1827 Logik für Lehramt
Klausur vom 17. März 2001

Es müssen Ihnen 8 Seiten Klausurtext vorliegen:

- das Deckblatt für Ihre Lösungen,
- eine Teilnahmebescheinigung zur Vorlage beim Finanzamt,
- diese Vorbemerkungen,
- 3 Blätter mit 8 Aufgaben,
- 2 Seiten Anhang.

Prüfen Sie zunächst die Vollständigkeit Ihrer Klausur–Unterlagen.

Für die Bearbeitung der Klausuraufgaben haben Sie 3 Stunden Zeit. Die Aufgaben sind so gewählt, daß sie innerhalb der zur Verfügung stehenden Zeit bearbeitet werden können. Die Klausur gilt als bestanden, wenn Sie mindestens die Hälfte der möglichen 50 Punkte erreichen.

Die Benutzung von Hilfsmitteln wie z.B. Kurstext etc. ist nicht erlaubt!

Füllen Sie bitte zunächst das Deckblatt für Ihre Lösungen aus. Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben links Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Falls es sich um ein Fortsetzungsblatt zu einer Aufgabe handelt, geben Sie bitte zusätzlich die Nummer der Aufgabe an.
Bei Abgabe Ihrer Lösungsblätter heften Sie diese bitte möglichst nach Aufgaben sortiert, beginnend mit dem Deckblatt, zusammen.

Bei der Bearbeitung der Klausuraufgaben wünschen wir Ihnen viel Erfolg.
Wir senden Ihnen die korrigierten Aufgaben so rasch wie möglich zurück.

Mit freundlichen Grüßen

IHRE KURSBETREUER

Aufgabe 1 *(5 Punkte)*
Es sei $\sigma : \mathrm{AS} \longrightarrow \{0,1\}$ eine Belegung der Aussagensymbole mit

$$\sigma(\mathtt{A0}^i) = 1 \iff i \geq 3$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Wir setzen $B_i := \mathtt{A0}^i$. Berechnen Sie

$$\mathrm{AW}_\sigma(((\neg\, B_1 \rightarrow B_2) \vee (B_3 \wedge \neg B_0))).$$

Aufgabe 2 *(5 Punkte)*
Es seien $X, Y \subseteq \mathrm{AF}$ Mengen aussagenlogischer Formeln. Beweisen Sie:

$$\mathrm{Erf}(X) \setminus \mathrm{Erf}(Y) \subseteq \mathrm{Erf}(X \setminus Y).$$

Unter welchen Umständen gilt auch die umgekehrte Inklusion?

Aufgabe 3 *(5 Punkte)*
Es sei τ der Typ

$$\tau := (\{\mathtt{RR}, \mathtt{RR0}, \mathtt{RR00}\}, \{\mathtt{ff}, \mathtt{ff0}, \mathtt{ff00}\}).$$

Geben Sie eine konkrete τ-Struktur an.

Aufgabe 4 *(5 Punkte)*
Es sei α die Formel

$$\exists z\, \mathrm{Sub}_y^z(\neg Q(y))$$

und t der Term $f(z)$. Testen Sie, ob t frei für z in α ist, indem Sie $\mathrm{ff}(\alpha)$ berechnen. (Sie müssen zuerst Sub(...) berechnen.)

Aufgabe 1 *(5 Punkte)*
Es sei $\sigma : \mathrm{AS} \longrightarrow \{0,1\}$ eine Belegung der Aussagensymbole mit

$$\sigma(\mathtt{A0}^i) = 1 \iff i \geq 3$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Wir setzen $B_i := \mathtt{A0}^i$. Berechnen Sie

$$\mathrm{AW}_\sigma(((\neg\, B_1 \to B_2) \vee (B_3 \wedge \neg B_0))).$$

Aufgabe 2 *(5 Punkte)*
Es seien $X, Y \subseteq \mathrm{AF}$ Mengen aussagenlogischer Formeln. Beweisen Sie:

$$\mathrm{Erf}(X) \setminus \mathrm{Erf}(Y) \subseteq \mathrm{Erf}(X \setminus Y).$$

Unter welchen Umständen gilt auch die umgekehrte Inklusion?

