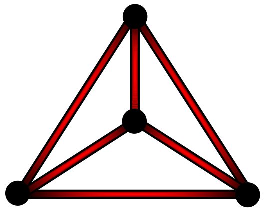
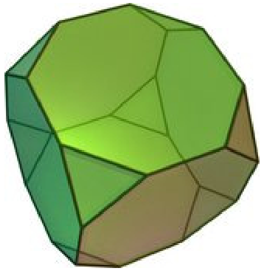
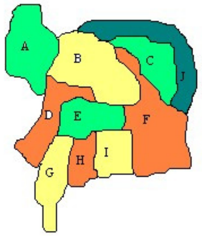
Anschauliche Graphentheorie



Robert Nickel

Mathematische Grundlagen der Informatik

Institut für Mathematik

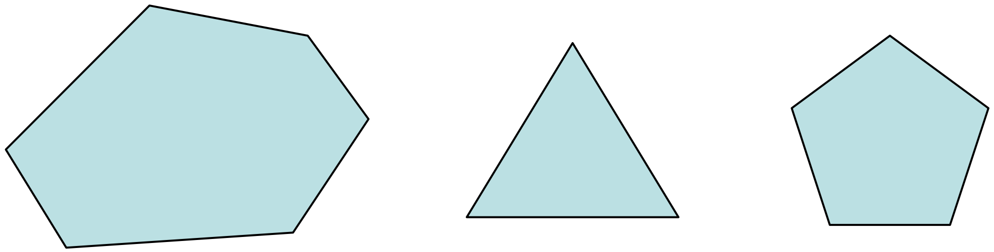
Brandenburgische Technische Universität Cottbus

Gliederung

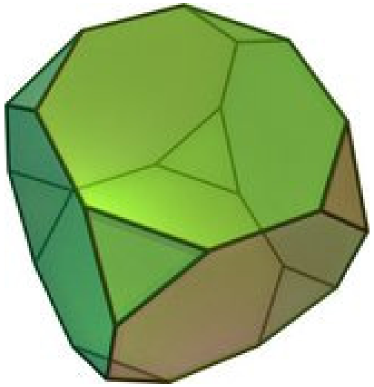
- Grundlagen (Polytope)
- Platonische Körper (1. Beweis)
- Grundlagen (Graphen)
- Planare Graphen und Polyederformel
- Platonische Körper (2. Beweis)
- Die Topologie des Fußballs

Polytope

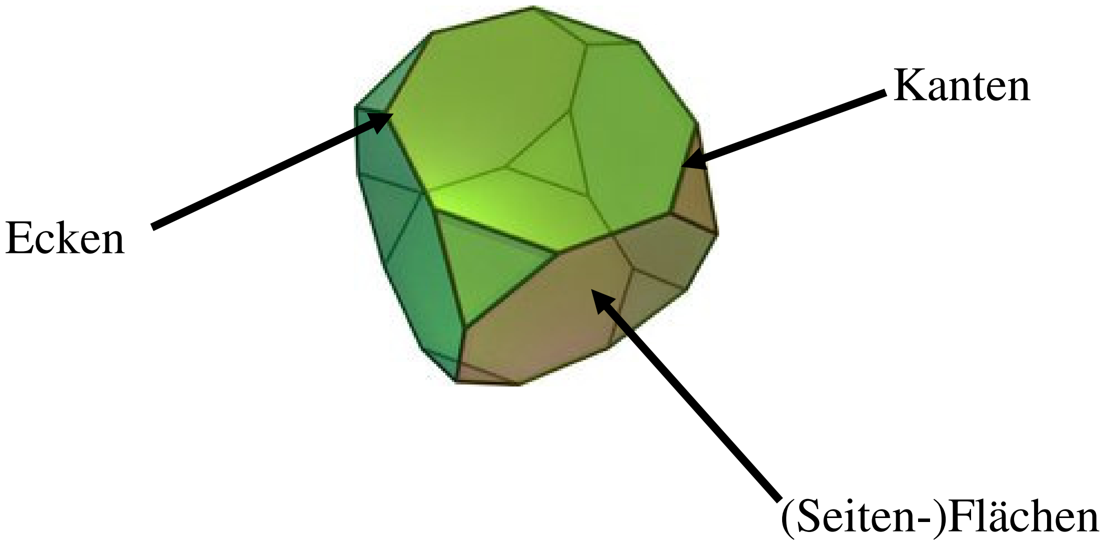
- Ein ***Polygon*** ist eine stückweise linear berandete Fläche (2-dimensional).



