie keinen Korrektheitsbeweis zu führen.)

Aufgabe 3 *(20 Punkte)*

Sei

$$\begin{aligned}\mathrm{BAG2} := \{\ & d(a_1)\sharp\ldots\sharp d(a_m)\sharp\sharp d(N)\sharp d(M) \mid \\ & N, M, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{N}, m \geq 0 \text{ und } \exists I, J \subseteq \{1, \ldots, m\}. \\ & \textstyle\sum_{i\in I} a_i = N \ \wedge \sum_{i\in J} a_i = M \ \wedge\ I \cap J = \emptyset\},\end{aligned}$$

wobei $d(n)$ die Dualdarstellung der natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist. Zeigen Sie, dass die Sprache BAG2 NP-vollständig ist.
(Sie dürfen verwenden, dass das Rucksackproblem NP-vollständig ist. Falls Sie in Ihrer Lösung eine Maschine konstruieren, brauchen Sie keinen Korrektheitsbeweis zu führen.)

Aufgabe 4 *(12 Punkte)*

Die Regelmenge R einer Grammatik $G = (\Pi, \Sigma, R, \mathtt{S})$ mit $\Sigma := \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ und $\Pi := \{\mathtt{S}\}$ sei gegeben durch:

$$\mathtt{S} \to \mathtt{0S1S} \mid \mathtt{1S0S} \mid \varepsilon$$

Ferner sei die Sprache L definiert durch

$$L := \{w \in \Sigma^* \mid \#_{\mathtt{0}}(w) = \#_{\mathtt{1}}(w)\} \subseteq \Sigma^*$$

wobei $\#_a(w)$ für $a \in \Sigma$ und $w \in \Sigma^*$ die Anzahl des Buchstaben a in w bezeichne.

✓ (a) *(7 Punkte)*
Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die folgende Aussage:

$$\forall n \in \mathbb{N}\,.\,\forall w \in (\Sigma \cup \Pi)^*\,.\ \left(\mathtt{S} \xrightarrow{n} w \implies \#_{\mathtt{0}}(w) = \#_{\mathtt{1}}(w)\right)$$

(b) *(1 Punkt)*
Zeigen Sie $L(G) \subseteq L$ mit Hilfe der Aussage aus (a).

(c) *(3 Punkte)*
Genau eine der folgenden Aussagen ist richtig. Welche?

(i) $\forall n \in \mathbb{N} . \forall w \in \Sigma^n . \left(\#_0(w) = \#_1(w) \implies \mathtt{S} \xrightarrow{*} w\right)$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N} . \forall w \in (\Sigma \cup \Pi)^n . \left(\#_0(w) = \#_1(w) \implies \mathtt{S} \xrightarrow{*} w\right)$

(iii) $\forall n \in \mathbb{N} . \forall w \in \Sigma^* . \left(\#_0(w) = \#_1(w) = n \implies \mathtt{S} \xrightarrow{n} w\right)$

Begründen Sie kurz Ihre Antwort. Ein formaler Beweis ist nicht erforderlich..

(d) *(1 Punkt)*
Beweisen Sie $L \subseteq L(G)$ mit Hilfe der richtigen Aussage aus (c).

Aufgabe 5 *(10 Punkte)*

Die Sprache L sei definiert durch

$$L := \{w \in \Sigma^* \mid \#_0(w) = \#_1(w)\} \subseteq \Sigma^*$$

wobei $\#_a(w)$ für $a \in \Sigma$ und $w \in \Sigma^*$ die Anzahl des Buchstaben a in w bezeichne.
In *genau* welchen Klassen der Chomsky-Hierarchie ist L enthalten. Bitte beweisen Sie Ihre Behauptungen. (Sie dürfen hierfür die Aussagen aus Aufgabe 4 auch dann nutzen, wenn Sie diese nicht bearbeitet haben.)

Aufgabe 6 *(9 Punkte)*

Die Regelmenge R der Grammatik $G = (\Pi, \Sigma, R, \mathtt{S})$ mit $\Sigma := \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ und $\Pi := \{\mathtt{S}\}$ sei gegeben durch:

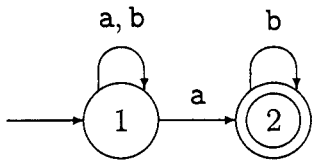
$$\mathtt{S} \rightarrow \mathtt{0S1S} \mid \mathtt{1S0S} \mid \varepsilon$$

(a) *(3 Punkte)*
Transformieren Sie G nach dem Verfahren aus dem Kurstext in eine Grammatik G' mit $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$, die keine Regeln der Form $A \rightarrow \varepsilon$ mit $A \in \Pi$ enthält.