Aufgabe 3 *(5 Punkte)*
Es sei τ der Typ

$$\tau := (\{\mathtt{RR}, \mathtt{RR0}, \mathtt{RR00}\}, \{\mathtt{ff}, \mathtt{ff0}, \mathtt{ff00}\}).$$

Geben Sie eine konkrete τ-Struktur an.

Aufgabe 4 *(5 Punkte)*
Es sei α die Formel

$$\exists\, z\, \mathrm{Sub}_y^z(\neg Q(y))$$

und t der Term $f(z)$. Testen Sie, ob t frei für z in α ist, indem Sie $\mathrm{ff}(\alpha)$ berechnen. (Sie müssen zuerst Sub(...) berechnen.)

Aufgabe 5 *(5 Punkte)*
Es sei P ein 3-stelliger Relationsbezeichner,

$$A := \{(r,s,t) \in \mathbb{R}^3 \mid r^s \text{ ist definiert und } r^s = t\}$$

und $\mathcal{S}$ die Struktur

$$(\mathbb{R}, \{(P, A)\}, \emptyset).$$

Ferner sei $\mathfrak{b} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Belegung mit

$$\mathfrak{b}(x) = \sqrt{2},\ \mathfrak{b}(y) = 2 \text{ und } \mathfrak{b}(z) = 2.$$

Berechnen Sie

$$\mathrm{WW}_{\mathcal{S}}(P(x,y,z))[\mathfrak{b}].$$

Aufgabe 6 *(7 Punkte)*
Es seien P(x,y,z) und $\mathcal{S}$ wie in der letzten Aufgabe.

1. Trifft

$$\mathcal{S} \models \forall x \forall y \exists z\, P(x,y,z)$$

   zu ?

2. Ist die Formel $\exists x \exists y \exists z\, P(x,y,z)$ allgemein gültig?

Begründen Sie jeweils.

Aufgabe 7 *(8 Punkte)*
Es sei τ der Typ aus Aufgabe 3. Wir schreiben abkürzend

$$R_i := \mathtt{RR0}^i \qquad (i = 0,1,2)$$

und

$$f_i := \mathtt{ff0}^i \qquad (i = 0,1,2).$$

1. Geben Sie sechs Elemente des Herbrand-Universums von τ an.
2. Geben Sie eine konkrete Herbrand-Struktur über τ an.

Aufgabe 8 *(10 Punkte)*

Es sei $\tau = (\{Add\}, \{0, s\})$ ein Typ, bei dem Add ein dreistelliger Prädikatsbezeichner, 0 ein nullstelliger und s ein einstelliger Funktionsbezeichner seien. Formulieren Sie ein Logik-Programm für die Addition über τ, das auf folgender rekursiven Darstellung beruht:

$$x + 0 = x,$$

$$x + (y + 1) = (x + 1) + y.$$

Berechnen Sie damit 2+1.

Anhang

Definition 2.4.5 (Erfüllbarkeit für u. Folgern aus Formelmengen)
Es sei $X \subseteq \mathrm{AF}$ eine Formelmenge und $\alpha \in \mathrm{AF}$ eine Formel.

1. *Die Menge*

$$\mathrm{Erf}(X) := \{\sigma \in \mathrm{BEL} \mid \mathrm{AW}_\sigma(\beta) = 1 \textit{ für alle } \beta \in X\}$$

heisst Erfüllungsmenge *von X. Im Falle $X = \{\alpha\} \subseteq \mathrm{AF}$ schreiben wir* $\mathrm{Erf}(\alpha) := \mathrm{Erf}(\{\alpha\})$.

Definition 3.2.1 (Alphabet der Prädikatenlogik, Bezeichner)

1. *Die Menge $\Sigma_P := \{\mathtt{v}, \mathtt{R}, \mathtt{f}, \mathtt{0}, (,), ,, \neg, \wedge, \forall, \exists\}$ ist das* Alphabet der Prädikatenlogik.[1]

2. *(a) Die Menge*

$$\mathcal{V} := \{\mathtt{x0}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

heißt Menge der Individuenvariablen, *kurz* Variablen.

