

FernUniversität in Hagen
Fakultät für Mathematik und Informatik

Bachelorarbeit im Fach Mathematik

Stabile Hochzeiten in polygynandrischen Gesellschaften

Köln, den 11.10.2016

Prof. Dr. Oliver Gürtler

Matrikelnr. 8704287

Betreuer: Prof. Dr. Winfried Hochstättler

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Mathematische Grundlagen	3
2.1	Einige Grundlagen der Graphentheorie	3
2.2	Einige Grundlagen der Komplexitätstheorie	5
2.3	Einige Grundlagen der Spieltheorie	9
3	Zuordnungen über Tinder	11
3.1	Beschreibung des Modells	11
3.2	Der Zuordnungsmechanismus von Tinder	14
3.3	Ein sequentieller Mechanismus	17
4	Das stabile Spielansetzungsproblem mit Geldzahlungen	18
4.1	Beschreibung des Modells	18
4.2	Stabile Lösungen und ihre Charakterisierung	21
4.3	Effiziente Bestimmung einer Lösung	29
4.4	Eigenschaften des Kerns	32
5	Schlussbemerkungen	41
6	Anhang	42
6.1	Beweis von Theorem 1	42
6.2	Kürzeste Wege	47
6.3	Das Trampdampferproblem	50
7	Literaturverzeichnis	54
8	Erklärung	55

1 Einleitung

Die vorliegende Bachelorarbeit beschäftigt sich mit Zuordnungsproblemen. Ein bekanntes Beispiel ist das sogenannte stabile Heiratsproblem, das von Gale und Shapley (1962) untersucht worden ist. Dabei trifft eine Gruppe von Frauen auf eine Gruppe von Männern, wobei jede Frau genau einen Mann und jeder Mann genau eine Frau heiraten möchte. Jede Frau verfügt über Präferenzen hinsichtlich der Gruppe der Männer und kann alle Männer daher in eine Rangfolge bringen. Genauso verfügt jeder Mann über Präferenzen hinsichtlich der Gruppe der Frauen. Eine Zuordnung von jeweils einer Frau zu einem Mann wird als stabil bezeichnet, wenn kein nicht miteinander verheiratetes Paar bestehend aus einer Frau und einem Mann existiert, das eine Heirat untereinander einer Heirat des gemäß der Zuordnung vorgesehenen Partners vorziehen würde. Gale und Shapley (1962) geben einen Algorithmus an, mit dessen Hilfe stets eine stabile Lösung des Problems gefunden werden kann, somit beweisen sie die Existenz einer solchen Lösung. Zudem zeigen sie, dass die durch den Algorithmus identifizierte Lösung optimal ist in dem Sinne, dass bei dieser Lösung kein Mann schlechter gestellt ist als bei irgendeiner anderen stabilen Lösung.

Das stabile Heiratsproblem von Gale und Shapley (1962) unterstellt drei vereinfachende Annahmen,

1. die Annahme der Monogamie, gemäß der jede Person maximal einer anderen Person zugeordnet wird,
2. die Annahme der Bipartitheit, gemäß der jedes Paar immer aus zwei Personen verschiedener Gruppen besteht (beispielsweise aus einer Frau und einem Mann) und
3. die Annahme keiner Mitgift, gemäß der Geldzahlungen zwischen den einzelnen Personen ausgeschlossen werden.

In der vorliegenden Arbeit werden zwei Erweiterungen des stabilen Heiratsproblems von Gale und Shapley (1962) untersucht, die jeweils durch Aufhebung einer oder mehrerer der gerade beschriebenen Annahmen resultieren. Zunächst wird das multiple Partnerzuordnungsproblem (MP) betrachtet, bei dem jede Person mehreren Personen der anderen Gruppe zugeordnet werden kann, so dass also die Annahme der Monogamie aufgehoben wird. Dies geschieht auf Basis des Papiers von Ortega (2016), bei dem konkret der von der mobilen Dating-App Tinder verwendete Zuordnungsalgorithmus untersucht wird. Es werden diverse Probleme dieses Algorithmus festgestellt. Es ist grundsätzlich möglich, dass der Algorithmus zu keinerlei Zuordnungen führt. Allgemein kann die Lösung des Algorithmus instabil sein, wobei ein etwas strengeres Stabilitätskriterium verwendet wird als bei Gale und Shapley (1962). Darauf aufbauend wird ein alternativer Algorithmus vorgestellt, der einfach umzusetzen ist und die Probleme des Zuordnungsmechanismus von Tinder löst. Insbesondere stellt jede Zuordnung, die über den alternativen Mechanismus herbeigeführt wird, eine stabile Zuordnung dar.

Außerdem wird in dieser Arbeit das sogenannte stabile Spielanzugsproblem mit Geldzahlungen (SSG) analysiert, das auf einem Zuordnungsspiel aufbaut, bei dem die Annahmen 1 bis 3 aufgegeben werden. Als Beispiel (welches auch die Bezeichnung des Problems erklärt) könnte man sich eine Gruppe von

Fußballnationalmannschaften unterschiedlicher Länder vorstellen, die untereinander in einem bestimmten Zeitraum Spiele bestreiten möchten. In dem betrachteten Zeitraum kann jede Mannschaft möglicherweise mehrere Spiele bestreiten, so dass mehrere Gegner gesucht werden und die Annahme der Monogamie nicht gilt. Bei den möglichen Gegnern einer Mannschaft gibt es grundsätzlich keinerlei Einschränkungen, die Annahme der Bipartitheit gilt demnach ebenfalls nicht. Zuletzt werden durch die Spiele Einnahmen generiert, die beliebig zwischen den Mannschaften aufgeteilt werden können, es sind also auch Geldzahlungen möglich.

Zunächst ist es möglich, dass bei einer Aufgabe der Annahmen 1 bis 3 keine stabile Lösung des Zuordnungsspiels mehr existiert, es wird jedoch gezeigt, dass die Existenz einer stabilen Lösung in polynomieller Zeit geprüft werden kann. Falls eine stabile Lösung existiert, erhalten die Spieler bei dieser Lösung Geldzahlungen, die in einem Auszahlungsvektor zusammengefasst werden. In einem weiteren Schritt erfolgt ein Vergleich der Auszahlungsvektoren der stabilen Lösungen des Zuordnungsspiels mit den sogenannten Kernallokationen. Bei letzteren handelt es sich um Auszahlungsvektoren, die ebenfalls eine gewisse Stabilitätsbedingung erfüllen; konkret soll keine Teilgruppe von Spielern einen Anreiz haben, von der Allokation abzuweichen. Es wird gezeigt, dass der Auszahlungsvektor jeder stabilen Lösung des Zuordnungsproblems eine Kernallokation darstellt, dass die umgekehrte Implikation jedoch nicht gilt. Zuletzt wird der Frage nachgegangen, ob ein bestimmter Auszahlungsvektor eine Kernallokation darstellt. Dieses Problem kann stets in polynomieller Zeit gelöst werden, wenn die Kapazitäten aller Personen auf maximal zwei beschränkt sind, wenn also jede Person maximal zwei anderen Personen zugeordnet werden kann. Bei höheren Kapazitäten ist das Problem *coNP*-vollständig.

Die Arbeit ist wie folgt strukturiert. Im nächsten Kapitel werden Grundlagen aus den Bereichen der Graphentheorie, Komplexitätstheorie und Spieltheorie vorgestellt, die für spätere Untersuchungen von Bedeutung sind. In Kapitel 3 wird das MP untersucht, während sich Kapitel 4 dem SSG widmet. An eine kurze Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse in Kapitel 5 schließt sich der Anhang an, der diejenigen Herleitungen beinhaltet, die nicht im Haupttext vorgestellt werden.

2 Mathematische Grundlagen

2.1 Einige Grundlagen der Graphentheorie

Da in den folgenden Modellen auf Grundlagen der Graphentheorie zurückgegriffen wird, werden einige dieser Grundlagen zunächst skizziert. Die folgenden Definitionen basieren auf Kapitel 2 des Lehrbuchs von Korte und Vygen (2012) sowie Kapitel 15 des Lehrbuchs von Biggs (2002).

Definition 1 *Ein endlicher ungerichteter Graph $G = (N, E, \Psi)$ besteht aus einer endlichen Menge N , deren Elemente als Knoten oder Ecken bezeichnet werden, einer endlichen Menge E , deren Elemente als Kanten bezeichnet werden, sowie einer Abbildung $\Psi : E \rightarrow \{X \subseteq N : |X| = 2\}$. N wird als Knotenmenge und E als Kantenmenge bezeichnet.*

Durch die Abbildung Ψ werden einer Kante jeweils zwei Knoten zugeordnet. Damit wird die Idee zum Ausdruck gebracht, dass eine Kante zwei Knoten miteinander verbindet. Eine solche Kante, die zwei Knoten $x \in N$ und $y \in N$ verbindet, wird als $\{x, y\} \in E$ geschrieben. x und y werden in diesem Fall als benachbart und als Endknoten von $\{x, y\}$ bezeichnet. Ist $x \in N$ ein Endknoten einer Kante $e \in E$, nennt man x inzident mit e . Der Grad eines Knotens $x \in N$ bezeichnet die Anzahl der Kanten, mit denen x inzident ist. In dieser Arbeit werden ausschließlich Graphen ohne Schleifen betrachtet, also ohne Kanten der Form $\{x, x\} = \{x\}$ für ein $x \in N$, deren Endknoten übereinstimmen.

In dieser Arbeit werden zumeist ungerichtete Graphen betrachtet. Im Anhang zu der Arbeit werden jedoch auch gerichtete Graphen betrachtet. Ein endlicher gerichteter Graph ist ein Tripel (N, E, Ψ) mit N und E als endlichen Mengen und $\Psi : E \rightarrow \{(x, y) \in N \times N : x \neq y\}$. Wie die Bezeichnung ausdrückt, sind die Kanten im Gegensatz zum ungerichteten Graphen gerichtet. Dies bedeutet, dass sie nur in eine Richtung durchlaufen werden, z.B. $(x, y) \in N \times N$ nur von x nach y , nicht aber von y nach x .

Definition 2 *Zwei Kanten e und e' mit $e \neq e'$ heißen parallel, falls $\Psi(e) = \Psi(e')$ gilt. Ein Graph ohne parallele Kanten und Schleifen heißt einfach.*

Die in dieser Arbeit vorzustellenden Modelle machen nur von einfachen Graphen Gebrauch. In diesem Fall wird eine Kante e typischerweise mit ihrem Bild $\Psi(e)$ identifiziert, d.h. mit den der Kante zugeordneten Knoten. Ein (ungerichteter bzw. gerichteter) Graph G wird dann etwas kompakter geschrieben als $G = (N(G), E(G))$, wobei $E(G) \subseteq \{X \subseteq N(G) \mid |X| = 2\}$ bzw. $E(G) \subseteq N(G) \times N(G)$. Teilweise wird ein Graph noch etwas kürzer auch als $G = (N, E)$ bezeichnet. Sei $G = (N, E)$ ein ungerichteter Graph und $X, Y \subseteq N$. Dann sei $E(X, Y) := \{\{x, y\} \in E : x \in X \setminus Y, y \in Y \setminus X\}$ die Menge aller Kanten zwischen Knoten aus $X \setminus Y$ und $Y \setminus X$. Weiterhin sei $\delta(X) := E(X, N \setminus X)$ für $X \subseteq N$. Ein Schnitt in einem ungerichteten Graphen $G = (N, E)$ ist eine Kantenmenge vom Typ $\delta(X)$ für $\emptyset \neq X \subset N$.

Definition 3 *Ein Teilgraph eines Graphen $G = (N(G), E(G))$ ist ein Graph $H = (N(H), E(H))$ mit $N(H) \subseteq N(G)$ und $E(H) \subseteq E(G)$. H wird als induzierter Teilgraph von G bezeichnet, wenn H ein Teilgraph von G ist und $E(H) = \{\{x, y\} \in E(G) \mid x, y \in N(H)\}$. Dieses H ist der von $N(H)$ induzierte Teilgraph von G und wird als $G[N(H)]$ bezeichnet.*

Ein induzierter Teilgraph H enthält also alle Kanten zwischen den Knoten in H , die auch in G vorhanden sind.

An einigen Stellen dieser Arbeit werden "Fortbewegungen" durch Graphen thematisiert. In diesem Zusammenhang sind die beiden folgenden Definitionen von Bedeutung.

Definition 4 *Eine Kantenfolge W in einem Graph G (von x_1 nach x_{k+1}) ist eine Folge $x_1, e_1, x_2, \dots, e_k, x_{k+1}$, wobei $k \geq 0$ und $e_i = \{x_i, x_{i+1}\} \in E$ für $i \in \{1, \dots, k\}$ gilt. Gilt zusätzlich $e_i \neq e_j$ für alle $1 \leq i < j \leq k$, so heißt W ein Spaziergang in G .*

Definition 5 Ein Weg P ist ein Graph $(\{x_1, \dots, x_{k+1}\}, \{e_1, \dots, e_k\})$ mit der Eigenschaft, dass $x_i \neq x_j$ für $1 \leq i < j \leq k+1$ gilt und die Folge $x_1, e_1, x_2, \dots, e_k, x_{k+1}$ ein Spaziergang ist. Der Graph wird auch ein Weg von x_1 nach x_{k+1} genannt. Die Knoten x_1 und x_{k+1} sind die Endknoten des Wegs, die Knoten x_2, \dots, x_k die inneren Knoten. Für $x, y \in N(P)$ bezeichne $P_{[x,y]}$ den (eindeutig bestimmten) Teilgraphen von P , der ein Weg von x nach y ist.

Definition 6 Ein Kreis ist ein Graph $(\{x_1, \dots, x_k\}, \{e_1, \dots, e_k\})$ derart, dass die Folge $x_1, e_1, x_2, \dots, e_k, x_1$ ein Spaziergang mit $k \geq 2$ und $x_i \neq x_j$ für $1 \leq i < j \leq k$ ist.

Die Definition des Wegs formalisiert also die Vorstellung, dass wir uns ausgehend von einem Knoten entlang der Kanten von Knoten zu Knoten fortbewegen und dabei zwischendurch keinen Knoten zweimal besuchen. Bei einem Kreis wird abschließend zusätzlich wieder der Ausgangsknoten erreicht. Die Länge eines Wegs bzw. Kreises entspricht der Anzahl seiner Kanten.

Definition 7 Eine Knotenfärbung eines Graphs $G = (N(G), E(G))$ ist eine Funktion $c : N(G) \rightarrow \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $c(x) \neq c(y)$ für alle $\{x, y\} \in E(G)$. Die Chromatische Zahl von G , beschrieben als $\chi(G)$, ist die kleinste ganze Zahl k , für die eine Knotenfärbung von G bestehend aus k Farben existiert.

Definition 8 Falls $\chi(G) = 2$ ist, bezeichnet man den Graphen $G = (N(G), E(G))$ als bipartit.

Eine Knotenfärbung beschreibt also eine Funktion, die jedem Knoten eines Graphen eine Farbe derart zuordnet, dass benachbarte Knoten stets unterschiedlich gefärbt sind. Eine Knotenfärbung lässt sich stets dadurch konstruieren, dass jedem Knoten eines Graphen eine unterschiedliche Farbe zugeordnet wird, insgesamt also $|N(G)|$ Farben verwendet werden (durch $|N(G)|$ wird die Kardinalität der Menge $N(G)$ ausgedrückt). Typischerweise ist man jedoch daran interessiert, solche Knotenfärbungen zu finden, die insgesamt möglichst wenige Farben nutzen. Bei einem bipartiten Graphen reichen zwei Farben aus, um eine Knotenfärbung zu finden. Inhaltlich bedeutet die Eigenschaft der Bipartitheit, dass sich die Knotenmenge $N(G)$ des entsprechenden Graphen in zwei disjunkte Teilmengen N_1 und N_2 aufteilen lässt und innerhalb der beiden Teilmengen keine Kanten verlaufen. Die Partition von $N(G)$ in N_1 und N_2 bezeichnet man in diesem Fall als Bipartition von G . Ein Graph G heißt vollständig bipartit, wenn es eine Bipartition von $N(G)$ in N_1 und N_2 derart gibt, dass jeder Knoten aus N_1 mit jedem Knoten aus N_2 über eine Kante verbunden ist. In diesem Fall wird der Graph auch als $K_{|N_1|, |N_2|}$ bezeichnet.