- Ein ***Polytop*** ist ein 3-dimensionaler Körper, dessen Seitenflächen Polygone sind.



Polytope (Struktur)

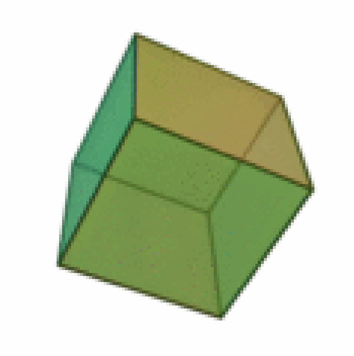


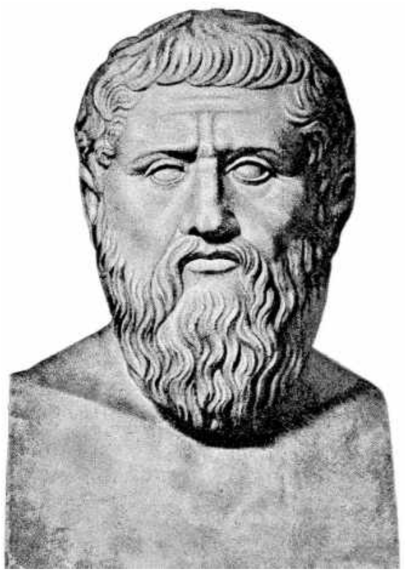
- Im folgenden untersuchen wir Polytope, die besonders regulär und symmetrisch sind: Die Platonischen Körper

Platonische Körper

- Definition: Ein platonischer Körper ist ein Polytop, dessen Seitenflächen zueinander kongruente regelmäßige n-Ecke sind, wobei in jeder Ecke die gleiche Anzahl von n-Ecken zusammentrifft.

- Beispiel: Würfel

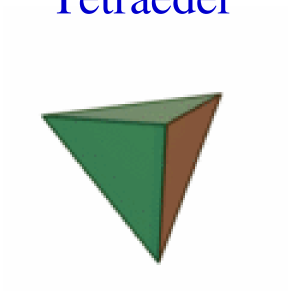




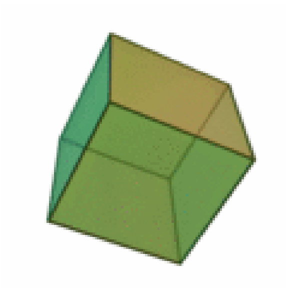
- Platon (um 400 v. Chr.):
  - griechischer Philosoph
  - Schüler von Sokrates, Lehrer von Aristoteles

- Es gibt 5 verschiedene Platonische Körper:

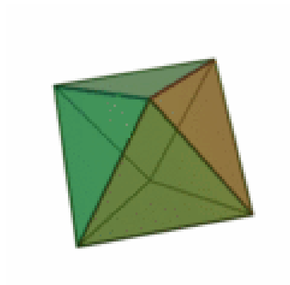
Tetraeder



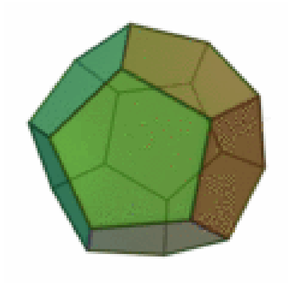
Hexaeder



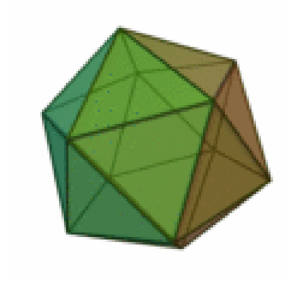
Octaeder



Dodekaeder



Icosaeder



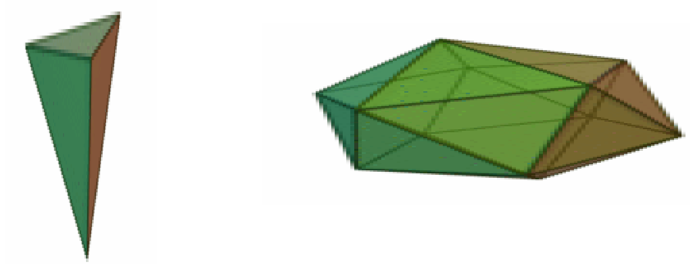
- Die Summe der Innenwinkel der Seitenflächen, die an einer Ecke zusammentreffen ist < 360°.
- Die Innenwinkel eines gleichmäßigen n-Ecks betragen

$$\alpha = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$$

Allgemeinere Fragestellung

- Der Beweis beruht auf der Größe der Innenwinkel, welche bei regelmäßigen n-Ecken bekannt ist.

