FernUniversität in Hagen

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität 58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(PLZ, Wohnort)

(Land)

FERNUNIVERSITÄT
EINGANG

INF

Bitte zurück an:
FERNUNIVERSITÄT
58084 Hagen

Fachbereich Informatik

Kurs 01655 – Grundlagen der Theoretischen Informatik

Klausur am 21. Februar 2004

- ☐ Berlin
- ☐ Bochum
- ☐ Bregenz
- ☐ Darmstadt
- ☐ Hamburg
- ☐ Karlsruhe
- ☐ Kassel
- ☐ Köln
- ☐ München
- ☐ Wien
- ☐ sonstige

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
bearbeitet										
maximale Punktzahl	30	12	15	10	5	9	14	10	15	120
erreichte Punktzahl										

Datum: _____ Korrektor: _____

© 2004 FernUniversität in Hagen

Aufgabe 1 *(30 Punkte)*

Es wird jede **richtig beantwortete Frage mit 1 Punkt**, jede **falsch beantwortete Frage mit -1 Punkt** und jede nicht beantwortete Frage mit 0 Punkten bewertet. Insgesamt können für jede Teilaufgabe nur nicht negative Punktzahlen erzielt werden.

Um eine Frage zu beantworten kreuzen Sie das entsprechenden Kästchen in der Zeile an. Falls Sie eine Frage nicht beantworten wollen, dann machen Sie bitte kein Kreuz in der Zeile.

Beachten Sie den Anhang!

(a) Welche der folgenden Aussagen über reguläre Mengen ist/sind korrekt? Dabei sind L und M reguläre Mengen.

korrekt	falsch	
[ ]	[ ]	$L \cup M$ und $L \cap M$ sind reguläre Mengen.
[ ]	[ ]	L^* und $\Sigma^* \backslash L$ sind reguläre Mengen.
[ ]	[ ]	Für alle L ist entscheidbar, ob $\#L < \infty$ gilt.
[ ]	[ ]	$\{a^n bbc^m \mid m > n > 3\}$ ist eine reguläre Menge.
[ ]	[ ]	$\{a^n bbc^m \mid m > 7, n > 3\}$ ist eine reguläre Menge.

(b) Welche der folgenden Mengen ist/sind rekursiv? Dabei ist $A \subseteq \mathbb{N}$ eine rekursive Menge.

rekursiv	nicht rekursiv	
[ ]	[ ]	K
[ ]	[ ]	$\{i \mid 2i \in A\}$
[ ]	[ ]	$\{(i, n, t, j) \mid \Phi_i(n) \leq t \wedge j \in A\}$
[ ]	[ ]	$\{i \mid \varphi_i(0) \leq 42\}$
[ ]	[ ]	$\mathbb{N} \backslash A$

(c) Welche der folgenden Mengen ist/sind rekursiv aufzählbar (r.a.)?

r.a.	nicht r.a.	
[ ]	[ ]	$\mathbb{N} \backslash H$
[ ]	[ ]	$\{i \mid \varphi_i(0) = 42\}$
[ ]	[ ]	$\{i \mid \{0\} \subseteq Def(\varphi_i)\}$
[ ]	[ ]	$\{i \mid \Phi_i(0) \leq 42\}$
[ ]	[ ]	$\{i \mid \{0\} = Def(\varphi_i)\}$

(d) Welche der folgenden Aussagen ist/sind für alle Sprachen L und M korrekt?

korrekt	falsch	
[ ]	[ ]	Wenn $L \in$ NP und $L \leq_{pol} M$ gilt, so gilt auch $M \in$ NP.
[ ]	[ ]	Wenn $L \leq_{pol} M$ und $M \leq_{pol} L$ gilt, dann gilt auch $L = M$.
[ ]	[ ]	Wenn $L \in$ NP gilt, dann gilt auch $L \leq_{pol}$ 3SAT.

(e) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

korrekt	falsch	
[ ]	[ ]	$(\log n)^2 + 3 \log n \in O(n \log n)$
[ ]	[ ]	$3n \log n$ ist zeit- und bandkonstruierbar.
[ ]	[ ]	Für alle $c > 0$ gilt $2^{cn} \in O(2^n)$.

