FernUniversität
Gesamthochschule in Hagen

1655 - Hk - 2002

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität D - 58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(Auslandskennzeichen, PLZ, Wohnort)

FERNUNIVERSITÄT
- Gesamthochschule -
EINGANG

INF

Bitte zurück an:
FERNUNIVERSITÄT
Gesamthochschule
D - 58084 Hagen

Fachbereich Informatik

Kurs 1655 - Grundlagen der Theoretischen Informatik

Klausur vom 02.02.2002

- ☐ Berlin
- ☐ Bochum
- ☐ Bregenz
- ☐ Frankfurt
- ☐ Hamburg
- ☐ Karlsruhe
- ☐ Kassel
- ☐ Köln
- ☐ München
- ☐ Wien
- ☐ sonstige:

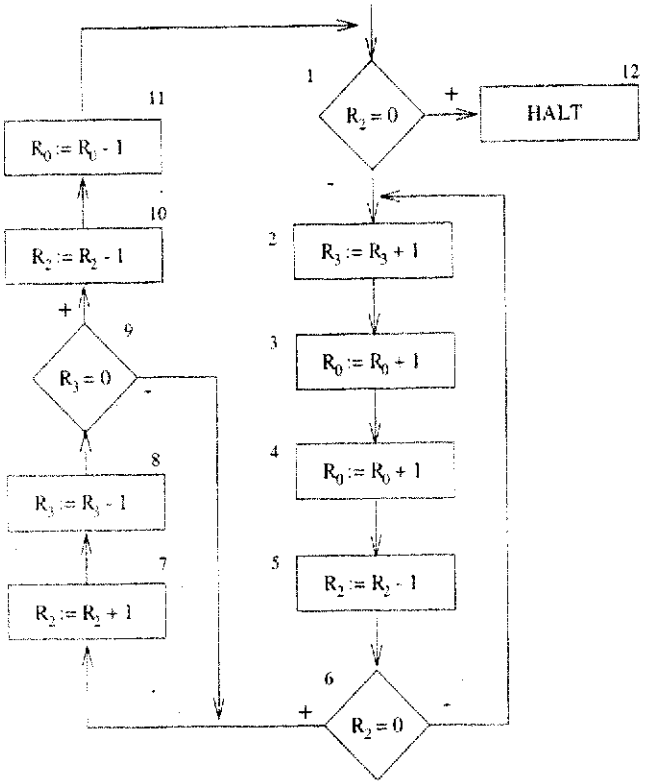
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
bearbeitet											
erreichte Punktzahl											

Datum: _____ Korrektur: _____

©1996 FernUniversität - Gesamthochschule in Hagen

Aufgabe 1: (20 Punkte)

Eine 2-stellige Registermaschine M sei gegeben durch das folgende Flussdiagramm:



a) Welche Funktion entspricht f_M?

(i) $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f_1(n) = n^2$

(ii) $f_2 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, f_2(m,n) = \Sigma_{i=0}^{n} n$

(iii) $f_3 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, f_3(m,n) = n^2$

(iv) $f_4 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f_4(n) = \frac{n(n-1)}{2}$

(5 Punkte)

b) Zeigen Sie die folgenden Behauptungen über M:

(i) $\forall m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \exists t \in \mathbb{N}.$
$ES^t(6,(x,m,n,y,0,...)) = (6,(x+2n,m,0,y+n,0,...))$

(ii) $\forall m \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \exists t \in \mathbb{N}.$
$y > 0 \Rightarrow ES^t(7,(x,m,n,y,...)) = (9,(x,m,y+n,0,...))$

(7 Punkte)

c) Zeigen Sie Ihre Behauptung aus Teil a).
(8 Punkte)

Aufgabe 2: (15 Punkte)

Sei $\Sigma = \{0,1\}$ und ν_Σ eine Standardnumerierung von Σ^*. Weiter seien die folgendenden Numerierungen ν_1, ν_2, ν_3 von $\mathbb{Q}$ gegeben:

$$\nu_1 : \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, \nu_1(\langle x,y,z\rangle) = \begin{cases} \frac{x-y}{z}, & \text{falls } z \neq 0 \\ \uparrow, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\nu_2 : \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, \nu_2(x) = \begin{cases} \frac{n-m}{z}, & \text{falls } \nu_\Sigma(x) = 1^n 0^m 1^z \text{ mit } z \neq 0 \\ \uparrow, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\nu_3 : \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, \nu_3(\langle x,y,z,m\rangle) = \left\{ \frac{x-y}{z+m+1}, \right.$$

(wobei $\langle .,.,. \rangle, \langle .,.,.,. \rangle$ die 3-stellige bzw. 4-stellige Cantorsche Tupelfunktion bezeichnet).

a) Zeigen Sie $\nu_1 \equiv \nu_2 \equiv \nu_3$.
(8 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, q \mapsto q^2$ (ν_2, ν_2)-berechenbar ist.
(7 Punkte)

(Sie dürfen die im Anhang angegebenen Funktionen als berechenbar voraussetzen.)