Ein ungerichteter Graph G heißt zusammenhängend, wenn es für alle $x, y \in N$ einen Weg von x nach y gibt. Die maximalen zusammenhängenden Teilgraphen eines Graphen heißen Zusammenhangskomponenten. Wenn das Entfernen eines Knotens x aus einem Graph G dazu führt, dass der neu entstandene Graph mehr Zusammenhangskomponenten als G hat, heißt x Artikulationsknoten oder Schnittknoten.

2.2 Einige Grundlagen der Komplexitätstheorie

Für einige der im Laufe dieser Arbeit zu behandelnden Probleme sollen Algorithmen vorgestellt werden, mit deren Hilfe die Probleme auf einem Rechner gelöst werden können. Daher sollen in diesem Abschnitt

einige Begriffe aus der Komplexitätstheorie definiert werden. Die ersten drei Definitionen entstammen den Abschnitten 1.1 und 1.2 aus Korte und Vygen (2012).

Definition 9 Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}_+$ und $g : D \rightarrow \mathbb{R}_+$ zwei Funktionen. Die Funktion f ist dann $O(g)$, falls es Konstanten $\alpha, \beta > 0$ gibt mit $f(x) \leq \alpha g(x) + \beta$ für alle $x \in D$.

Definition 10 Sei Γ ein Algorithmus, der Inputs aus einer Menge X annimmt und $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine Abbildung. Gibt es Konstanten $\alpha, \beta > 0$ derart, dass Γ die Berechnung für jeden Input $x \in X$ nach höchstens $\alpha f(\text{size}(x)) + \beta$ elementaren Schritten terminiert, wobei die Inputgröße $\text{size}(x)$ die Gesamtanzahl der für die binäre Darstellung benötigten Bits beschreibt, dann hat Γ eine Laufzeit von $O(f)$.

Definition 11 Ein Algorithmus mit rationalem Input hat eine polynomielle Laufzeit oder ist polynomiell, falls es eine ganze Zahl k gibt derart, dass der Algorithmus eine $O(n^k)$ -Laufzeit hat, wobei n die Inputgröße ist, und alle in den Zwischenrechnungen auftretenden Zahlen mit $O(n^k)$ Bits gespeichert werden können.

Im Laufe der Arbeit werden wir auf Probleme stoßen, die mit Hilfe eines polynomiellen Algorithmus gelöst werden können. Es gibt aber auch Probleme, für die ein solcher Algorithmus nicht bekannt ist, die Nicht-Existenz eines polynomiellen Algorithmus aber bisher auch nicht bewiesen werden konnte. Diese Probleme sind typischerweise recht kompliziert. Um dies zu formalisieren, werden im Folgenden die Klasse NP sowie die NP -vollständigen Probleme definiert, wobei die folgenden Definitionen auf den Darstellungen in Kapitel 15 von Korte und Vygen (2012) basieren. Die Formalisierung der Überlegungen erfolgt mit Hilfe von Sprachen, die zunächst definiert werden.

Definition 12 Ein Alphabet AL ist eine endliche Menge mit mindestens zwei Elementen, aber ohne das besondere Element \sqcup , welches für Leerstellen reserviert ist. Ein String über einem Alphabet AL ist eine endliche Folge von Elementen aus AL . Mit AL^n sei die Menge der Strings der Länge n und mit $AL^* := \cup_{n \in (\mathbb{N} \cup \{0\})} AL^n$ die Menge aller Strings über AL bezeichnet (AL^0 bestehe aus einem Element, dem leeren String). Eine Sprache über AL ist eine Teilmenge von AL^* , die Elemente der Sprache heißen Wörter. Für $x \in AL^n$ sei $\text{size}(x) := n$ die Länge des Strings.

Die Definition ist sehr intuitiv. Eine Sprache stellt eine Menge von Wörtern dar, die wiederum Zeichenketten sind, wobei das Alphabet die zur Verfügung stehenden Zeichen beschreibt. Als nächstes wird ein Rechnermodell vorgestellt, das als Turingmaschine bezeichnet wird. Der Input einer Turingmaschine besteht aus einem String $x \in AL^*$ für ein festes Alphabet AL , der durch Leerstellen zu einem in beide Richtungen unendlichen String $st \in (AL \cup \{\sqcup\})^{\mathbb{Z}}$ erweitert wird. Auf dem String st wird wiederum eine Folge einfacher Operationen ausgeführt, wobei mit jeder Operation nur eine Stelle des Strings gelesen und bearbeitet werden kann. Konkret besteht die Turingmaschine aus einer Menge von $K + 1$ Befehlen, die mit $0, \dots, K$ nummeriert werden. Dabei stellt Befehl 0 den Beginn der Befehlsfolge dar, der an Stelle 1 des Strings ausgeführt wird. Bei jedem Befehl wird zunächst das Bit an der aktuellen Stelle des Strings gelesen und in Abhängigkeit des gelesenen Werts wird dann Folgendes ausgeführt: Das aktuelle Bit wird mit einem

Element aus $AL \cup \{\sqcup\}$ überschrieben, danach folgt eventuell eine Bewegung um eine Stelle nach rechts oder links des Strings, anschließend wird der nächste Befehl bearbeitet. Der Befehl mit der Bezeichnung -1 gibt das Ende der Berechnung an. Der Output der Turingmaschine entspricht denjenigen Komponenten des Strings st mit den Indizes $1, 2, \dots$ bis zur ersten Leerstelle \sqcup .

Definition 13 Sei AL ein Alphabet. Eine Turingmaschine ist eine Funktion $\Phi : \{0, \dots, K\} \times (AL \cup \{\sqcup\}) \rightarrow \{-1, \dots, K\} \times (AL \cup \{\sqcup\}) \times \{-1, 0, 1\}$ für ein $K \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Die Berechnung von Φ für den Input $x \in AL^*$ ist die endliche oder unendliche Folge von Tripeln $(n^{(i)}, st^{(i)}, \pi^{(i)})$ mit $n^{(i)} \in \{-1, \dots, K\}$ als aktuellem Befehl, $st^{(i)} \in (AL \cup \{\sqcup\})^{\mathbb{Z}}$ als String und $\pi^{(i)} \in \mathbb{Z}$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) als aktuelle Stelle, die folgendermaßen rekursiv definiert wird:

- $n^{(0)} := 0$, $st_j^{(0)} := x_j$ für $1 \leq j \leq \text{size}(x)$ und $st_j^{(0)} := \sqcup$ für alle $j \leq 0$ sowie $j > \text{size}(x)$, $\pi^{(0)} := 1$.

Ist $(n^{(i)}, st^{(i)}, \pi^{(i)})$ bereits definiert, werden zwei Fälle betrachtet:

- Falls $n^{(i)} \neq -1$, dann sei $(h, \sigma, \eta) := \Phi(n^{(i)}, st_{\pi^{(i)}}^{(i)})$ und $n^{(i+1)} := h$, $st_{\pi^{(i)}}^{(i+1)} := \sigma$, $st_j^{(i+1)} := st_j^{(i)}$ für $j \in \mathbb{Z} \setminus \{\pi^{(i)}\}$ und $\pi^{(i+1)} := \pi^{(i)} + \eta$.

- Falls $n^{(i)} = -1$, ist das Ende der Folge erreicht. Dann sei $\text{time}(\Phi, x) := i$ und $\text{output}(\Phi, x) \in AL^k$ mit $k := \min \{j \in \mathbb{N} : st_j^{(i)} = \sqcup\} - 1$ durch $\text{output}(\Phi, x)_j := st_j^{(i)}$ für $j = 1, \dots, k$ definiert.

Gilt $n^{(i)} \neq -1$ für alle i und ist die Folge somit unendlich, dann sei $\text{time}(\Phi, x) := \infty$ und $\text{output}(\Phi, x)$ nicht definiert.

Von besonderer Bedeutung sind Turingmaschinen, die Berechnungen in endlicher oder polynomieller Zeit durchführen. Entsprechende Turingmaschinen werden in der folgenden Definition beschrieben.

Definition 14 Sei AL ein Alphabet. Ein Berechnungsproblem besteht aus einem Paar (X, R) , wobei $X \subseteq AL^*$ eine Sprache ist und $R \subseteq X \times AL^*$ eine Relation mit folgender Eigenschaft: Für jedes $x \in X$ gibt es ein $y \in AL^*$ mit $(x, y) \in R$. Sei Φ eine Turingmaschine mit Alphabet AL , so dass $\text{time}(\Phi, x) < \infty$ und $(x, \text{output}(\Phi, x)) \in R$ für jedes $x \in X$. Dann sagen wir, dass Φ das Paar (X, R) berechnet. Gibt es ein Polynom q , so dass $\text{time}(\Phi, x) \leq q(\text{size}(x))$ gilt für alle $x \in X$, so heißt Φ eine polynomielle Turingmaschine.

Gilt $|\{y \in AL^* : (x, y) \in R\}| = 1$ für alle $x \in X$, so kann man $f : X \rightarrow AL^*$ durch $(x, f(x)) \in R$ definieren und sagt dann, dass Φ die Abbildung f berechnet. Ist $X = AL^*$ und $f : X \rightarrow \{0, 1\}$, so wird gesagt, dass Φ die Sprache $L := \{x \in X : f(x) = 1\}$ entscheidet. Gibt es eine polynomielle Turingmaschine, die eine Funktion f berechnet bzw. eine Sprache L entscheidet, so sagt man, dass f in polynomieller Zeit berechenbar bzw. L in polynomieller Zeit entscheidbar ist.

Korte und Vygen (2012) argumentieren auf S. 410, dass es für eine Funktion f genau dann eine f berechnende polynomielle Turingmaschine gibt, wenn es einen f berechnenden polynomiellen Algorithmus gibt. Insofern können die Begriffe Turingmaschine und Algorithmus synonym verwendet werden.

Die Idee eines Entscheidungs- oder Spracherkennungsproblems besteht darin, für ein gegebenes Wort zu entscheiden, ob es zu einer Sprache gehört oder nicht. Dafür werden die zu der Sprache gehörenden Wörter

in einer Menge von Ja-Instanzen zusammengefasst, der eine Menge von Nein-Instanzen gegenüber gestellt wird. Ein gegebenes Wort gehört zu einer Sprache, wenn es Element der Menge der Ja-Instanzen ist.

Definition 15 Ein Entscheidungsproblem ist ein Paar $\mathcal{P} = (X, Y)$, wobei X eine in polynomieller Zeit entscheidbare Sprache und $Y \subseteq X$ ist. Die Elemente von X heißen Instanzen von \mathcal{P} ; die Elemente von Y sind die Ja-Instanzen, diejenigen von $X \setminus Y$ Nein-Instanzen.

Die nächste Definition befasst sich mit der Entscheidungsproblemklasse NP . Ein Entscheidungsproblem liegt in NP , wenn für eine gegebene Lösung (die als Zertifikat bezeichnet wird) in polynomieller Zeit verifiziert werden kann, dass sie Element der Menge der Ja-Instanzen ist. Bei der Definition wird unterstellt, dass die einzelnen Strings (effizient) als binäre 0-1-Strings codiert sind.

Definition 16 Ein Entscheidungsproblem $\mathcal{P} = (X, Y)$ ist in NP , falls es ein Entscheidungsproblem $\mathcal{P}' = (X', Y')$ gibt, für das ein polynomieller Algorithmus existiert, sowie ein Polynom q , wobei

$$X' := \left\{ x\#\theta : x \in X, \theta \in \{0, 1\}^{\lfloor q(\text{size}(x)) \rfloor} \right\},$$

so dass

$$Y = \left\{ y \in X : \text{es gibt einen String } \theta \in \{0, 1\}^{\lfloor q(\text{size}(y)) \rfloor} \text{ mit } y\#\theta \in Y' \right\}.$$

Es bezeichnet $x\#\theta$ die Verkettung des Strings x , des Symbols $\#$ und des Strings θ . Ein String θ mit $y\#\theta \in Y'$ heißt ein Zertifikat für y (da θ beweist, dass $y \in Y$ gilt).

Wenn also eine gegebene Lösung y eine Ja-Instanz des Entscheidungsproblems $\mathcal{P} = (X, Y)$ darstellt und somit $y \in Y \subseteq X$ gilt, dann gibt es entsprechend der Definition 16 einen String $\theta \in \{0, 1\}^{\lfloor q(\text{size}(y)) \rfloor}$ mit $y\#\theta \in Y'$. Da für das Entscheidungsproblem $\mathcal{P}' = (X', Y')$ ein polynomieller Algorithmus existiert, kann für alle $x \in X$ und $\theta \in \{0, 1\}^{\lfloor q(\text{size}(x)) \rfloor}$ in polynomieller Zeit entschieden werden, ob $x\#\theta \in Y'$ gilt oder nicht. Damit folgt, dass in polynomieller Zeit verifiziert werden kann, dass es für die gegebene Lösung $y \in Y$ einen String $\theta \in \{0, 1\}^{\lfloor q(\text{size}(y)) \rfloor}$ mit $y\#\theta \in Y'$ gibt.

Es soll nun zum Ausdruck gebracht werden, dass es innerhalb der Klasse NP unterschiedlich schwierige Entscheidungsprobleme gibt. Dies erfolgt mit Hilfe des Begriffs der polynomiellen Transformation.

Definition 17 Seien $\mathcal{P}_1 = (X_1, Y_1)$ und $\mathcal{P}_2 = (X_2, Y_2)$ Entscheidungsprobleme. Wir sagen, dass sich \mathcal{P}_1 in \mathcal{P}_2 polynomiell transformiert, falls es eine in polynomieller Zeit berechenbare Funktion $f : X_1 \rightarrow X_2$ gibt, so dass $f(x_1) \in Y_2$ für alle $x_1 \in Y_1$ gilt und $f(x_1) \in X_2 \setminus Y_2$ für alle $x_1 \in X_1 \setminus Y_1$.

Definition 18 Ein Entscheidungsproblem $\mathcal{P} \in NP$ heißt NP -vollständig, falls sich alle anderen Probleme in NP polynomiell in \mathcal{P} transformieren.

Zum Abschluss dieses Abschnitts sei angemerkt, dass die Klasse NP nicht symmetrisch bezüglich Ja-Instanzen und Nein-Instanzen ist. Dies liegt daran, dass nur für Ja-Instanzen verlangt wird, dass sie in polynomieller Zeit verifiziert werden können, über Nein-Instanzen wird keine Aussage gemacht. Abschließend

wird daher noch die Klasse $coNP$ von Entscheidungsproblemen definiert, die sich auf Nein-Instanzen bezieht. Die Definition der $coNP$ -vollständigen Entscheidungsprobleme ist völlig analog zu der Definition der NP -vollständigen Probleme.