(f) Welche der folgenden Sprachen ist/sind kontextfrei (kf.)?

kf.	nicht kf.	
[ ]	[ ]	$\{a^n w w b^n \mid n > 1,\ w \in \{aa, ab, bb\}\}$
[ ]	[ ]	$\{a^n b^m c^k b^m a^n \mid m, n, k > 0\}$
[ ]	[ ]	$\{a^n b^m a^n b^m \mid n, m > 0\}$

(g) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt? Dabei sind $f : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ und $t, h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

korrekt	falsch	
[ ]	[ ]	Wenn für alle h die Aussage $f \in \text{FZEIT}(h) \Longrightarrow t \in O(h)$ gilt, dann ist t **untere Schranke** für die Zeitkomplexität von f.
[ ]	[ ]	Wenn für alle h die Aussage $f \in \text{FBAND}(h) \Longrightarrow t \in O(h)$ gilt, dann ist t **obere Schranke** für die Bandkomplexität von f.
[ ]	[ ]	Aus $t \in O(h)$ folgt $\text{ZEIT}(t) \subseteq \text{ZEIT}(h)$.

(h) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

korrekt	falsch	
[ ]	[ ]	Wenn 2D-Domino$\in$ P, dann gilt P$\neq$NP.
[ ]	[ ]	CLIQUE $\leq_{pol}$ 3SAT und 3SAT $\leq_{pol}$ CLIQUE.
[ ]	[ ]	Wenn P=NP, dann gilt 2D-Domino $\in$ P.

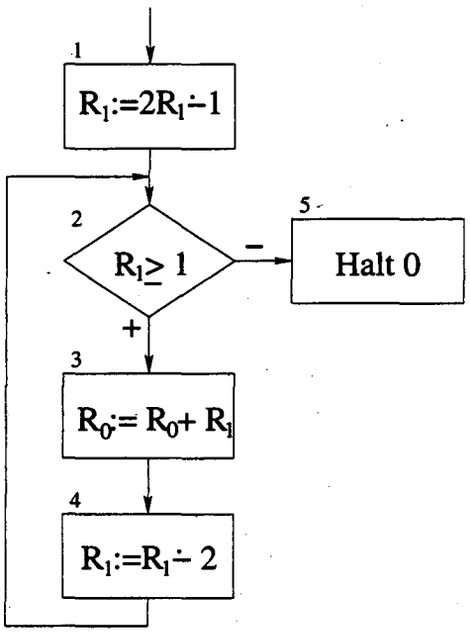
Aufgabe 2 *(12 Punkte)*

Geben Sie Definitionen an für:

- $f : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ ist berechenbare Zahlenfunktion
- $f : (\Sigma^*)^k \longrightarrow \Sigma^*$ ist berechenbare Wortfunktion
- Menge $A \subseteq \mathbb{N}^k$ ist rekursiv
- NP
- A ist Alphabet
- G ist eine rechtslineare Grammatik

Aufgabe 3 *(15 Punkte)*

Eine einstellige verallgemeinerte Registermaschine M sei gegeben durch folgendes Flußdiagramm:



(a) *(8 Punkte)*
Beweisen Sie mit vollständiger Induktion nach k:
$(\forall k \geq 0)(\forall x \geq 0)$:

$$\mathrm{ES}^{3(k+1)}(2, (x, 2k+1, 0, ...)) = (2, (x + (k+1)^2, 0, 0, ...)) .$$

(b) *(7 Punkte)*
Geben Sie an, welche Funktion von M berechnet wird (2 Punkte) und beweisen Sie Ihre Aussage (5 Punkte).

Aufgabe 4 *(10 Punkte)*

Sei $\nu_{\mathbb{Z}} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ die durch

$$\nu_{\mathbb{Z}}\langle i, j\rangle := i - j$$

für $i, j \in \mathbb{N}$ definierte Nummerierung der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, die durch

$$f(p, q) := p^2 - q^2$$

für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ definiert ist, eine $(\nu_{\mathbb{Z}}, \nu_{\mathbb{Z}}, \nu_{\mathbb{Z}})$–berechenbare Funktion ist.

Aufgabe 5 *(5 Punkte)*

Sei $a \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es eine berechenbare Funktion $r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\varphi_{r(i)}(n) = a \cdot \varphi_i(n)$$

für alle $i, n \in \mathbb{N}$ mit $< i, n > \in H$ gilt.