- Wir verzichten auf die Forderung, dass die Seitenflächen regelmäßig und gleichgroß sein sollen.



- Wie viele Körper gibt es, deren **Seitenflächen die gleiche Anzahl von Ecken** haben, so dass sich **in jeder Ecke gleich viele Flächen** treffen.

Graphen

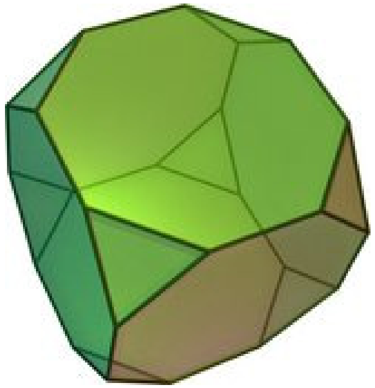
- Was ist ein Graph?

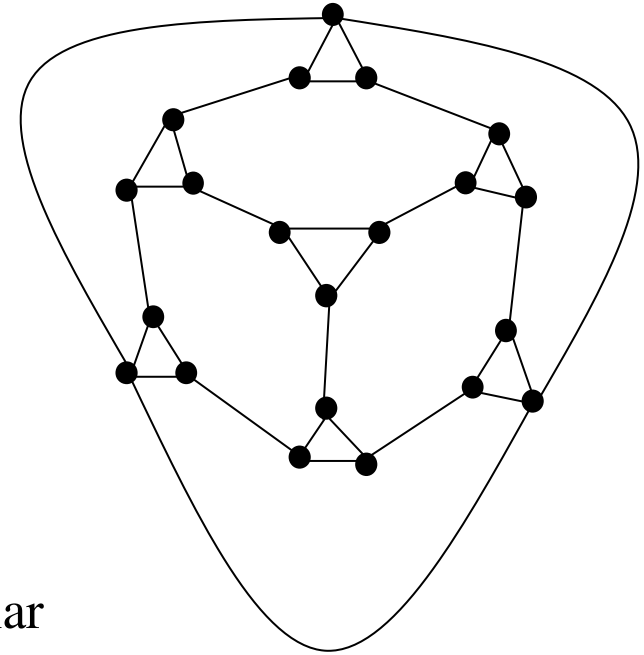
- Beispiele für Graphen:
  - Nachbarschaftsrelationen auf Landkarten
  - “Heiratsprobleme”
  - Tourenplanung
  - Problem des Handelsreisenden / Produktionsplanung

- Eigenschaften von Graphen:
  - Zusammenhang
  - Planarität

Der Eckengraph eines Polytops

- Die Knoten des Graphen sind die Ecken des Polytops
- Zwei Knoten sind miteinander verbunden, wenn sie auf einer Kante des Polytops liegen





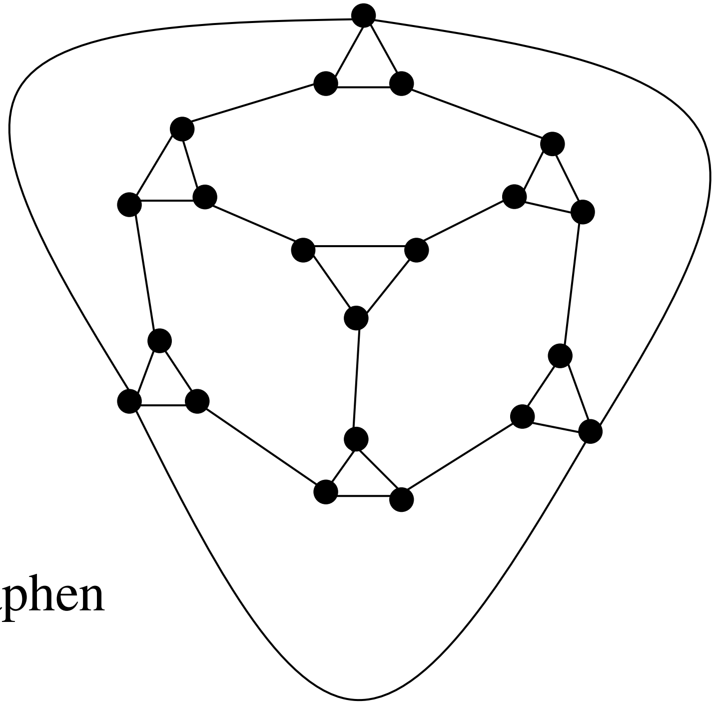
- Der Eckengraph eines Polyeders ist planar
- Satz von Steinitz: Zu jedem 3-zusammenhängenden planaren Graphen existiert ein zugehöriges Polytop.