Definition 19 Für ein gegebenes Entscheidungsproblem $\mathcal{P} = (X, Y)$ ist $(X, X \setminus Y)$ das komplementäre Entscheidungsproblem. Die Klasse $coNP$ beinhaltet alle Entscheidungsprobleme, deren komplementäre Entscheidungsprobleme in NP liegen. Ein Entscheidungsproblem $\mathcal{P} \in coNP$ heißt $coNP$ -vollständig, falls sich alle anderen Probleme in $coNP$ polynomiell in \mathcal{P} transformieren.

2.3 Einige Grundlagen der Spieltheorie

Falls in einer Situation verschiedene Personen Entscheidungen zu treffen haben und die optimale Entscheidung einer Person unter anderem auch von den Entscheidungen der anderen Personen abhängt, spricht man von einer strategischen Interaktions- oder Entscheidungssituation. Formal beschäftigt sich die sogenannte Spieltheorie mit der Analyse solcher Situationen. In dieser Bachelorarbeit werden wir auf strategische Interaktionssituationen treffen, daher sollen in diesem Abschnitt einige Grundbegriffe der Spieltheorie, die für die spätere Untersuchung von Bedeutung sind, vorgestellt werden.

Gemäß der Darstellung auf den Seiten 326 und 327 in Jehle und Reny (2011) ist ein Spiel in extensiver Form, das eine Entscheidungssituation formal beschreiben soll, durch insgesamt acht Elemente gekennzeichnet. Ein Element stellen dabei Zufallszüge dar, die den Einfluss von zufälligen Faktoren erfassen sollen. Da solche Zufallszüge bei den später betrachteten Modellen keine Rolle spielen, beschreibe ich im Folgenden nur die sieben für die späteren Modelle relevanten Elemente des Spiels in extensiver Form.

1. Es liegt eine endliche Menge N von Entscheidern vor, die auch als Spieler bezeichnet werden.
2. Es gibt eine Menge von Aktionen AK , die alle Aktionen erfasst, die an irgendeiner Stelle der Entscheidungssituation möglicherweise gewählt werden können.
3. Weiterhin gibt es eine Menge von Entscheidungsknoten Z , die folgende Bedingungen erfüllt: (i) Z enthält ein ausgewähltes Element z_0 , den sogenannten Anfangsknoten, der den Beginn des Spiels beschreibt. (ii) Jedes $z \in Z \setminus \{z_0\}$ ist von der Form $z = (ak_1, ak_2, \dots, ak_j)$ für endlich viele Aktionen $ak_i \in AK$. (iii) Falls $(ak_1, ak_2, \dots, ak_j) \in Z \setminus \{z_0\}$ gilt für $j > 1$, dann gilt auch $(ak_1, ak_2, \dots, ak_{j-1}) \in Z \setminus \{z_0\}$. Ein Entscheidungsknoten stellt eine vollständige Beschreibung der bis zu einem bestimmten Zeitpunkt gewählten Aktionen dar. Es sei $AK(z) := \{ak \in AK : (z, ak) \in Z\}$ die Menge der Aktionen, die der Spieler, der im Knoten $z \in Z$ eine Entscheidung zu treffen hat, zur Verfügung hat.
4. Es gibt außerdem eine Menge von Endknoten $EK := \{z \in Z : (z, ak) \notin Z \text{ für alle } ak \in AK\}$. Jeder Endknoten beschreibt einen vollständigen Durchlauf des Spiels vom Anfang bis zum Ende. (Die hier definierten Endknoten stehen in keinem Zusammenhang mit den im Rahmen des Kapitels zur Graphentheorie definierten Endknoten.)

5. Weiterhin existiert eine Funktion $\iota : Z \setminus EK \rightarrow N$, die angibt, welcher der Spieler an einem beliebigen Entscheidungsknoten eine Entscheidung zu treffen hat.
6. Zudem gibt es eine Partition I von $Z \setminus (EK \cup \{z_0\})$ mit der Eigenschaft, dass wenn z und z' zum selben Element der Partition gehören, sowohl $\iota(z) = \iota(z')$ als auch $AK(z) = AK(z')$ gilt. I partitioniert die Menge der Entscheidungsknoten (mit Ausnahme der Menge der Endknoten und z_0) in sogenannte Informationsmengen. Die z enthaltende Informationsmenge ist $I(z)$. $I(z)$ beschreibt die Information des Spielers, der am Knoten z eine Entscheidung zu treffen hat. Der Spieler weiß also, dass genau eines der Elemente aus $I(z)$ erreicht worden ist, er kann zwischen diesen Elementen jedoch nicht differenzieren.
7. Für jeden Spieler $k \in N$ existiert schließlich eine Auszahlungsfunktion $u_k : EK \rightarrow \mathbb{R}$, die für jeden möglichen Spielausgang die Konsequenzen für den entsprechenden Spieler beschreibt.

Ziel der Spieltheorie ist die Bestimmung bzw. Vorhersage des Verhaltens der Spieler in einer strategischen Entscheidungssituation. Ein Lösungskonzept für ein Spiel in extensiver Form, das zur Bestimmung des entsprechenden Verhaltens angewendet wird, ist das sogenannte Teilspielperfekte Gleichgewicht. Bevor das Konzept vorgestellt wird, ist es notwendig, drei weitere Begriffe zu definieren. Die Definitionen 20, 21 und 23 finden sich auf den Seiten 93, 8 und 95 von Gibbons (1992), die Definition 22 findet sich auf Seite 340 von Jehle und Reny (2011).

Definition 20 *Eine Strategie s_k für einen Entscheider $k \in N$ beschreibt einen vollständigen Aktionsplan. Es wird also eine mögliche Aktion für den Entscheider in jeder Situation festgelegt, in der der Entscheider möglicherweise eine Entscheidung zu treffen hat. Die Menge aller Strategien von Spieler k sei als S_k bezeichnet.*

Unter Punkt 7 in der Definition des Spiels in extensiver Form wurde für jeden Spieler $k \in N$ eine Auszahlungsfunktion $u_k : EK \rightarrow \mathbb{R}$ eingeführt. Da der Ausgang des Spiels ausschließlich von den gewählten Strategien abhängt, es also eine Abbildung $\zeta : S_1 \times \dots \times S_{|N|} \rightarrow EK$ gibt, die den Spielausgang charakterisiert, kann man u_k auch als Abbildung $u_k : S_1 \times \dots \times S_{|N|} \rightarrow \mathbb{R}$ schreiben. Dies wird in der folgenden Definition des Nash-Gleichgewichts so gemacht.

Definition 21 *Sei ein Spiel mit n Entscheidern betrachtet, d.h. $N = \{1, \dots, n\}$. Ein Nash-Gleichgewicht beschreibt eine Kombination von Strategien (s_1^*, \dots, s_n^*) für die Spieler derart, dass für jeden Spieler $k \in N$ die Wahl von s_k^* eine beste Antwort auf die Strategien der anderen Spieler darstellt. Für jeden Spieler $k \in N$ gilt also $s_k^* \in \arg \max_{s_k \in S_k} u_k(s_1^*, \dots, s_{k-1}^*, s_k, s_{k+1}^*, \dots, s_n^*)$.*

Definition 22 *Ein Entscheidungsknoten $z \in Z \setminus EK$ definiert ein Teilspiel eines Spiels in extensiver Form, falls $I(z) = \{z\}$ gilt und für alle Entscheidungsknoten z' , die auf z im Spiel folgen, gilt: Falls z'' in der Informationsmenge liegt, die z' enthält, folgt z'' ebenfalls auf z .*

Ein Teilspiel beginnt also stets an einem Entscheidungsknoten, der zu einer einelementigen Informationsmenge korrespondiert. Es enthält alle Entscheidungsknoten, die diesem Knoten nachfolgen. Zudem darf es keine Informationsmengen schneiden, d.h. wenn ein Entscheidungsknoten zu einem Teilspiel gehört, kann es keinen Entscheidungsknoten in derselben Informationsmenge wie der betrachtete Entscheidungsknoten geben, der nicht zu dem Teilspiel gehört. Ein Teilspielperfektes Gleichgewicht ist nun folgendermaßen definiert:

Definition 23 *Ein Teilspielperfektes Gleichgewicht ist ein Nash-Gleichgewicht derart, dass die Strategien der Spieler ein Nash-Gleichgewicht in jedem Teilspiel darstellen.*

3 Zuordnungen über Tinder

Die folgenden Ausführungen basieren auf der Arbeit von Ortega (2016). Die theoretischen Resultate sollen dabei auf den Zuordnungsmechanismus der Dating-App Tinder angewendet werden. Daher soll dieser zunächst kurz beschrieben werden. Wenn eine Person bei Tinder aktiv werden möchte, muss sie zunächst ein Profil anlegen, das neben Namen, Geburtsdatum und Fotos der Person auch einen kurzen Text, in dem beispielsweise Interessen spezifiziert werden, enthält. Nach Erstellung des Profils präsentiert Tinder dem Nutzer Kurzprofile potentieller Partner, die sich typischerweise in räumlicher Nähe aufhalten. Die Kurzprofile enthalten u.a. Fotos, Vornamen und Alter der Personen. Der Nutzer muss dann entscheiden, ob er mit der angezeigten Person in Kontakt treten möchte oder nicht. Falls zwei Personen miteinander in Kontakt treten möchten, so erfahren sie dies und können dann ein Gespräch beginnen. In allen anderen Fällen ist eine Gesprächs- bzw. Kontaktaufnahme nicht möglich. Zu betonen ist somit, dass die Entscheidung einer Person, mit einem potentiellen Partner in Kontakt treten zu wollen, getroffen wird, ohne dass die Entscheidung des potentiellen Partners bezüglich einer gewollten Kontaktaufnahme bekannt ist. Diese spezielle Informationsstruktur wird sich bei der formalen Untersuchung des Zuordnungsmechanismus von Tinder als wichtig erweisen. Zusätzlich ist zu betonen, dass eine Kontaktaufnahme mit mehreren Personen möglich ist, die Annahme der Monogamie gilt daher nicht mehr.

3.1 Beschreibung des Modells

Wir betrachten zwei disjunkte und endliche Mengen M und F , die die Gruppen der bei Tinder angemeldeten Männer bzw. Frauen charakterisieren. Ein beliebiges Mitglied (oder Spieler) a einer der beiden Gruppen möchte Partnern aus der anderen Gruppe bzw. Menge zugeordnet werden. Die andere Menge wird allgemein bezeichnet als $PA(a)$, wobei

$$PA(a) = \begin{cases} F, & \text{falls } a \in M, \\ M, & \text{falls } a \in F \end{cases}$$

gilt. Jeder Spieler a besitzt die strikte Präferenzrelation \succ_a über der Potenzmenge $2^{PA(a)}$, die die Annahmen der Vollständigkeit, Antisymmetrie und Transitivität erfüllt. Diese beschreibt die Präferenzen des Spielers

bezüglich der anderen Gruppe von Personen. Über \succsim_a wird die zu \succ_a korrespondierende schwache Präferenzordnung ausgedrückt; für $A_1, A_2 \in 2^{PA(a)}$ gilt also genau dann $A_1 \succsim_a A_2$, wenn $A_1 = A_2$ oder $A_1 \succ_a A_2$. Die Quote des Spielers a , bezeichnet als q_a , stellt die Kardinalität der größten Menge $A \subseteq PA(a)$ dar, für die $A \succ_a \emptyset$ gilt. Eine Quote wird hier also eher implizit über die Präferenzen der Spieler und nicht explizit über Zeitbeschränkungen oder Ähnliches modelliert. Als \succ sei die Gesamtheit aller Präferenzrelationen bezeichnet, es gilt also $\succ = (\succ_a)_{a \in M \cup F}$. Ein Zuordnungsproblem Ω ist gegeben als $\Omega = (M, F, \succ)$.

Es wird eine Zuordnungsfunktion $\mu : M \cup F \rightarrow 2^{M \cup F}$ eingeführt, wobei $\mu(a)$ die Spieler a zugeordneten Personen beschreibt. Sie ist definiert durch die folgenden Bedingungen:

$$\mu(a) \in 2^{PA(a)}, \forall a \in M \cup F, \quad (1)$$

$$m \in \mu(f) \Leftrightarrow f \in \mu(m), \forall m \in M, f \in F. \quad (2)$$

Die beiden Bedingungen sind leicht zu interpretieren. Bedingung (1) gewährleistet, dass eine Zuordnung bei den gegebenen Mengen M und F grundsätzlich zulässig ist, d.h. dass ein Spieler tatsächlich nur Spielern der anderen Gruppe zugeordnet wird. Bedingung (2) besagt, dass ein Spieler einem anderen Spieler nur zugeordnet werden kann, wenn der andere Spieler auch dem erstgenannten Spieler zugeordnet wird. Die triviale Zuordnung ist durch μ_\emptyset mit $\mu_\emptyset(a) = \emptyset$ für alle $a \in M \cup F$ gegeben. Die vollständige Zuordnung ist durch μ_V mit $\mu_V(a) = PA(a)$ für alle $a \in M \cup F$ gegeben. Die Menge aller möglichen Zuordnungen sei durch \mathcal{M} beschrieben.

Um die Präferenzen der Spieler kompakter beschreiben zu können, wird eine sogenannte Entscheidungsfunktion $Ch_a : 2^{PA(a)} \rightarrow 2^{PA(a)}$ eingeführt. Diese Funktion beschreibt die von a gemäß seiner Präferenzrelation \succ_a am stärksten präferierte (und eindeutig bestimmte) Gruppe von möglichen Partnern aus einer Gruppe $A \in 2^{PA(a)}$; die Abhängigkeit der Funktion Ch_a von \succ_a wird aus Darstellungsgründen nicht explizit formuliert. Es wird gefordert, dass die Funktion Ch_a die Konsistenzbedingung $Ch_a(A) = Ch_a(Ch_a(A))$ für alle $A \in 2^{PA(a)}$ erfüllt. Wenn also aus einer Gruppe A einmal die am stärksten präferierte Gruppe von möglichen Partnern für Spieler a identifiziert worden ist, würde eine Verkleinerung dieser Gruppe a stets schlechter stellen.

Im Folgenden werden verschiedene Stabilitätskonzepte definiert. Es wird stets unterstellt, dass alle Entscheidungen auf freiwilliger Basis geschehen, niemand kann dazu gezwungen werden, anderen Personen zugeordnet zu werden. Zunächst ist es daher offensichtlich, dass eine Zuordnung nur dann stabil sein kann, wenn alle Spieler an der Zuordnung auch teilnehmen wollen. Diese Überlegung führt zum Begriff der individuellen Rationalität.

Definition 24 *Eine Zuordnung μ heißt individuell rational, falls $\mu(a) \succsim_a \emptyset$ für alle $a \in M \cup F$ gilt.*

Weiterhin kann eine Zuordnung nur dann stabil sein, wenn keiner der Spieler die Beziehung zu einem der zugeordneten Partner beenden möchte. Diese Überlegung wird durch die nächste Definition erfasst.

Definition 25 *Eine Zuordnung μ heißt individuell stabil, falls $Ch_a(\mu(a)) = \mu(a)$ für alle $a \in M \cup F$ gilt.*

Individuelle Stabilität impliziert individuelle Rationalität, da für alle $a \in M \cup F$ stets $\emptyset \subseteq \mu(a)$ gelten muss und aus der Definition von Ch_a und der Bedingung $Ch_a(\mu(a)) = \mu(a)$ sofort $\mu(a) \succsim_a \emptyset$ abgeleitet werden kann. Wie zuvor erklärt, garantiert die Bedingung der individuellen Stabilität, dass bestehende Partnerschaften nicht einseitig beendet werden. Eine Zuordnung wäre natürlich auch dann nicht stabil, wenn es noch Spieler aus verschiedenen Gruppen gäbe, die einander nicht zugeordnet sind, dies aber gerne wären.

