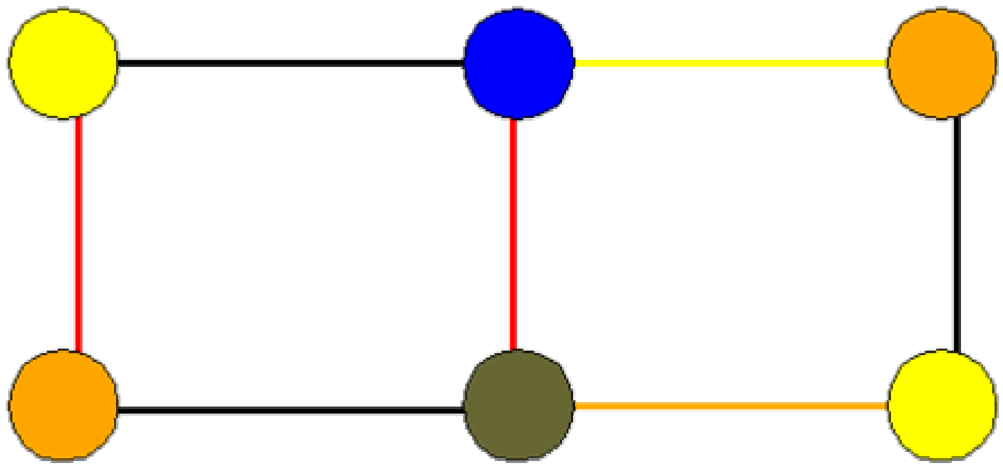
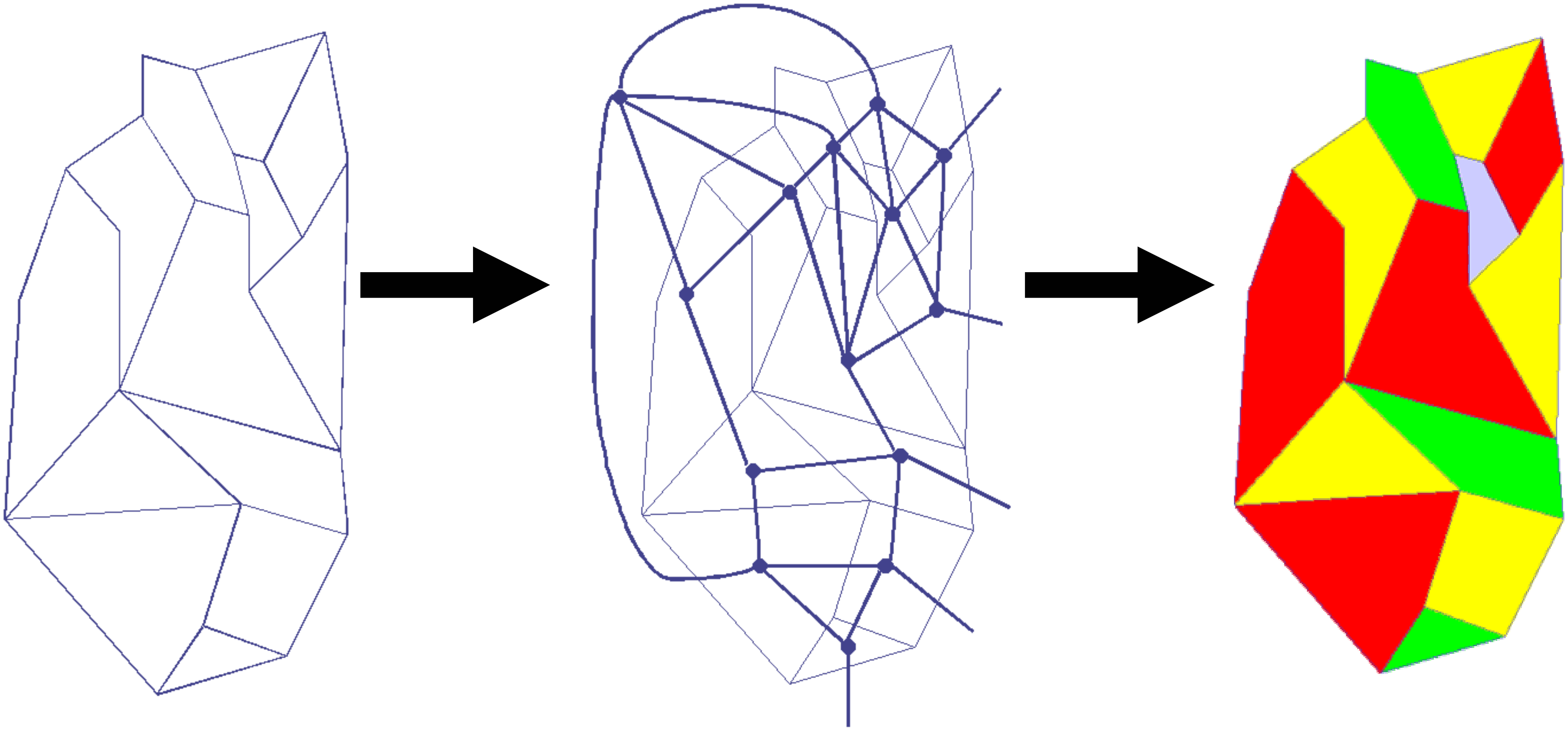
Färbung von Graphen



Anwendung der Ellipsoidmethode in der Kombinatorischen Optimierung

Motivation



Aufgabe: Färbe die Länder der Karte mit einer minimalen Anzahl Farben, so dass benachbarte Länder nicht die gleiche Farbe haben.

