Vorbemerkungen zur Klausur zum Kurs 01654
„Einführung in die Theoretische Informatik B“

16. Sept. 2006

Es müssen Ihnen 8 Blätter vorliegen:

- das Deckblatt für Ihre Lösungen,
- eine Teilnahmebescheinigung für das Finanzamt,
- diese Vorbemerkungen,
- 4 Blätter mit 9 Aufgaben,
- Anhang

Füllen Sie bitte vor der Bearbeitung das Deckblatt aus (Matrikel-Nr., Name, Adresse) und legen Sie es mit den Ausweisen zur Kontrolle bereit.

Für die Bearbeitung haben Sie 3 Stunden Zeit. Außer Schreibzeug sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.

Schreiben Sie bitte leserlich und lassen Sie einen breiten Korrekturrand. Beginnen Sie möglichst für jede Aufgabe eine neue Seite.

Folgende Unterlagen sind zusammengeheftet abzugeben:

- das ausgefüllte Deckblatt (bitte bearbeitete Aufgaben ankreuzen),
- die ausgefüllte Finanzamt-Bescheinigung (sofern gewünscht),
- Ihre Lösungsblätter, möglichst in der Reihenfolge der Aufgaben. Schreiben Sie zur Sicherheit auf jedes Blatt nochmals Name und Matrikel-Nr. Vergessen Sie bitte nicht den ausgefüllten Fragebogen von Aufgabe 1 abzugeben!

Die Klausur ist bestanden, wenn Sie 40 von 100 Punkten erreichen. Wir bemühen uns, die Klausur zügig zu korrigieren und zurückzusenden. Sollten Sie nach drei Wochen noch keine Nachricht haben, können Sie Ihr Ergebnis im Lehrgebiet erfragen.

Viel Erfolg!

Mit freundlichen Grüßen

IHRE KURSBETREUER

Aufgabe 1 siehe Musterlösung

Aufgabe 2 *(10 Punkte, je 2 pro Teilaufgabe)*

Formulieren Sie:

(i) den Zeithierarchiesatz für deterministische Komplexitätsklassen (Satz 3.4.2),

(ii) den Translationssatz für Zeitkomplexität (Satz 3.4.6),

(iii) den Projektionssatz für NP (Korollar 4.1.7),

(iv) den Satz, der den Zusammenhang zwischen NZEIT(f) und BAND(f) beschreibt (Satz 4.2.1)

(v) das Pumpinglemma für kontextfreie Sprachen (Satz 9.4.3).

Aufgabe 3 *(7 Punkte, je 1 pro Teilaufgabe)*

Geben Sie Definitionen an für:

(i) $o(f)$ für $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

(ii) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist bandkonstruierbar,

(iii) NZEIT(f) für eine totale Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

(iv) die Komplexitätsklasse P,

(v) die Komplexitätsklasse NP,

(vi) $L(A)$ für einen verallgemeinerten endlichen Automaten $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$,

(vii) G ist kontextfrei für eine Grammatik $C = (\Pi, \Sigma, R, S)$.

Aufgabe 4 *(9 Punkte)*

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $f(n) := \begin{cases} n & \text{, falls } n \text{ gerade} \\ \log n, & \text{sonst} \end{cases}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(i) Zeigen Sie, dass f **bandkonstruierbar** ist. (6 Punkte)

(ii) Geben Sie eine Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $n \in O(g)$ an, die **nicht zeitkonstruierbar** ist. Begründen Sie kurz, warum Ihr g nicht zeitkonstruierbar ist. (3 Punkte)

Aufgabe 5 *(6 Punkte, je 3 Punkte pro Teilaufgabe)*

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $f(n) := \begin{cases} n & \text{, falls } n \text{ gerade} \\ \log n, & \text{sonst} \end{cases}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie:

(i) $\mathrm{BAND}(f) \not\subseteq \mathrm{BAND}(\log n)$

(ii) $\mathrm{BAND}(\log n) \subsetneq \mathrm{BAND}(f)$

(Hinweise: Aufgabe 4.(i) darf benutzt werden, $((A \not\subseteq B)$ gdw. $(\exists x{\in}A \,.\, x{\notin}B))$ und $(A \subsetneq B)$ gdw. $((A \subseteq B) \wedge (A \neq B)))$

Aufgabe 6 *(9 Punkte)*

Seien die Sprachen

$$L_1 := \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) \text{ ist ungerade } \textbf{und } \#_b(w) \text{ ist gerade } \}$$

sowie

$$L_2 := \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) \text{ ist gerade } \}$$

gegeben.