Definition 26 *Eine Zuordnung μ heißt paarweise stabil, falls sie individuell stabil ist und es kein $(m, f) \in M \times F$ gibt derart, dass*

$$m \notin \mu(f), \quad (3)$$

$$m \in Ch_f(\mu(f) \cup \{m\}), \quad (4)$$

$$f \in Ch_m(\mu(m) \cup \{f\}) \quad (5)$$

gilt.

Zuletzt wäre es denkbar, dass sich Gruppen bestehend aus einer beliebigen Anzahl von Spielern zusammenschließen, um sich gegenüber einer bestimmten Zuordnung zu verbessern. Auch dann wäre die Stabilität der Zuordnung möglicherweise nicht mehr gegeben.

Definition 27 *Eine nicht-leere Koalition von Spielern $M' \cup F' \subseteq M \cup F$ und eine Zuordnung $\mu' \in \mathcal{M}$ stellen einen mengenweisen Block $(M' \cup F', \mu')$ für eine Zuordnung μ dar, falls*

$$\mu'(a) / \mu(a) \subseteq M' \cup F', \quad (6)$$

$$\mu'(a) \succ_a \mu(a), \quad (7)$$

$$\mu'(a) \text{ ist individuell stabil} \quad (8)$$

für alle $a \in M' \cup F'$ gilt. Eine Zuordnung μ heißt mengenweise stabil, falls kein mengenweiser Block existiert.

Die erste Bedingung in der Definition des mengenweisen Blocks stellt sicher, dass die in μ' über μ hinausgehenden Zuordnungen zwischen Personen innerhalb des Blocks gebildet werden können. Die zweite Bedingung garantiert, dass sich jedes Mitglied des Blocks gegenüber der Zuordnung μ verbessert. Die dritte Bedingung gewährleistet eine Stabilität des Blocks. Wenn diese Bedingung nicht gegeben wäre, wäre der Block selbst instabil und würde die Stabilität der ursprünglichen Zuordnung daher nicht "bedrohen".

Die folgende Proposition verknüpft die mengenweise mit der individuellen Stabilität. Sie ist von Bedeutung für die spätere Charakterisierung des Zuordnungsmechanismus von Tinder.

Proposition 1 *Eine mengenweise stabile Zuordnung ist stets individuell stabil.*

Beweis. Der Beweis erfolgt mittels Kontraposition. Sei also angenommen, dass eine Zuordnung μ mengenweise stabil, aber nicht individuell stabil ist. Ausgehend von dieser Zuordnung wird ein mengenweiser

Block konstruiert, wodurch ein Widerspruch zu der erklärten mengenweisen Stabilität aufgezeigt wird. Da μ nicht individuell stabil ist, gibt es (mindestens) ein $a \in M \cup F$, so dass $\mu(a) \neq Ch_a(\mu(a))$ gilt. Sei dieser Spieler a betrachtet und sei $M' \cup F' = \{a\}$ und $\mu'(a) = Ch_a(\mu(a))$, d.h. der zu konstruierende mengenweise Block besteht nur aus dem Spieler a . $M' \cup F'$ ist dann offensichtlich nicht leer. Zudem gilt $\mu'(a) / \mu(a) = \emptyset \subset M' \cup F'$, da a alleine lediglich Beziehungen beenden kann. Die Bedingung $\mu'(a) \succ_a \mu(a)$ folgt direkt aus $\mu(a) \neq Ch_a(\mu(a))$, $\mu'(a) = Ch_a(\mu(a))$ und der Definition von Ch_a . Es bleibt die individuelle Stabilität von $\mu'(a)$ für Spieler a zu zeigen. Wäre diese nicht erfüllt, wäre die Bedingung $\mu'(a) \neq Ch_a(\mu'(a)) = Ch_a(Ch_a(\mu(a)))$ gegeben. Dies würde wiederum der Konsistenzbedingung an Ch_a widersprechen, da dann gleichzeitig die beiden Bedingungen $\mu'(a) = Ch_a(\mu(a))$, $\mu'(a) \neq Ch_a(Ch_a(\mu(a)))$ und folgerichtig $Ch_a(\mu(a)) \neq Ch_a(Ch_a(\mu(a)))$ gelten würden. $\mu'(a)$ ist also auch individuell stabil, was die Existenz eines mengenweisen Blocks beweist und den Widerspruchsbeweis abschließt. ■

Die folgenden beiden Definitionen sind von Bedeutung, wenn an späterer Stelle ein sequentieller Mechanismus als Alternative zum Zuordnungsmechanismus von Tinder vorgestellt wird.

Definition 28 Eine Präferenzrelation \succ_a heißt substituierbar, falls

$$x \in Ch_a(A \cup \{x\}) \Rightarrow x \in Ch_a(A' \cup \{x\})$$

für alle Mengen $A, A' \subseteq PA(a)$ mit $A' \subseteq A$ und alle $x \in PA(a)$ gilt.

Definition 29 Eine Präferenzrelation \succ_a heißt stark substituierbar, falls

$$x \in Ch_a(A \cup \{x\}) \Rightarrow x \in Ch_a(A' \cup \{x\})$$

für alle Mengen $A, A' \subseteq PA(a)$ mit $A \succ_a A'$, $|A'| \leq q_a$ und alle $x \in PA(a)$ gilt.

Inhaltlich haben die Definitionen die folgende Bedeutung. Angenommen, ein Spieler a würde einer Person x in einer Ausgangssituation gerne zugeordnet werden. Wenn dann in einer anderen Situation der Spieler a weiterhin der Person x zugeordnet werden könnte, sich ansonsten aber die Menge der möglichen Partner aus Sicht von a verkleinern bzw. verschlechtern würde, würde a gemäß der Bedingung immer noch gerne x zugeordnet werden.

Wie die Bezeichnung bereits ausdrückt, ist die Bedingung der starken Substituierbarkeit strenger als die der Substituierbarkeit und impliziert diese. Um dies zu zeigen, seien $A, A' \subseteq PA(a)$ mit $A' \subseteq A$ gegeben und sei $x \in Ch_a(A \cup \{x\})$. Es gilt $Ch_a(A \cup \{x\}) = Ch_a(Ch_a(A \cup \{x\}))$. Weiterhin gilt $A' \cup \{x\} \subseteq A \cup \{x\}$ und damit $Ch_a(A \cup \{x\}) \succeq_a A' \cup \{x\}$. Falls $Ch_a(A \cup \{x\}) = A' \cup \{x\}$ gilt, folgt $A' \cup \{x\} = Ch_a(A' \cup \{x\})$ und damit $x \in Ch_a(A' \cup \{x\})$. Falls stattdessen $Ch_a(A \cup \{x\}) \succ_a A' \cup \{x\}$ gilt, folgt aus der Bedingung der starken Substituierbarkeit und wegen $x \in Ch_a(Ch_a(A \cup \{x\}))$ erneut die Bedingung $x \in Ch_a(A' \cup \{x\})$.

3.2 Der Zuordnungsmechanismus von Tinder

In diesem Abschnitt wird der von Tinder genutzte Zuordnungsmechanismus modelliert und gezeigt, dass er zu instabilen Zuordnungen führen kann. Sei exemplarisch ein Paar bestehend aus einem Mann und

einer Frau betrachtet, deren Kurzprofile einander bei Tinder angezeigt werden und die entscheiden müssen, ob sie mit der jeweils angezeigten Person in Kontakt treten möchten oder nicht. Typischerweise werden den beiden Personen die Kurzprofile des potentiellen Partners nicht gleichzeitig angezeigt, so dass sie ihre Entscheidungen nicht simultan, sondern stattdessen nacheinander treffen. Allerdings kennt die an zweiter Stelle agierende Person zum Zeitpunkt der Entscheidungsfindung die Entscheidung der anderen Person nicht. Die Informationsmengen bei dem Spiel, das durch den Zuordnungsmechanismus von Tinder induziert wird, sind daher identisch zu denen, die bei simultanen Entscheidungen aller Personen resultieren würden. Daher ist der gesamte Zuordnungsmechanismus von Tinder, bezeichnet als \mathcal{T} , äquivalent zu einer Situation, in der alle Entscheidungen simultan getroffen werden und kann somit folgendermaßen charakterisiert werden:

- Stufe 1: Alle Männer und Frauen wählen simultan diejenigen Partner aus der jeweils anderen Gruppe, denen sie gerne zugeordnet werden würden.
- Stufe 2: Eine Zuordnung zwischen einem Mann und einer Frau tritt genau dann ein, wenn sich beide Partner in Stufe 1 gegenseitig ausgewählt haben.

Der Mechanismus führt zu einem Spiel $\mathcal{T}(\succ)$, das von den einzelnen Spielern gespielt wird. Eine Strategie für einen Spieler a ist in diesem Spiel gegeben durch $A_a \subseteq PA(a)$ und beschreibt diejenigen Spieler aus der anderen Gruppe, die a in Stufe 1 ausgewählt hat. Ein Nash-Gleichgewicht ist ein Strategieprofil (d.h. eine Kollektion von Strategien aller Spieler) A^* derart, dass

$$A_a^* \cap \{\rho \mid a \in A_\rho^*\} \succsim_a X$$

für alle $a \in M \cup F$ und für alle $X \subseteq \{\rho \mid a \in A_\rho^*\}$ gilt. Die Bedingung $A_a^* \cap \{\rho \mid a \in A_\rho^*\} \succsim_a X$ stellt sicher, dass sich a durch eine Veränderung der Auswahl von Spielern auf Stufe 1 nicht besser stellen kann. Dabei ist anzumerken, dass die Entscheidung von a nur für diejenigen Spieler ρ eine Rolle spielt, die a ihrerseits ausgewählt haben (so dass $a \in A_\rho^*$ gilt). Die folgende Proposition zeigt, dass der Zuordnungsmechanismus von Tinder im Nash-Gleichgewicht zu einer instabilen Zuordnung führen kann.

Proposition 2 *Jede mengenweise stabile Zuordnung unter \succ kann als Ergebnis eines Nash-Gleichgewichts von $\mathcal{T}(\succ)$ erreicht werden. Es existieren jedoch Zuordnungen μ , die als Ergebnis eines Nash-Gleichgewichts von $\mathcal{T}(\succ)$ erreicht werden können und nicht mengenweise stabil sind gegeben \succ .*

Beweis. Sei eine Zuordnung μ mengenweise stabil und sei das gleichgewichtige Strategieprofil A^* derart konstruiert, dass $A_a^* = \mu(a)$ für alle $a \in M \cup F$ gilt. Das bedeutet, dass jeder Spieler diejenigen Spieler auswählt, die ihm gemäß μ zugeordnet werden. Es ist leicht zu zeigen, dass das so konstruierte Strategieprofil ein Nash-Gleichgewicht darstellt. Zunächst ist zu beachten, dass es bei dem konstruierten Strategieprofil keinen Spieler gibt, der einen anderen Spieler auswählt, von diesem aber nicht ausgewählt wird. Eine individuelle Abweichung eines beliebigen Spielers auf eine andere Strategie hat daher entweder gar keine Auswirkungen oder sie führt zu einer kleineren Menge zugeordneter Spieler. Bei der zweiten Möglichkeit würde sich der

betrachtete Spieler gemäß Proposition 1 schlechter stellen, da die mengenweise Stabilität die individuelle Stabilität von μ impliziert. Somit hat keiner der Spieler einen Abweichungsanreiz und das Strategieprofil A^* stellt ein Nash-Gleichgewicht dar.

Der zweite Teil der Proposition wird mit Hilfe eines Beispiels gezeigt. Es gelte $M = \{1, 2\}$ und $F = \{\alpha, \beta\}$, wobei die Präferenzen der vier Spieler folgendermaßen beschrieben werden können:

$$\begin{aligned} 1 & : \{\alpha, \beta\} \succ_1 \{\alpha\} \succ_1 \{\beta\} \succ_1 \emptyset, \\ 2 & : \{\alpha, \beta\} \succ_2 \{\beta\} \succ_2 \{\alpha\} \succ_2 \emptyset, \\ \alpha & : \{1\} \succ_\alpha \{2\} \succ_\alpha \emptyset \succ_\alpha \{1, 2\}, \\ \beta & : \{1, 2\} \succ_\beta \{2\} \succ_\beta \{1\} \succ_\beta \emptyset. \end{aligned}$$

Konkret bedeutet dies, dass es zwei Männer und zwei Frauen gibt, und die Männer am liebsten beiden Frauen und eine der Frauen (β) am liebsten beiden Männern zugeordnet werden würden. Eine der Frauen (α) möchte hingegen maximal einem der Männer zugeordnet werden. Es existiert eine mengenweise stabile Zuordnung μ , und diese erfüllt $\mu(1) = \{\alpha, \beta\}$ und $\mu(2) = \{\beta\}$. Die mengenweise Stabilität der Zuordnung ist leicht zu erkennen. Die Spieler 1, α und β erreichen die gemäß ihrer Präferenzordnung beste Zuordnung, lediglich Spieler 2 erreicht nur die zweitbeste Zuordnung. Falls ein mengenweiser Block existieren würde, müsste sich jeder Spieler aus dem Block strikt besser stellen. Dies kann nur Spieler 2 sein. Dieser würde sich verbessern, wenn er zusätzlich Spieler α zugeordnet würde. Eine solche Zuordnung könnte nur dadurch erreicht werden, dass Spieler α ebenfalls dem mengenweisen Block angehören würde. Da sich dieser jedoch verschlechtern würde, wäre eine der Voraussetzungen des mengenweisen Blocks verletzt, was beweist, dass die angegebene Zuordnung mengenweise stabil ist.

Ein Nash-Gleichgewicht bei Anwendung des Tinder-Mechanismus ist gegeben durch $A_1^* = \{\beta\}$, $A_2^* = \{\alpha, \beta\}$, $A_\alpha^* = \{2\}$ und $A_\beta^* = \{1, 2\}$. Dies erkennt man folgendermaßen: Durch die in diesem Gleichgewicht gewählten Strategien resultiert die Zuordnung μ' mit $\mu'(1) = \{\beta\}$ und $\mu'(2) = \{\alpha, \beta\}$. Sollte Spieler 1 auf $A_1' = \emptyset$ oder $A_1' = \{\alpha\}$ abweichen, würde er keinem Spieler mehr zugeordnet und sich dadurch offensichtlich schlechter stellen. Eine Abweichung auf $A_1''' = \{\alpha, \beta\}$ hat keine Auswirkungen. Sollte Spieler α auf $A_\alpha' = \emptyset$ oder $A_\alpha'' = \{1\}$ abweichen, würde dieser Spieler keinem Spieler mehr zugeordnet und sich dadurch schlechter stellen. Eine Abweichung auf $A_\alpha''' = \{1, 2\}$ hat wiederum keine Auswirkungen. Die Spieler 2 und β erhalten ihre am meisten präferierte Zuordnung und haben demnach keinen Anreiz, von den gewählten Strategien abzuweichen.