Gliederung

- Die Ellipsoidmethode
- Etwas Graphentheorie
- Das Färbungsproblem
- Perfekte Graphen
- Die Sandwich-Zahl
- Anwendung der Ellipsoidmethode
- Färbung durch lineare Optimierung
- Zusammenfassung

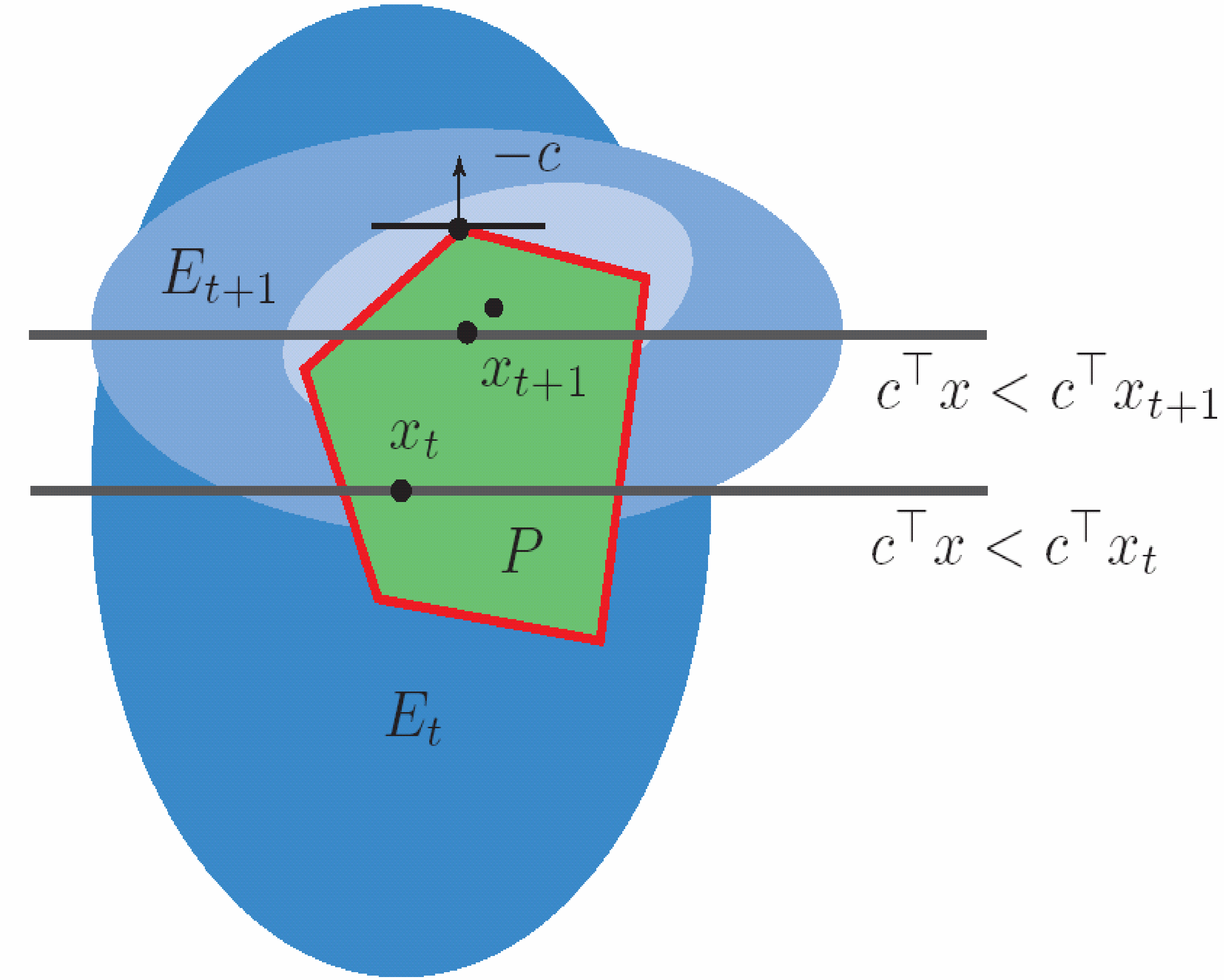
Die Ellipsoidmethode (1)