Die Eulersche Polyederformel

- e – Anzahl der Knoten (Ecken)
- k – Anzahl der Kanten
- f – Anzahl der Gebiete (Flächen) eines planaren Graphen

$$\Rightarrow e + f = k + 2$$

- Gilt für alle Polytope und planare Graphen



- Ein Ball soll aus Stoffflicken zusammengenäht werden
  - möglichst regulär (d.h. so “platonisch” wie möglich)

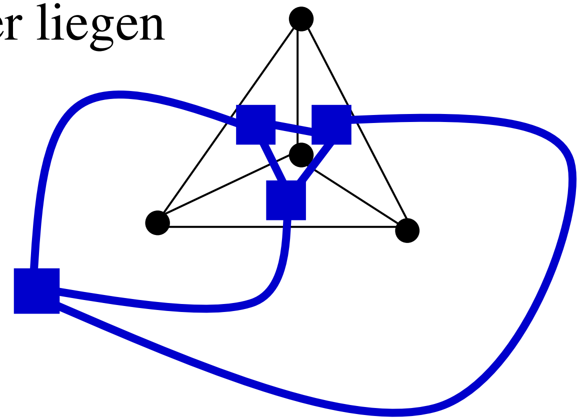
- Aber: Platonische Körper sind nicht rund genug

unmöglich

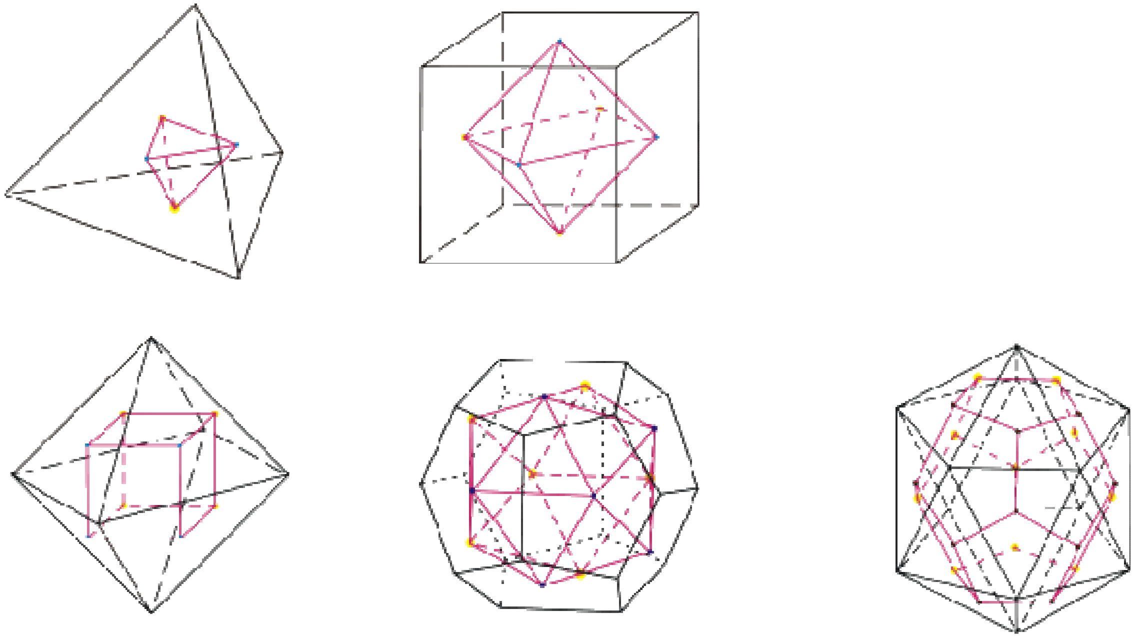
12 5-Ecke, 20 Sechsecke

Kurzausflug Dualität

- Dualgraph: Flächen → Knoten
  Kante genau dann, wenn zwei Flächen nebeneinander liegen



- Platonische Körper sind “dual” zueinander



Ausgewählte Kapitel der Graphentheorie

- Eulertouren
- Matchings
- Kürzeste Wege
- Graphenfärbung
- Rundreiseprobleme / Tourenplanung