Es wird abschließend gezeigt, dass die aus den im Gleichgewicht gewählten Strategien resultierende Zuordnung μ' nicht mengenweise stabil ist. Betrachtet sei die Koalition von Spielern $\{1, \alpha\}$ sowie die zuvor betrachtete Zuordnung μ mit $\mu(1) = \{\alpha, \beta\}$ und $\mu(2) = \{\beta\}$. Es gilt $\mu(1) / \mu'(1) = \{\alpha\} \in \{1, \alpha\}$ sowie $\mu(\alpha) / \mu'(\alpha) = \{1\} \in \{1, \alpha\}$. Weiterhin stellen sich 1 und α bei μ offensichtlich besser als bei μ' . Zuletzt ist μ als mengenweise stabile Zuordnung auch individuell stabil. Somit stellt $(\{1, \alpha\}, \mu)$ einen mengenweisen Block für μ' dar und daher ist μ' nicht mengenweise stabil. ■

Der Zuordnungsmechanismus von Tinder kann also insofern problematisch sein, dass er zu einer instabilen Zuordnung führt. Ein weiteres Problem besteht darin, dass der Mechanismus vollkommen nutzlos sein kann in dem Sinne, dass stets ein Nash-Gleichgewicht mit $A_a^* = \emptyset$ für alle $a \in M \cup F$ existiert und es dann zu keinerlei Zuordnungen kommt. Wenn nämlich $A_a^* = \emptyset$ z.B. für alle $a \in F$ gilt, alle Frauen also niemanden aus der Gruppe der Männer auswählen, dann können die Männer durch ihre Entscheidungen die Menge der Zuordnungen nicht beeinflussen. Also sind sie indifferent zwischen allen möglichen Strategien, so dass eine optimale Reaktion in der Wahl von $A_a^* = \emptyset$ für alle $a \in M$ besteht. Eine optimale Reaktion der Frauen auf $A_a^* = \emptyset$ für alle $a \in M$ besteht mit dem gleichen Argument in der Wahl von $A_a^* = \emptyset$ für alle $a \in F$, so dass also tatsächlich ein Nash-Gleichgewicht vorliegt. Im nächsten Abschnitt wird ein alternativer Mechanismus beschrieben, der die mit den Zuordnungsmechanismus von Tinder einhergehenden Probleme löst.

3.3 Ein sequentieller Mechanismus

In diesem Abschnitt wird ein alternativer Zuordnungsmechanismus betrachtet. Dieser ist durch eine sequentielle Abfolge von Entscheidungen charakterisiert und besteht aus den folgenden vier Schritten:

- Stufe 1: Alle Männer geben simultan die Menge derjenigen Frauen an, denen sie gerne zugeordnet werden würden.
- Stufe 2: Jede Frau erfährt, welche Männer ihr gerne zugeordnet werden würden.
- Stufe 3: Alle Frauen geben simultan die Menge derjenigen Männer an, denen sie gerne zugeordnet werden würden.
- Stufe 4: Eine Zuordnung zwischen einem Mann und einer Frau tritt genau dann ein, wenn sich beide Partner zuvor gegenseitig ausgewählt haben.

Bei gegebenen Präferenzen \succ wird durch den soeben beschriebenen Mechanismus ein Spiel in extensiver Form definiert, welches als $S(\succ)$ bezeichnet wird. Eine Strategie für einen Mann m besteht in diesem Spiel in der Wahl einer Menge $A_m \subseteq F$. Für eine Frau f besteht eine Strategie aus einer Sammlung von Mengen B_f , wobei die Strategie eine Menge $B_f(A) \subseteq M$ für jedes mögliche Strategieprofil $A = (A_m)_{m \in M}$ der Männer festlegt. Da ein Spiel in extensiver Form vorliegt, wird, wie in Kapitel 2.3 erklärt, das Teilspielperfekte Gleichgewicht als Lösungskonzept verwendet. Der Beweis des folgenden Theorems befindet sich im Anhang zu dieser Arbeit.

Theorem 1 *Angenommen, für alle $m \in M$ erfüllt \succ_m die Bedingung der starken Substituierbarkeit und für alle $f \in F$ erfüllt \succ_f die Bedingung der Substituierbarkeit. Eine Zuordnung μ ist das Ergebnis eines Teilspielperfekten Gleichgewichts von $S(\succ)$ genau dann, wenn μ mengenweise stabil ist gegeben \succ .*

Theorem 1 zeigt, dass der beschriebene sequentielle Zuordnungsmechanismus die mit dem Mechanismus von Tinder einhergehenden Probleme löst. Alle Zuordnungen, die aus den im Gleichgewicht getätigten

Entscheidungen resultieren können, erfüllen die Bedingung der mengenweisen Stabilität. Intuitiv kann es bei dem von Tinder genutzten simultanen Mechanismus zu Koordinationsproblemen kommen, da weder die Männer noch die Frauen die Entscheidungen der jeweils anderen Gruppenmitglieder beobachten können, wenn sie selbst eine Entscheidung zu treffen haben. Der sequentielle Mechanismus löst diese Koordinationsprobleme und ist dennoch einfach zu implementieren. Aus spieltheoretischer Sicht unterscheiden sich die Mechanismen in der Ausprägung der Informationsmengen. Beim sequentiellen Mechanismus bestehen die Informationsmengen der Frauen aus weniger Entscheidungsknoten als beim simultanen Mechanismus. Insofern können sie auf besseren Informationen basierende Entscheidungen treffen.

Voraussetzung für Theorem 1 ist, dass \succ_m für alle $m \in M$ die Bedingung der starken Substituierbarkeit und \succ_f für alle $f \in F$ die Bedingung der Substituierbarkeit erfüllt. Angemerkt sei in diesem Zusammenhang, dass Proposition 2 auch unter diesen Bedingungen gilt, der Zuordnungsmechanismus von Tinder also auch dann problematisch ist, wenn die entsprechenden Substituierbarkeitsbedingungen erfüllt sind. Dies lässt sich dadurch zeigen, dass die im Beweis von Proposition 2 beispielhaft dargestellten Präferenzen die Bedingung der starken Substituierbarkeit erfüllen. Für die Spieler 1, 2 und β ist dies offensichtlich, da diese jeweils möglichst vielen Spielern zugeordnet werden möchten und sich daher niemals dazu entscheiden würden, einem Spieler nicht zugeordnet zu werden. Für Spieler α gilt zunächst $q_\alpha = 1$. Somit sind für diesen Spieler die drei Fälle $A = \{1\}$ und $A' = \{2\}$, $A = \{1\}$ und $A' = \emptyset$ sowie $A = \{2\}$ und $A' = \emptyset$ zu betrachten. In allen drei Fällen ist die Bedingung der starken Substituierbarkeit für $x = 1$ offensichtlich erfüllt, da Spieler α dem Spieler 1 am liebsten zugeordnet werden würde und diesen immer auswählt, wenn die Möglichkeit dazu besteht. Es verbleibt daher, die Bedingung in den drei Fällen auch für $x = 2$ zu prüfen. In den beiden ersten Fällen ist dies trivial, da $2 \notin Ch_\alpha(\{1\} \cup \{2\})$ gilt. Im dritten Fall ist die Bedingung wegen $A \cup \{2\} = \{2\} = A' \cup \{2\}$ ebenfalls erfüllt.

4 Das stabile Spielansetzungsproblem mit Geldzahlungen

4.1 Beschreibung des Modells

Die Darstellungen in diesem Kapitel basieren auf Biró et al. (2015). Es wird ein Zuordnungsspiel betrachtet, das die Form (G, b, w) aufweist. Dabei ist $G = (N, E)$ ein einfacher, endlicher und ungerichteter Graph bestehend aus $n = |N|$ Knoten und $o = |E|$ Kanten, der keinerlei Schleifen beinhaltet. $b : N \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist eine Funktion, die als Knotenkapazitätsfunktion bezeichnet wird, und $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ist eine Kantengewichtung, also eine Abbildung, die jeder Kante des Graphen eine Zahl aus \mathbb{R}_+ als Kantengewicht zuordnet (es wird hier unterstellt, dass $0 \notin \mathbb{R}_+$ ist). Die Menge N bezeichnet die Menge aller Entscheider bzw. Spieler. Es existiert eine Kante $\{i, j\} \in E$ genau dann, wenn die Spieler i und j eine 2-Spieler-Koalition bilden können. Eine Menge $M \subseteq E$ stellt eine b -Zuordnung dar, falls jeder Spieler $i \in N$ inzident mit höchstens $b(i)$ Kanten von M ist. Die Funktion b beschreibt die Kapazität der Spieler, also die maximal mögliche Anzahl an 2-Spieler-Koalitionen. Eine b -Zuordnung beschreibt demnach eine Menge von 2-Spieler-Koalitionen, bei der die durch

b spezifizierten Kapazitätsrestriktionen an keiner Stelle verletzt werden. Wir schreiben $\{i, j\} \in M$, falls die Spieler i und j durch M einander zugeordnet werden. Für M wird über die Bedingungen $x^M(i, j) = 1$ für $\{i, j\} \in M$ und $x^M(i, j) = 0$ für $\{i, j\} \in E \setminus M$ die charakteristische Funktion von M , $x^M : E \rightarrow \{0, 1\}$, definiert. Mit Hilfe dieser Funktion kann die Kapazitätsbeschränkung von Spieler $i \in N$ alternativ geschrieben werden als $\sum_{j: \{i, j\} \in E} x^M(i, j) \leq b(i)$. Schließlich beschreibt $w(i, j)$ den (monetären) Wert der 2-Spieler-Koalition $\{i, j\} \in E$. Diese Funktion beschreibt also, wie profitabel die einzelnen Koalitionen aus Sicht der Spieler sind und erfasst somit die Präferenzen der Spieler bezüglich der möglichen Zuordnungen. Auf eine Darstellung der Präferenzen mittels einer Relation wird in diesem Kapitel also verzichtet.

Eine nicht-negative Funktion $p : N \times N \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ wird als Auszahlung bezüglich M bezeichnet, falls die zwei nachfolgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $p(i, j) + p(j, i) = w(i, j)$ für alle $\{i, j\} \in M$,
- $p(i, j) + p(j, i) = 0$ für alle $\{i, j\} \in E \setminus M$.

Dabei bezeichnet $p(i, j)$ die Auszahlung, die Spieler i dadurch erhält, dass er mit Spieler j über eine Kante $\{i, j\} \in E$ verbunden ist. Die sich hinter den Bedingungen verbergende Idee ist sehr einfach. Wie zuvor beschrieben, gibt $w(i, j)$ den Wert an, der generiert wird, wenn sich die beiden Spieler i und j zu einer Koalition zusammenschließen, wenn also $\{i, j\} \in M$ gilt. Die beiden Spieler müssen sich dann darüber einig werden, wie sie diesen Wert untereinander aufteilen. Die Auszahlungsfunktion p beschreibt alle möglichen Aufteilungen zwischen den Spielern. Falls sich die Spieler i und j nicht zu einer Koalition zusammenschließen, generieren sie zusammen keinen Wert und es folgt $p(i, j) = p(j, i) = 0$. Falls die beiden genannten Bedingungen erfüllt sind, werden M und p als kompatibel bezeichnet. Ein Paar (M, p) , wobei M eine b -Zuordnung und p eine mit M kompatible Auszahlung darstellt, wird als Lösung von (G, b, w) bezeichnet.

Angenommen, (M, p) ist eine Lösung von (G, b, w) . Zwei Spieler i und j mit $\{i, j\} \in E \setminus M$ können sich unter Umständen durch die Bildung einer neuen 2-Spieler-Koalition besser stellen, selbst wenn einer von ihnen (oder sogar beide) eine bisher existierende Koalition mit einem anderen Spieler dafür verlassen müsste. Um diese Überlegung zu formalisieren, wird eine sogenannte Minimalauszahlungsfunktion $u_p : N \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ eingeführt, die von der Auszahlung p abhängt. Falls bei der Zuordnung M die Kapazität von Spieler i vollständig ausgeschöpft ist, dann gilt $u_p(i) = \min \{p(i, j) \mid x^M(i, j) = 1\}$. Falls stattdessen noch Kapazitäten frei sind, gilt $u_p(i) = 0$. Die Funktion beschreibt also inhaltlich die Auszahlung aus der für Spieler i unprofitabelsten 2-Spieler-Koalition, wobei nicht genutzte Kapazitäten berücksichtigt werden und entsprechend zu einer Auszahlung in Höhe von null führen. Wir sagen, dass das Paar $\{i, j\} \in E \setminus M$ die Lösung (M, p) blockiert, falls $u_p(i) + u_p(j) < w(i, j)$. In diesem Fall könnten sich nämlich beide Spieler i und j durch einen Zusammenschluss zu einer neuen 2-Spieler-Koalition besser stellen. Die Lösung (M, p) wird als stabil bezeichnet, wenn sie von keinem Paar von Spielern blockiert wird, wenn also für alle $\{i, j\} \in E \setminus M$ die Stabilitätsbedingung $u_p(i) + u_p(j) \geq w(i, j)$ erfüllt ist. Das SSG kann nun wie folgt definiert werden:

Definition 30 Das stabile Spielansetzungsproblem mit Geldzahlungen (SSG) untersucht, ob ein vorgegebenes Zuordnungsspiel (G, b, w) (das als Instanz des SSG bezeichnet wird) eine stabile Lösung besitzt oder nicht.

Das Stabilitätskonzept beim SSG ist insofern relativ schwach, dass lediglich Abweichungen von Paaren von Spielern zugelassen werden. Grundsätzlich wären jedoch, wie im vergangenen Kapitel bereits thematisiert worden ist, auch Abweichungen von größeren Gruppen von Spielern denkbar. Diese Überlegung wird im Folgenden aufgegriffen und führt zur Definition einer Kernallokation. Zunächst wird ein kooperatives Spiel mit transferierbaren Nutzen eingeführt. Dieses ist ein Paar (N, v) , wobei N eine Menge aus n Spielern beschreibt und $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ mit $v(\emptyset) = 0$ eine Wertfunktion. Typischerweise wird unterstellt, dass die Spieler die sogenannte große Koalition N bilden, sich also alle Spieler zusammenschließen und dabei den Wert $v(N)$ generieren. Das zu lösende Problem besteht dann darin, den Wert $v(N)$ zwischen den einzelnen Spielern aus N aufzuteilen. Eine Auszahlung (oder Allokation) stellt dann einen Vektor $p \in \mathbb{R}^N$ dar, falls die Bedingung $p(N) = v(N)$ erfüllt ist, wobei für alle $S \subseteq N$ die Definition $p(S) = \sum_{i \in S} p(i)$ gilt und $p(i)$ die i -te Komponente des Vektors p ist. Der Kern des Spiels (N, v) besteht aus sämtlichen Auszahlungen $p \in \mathbb{R}^N$, für die gilt:

- $p(S) \geq v(S)$, $\emptyset \neq S \subseteq N$,
- $p(N) = v(N)$.

Die Bedingungen, die die Kernallokationen zu erfüllen haben, gewährleisten, dass es keine Teilgruppe von Personen gibt, die einen Anreiz hat, die große Koalition zu verlassen und eine kleinere Koalition untereinander zu bilden. Dies wird dadurch garantiert, dass es gemäß der ersten der beiden Bedingungen keine Teilgruppe von Personen gibt, die auf sich alleine gestellt einen größeren Wert generieren kann als sie über die Auszahlungen innerhalb der großen Koalition erhält. Da im vorherigen Kapitel Geldzahlungen nicht möglich waren, wurden dort Kernallokationen nicht thematisiert.

Um die bisherigen Überlegungen zusammen zu führen, definieren wir jetzt ein kooperatives Spiel mit transferierbaren Nutzen (N, v) , das zu dem Spiel (G, b, w) korrespondiert. Dafür sei für jede Menge $S \subseteq N$ die Wertfunktion v gegeben durch

$$v(S) = w(M_S) = \sum_{e \in M_S} w(e),$$

wobei M_S eine b -Zuordnung maximalen Gewichts im Teilgraphen von G darstellt, der durch S induziert wird (also eine Zuordnung, die $\sum w(e)$ unter allen zulässigen Zuordnungen im entsprechenden Teilgraphen maximiert). Falls S einen Graphen ohne Kanten induziert, sei $v(S) = 0$. Falls im Folgenden behauptet wird, dass der Auszahlungsvektor p einer stabilen Lösung von (G, b, w) eine Kernallokation darstellt, ist damit gemeint, dass der Vektor $p^t \in \mathbb{R}^n$ definiert durch $p^t(i) = \sum_{\{i,j\} \in E} p(i,j)$ für alle $i \in N$ eine Kernallokation ist.