Aufgabe 3: (15 Punkte)

Sei $id : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, id(n) = n$ die Identitätsfunktion auf $\mathbb{N}$.

Zeigen (bzw. widerlegen) Sie 2 der folgenden Aussagen:

a) Die Funktion $A : \subseteq \mathbb{N} \to P^{(1)}, A(i) = \mu k[\varphi_i(k) \in \mathbb{N}]$ ist (id, φ)-berechenbar.

b) Die Funktion

$$B : \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to P^{(1)}, B(i,j) = \begin{cases} \varphi_j, & \text{falls } i \in K_\varphi \\ \varphi_i, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist (id, id, φ)-berechenbar.

c) Die Funktion $C : P^{(1)} \times P^{(1)} \to P^{(1)}, C(f,g) = f^g$ ist $(\varphi, \varphi, \varphi)$-berechenbar, wobei $f^g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert sei durch $f^g(n) = f(n)^{g(n)}$.

d) Sei eine Menge $F \subseteq P^{(1)}$ mit $F \neq \emptyset$ und $F \neq P^{(1)}$ gegeben. Dann ist die Funktion

$$D : P^{(1)} \to P^{(1)}, D(f) = \begin{cases} id, & \text{falls } f \in F \\ f, & \text{sonst} \end{cases}$$

(φ, φ)-berechenbar.

Aufgabe 4: (10 Punkte)

a) Erläutern Sie das P-NP-Problem und den Begriff NP-Vollständigkeit. (max $\frac{3}{4}$ Seite)

(5 Punkte)

b) Macht es Sinn, auch P-vollständige Sprachen zu untersuchen? (Begründung)

(5 Punkte)

Aufgabe 5: (15 Punkte)

Sei KS die Menge der kontextsensitiven Sprachen.

Zeigen Sie:

a) $BAND(\log) \subsetneq KS$

b) $KS \subsetneq ZEIT(2^{(n^2)})$

Hinweis: Welcher Band-Komplexitätsklasse entspricht KS?

Aufgabe 6: (15 Punkte)

Sei Σ ein endliches Alphabet und R der Spiegelungsoperator auf Σ^*, d.h. es sei $\varepsilon^R = \varepsilon$ und $(\omega a)^R = a\omega^R$ für alle $a \in \Sigma$ und $\omega \in \Sigma^*$.

Zeigen Sie: Die kontextfreien Sprachen sind unter dem Operator R abgeschlossen, d.h. für jede kontextfreie Sprache L ist auch $L^R := \{\omega^R : \omega \in L\}$ kontextfrei.

Anhang:

Satz 2.7.4:

Die wie folgt definierten Funktionen sind berechenbar.

(a) $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $f(n_1, ..., n_k) := n$ **mit** $n \in \mathbb{N}$, **(konstante Funktion),**

(b) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(n, k) := n + k$ **(Summe),**

(c) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(n, k) := n \dot{-} k$ **(arithmetische Differenz),**

(d) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(n, k) := n \cdot k$ **(Produkt),**

(e) $q, r :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ **(Quotient und Rest),**
wobei q, r **eindeutig definiert sind durch**

$$\begin{cases} n = q(n,k) \cdot k + r(n,k) \text{ und } r(n,k) < k & \text{für } k \neq 0 \\ q(n,k) = r(n,k) = \text{div} & \text{für } k = 0 \end{cases}$$

(f) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(n, k) := n^k$ **mit** $0^0 := 1$ **(Exponentiation),**

(g) $f :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) := (\sqrt{n}$ **falls** n **Quadratzahl,** div **sonst),**

(h) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(n, k) := \max(n, k)$ **(Maximum),**

(i) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(n, k) := \min(n, k)$ **(Minimum),**

(j) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) :=$ **die** n**–te Primzahl (Primzahlfolge).**

(k) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ **(Test),definiert durch**

$$f(n, k) := \begin{cases} 0 & \text{falls } n < k \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

und entsprechend auch für $\leq, >, \geq, =, \neq$ **anstelle von** $<$.

Definition 3.3.1:

Sei Σ ein Alphabet. Dann heißt $\nu : \mathbb{N} \to \Sigma^*$ eine *Standardnumerierung* von Σ^*, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung $a : \{1, ..., n\} \to \Sigma$ gibt, so daß gilt $\nu^{-1}(\varepsilon) = 0$ und

$$\nu^{-1}(a_{i_k} ... a_{i_0}) = \sum_{j=0}^{k} i_j n^j$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, $i_0, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$.