(i) Geben Sie einen determinierten endlichen Automaten A mit $L(A) = L_1$ an.
(3 Punkte)

(ii) Geben Sie eine rechtslineare Grammatik G mit maximal 10 Regeln an, so dass $L(G) = L_1$ gilt.
(3 Punkte)

(iii) Geben Sie einen regulären Ausdruck α an, so dass $L(\alpha) = L_2$ gilt.
(3 Punkte)

Aufgabe 7 *(7 Punkte)*

Gegeben sei die folgende Grammatik $G := (\Pi, \Sigma, R, S)$ mit $\Pi := \{S, A, B\}$, $\Sigma := \{a, b\}$ und

$$R := \{S \to aA, A \to aB, B \to \varepsilon, B \to aB, B \to bB\}.$$

(i) Geben Sie $L(G)$ an.
(2 Punkte)

(ii) <u>Konstruieren</u> Sie eine rechtslineare Grammatik G' mit $L(G') = \{a,b\}^* \backslash L(G)$.
(5 Punkte)

Aufgabe 8 *(15 Punkte)*

Gegeben sei die Sprache

$(ab)^*(ab)^*$

$$L := \{xy \in \{a,b\}^* \mid lg(x) = lg(y) \wedge \#_b(y) \geq 2\}.$$

(i) Geben Sie einen Kellerautomaten A mit $N(A) = L$ an.
(8 Punkte)

(ii) Existiert zu Ihrem Kellerautomaten A aus (i) und dem Wort *ababab* auch eine nicht akzeptierende Konfigurationsfolge? Geben Sie sie ggf. an.
(2 Punkte)

(iii) Zeigen Sie, dass L nicht regulär ist.
(5 Punkte)

Aufgabe 9 *(16 Punkte)*

Ein Graph G heißt $k-$vernetzt, wenn jede Teilmenge von k Knoten in G mindestens eine Kante enthält. Sei $M := \{x\sharp^k \mid \nu_G(x) \text{ ist } k-\text{vernetzt}\}$.

a) Ist M in P, NP, PSPACE?
Begründen Sie Ihre Einordnung.
(5 Punkte)

b) Zeigen Sie:
Wenn M NP-vollständig ist, dann ist NP abgeschlossen unter Komplementbildung.
(11 Punkte)

Hinweis: Im Kurstext wurde bewiesen, dass die Menge IND_SET= $\{x\sharp^k \mid$ in $\nu_G(x)$ gibt es eine unabhängige Menge mit k Knoten $\}$ NP-vollständig ist. Es ist unbekannt, ob NP abgeschlossen ist unter Komplementbildung.

Anhang

Für $x \in \{a,b\}$ und $w \in \{a,b\}^*$ bezeichnet $\#_x(w)$ die Anzahl der Vorkommen des Zeichens x im Wort w.

$\$$	ein Symbol $\notin \Sigma$ (*Markierung für Eingabeende*),
Γ	eine endliche Menge (*Kelleralphabet*),
$\# \in \Gamma$	(*Kellerstartsymbol*),
Q	eine endliche Menge (*Zustandsmenge*),
$q_0 \in Q$	(*Anfangszustand*),
$Q_f \subseteq Q$	(*Menge der Endzustände*) und

$\delta \subseteq (Q \times \Sigma \times \Gamma) \times (\{\mathsf{N}, \mathsf{R}\} \times \Gamma^* \times Q) \cup (Q \times \{\$\} \times \Gamma) \times (\{\mathsf{N}\} \times \Gamma^* \times Q)$
eine endliche Menge ist.

A heißt *determiniert*, wenn

$\forall q \in Q.\ \forall a \in \Sigma \cup \{\$\}.\ \forall C \in \Gamma.\ \mathrm{card}(\delta \cap (q, a, C) \times (\{\mathsf{N}, \mathsf{R}\} \times \Gamma^* \times Q)) \leq 1.$

$K := Q \times \Sigma^* \cdot \{\$\} \times \Gamma^*$ ist die Menge der Konfigurationen,
$(q_0, w\$, \#)$ ist die Anfangskonfiguration bei Eingabe $w \in \Sigma^*$,
$Q_f \times \{\$\} \times \Gamma^*$ ist die Menge der Endkonfigurationen.

Wir bezeichnen mit $\vdash$, $\vdash^n$, $\vdash^*$ die Einzelschritt- bzw. Mehrschrittrelation auf $K \times K$, die von δ induziert wird:

Für alle $p, q, q' \in Q,\ a \in (\Sigma \cup \{\$\}),\ w, w' \in \Sigma^* \cdot \{\$\},\ C \in \Gamma,\ X, Y, X' \in \Gamma^*$

$(p, aw, CX) \mid \quad (q, w, YX) \Leftrightarrow ((p, a, C), (\mathsf{R}, Y, q)) \in \delta,$

$(p, aw, CX) \vdash (q, aw, YX) \Leftrightarrow ((p, a, C), (\mathsf{N}, Y, q)) \in \delta,$

$(q, w, X) \vdash^0 (q', w', X') \Leftrightarrow q = q',\ w = w',\ X = X',$

$$(q, w, X) \vdash^{n+1} (q', w', X') \Leftrightarrow \exists (q'', w'', X'') \in K.\ (q, w, X) \vdash^n (q'', w'', X'') \wedge$$
$$(q'', w'', X'') \vdash (q', w', X')$$

$$\vdash^* := \bigcup_{n \geq 0} \vdash^n, \quad \vdash^+ := \bigcup_{n \geq 1} \vdash^n.$$

Die von A erkannte Sprache ist

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in Q_f.\ \exists X \in \Gamma^*.\ (q_0, w\$, \#) \vdash^* (q, \$, X)\},$$

die von A mit leerem Keller erkannte Sprache ist

$$N(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in Q.\ (q_0, w\$, \#) \vdash^* (q, \$, \varepsilon)\}.$$