In der Einleitung zu dieser Arbeit hatte ich erklärt, dass der Beitrag von Ortega (2016) das Modell von Gale und Shapley (1962) insofern generalisiert, dass die Annahme der Monogamie aufgehoben wird, jedes Mitglied einer Gruppe also mehreren Mitgliedern aus der anderen Gruppe zugeordnet werden kann. Der Beitrag von Biró et al (2015) hebt zusätzlich die Annahme der Bipartitheit auf, zudem werden Geldzahlungen zwischen den einzelnen Personen zugelassen. Zwischen den von Ortega (2016) und von Biró et al. (2015) betrachteten Situationen würde daher eine Situation liegen, in der die Annahme der Monogamie aufgehoben wäre, Geldzahlungen zwischen den Personen möglich sind, die Annahme der Bipartitheit aber weiterhin gelten würde. Eine solche Situation wird von Sotomayor (1992) untersucht. Das entsprechende Problem wird als das multiple Partnerzuordnungsproblem mit Geldzahlungen (MPG) bezeichnet. Das folgende Theorem, das ohne Beweis präsentiert wird, fasst die wichtigsten Ergebnisse des Beitrags von Sotomayor zusammen. Das Theorem wird an späterer Stelle im Beweis von Theorem 4 genutzt.

Theorem 2 *Jedes Zuordnungsspiel der Form (G, b, w) , wobei G ein bipartiter Graph ist, hat mindestens eine stabile Lösung, die in polynomieller Zeit gefunden werden kann. Für jede stabile Lösung (M, p) gilt, dass M maximales Gewicht hat, p eine Kernallokation darstellt und jede andere b -Zuordnung maximalen Gewichts mit p kompatibel ist.*

4.2 Stabile Lösungen und ihre Charakterisierung

Eine Charakterisierung der stabilen Lösungen erfolgt unter anderem dadurch, dass eine Instanz (G, b, w) des SSG durch eine geschickt gewählte Transformation auf eine Instanz $(G', 1, w')$ des sogenannten stabilen Mitbewohnerproblems mit Geldzahlungen (SMG) reduziert wird, wobei $G' = (N', E')$ gilt. Das SMG unterstellt im Gegensatz zum SSG die Annahme der Monogamie. Hinter der Bezeichnung steckt die Idee, dass die Aufteilung einer Gruppe von Personen auf Zweipersonenzimmer, wobei die Personen sich ihren Mitbewohner frei wählen können, dieser aber natürlich zustimmen muss, ein Anwendungsbeispiel für das Problem darstellt.

Zunächst soll die entsprechende Transformation beschrieben werden. Die Knotenmenge N' entsteht dadurch, dass für jeden Spieler $i \in N$ mit Kapazitätsbeschränkung $b(i)$ zunächst $b(i)$ Spieler $i^1, i^2, \dots, i^{b(i)}$ in N' angelegt werden. In einem zweiten Schritt werden für jede Kante $\{i, j\} \in E$ vier weitere Spieler $\bar{i}_j, \dot{i}_j, \dot{j}_i$ sowie \bar{j}_i in N' angelegt. Die Kantenmenge E' wird folgendermaßen konstruiert. Für alle $\{i, j\} \in E$ werden E' alle Kanten der Form $\{i^s, \bar{i}_j\}$, mit $s \in \{1, \dots, b(i)\}$, sowie die Kanten $\{\bar{i}_j, \dot{i}_j\}$, $\{\dot{i}_j, \dot{j}_i\}$, $\{\dot{j}_i, \bar{j}_i\}$ und schließlich alle Kanten der Form $\{\bar{j}_i, j^t\}$, mit $t \in \{1, \dots, b(j)\}$, zugeordnet. Alle so aus der Kante $\{i, j\} \in E$ gewonnenen Kanten erhalten schließlich das Gewicht $w(i, j)$, wodurch w' resultiert und die Transformation abgeschlossen wird. Abbildung 1 illustriert die Konstruktion für den Fall $b(i) = 4$ und $b(j) = 2$.

Wie in Theorem 2 beschrieben, spielen bei der Bestimmung von stabilen Lösungen eines Zuordnungsspiels (G, b, w) mit bipartitem Graph G b -Zuordnungen maximalen Gewichts eine bedeutende Rolle. Es ist naheliegend, dass solche Zuordnungen auch dann von Bedeutung sind, wenn G nicht bipartit ist. Dies werden wir in Kürze zeigen. Sei dafür eine konkrete Instanz (G, b, w) des SSG gegeben. Dann bezeichnet Primal-

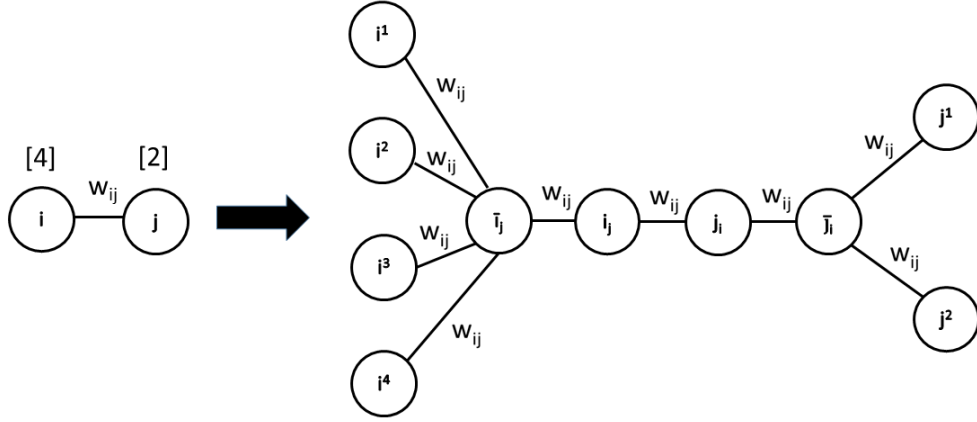


Abbildung 1: Konstruktion einer Instanz $(G', 1, w')$ des SMG aus einer Instanz (G, b, w) des SSG (eigene Darstellung in Anlehnung an Abbildung 1 aus Biró et al. 2015)

(G, b, w) das zugehörige primale lineare Optimierungsproblem. Eine integrale Optimallösung des Problems stellt eine b -Zuordnung maximalen Gewichts dar, das Problem wird definiert als

$$\begin{aligned}
 & \max \sum_{\{i,j\} \in E} w(i,j) x(i,j) \quad (\text{P-ZF}) \\
 & \text{unter} \\
 & \sum_{j: \{i,j\} \in E} x(i,j) \leq b(i) \quad \text{für alle } i \in N \quad (\text{a}), \\
 & 0 \leq x(i,j) \leq 1 \quad \text{für alle } \{i,j\} \in E \quad (\text{b}).
 \end{aligned}$$

Durch die Einführung von Schlupfvariablen $\kappa(i)$ und $\phi(i,j)$ kann Primal- (G, b, w) auf einfache Weise in die sogenannte Standardform gebracht werden. Diese lautet

$$\begin{aligned}
 & \max \sum_{\{i,j\} \in E} w(i,j) x(i,j) \\
 & \text{unter} \\
 & \sum_{j: \{i,j\} \in E} x(i,j) + \kappa(i) = b(i) \quad \text{für alle } i \in N, \\
 & x(i,j) + \phi(i,j) = 1 \quad \text{für alle } \{i,j\} \in E, \\
 & x(i,j), \phi(i,j) \geq 0 \quad \text{für alle } \{i,j\} \in E, \\
 & \kappa(i) \geq 0 \quad \text{für alle } i \in N.
 \end{aligned}$$

Sei $\tilde{w} \in \mathbb{R}^o$ der Vektor der $w(i,j)$ für alle $\{i,j\} \in E$, wobei für die Sortierung zunächst der Index i und bei gleichem Index i der Index j entscheidend ist (ein niedriger Index wird bei der Sortierung bevorzugt,

die Vektoren werden als Spaltenvektoren aufgefasst). Seien $\tilde{x} \in \mathbb{R}^o$ und $\check{\phi} \in \mathbb{R}^o$ die Vektoren der $x(i, j)$ und $\phi(i, j)$ für alle $\{i, j\} \in E$ in der gleichen Sortierung. Seien $\check{\kappa} \in \mathbb{R}^n$ und $\check{b} \in \mathbb{R}^n$ schließlich gegeben durch $\check{\kappa} = (\kappa(1), \dots, \kappa(n))$ und $\check{b} = (b(1), \dots, b(n))$. In Vektor- und Matrixschreibweise kann Primal- (G, b, w) dann formuliert werden als

$$\begin{aligned} & \max \tilde{w}^T \tilde{x} \\ & \text{unter} \\ & \tilde{A} \tilde{x} = \check{b}, \\ & \tilde{x} \geq 0, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{w} \in \mathbb{R}^{2o+n}$ definiert ist als $\tilde{w} = (\check{w}, 0, 0, \dots)$ und $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{2o+n}$ als $\tilde{x} = (\check{x}, \check{\phi}, \check{\kappa})$. Weiterhin ist $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{(n+o) \times (2o+n)}$ definiert als $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1_{N,E} & 0 & I_n \\ I_o & I_o & 0 \end{pmatrix}$, wobei $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $I_o \in \mathbb{R}^{o \times o}$ Einheitsmatrizen sind. $1_{N,E} \in \mathbb{R}^{n \times o}$ ist eine Matrix, die den Wert $a_{ik} = 1$ annimmt, falls $i \in N$ Endknoten der k -ten Kante in E ist, wobei die Kanten wiederum wie bei der Definition von \check{w} beschrieben sortiert sind, und ansonsten den Wert null. Zuletzt ist $\check{b} \in \mathbb{R}^{o+n}$ definiert als $\check{b} = (\check{b}, 1, 1, \dots)$. Das entsprechende duale Programm lautet in Matrixschreibweise

$$\begin{aligned} & \min \tilde{u}^T \check{b} \\ & \text{unter} \\ & \tilde{u}^T \tilde{A} \geq \check{w}^T, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{u} \in \mathbb{R}^{o+n}$ gegeben ist als $\tilde{u} = (\check{y}, \check{d})$ mit $\check{y} \in \mathbb{R}^n$ definiert durch $\check{y} = (y(1), \dots, y(n))$ und $\check{d} \in \mathbb{R}^o$ als Vektor der $d(i, j)$ in der zuvor beschriebenen Sortierung. Ausgeschrieben erhält man das folgende Problem, das als Dual- (G, b, w) bezeichnet wird.

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i \in N} b(i) y(i) + \sum_{\{i, j\} \in E} d(i, j) \quad (\text{D-ZF}) \\ & \text{unter} \\ & y(i) + y(j) + d(i, j) \geq w(i, j) \quad \text{für alle } \{i, j\} \in E \quad (\text{a}'), \\ & y(i) \geq 0 \quad \text{für alle } i \in N \quad (\text{b}'), \\ & d(i, j) \geq 0 \quad \text{für alle } \{i, j\} \in E \quad (\text{c}'). \end{aligned}$$

Der Zusammenhang zwischen dem SSG und Primal- (G, b, w) wird in Kürze in Form eines Theorems formuliert. Dafür wird allerdings noch ein Lemma benötigt, das sich auf den Fall $b = 1$ bezieht. In diesem Fall kann jeder Spieler nur aus einer einzigen Zuordnung eine positive Auszahlung generieren. Daher können wir die Auszahlungsfunktion kürzer als $p : N \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ definieren und die Auszahlung von Spieler $i \in N$ als $p(i)$ schreiben. Eine b -Zuordnung $M \subseteq E$ und eine Auszahlung p werden als kompatibel bezeichnet, falls $p(i) + p(j) = w(i, j)$ für alle $\{i, j\} \in M$ gilt und $p(i) = 0$ für alle i , die mit keinem $e \in M$ inzident sind. Zudem gilt $u_p(i) = p(i)$.

Lemma 1 Sei (M, p) eine stabile Lösung einer Instanz $(G, 1, w)$ des SMG. Dann hat M maximales Gewicht und jede Zuordnung M' maximalen Gewichts von G ist kompatibel mit p .

Beweis. Es wird gezeigt, dass für jede stabile Lösung (M, p) einer Instanz $(G, 1, w)$ des SMG die Zuordnung M maximales Gewicht hat. Der Beweis orientiert sich an Biró et al. (2014). Zunächst haben Eriksson und Karlander (2001) gezeigt, dass es zumindest eine stabile Lösung (M^*, p^*) gibt derart, dass M^* maximales Gewicht hat. Wenn (M^*, p^*) die einzige stabile Lösung der Instanz $(G, 1, w)$ des SMG darstellt, ist der Beweis fertig, ebenso wenn sich die unterschiedlichen Lösungen nur bezüglich p , nicht aber bezüglich M unterscheiden. Angenommen sei daher, dass noch mindestens eine weitere stabile Lösung (M', p') mit $M' \neq M^*$ existiert. Für $\{i, j\} \in M^* \cap M'$ gilt $p'(i) + p'(j) = w(i, j)$. Für $\{i, j\} \in M^* \setminus M'$ gilt wegen der Stabilität von (M', p') die Bedingung $p'(i) + p'(j) \geq w(i, j)$. Somit folgt

$$\begin{aligned} w(M^*) &= \sum_{\{i,j\} \in M^*} w(i, j) \leq \sum_{\{i,j\} \in M^*} p'(i) + p'(j) \\ &\leq \sum_{\{i,j\} \in M'} p'(i) + p'(j) = w(M'). \end{aligned}$$

Da M^* maximales Gewicht hat, gilt $w(M^*) \geq w(M')$ und somit gilt $w(M^*) = w(M')$.

Es ist jetzt noch der zweite Teil des Lemmas zu beweisen. Es sei (M^*, p^*) eine stabile Lösung einer Instanz $(G, 1, w)$ des SMG, somit hat M^* , wie soeben gezeigt, maximales Gewicht. Sei $M' \neq M^*$ eine weitere Zuordnung maximalen Gewichts und sei p' die dazugehörige Auszahlung. Es ist zu zeigen, dass $p^*(i) + p^*(j) = w(i, j)$ für alle $\{i, j\} \in M'$ und $p^*(i) = 0$ für alle i , die mit keinem $e \in M'$ inzident sind, gilt. Die erste Bedingung ist gleichbedeutend damit, dass $p^*(i) + p^*(j) = p'(i) + p'(j)$ für alle $\{i, j\} \in M'$ gilt. Aus der Stabilität von (M^*, p^*) folgt $p^*(i) + p^*(j) \geq w(i, j)$ für alle $\{i, j\} \in M'$. Völlig analog zum ersten Teil des Beweises gilt dann

$$\begin{aligned} w(M') &= \sum_{\{i,j\} \in M'} w(i, j) \leq \sum_{\{i,j\} \in M'} p^*(i) + p^*(j) \\ &\leq \sum_{\{i,j\} \in M^*} p^*(i) + p^*(j) = w(M^*). \end{aligned}$$

Da M' eine Zuordnung maximalen Gewichts ist, muss überall Gleichheit gelten, somit folgt

$$p^*(i) + p^*(j) = w(i, j) = p'(i) + p'(j)$$

für alle $\{i, j\} \in M'$. Sei jetzt ein Spieler i betrachtet, der bei M' keinem anderen Spieler zugeordnet ist. Wegen $p^*(j) + p^*(k) = p'(j) + p'(k)$ für alle $\{j, k\} \in M'$ gilt

$$w(M^*) = w(M') = \sum_{\{j,k\} \in M'} p'(j) + p'(k) = \sum_{\{j,k\} \in M'} p^*(j) + p^*(k).$$

Weiterhin gilt $w(M^*) = \sum_{j \in N} p^*(j)$. Es folgt

$$\sum_{j \in N} p^*(j) = \sum_{\{j,k\} \in M'} p^*(j) + p^*(k)$$

und damit $p^*(i) = 0$.