(b) Es sei

$$\mathfrak{R} := \{\mathtt{R0}^n\mathtt{R0}^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}.$$

$\mathfrak{R}$ heißt Menge der Relations- *oder* Prädikatsbezeichner.

(c) Es sei

$$\mathfrak{F} := \{\mathtt{f0}^n\mathtt{f0}^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}.$$

Wir nennen $\mathfrak{F}$ die Menge der Funktionsbezeichner.

3. *Es sei die Funktion*

$$\mu : \mathfrak{R} \cup \mathfrak{F} \longrightarrow \mathbb{N}$$

definiert durch $\mu(\mathtt{R0}^n\mathtt{R0}^m) := m$ und $\mu(\mathtt{f0}^n\mathtt{f0}^m) := m$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$. μ heißt Stellenzahlfunktion, *$m = \mu(w)$* Stelligkeit *des (Prädikats-, Funktions-) Bezeichners $w \in \mathfrak{R} \cup \mathfrak{F}$.*

[1] Später werden wir $\neg$ und $\wedge$ wie in der Aussagenlogik, $\forall$ als „für alle" und $\exists$ als „es gibt" lesen.

Definition 3.2.12 (t frei für y) *Es sei $y \in \mathcal{V}$ und $t \in \mathrm{Tm}$. Wir definieren eine von y und t abhängige Funktion $\mathrm{ff} : \mathrm{PF} \longrightarrow \{0,1\}$ rekursiv wie folgt:*

$$
\begin{array}{lcll}
\mathrm{ff}(\delta) & := & 1 & \textit{für alle } \delta \in \mathrm{AT}, \\
\mathrm{ff}(\neg\beta) & = & 1 \ :\Longleftrightarrow & \mathrm{ff}(\beta) = 1 \\
\mathrm{ff}((\beta \wedge \gamma)). & = & 1 \ :\Longleftrightarrow & \mathrm{ff}(\beta) = 1 \textit{ und } \mathrm{ff}(\gamma) = 1 \\
\mathrm{ff}(\forall z\beta) & = & 1 \ :\Longleftrightarrow & y \notin \mathrm{Fr}(\forall z\beta) \textit{ oder} \\
 & & & \mathrm{ff}(\beta) = 1 \textit{ und } z \textit{ kommt nicht in } t \textit{ vor} \\
\mathrm{ff}(\exists z\beta) & = & 1 \ :\Longleftrightarrow & y \notin \mathrm{Fr}(\exists z\beta) \textit{ oder} \\
 & & & \mathrm{ff}(\beta) = 1 \textit{ und } z \textit{ kommt nicht in } t \textit{ vor.}
\end{array}
$$

für alle $\beta, \gamma \in \mathrm{PF}$ und $z \in \mathcal{V}$. Dann und nur dann sagen wir „der Term t ist frei für *die Variable y* in *der Formel α", wenn $\mathrm{ff}(\alpha) = 1$ gilt.*

Definition 3.4.14 (Modell, logische Konsequenz, Erfüllbarkeit) *Gegeben seien eine Formelmenge $X \subseteq \mathrm{PF}$ und eine Formel $\alpha \in \mathrm{PF}$.*

1. *Sei $\mathcal{S}$ eine τ-Struktur. Genau dann heißt $\mathcal{S}$ ein* Modell *von X, wenn*

$$\mathcal{S} \models \beta \textit{ für alle } \beta \in X$$

gilt. Wir schreiben in diesem Fall auch $\mathcal{S} \models X$.

4. *Die Formelmenge X heißt genau dann* erfüllbar, *wenn es ein Modell von X gibt. Die einzelne Formel $\alpha \in \mathrm{PF}$ heißt* erfüllbar, *wenn $\{\alpha\}$ erfüllbar ist (und nur dann).*