(b) *(6 Punkte)*
Transformieren Sie G' nach dem Verfahren aus dem Kurstext in eine Grammatik G'' in Chomsky-Normalform, für die $L(G'') = L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$ gilt. Es reicht dabei, bei jedem der drei Schritte des Verfahrens die Regelmenge der erzeugten Zwischenergebnisgrammatiken anzugeben. Das Endergebnis G'' ist vollständig anzugeben.

Aufgabe 7 *(14 Punkte)*

Durch die folgende graphische Darstellung sei ein endlicher Automat A über dem Alphabet $\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ gegeben:



(a) *(1 Punkt)*
Geben Sie den obigen Automaten A in Form eines Quintupels $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ gemäß der Definition endlicher Automaten an.

(b) *(2 Punkte)*
Beschreiben Sie die von A akzeptierte Sprache $L(A)$ (in der Art, wie L in Aufgabe 4 gegeben ist: $L(A) = \{\ldots \mid \ldots\}$).

(c) *(7 Punkte)*
Konstruieren Sie nach dem Verfahren aus dem Kurs einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L(A)$. Achten Sie dabei auf korrekte Syntax.
Geben Sie alle dazu benötigten Mengen L_{ij}^k an. Zur Vereinfachung können Sie die für beliebige Sprachen $U, V \subseteq \Sigma$ gültigen Formeln

$$U \cup (U \cdot V^* \cdot V) = U \cdot V^* \text{ und } U \cup (V \cdot V^* \cdot U) = V^* \cdot U$$

verwenden.

(d) *(4 Punkte)*
Konstruieren Sie nach dem Verfahren aus dem Kurstext einen determinierten endlichen Automaten B mit $L(B) = L(A)$. Geben Sie die Übergangsrelation von B graphisch an.

Anhang

$\log n$:

$$\log\ n := \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \\ \lfloor \log_2 n \rfloor + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

O-Notation:

Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine (totale) Funktion. Dann ist

$$O(g) := \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ \exists c.\ \forall n.\ f(n) \leq c \cdot g(n) + c\},$$
$$o(g) := \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)+1}{g(n)+1} = 0\}.$$

Bandhierarchiesatz:

Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bandkonstruierbar, $\log \in O(g)$, $f \in O(g)$ und $g \notin O(f)$. Dann gilt $\mathsf{BAND}(f) \subsetneq \mathsf{BAND}(g)$.

Rucksackproblem:

Es ist RUCKSACK die folgende Menge:

$$\{d(N)\#d(k_1)\ldots\#d(k_n) \mid\ n \geq 1,\ N, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$$
$$\exists M \subseteq \{1, \ldots, n\}.\ \textstyle\sum_{i\in M} k_i = N\}.$$

Verfahren *(Konstruktion eines regulären Ausdrucks zu einem Automaten, nach dem Beweis von Lemma 8.3.15)*

Zu einem endlichen Automaten $A = (\Sigma, \{1, \ldots, n\}, 1, F, \delta)$ bestimmt man:

$$\begin{aligned} L^0_{ij} &:= \{z \in \Sigma \mid (i, z, j) \in \delta\} \\ L^k_{ij} &:= L^{k-1}_{ij} \cup L^{k-1}_{ik} \cdot (L^{k-1}_{kk})^* \cdot L^{k-1}_{kj} \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$L(A) = N_\varepsilon \cup \bigcup \{L^n_{1j} \mid j \in F\},$$

wobei

$$N_\varepsilon := \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{falls } 1 \in F, \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz 8.4.4 *(Pumping-Lemma für reguläre Mengen)*

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ regulär. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für alle $t, \bar{t}, z \in \Sigma^*$ mit $tz\bar{t} \in L$ und $\lg(z) = n$ gilt:

$$\exists u, v, w \in \Sigma^* \,.\, (z = uvw \quad \text{und} \quad v \neq \varepsilon \quad \text{und} \quad \forall i \geq 0 \,.\, tuv^iw\bar{t} \in L)\,.$$

Satz 9.4.3 *(Pumping-Lemma für kontextfreie Mengen)*

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei. Dann gibt es ein $p \in \mathbb{N}$, so dass man jedes Wort $z \in L$ mit $\lg(z) \geq p$ so in Teilworte u, v, w, x, y zerlegen kann, dass gilt:

$$z = uvwxy\,,\ vx \neq \varepsilon\,,\ \lg(vwx) \leq p\,,\ \forall i \geq 0 \,.\, uv^iwx^iy \in L\,.$$