Angemerkt sei abschließend, dass dann auch (M', p^*) eine stabile Lösung von $(G, 1, w)$ ist. Dies ist leicht zu erkennen. Sei $G = (N, E)$. Es gilt $p^*(i) + p^*(j) = u_{p^*}(i) + u_{p^*}(j) = w(i, j)$ für alle $\{i, j\} \in M^*$ und $u_{p^*}(i) + u_{p^*}(j) \geq w(i, j)$ für alle $\{i, j\} \in E \setminus M^*$. Somit gilt $u_{p^*}(i) + u_{p^*}(j) \geq w(i, j)$ für alle $\{i, j\} \in E$, was wiederum $u_{p^*}(i) + u_{p^*}(j) \geq w(i, j)$ für alle $\{i, j\} \in E \setminus M'$ impliziert und die Stabilität von (M', p^*) beweist. ■

Betrachtet sei nun das folgende Theorem:

Theorem 3 *Sei (G, b, w) eine Instanz des SSG. Die folgenden Aussagen sind dann äquivalent:*

1. (G, b, w) besitzt eine stabile Lösung.
2. $(G', 1, w')$ besitzt eine stabile Lösung.
3. Primal- (G, b, w) besitzt eine integrale Optimallösung.

Beweis. Der Beweis erfolgt über einen Ringschluss. Es wird also nacheinander 1. \Rightarrow 2., 2. \Rightarrow 3. und 3. \Rightarrow 1. gezeigt.

1. \Rightarrow 2.: Sei (M, p) eine stabile Lösung von (G, b, w) . Der Beweis ist konstruktiv, es wird also ausgehend von (M, p) eine stabile Lösung (M', p') von $(G', 1, w')$ konstruiert.

Die Konstruktion verläuft folgendermaßen. Zunächst wird wegen der Kapazitätsbeschränkung in Höhe von 1 bei $(G', 1, w')$ die Auszahlung p' wieder als Funktion auf N' definiert (siehe den Absatz vor Lemma 1). Wie zu Beginn des Abschnitts erklärt wurde, werden in N' für jeden Spieler $i \in N$ mit Kapazitätsbeschränkung $b(i)$ zunächst $b(i)$ Spieler angelegt. Deren Auszahlung entspricht bei (M', p') der minimalen Auszahlung des ursprünglichen Spielers. Formal gilt also $p'(i^s) = u_p(i)$ für alle $i \in N$ und $s \in \{1, \dots, b(i)\}$. Für jedes Paar $\{i, j\} \in M$ gelte zudem die folgende Vereinbarung: Falls j der s -te Partner von i ist und i der t -te Partner von j mit $s \in \{1, \dots, b(i)\}, t \in \{1, \dots, b(j)\}$, dann seien $\{i^s, \bar{v}_j\} \in M', \{i_j, j_i\} \in M'$ und $\{\bar{j}_i, j^t\} \in M'$. Die Auszahlungen der entsprechenden Spieler lauten $p'(i_j) = p(i, j)$, $p'(\bar{v}_j) = w(i, j) - u_p(i)$, $p'(j_i) = p(j, i)$ sowie $p'(\bar{j}_i) = w(i, j) - u_p(j)$. Zuletzt sei für alle $\{i, j\} \in E \setminus M$ angenommen, dass $\{\bar{v}_j, i_j\} \in M'$ und $\{j_i, \bar{j}_i\} \in M'$ gilt. Hier lauten die Auszahlungen $p'(i_j) = \min\{u_p(i), w(i, j)\}$, $p'(\bar{v}_j) = w(i, j) - \min\{u_p(i), w(i, j)\}$, $p'(j_i) = \min\{u_p(j), w(i, j)\}$ und $p'(\bar{j}_i) = w(i, j) - \min\{u_p(j), w(i, j)\}$.

Man stellt leicht fest, dass das auf diese Weise konstruierte Paar (M', p') eine Lösung von $(G', 1, w')$ darstellt. Für die aus $\{i, j\} \in M$ gewonnenen Paare $\{i^s, \bar{v}_j\} \in M', \{i_j, j_i\} \in M'$ und $\{\bar{j}_i, j^t\} \in M'$ gilt nämlich $p'(i^s) + p'(\bar{v}_j) = u_p(i) + w(i, j) - u_p(i)$, $p'(i_j) + p'(j_i) = p(i, j) + p(j, i)$ und $p'(\bar{j}_i) + p'(j^t) = w(i, j) - u_p(j) + u_p(j)$, was jeweils $w(i, j)$ entspricht. Die Bedingung $p(i, j) + p(j, i) = w(i, j)$ resultiert daraus, dass $\{i, j\} \in M$ gilt und (M, p) eine stabile Lösung von (G, b, w) ist. Für die aus $\{i, j\} \in E \setminus M$ gewonnenen Paare $\{\bar{v}_j, i_j\} \in M'$ und $\{j_i, \bar{j}_i\} \in M'$ gilt weiterhin $p'(\bar{v}_j) + p'(i_j) = w(i, j) - \min\{u_p(i), w(i, j)\} + \min\{u_p(i), w(i, j)\}$ sowie $p'(j_i) + p'(\bar{j}_i) = \min\{u_p(j), w(i, j)\} + w(i, j) - \min\{u_p(j), w(i, j)\}$, was wiederum jeweils $w(i, j)$ entspricht.

Es bleibt also nur die Stabilität dieser Lösung zu prüfen. Konkret muss also die Stabilitätsbedingung $u_{p'}(i) + u_{p'}(j) \geq w(i, j)$ für jede Kante überprüft werden, die nicht in M' liegt. Da jeder Spieler eine Kapazität in Höhe von 1 hat, gilt $u_{p'}(i) = p'(i)$ für alle $i \in N'$. Demnach reicht es aus, die Bedingung $p'(i) + p'(j) \geq w(i, j)$ für alle Spieler $i, j \in N'$ zu überprüfen, die in M' einander nicht zugeordnet worden sind. Falls letztere Bedingung stets erfüllt ist, stellt (M', p') eine stabile Lösung dar.

Die Erfüllung der Bedingung $p'(i) + p'(j) \geq w(i, j)$ wird im Folgenden geprüft. Für jede Kante $\{i^s, \bar{i}_j\} \notin M'$ sind gemäß der zuvor beschriebenen Konstruktion zwei Fälle zu unterscheiden. Im ersten Fall gilt $p'(\bar{i}_j) = w(i, j) - u_p(i)$ und daher

$$p'(i^s) + p'(\bar{i}_j) = u_p(i) + w(i, j) - u_p(i) = w(i, j),$$

so dass die zu prüfende Bedingung mit Gleichheit erfüllt ist. Im zweiten Fall beobachten wir $p'(\bar{i}_j) = w(i, j) - \min\{u_p(i), w(i, j)\}$ und somit

$$p'(i^s) + p'(\bar{i}_j) = u_p(i) + w(i, j) - \min\{u_p(i), w(i, j)\} \geq w(i, j),$$

die zu prüfende Bedingung ist also erneut erfüllt. Die Argumentation bei den Kanten $\{\bar{j}_i, j^t\} \notin M'$ ist völlig analog. Für jede Kante $\{\bar{i}_j, i_j\} \notin M'$ gelten die Zusammenhänge $p'(\bar{i}_j) = w(i, j) - u_p(i)$, $p'(i_j) = p(i, j)$ und somit

$$p'(\bar{i}_j) + p'(i_j) = w(i, j) - u_p(i) + p(i, j) \geq w(i, j),$$

wobei die letzte Ungleichung aus $p(i, j) \geq u_p(i)$ resultiert. Die Argumentation bei den Kanten $\{j_i, \bar{j}_i\} \notin M'$ ist erneut völlig analog. Zuletzt sei $\{i_j, j_i\} \notin M'$ betrachtet. Falls (mindestens) einer der beiden Spieler die Auszahlung $w(i, j)$ erhält, dann ist die zu testende Bedingung trivialerweise erfüllt. Falls die Auszahlungen beider Spieler stattdessen ungleich $w(i, j)$ sind, folgt $p'(i_j) = \min\{u_p(i), w(i, j)\} = u_p(i)$ und $p'(j_i) = \min\{u_p(j), w(i, j)\} = u_p(j)$ und somit $p'(i_j) + p'(j_i) = u_p(i) + u_p(j)$. Aus der Stabilität von (M, p) folgt die Bedingung $u_p(i) + u_p(j) \geq w(i, j)$ und daher

$$p'(i_j) + p'(j_i) \geq w(i, j).$$

2. \Rightarrow 3.: Sei (M', p') eine stabile Lösung von $(G', 1, w')$. Der Beweisteil besteht aus zwei Schritten. In einem ersten Schritt wird gezeigt, dass (M', p') in eine weitere stabile Lösung (M'', p') von $(G', 1, w')$ transformiert werden kann, wobei M'' die Zuordnung ist, die man durch die zu Beginn dieses Beweises beschriebene Reduktion von (G, b, w) auf $(G', 1, w')$ erhält. In einem zweiten Schritt wird mit Hilfe der Transformation aus dem ersten Schritt eine optimale Lösung von Primal- (G, b, w) konstruiert.

Gemäß Lemma 1 stellt M' eine Zuordnung maximalen Gewichts in $(G', 1, w')$ dar. Für eine Menge X von Spielern definieren wir $E(X)$ als die Menge der Kanten, mit denen irgendein Spieler aus X inzident ist. Sei $E_{ij} = E(\{\bar{i}_j, i_j, j_i, \bar{j}_i\})$. Als Zuordnung maximalen Gewichts enthält M' entweder drei oder zwei Kanten aus E_{ij} . Eine Zuordnung mit vier oder mehr Kanten aus E_{ij} ist wegen der Kapazitätsbeschränkung in Höhe von 1 nicht möglich. Innerhalb der Menge $\{\bar{i}_j, i_j, j_i, \bar{j}_i\}$ wären wegen der Kapazitätsbeschränkung nur die

Kanten $\{\bar{i}_j, i_j\}$ und $\{j_i, \bar{j}_i\}$ oder die Kante $\{i_j, j_i\}$ als Bestandteile einer Zuordnung maximalen Gewichts denkbar. Im ersten Fall wäre die Kapazität aller Knoten ausgeschöpft, weitere Zuordnungen wären also nicht möglich. Im zweiten Fall könnten noch zwei weitere Zuordnungen der Form $\{i^s, \bar{i}_j\}$ und $\{\bar{j}_i, j^t\}$ mit $s \in \{1, \dots, b(i)\}$ und $t \in \{1, \dots, b(j)\}$ erreicht werden. Eine Zuordnung mit einer oder keiner Kante aus E_{ij} kann dagegen niemals maximales Gewicht haben. Es gäbe dann nämlich stets noch benachbarte und nicht zugeordnete Knoten, so dass durch eine Zuordnung dieser Knoten das Gewicht noch erhöht werden könnte.

Sei zunächst der Fall betrachtet, bei dem M' drei Kanten aus E_{ij} enthält, d.h. der Fall $|E_{ij} \cap M'| = 3$. Wie im vorherigen Absatz bereits erklärt, enthält M' dann die Kanten $\{i_j, j_i\}$, $\{i^s, \bar{i}_j\}$ für ein $s \in \{1, \dots, b(i)\}$, sowie $\{\bar{j}_i, j^t\}$ für ein $t \in \{1, \dots, b(j)\}$. In diesem Fall wird unterstellt, dass M'' genau die gleichen Kanten enthält. In dem Fall, bei dem M' zwei Kanten aus E_{ij} enthält, d.h. im Fall $|E_{ij} \cap M'| = 2$, sei angenommen, dass $\{\{\bar{i}_j, i_j\}, \{j_i, \bar{j}_i\}\} \subseteq M''$ gilt. Das Gewicht dieser beiden Kanten beträgt jeweils $w(i, j)$ und entspricht damit dem Gewicht der beiden Kanten aus $|E_{ij} \cap M'|$. Somit hat die Zuordnung M'' das gleiche Gewicht wie die Zuordnung M' und stellt ebenfalls eine Zuordnung maximalen Gewichts dar. Aus Lemma 1 und dem dazugehörigen Beweis folgt, dass (M'', p') eine stabile Lösung von $(G', 1, w')$ darstellt, die durch eine Reduktion von (G, b, w) auf $(G', 1, w')$, wie im ersten Teil des Beweises gezeigt, bestimmt werden kann.

Man kann relativ leicht zeigen, dass $p'(i^s) = p'(i^t)$ gilt für beliebige $s, t \in \{1, \dots, b(i)\}$. Die Bedingung $p'(i^s) > p'(i^t)$ würde nämlich $p'(i^s) > 0$ implizieren, so dass i^s Endknoten einer Kante aus M' ist (da ansonsten $p'(i^s) = 0$ gelten müsste). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei dies die Kante $\{i^s, \bar{i}_j\} \in M'$. Dann gilt $p'(i^s) + p'(\bar{i}_j) = w(i, j)$ sowie $u_p(i^t) + u_p(\bar{i}_j) = p'(i^t) + p'(\bar{i}_j) < w(i, j)$ und $\{i^t, \bar{i}_j\}$ würde damit M' blockieren, was im Widerspruch dazu steht, dass eine stabile Zuordnung vorliegt.

Ausgehend von dem bisher Gezeigten wird nun eine integrale optimale Lösung von Primal- (G, b, w) konstruiert. Sei $y(i) = p'(i^s)$ für alle $s \in \{1, \dots, b(i)\}$ und $i \in N$. Wie zuvor gezeigt, ist diese Funktion wohldefiniert, da $p'(i^s)$ für alle $s \in \{1, \dots, b(i)\}$ den gleichen Wert annimmt. Sei zudem $d(i, j) = \max\{w(i, j) - y(i) - y(j), 0\}$ für alle $\{i, j\} \in E$. Das Paar (y, d) stellt eine mögliche Lösung von Dual- (G, b, w) dar. Dies erkennt man daran, dass offensichtlich $y(i) \geq 0$ für alle $i \in N$ und $d(i, j) \geq 0$ für alle $\{i, j\} \in E$ gilt. Zusätzlich gilt für alle $\{i, j\} \in E$ die Bedingung

$$y(i) + y(j) + d(i, j) = y(i) + y(j) + \max\{w(i, j) - y(i) - y(j), 0\} \geq w(i, j).$$

Sei nun $x(i, j) = 1$ falls $\{i_j, j_i\} \in M''$ und $x(i, j) = 0$ falls $\{i_j, j_i\} \notin M''$, was direkt impliziert, dass x die Bedingungen (a) und (b) von Primal- (G, b, w) erfüllt. In einem letzten Schritt wird gezeigt, dass (y, d) und x die Bedingung vom komplementären Schlupf erfüllen und somit x eine optimale Lösung von Primal- (G, b, w) ist. Es gilt nämlich:

- Falls $\sum_{j:\{i,j\} \in E} x(i, j) < b(i)$ gilt, dann gibt es für $i \in N$ ein i^s mit $s \in \{1, \dots, b(i)\}$, das in M'' keinem Spieler zugeordnet worden ist. Demnach folgt $y(i) = p'(i^s) = 0$.
- Falls $x(i, j) < 1$ für irgendein $\{i, j\} \in E$ gilt, dann folgt $\{i_j, j_i\} \notin M''$ und, aufgrund der Eigenschaften von M'' , $\{i^s, \bar{i}_j\} \notin M''$ und $\{\bar{j}_i, j^t\} \notin M''$. Stattdessen gilt $\{\bar{i}_j, i_j\}, \{j_i, \bar{j}_i\} \in M''$. Aus der

Stabilitätsbedingung für $\{i^s, \bar{i}_j\} \notin M''$ und aus der Bedingung $\{\bar{i}_j, i_j\} \in M''$ folgen $u_p(i^s) + u_p(\bar{i}_j) \geq w(i, j)$ und $p'(\bar{i}_j) + p'(i_j) = w(i, j)$. Wegen $u_p(\bar{i}_j) = p'(\bar{i}_j)$ gilt $u_p(\bar{i}_j) = w(i, j) - p'(i_j)$ und daher $u_p(i^s) + w(i, j) - p'(i_j) \geq w(i, j)$. Letzteres lässt sich wegen $u_p(i^s) = p'(i^s) = y(i)$ umschreiben zu $y(i) \geq p'(i_j)$. Völlig analog folgt aus $\{\bar{j}_i, j^t\} \notin M''$ und $\{j_i, \bar{j}_i\} \in M''$ die Bedingung $y(j) \geq p'(j_i)$ und somit $y(i) + y(j) \geq p'(i_j) + p'(j_i)$. Aus der Stabilitätsbedingung für $\{i_j, j_i\} \notin M''$ folgt $u_p(i_j) + u_p(j_i) \geq w(i, j)$, was wegen $u_p(i_j) = p'(i_j)$ und $u_p(j_i) = p'(j_i)$ sofort zu $p'(i_j) + p'(j_i) \geq w(i, j)$ führt. Zusammengefasst gilt also $d(i, j) = \max\{w(i, j) - y(i) - y(j), 0\} = 0$.