Aufgabe 6 *(9 Punkte)*

(a) *(6 Punkte)*
Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die durch

$$g(n) := an + b$$

definierte Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bandkonstruierbar ist.

Hinweis: Falls Sie zur Lösung eine Turingmaschine angeben: Eine textuelle Beschreibung der Arbeitsweise ist ausreichend. Es braucht also kein Flußdiagramm angegeben zu werden.

(b) *(3 Punkte)*
Zeigen Sie unter Verwendung des Bandhierarchiesatzes:

$$\mathrm{BAND}(\log n) \subsetneq \mathrm{BAND}(4n + 2).$$

Aufgabe 7 *(14 Punkte)*

Wir betrachten das Partitionierungsproblem

$$\text{PARTITION} := \{d(i_1)\#...\#d(i_k) \mid \exists M \subseteq \{1,...,k\}.(\sum_{j\in M} i_j = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} i_j)\}$$

sowie das Problem

$$\text{SCHEDULING} := \{d(k)\#d(T)\#d(t_1)\#...\#d(t_n) \mid \exists M_1,...,M_k \subseteq \{1,...,n\}.$$
$$(i \neq j \Rightarrow M_i \cap M_j = \emptyset) \wedge \bigcup M_i = \{1,...,n\} \wedge \forall i. \textstyle\sum_{j\in M_i} t_j \leq T\}$$

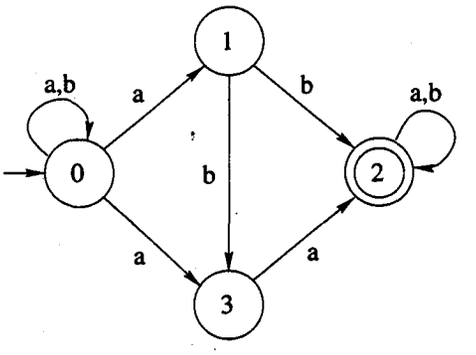
Zeigen Sie:

$$\text{PARTITION} \leq_{\text{pol}} \text{SCHEDULING}.$$

Hinweis: Wie üblich im Kurs, bezeichnet $d(n) \in \{0,1\}^*$ hier die in Dualnotation dargestellte Zahl $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 8 *(10 Punkte)*

Ein endlicher Automat A über dem Alphabet $\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ sei durch folgenden Übergangsgraphen definiert:



Konstruieren Sie unter Verwendung des im Kurs angegebenen Verfahrens den vereinfachten Potenzautomaten zu A. Geben Sie den Potenzautomaten graphisch an und führen Sie auch den zugehörigen Anfangszustand und die Endzustandsmenge an.

Wie unterscheiden sich die von A und die vom Potenzautomat zu A akzeptierte Sprache?

Aufgabe 9 *(15 Punkte)*

Zeigen Sie mit dem Pumpinglemma für kontextfreie Sprachen, dass die Sprache

$$L := \{a^{3n}b^n c^{2n} \mid n \geq 0\}$$

nicht kontextfrei ist.

Anhang

Die Mengen K und H.

$K := \{i \mid i \in Def(\varphi_i)\}$, $H := \{\langle i, n\rangle \in \mathbb{N} \mid n \in Def(\varphi_i)\}$

Berechenbare Funktionen

Die konstante Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $f(n_1, \ldots, n_k) = n$ mit $n \in \mathbb{N}$, die Summe $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(n,k) = n + k$, die arithmethische Differenz $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(n,k) = n \dot{-} k$, das Produkt $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(n,k) = n \cdot k$ sowie der Test $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n,k) = 0$, falls $n < k$ und $f(n,k) = 1$ sonst, sind berechenbare Funktionen.

Bandhierarchiesatz

Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bandkonstruierbar, es gelte $\forall n.g(n) \geq \log n$ und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei eine Funktion mit $f(n) \in o(g)$.

Dann gilt:

$$\mathrm{BAND}(f) \subsetneq \mathrm{BAND}(g).$$

Pumping–Lemma für kontextfreie Sprachen

Sei L kontextfrei. Dann gibt es ein $p \in \mathbb{N}$, so dass man jedes Wort $z \in L$ mit $lg(z) \geq p$ so in Teilworte u, v, w, x, y zerlegen kann, dass gilt:

$$z = uvwxy,$$

$$lg(vx) > 0,$$

$$\forall i \geq 0.uv^iwx^iy \in L.$$