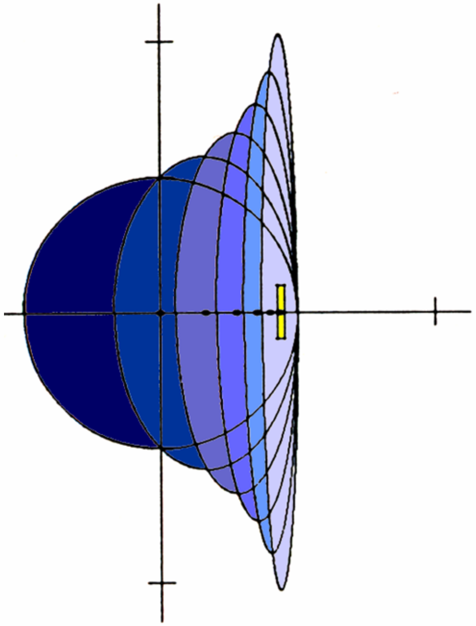
- Gegeben: Ein konvexer Körper $B(a_0, r, R)$ mit $S(a_0, r) \subseteq B \subseteq S(a_0, R)$
- $\min c^T x, \quad x \in B$
- **Optimieren** $\Leftrightarrow$ **Separieren**

$$\max c^T x \qquad\qquad y \in B \ \vee$$

$$x \in B \qquad\qquad \exists c : c^T y > \max_{x \in B} c^T x$$

Die Ellipsoidmethode (2)





Graphentheorie

- $\omega(G) =$ maximale Kardinalität einer Clique
- $\chi(G) =$ minimale Kardinalität einer Färbung
- $\Rightarrow \omega(G) \leq \chi(G)$

Das Färbungsproblem

- Gegeben: $G(V,E)$
- Gesucht ist eine minimale Färbung von *G*, d.h.:
  Finde eine minimale Familie von paarweise disjunkten unabhängigen Mengen, die den Graphen überdecken

- Allein $\chi(G)$ zu bestimmen ist in *NP*

Perfekte Graphen

- Die Berechnung der chromatischen Zahl eines Graphen *G* ist in *NP*

- Ein Graph heißt perfekt, genau dann wenn

$$\omega(G) = \chi(G)$$

- Es existiert eine Zahl $\vartheta(\overline{G})$ mit $\omega(G) \leq \vartheta(\overline{G}) \leq \chi(G)$ die in polynomieller Zeit berechnet werden kann **(Sandwich-Zahl)**

→ Für perfekte Graphen kann man $\chi(G)$ berechnen

Die Sandwich-Zahl

- $\vartheta(\overline{G})$ ist der maximale Zielfunktionswert des folgenden semidefiniten Optimierungs-Problems:

$$\max \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \qquad B = (b_{ij})_{i,j} \in \left\{ B \in R^{n\times n} \;\middle|\; \begin{array}{l} B \text{ symm.,pos.semidef,} \\ \operatorname{trace}(B) \le 1, \\ b_{ij} = 0 \Leftrightarrow (i,j) \notin E \end{array} \right\}$$

- Es gilt: $\omega(G) \le \vartheta(\overline{G}) \le \chi(G)$
- Die Menge aller Matrizen mit obiger Eigenschaft ist konvex und wird mit **B** bezeichnet

Anwendung der Ellipsoidmethode

- Das Separationsproblem über **B** ist lösbar
  → Mit der Ellipsoidmethode ist das Optimierungsproblem lösbar
  → $\vartheta(\overline{G})$ kann in polynomieller Zeit berechnet werden

- Also kann $\chi(G)$ für perfekte Graphen in polynomieller Zeit berechnet werden

Lineare Optimierung

- Folgende lineare Optimierungsprobleme liefern Approximationen für ω und χ

$$\omega(G) \le \begin{pmatrix} \max \mathbf{1}^T x \\ Ax \le \mathbf{1} \\ x \ge \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \min \mathbf{1}^T y \\ A^T y \ge \mathbf{1} \\ y \ge \mathbf{0} \end{pmatrix} \le \chi(G)$$

- *A* hat als Zeilen die charakteristischen Vektoren aller unabhängigen Mengen von G
- Bei perfekten Graphen gilt jeweils Gleichheit

Zusammenfassung

- In perfekten Graphen kann
$$\chi(G) = \vartheta(\overline{G}) = \omega(G)$$
in polynomieller Zeit berechnet werden
- Dies liefert einen Algorithmus zur Bestimmung einer max. Clique in *G*
- Das duale Optimierungsproblem liefert minimale Überdeckung mit unabhängigen Mengen in *G*
- Dies ist aber genau die minimale Färbung von *G*

Quellen

- M. GRÖTSCHEL, L. LOVÁSZ and A. SCHRIJVER,
  The Ellipsoid Method and it‘s Consequences in Combinatorial Optimization
  Combinatorica 1 (1982), 169-197
- M. GRÖTSCHEL, L. LOVÁSZ and A. SCHRIJVER,
  Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization (1988)
- R. GRAHAM, M. GRÖTSCHEL and L. LOVÁSZ,
  Handbook of Combinatorics 1/2 (1992)
- T. JENSEN, B. TOFT,
  Graph Coloring Problems (1995)