- Falls $x(i, j) > 0$ für irgendein $\{i, j\} \in E$ gilt, dann folgt $\{i_j, j_i\} \in M''$ und daher $\{\bar{i}_j, i_j\} \notin M''$, $\{j_i, \bar{j}_i\} \notin M''$ sowie $\{i^s, \bar{i}_j\} \in M''$, $\{\bar{j}_i, j^t\} \in M''$ für ein $s \in \{1, \dots, b(i)\}$ und ein $t \in \{1, \dots, b(j)\}$. Zunächst gilt wegen $\{i^s, \bar{i}_j\} \in M''$ die Bedingung $p'(i^s) + p'(\bar{i}_j) = w(i, j)$ bzw. $p'(\bar{i}_j) = w(i, j) - y(i)$. Aus der Stabilitätsbedingung für $\{\bar{i}_j, i_j\} \notin M''$ folgt $u_p(\bar{i}_j) + u_p(i_j) \geq w(i, j)$ bzw. $p'(\bar{i}_j) + p'(i_j) \geq w(i, j)$. Zusammengefasst ergibt sich $w(i, j) - y(i) + p'(i_j) \geq w(i, j) \Leftrightarrow p'(i_j) \geq y(i)$. Völlig analog lässt sich $p'(j_i) \geq y(j)$ zeigen. Somit folgt $y(i) + y(j) \leq p'(i_j) + p'(j_i) = w(i, j)$, wobei die letzte Gleichheit wegen $\{i_j, j_i\} \in M''$ gilt. Wir erhalten $d(i, j) = \max\{w(i, j) - y(i) - y(j), 0\} = w(i, j) - y(i) - y(j)$, so dass die Bedingung (a') von Dual- (G, b, w) bindet.

Wie zuvor erklärt, erfüllen (y, d) und x damit die Bedingung vom komplementären Schlupf, somit ist x eine optimale integrale Lösung von Primal- (G, b, w) .

3. \Rightarrow 1.: Auch die letzte Implikation wird mit Hilfe eines konstruktiven Beweises gezeigt. Sei x eine integrale optimale Lösung von Primal- (G, b, w) und (y, d) eine optimale duale Lösung von Dual- (G, b, w) . Aus diesen beiden Lösungen wird nun eine stabile Lösung (M, p) von (G, b, w) konstruiert. Dabei sei M ganz einfach die b -Zuordnung, die durch die charakteristische Funktion x definiert wird. Das bedeutet, dass $\{i, j\} \in M$ genau dann gilt, wenn $x(i, j) = 1$ erfüllt ist. Für jedes $\{i, j\} \in M$ seien $\xi(i, j) \geq 0$ und $\xi(j, i) \geq 0$ derart, dass $\xi(i, j) + \xi(j, i) = d(i, j)$ gilt. Weiterhin definieren wir $p(i, j) = y(i) + \xi(i, j)$. Für jedes $\{i, j\} \notin M$ sei stattdessen $p(i, j) = 0$ definiert. Diese Zahlungen sind allesamt zulässig. Aus $x(i, j) = 1$ (also für $\{i, j\} \in M$) folgt nämlich

$$p(i, j) + p(j, i) = y(i) + \xi(i, j) + y(j) + \xi(j, i) = y(i) + y(j) + d(i, j) = w(i, j).$$

Die letzte Gleichheit folgt daraus, dass bei der dualen Lösung (y, d) die Bedingung (a') von Dual- (G, b, w) bindet.

Es muss also nur noch die Stabilität der Lösung überprüft werden. Konkret muss also die Stabilitätsbedingung $u_p(i) + u_p(j) \geq w(i, j)$ für jede Kante überprüft werden, die nicht in M liegt. In einem ersten Schritt wird bewiesen, dass $u_p(i) \geq y(i)$ für alle $i \in N$ gilt. Falls die Kapazität von i bei M nicht vollständig erschöpft ist, gilt $u_p(i) = 0$, und durch Anwendung des Satzes vom komplementären Schlupf bei $y(i)$, auch $y(i) = 0$ und somit $u_p(i) = y(i)$. Falls die Kapazität von i bei M stattdessen vollständig ausgeschöpft ist, gilt für alle $\{i, j\} \in M$ die Bedingung $p(i, j) = y(i) + \xi(i, j) \geq y(i)$ und damit $u_p(i) = \min\{p(i, j) \mid x^M(i, j) = 1\} \geq y(i)$. In einem zweiten Schritt sei eine beliebige Kante $\{i, j\} \notin M$

betrachtet. Hier gilt $x(i, j) < 1$ und aufgrund des Satzes vom komplementären Schlupf somit $d(i, j) = 0$. Aus der Bedingung (a') folgt damit

$$u_p(i) + u_p(j) \geq y(i) + y(j) = y(i) + y(j) + d(i, j) \geq w(ij).$$

Dies bedeutet, dass die Stabilitätsbedingung für alle $\{i, j\} \notin M$ erfüllt ist. Damit ist der Beweis abgeschlossen. ■

Theorem 3 hat wichtige Implikationen. Zum einen zeigt das Theorem, dass eine Instanz (G, b, w) des SSG genau dann eine stabile Lösung besitzt, wenn die über eine Transformation geschaffene Instanz $(G', 1, w')$ des SMG eine stabile Lösung besitzt. Eriksson und Karlander (2001) haben gezeigt, dass das SMG keine stabile Lösung besitzen muss. Somit folgt sofort, dass auch für das SSG die Existenz einer stabilen Lösung nicht gesichert ist. Weiterhin besagt das Theorem, dass eine Instanz (G, b, w) des SSG genau dann eine stabile Lösung besitzt, wenn $\text{Primal-}(G, b, w)$ eine integrale Optimallösung besitzt. Dies unterstreicht die Bedeutung der Existenz einer Zuordnung maximalen Gewichts für die Lösung des SSG.

4.3 Effiziente Bestimmung einer Lösung

Unter Ausnutzung der Ergebnisse von Theorem 3 gäbe es nun folgende Möglichkeit, das SSG zu lösen: Zunächst könnte, wie im Beweis des Theorems beschrieben, eine Instanz (G, b, w) des SSG in eine Instanz $(G', 1, w')$ des SMG transformiert werden. Für dieses einfachere Problem sind Verfahren bekannt, mit deren Hilfe die Existenz einer stabilen Lösung in polynomieller Zeit überprüft werden kann. Falls keine solche Lösung existiert, dann gibt es gemäß Theorem 3 auch keine Lösung der Instanz (G, b, w) des SSG. Falls es dagegen eine Lösung gibt, dann kann sie bestimmt und wiederum in eine Lösung des SSG transformiert werden.

Im Folgenden wird ein alternatives Verfahren vorgestellt. Dieses verwendet Ergebnisse zu Zuordnungen maximalen Gewichts und hat den Vorteil, dass es das SSG in kürzerer Zeit löst. Zunächst wird das folgende Lemma benötigt, das ohne Beweis präsentiert wird; dieser ist in Letchford et al. (2008) zu finden:

Lemma 2 *Sei ein Graph G mit einer Knotenkapazitätsfunktion b und einer Kantengewichtung w gegeben. Es ist dann möglich, eine b -Zuordnung maximalen Gewichts von G in $O(n^2 o \log(n^2/o))$ zu finden.*

Um das alternative Verfahren zur Lösung des SSG beschreiben zu können, wird als nächstes eine alternative Charakterisierung einer stabilen Lösung einer Instanz (G, b, w) des SSG gegeben. Dafür wird die folgende Definition benötigt:

Definition 31 *Eine halbe- b -Zuordnung in einem Graph $G = (N, E)$ mit einer ganzzahligen Knotenkapazitätsfunktion b und einer Kantengewichtung w stellt eine Abbildung $f : E \rightarrow \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ dar derart, dass $\sum_{e \in E: i \in e} f(e) \leq b(i)$ für alle $i \in N$ gilt (wobei $i \in e$ bedeutet, dass i inzident mit e ist). Das Gewicht von f ist definiert als $w(f) = \sum_{e \in E} w(e) f(e)$.*

Sei (G, b, w) (mit $G = (N, E)$) eine Instanz des SSG. Definition 31 wird jetzt genutzt, um die zu (G, b, w) korrespondierende duplizierte Instanz $(\hat{G}, \hat{b}, \hat{w})$ (mit $\hat{G} = (\hat{N}, \hat{E})$) eines MPG zu konstruieren, die für den Beweis des nächsten Theorems benötigt wird. In einem ersten Schritt werden für jeden Spieler i aus N zwei Spieler i' und i'' in \hat{N} geschaffen. Diese beiden Spieler haben die gleiche Kapazität wie Spieler i , es gilt also $\hat{b}(i') = \hat{b}(i'') = b(i)$. In einem zweiten Schritt werden für jede Kante $\{i, j\}$ aus E zwei Kanten $\{i', j''\}$ und $\{i'', j'\}$ in \hat{E} geschaffen. Diese Kanten haben halbes Gewicht, es gilt also $\hat{w}(i', j'') = \hat{w}(i'', j') = 0.5w(i, j)$. Offensichtlich ist \hat{G} bipartit. Dies erkennt man daran, dass \hat{N} in die zwei disjunkten Mengen $\hat{N}_1 = \{i' : i \in N\}$ und $\hat{N}_2 = \{i'' : i \in N\}$ zerlegt werden könnte und innerhalb dieser beiden Mengen keine Kanten verlaufen.

Theorem 4 *Eine Instanz (G, b, w) des SSG hat genau dann eine stabile Lösung, wenn das maximale Gewicht einer b -Zuordnung in G dem maximalen Gewicht einer halben- b -Zuordnung in G entspricht.*

Beweis. Sei $G = (N, E)$ und $(\hat{G}, \hat{b}, \hat{w})$ die zu (G, b, w) korrespondierende duplizierte Instanz eines MPG. Da \hat{G} bipartit ist, folgt aus Theorem 2, dass $(\hat{G}, \hat{b}, \hat{w})$ eine stabile Lösung (\hat{M}, \hat{p}) besitzt, wobei \hat{M} eine b -Zuordnung maximalen Gewichts in \hat{G} darstellt.

Sei \hat{x} die charakteristische Funktion von \hat{M} . Sei weiterhin (\hat{y}, \hat{d}) eine duale Optimallösung. Gemäß Theorem 3 und dem Dualitätssatz hat diese den gleichen Zielfunktionswert wie \hat{x} , also $\hat{w}(\hat{M})$. Ausgehend von \hat{x} wird zunächst eine halbe- b -Zuordnung f für (G, b, w) konstruiert. Dafür setzen wir $f(i, j) = \frac{\hat{x}(i', j'') + \hat{x}(i'', j')}{2}$ für alle $\{i, j\} \in E$, offenkundig gilt also $f : E \rightarrow \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Für $\{i, j\} \in E$ gilt weiterhin

$$\begin{aligned} w(i, j) f(i, j) &= 2\hat{w}(i', j'') \frac{\hat{x}(i', j'') + \hat{x}(i'', j')}{2} \\ &= \hat{w}(i', j'') \hat{x}(i', j'') + \hat{w}(i'', j') \hat{x}(i'', j') \\ &= \hat{w}(i', j'') \hat{x}(i', j'') + \hat{w}(i'', j') \hat{x}(i'', j'). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} w(f) &= \sum_{\{i, j\} \in E} w(i, j) f(i, j) \\ &= \sum_{\{i, j\} \in E} \hat{w}(i', j'') \hat{x}(i', j'') + \hat{w}(i'', j') \hat{x}(i'', j') = \hat{w}(\hat{M}). \end{aligned}$$

Es folgt, dass f eine mögliche Lösung von Primal- (G, b, w) darstellt mit demselben Zielfunktionswert wie \hat{x} . Offensichtlich gilt nämlich $0 \leq f(i, j) \leq 1$ für alle $\{i, j\} \in E$ und zusätzlich gilt

$$\sum_{j: \{i, j\} \in E} f(i, j) = \frac{1}{2} \sum_{j: \{i, j\} \in E} (\hat{x}(i', j'') + \hat{x}(i'', j')) \leq \frac{1}{2} (\hat{b}(i') + \hat{b}(i'')) = b(i),$$

wobei die Ungleichung daraus folgt, dass (\hat{M}, \hat{p}) eine stabile Lösung von $(\hat{G}, \hat{b}, \hat{w})$ darstellt und somit die Kapazitätsgrenzen $\hat{b}(i')$ sowie $\hat{b}(i'')$ nicht überschritten werden. Die Nebenbedingungen (a) und (b) von Primal- (G, b, w) werden durch f somit erfüllt.

In einem zweiten Schritt wird (\hat{y}, \hat{d}) genutzt, um eine mögliche Lösung (y, d) von $\text{Dual}(G, b, w)$ zu konstruieren, die ebenfalls den Zielfunktionswert $\hat{w}(\hat{M})$ aufweist. Sei $y(i) = \hat{y}(i') + \hat{y}(i'')$ für alle $i \in N$ und $d(i, j) = \hat{d}(i', j'') + \hat{d}(i'', j')$ für alle $\{i, j\} \in E$. Für alle $\{i, j\} \in E$ folgt dann

$$\begin{aligned} y(i) + y(j) + d(i, j) &= \hat{y}(i') + \hat{y}(i'') + \hat{y}(j') + \hat{y}(j'') + \hat{d}(i', j'') + \hat{d}(i'', j') \\ &= \hat{y}(i') + \hat{y}(j'') + \hat{d}(i', j'') + \hat{y}(i'') + \hat{y}(j') + \hat{d}(i'', j') \\ &\geq \hat{w}(i', j'') + \hat{w}(i'', j') = 0.5w(i, j) + 0.5w(i, j) = w(i, j), \end{aligned}$$

wobei die Ungleichung aus der Bedingung (a') von $\text{Dual}(\hat{G}, \hat{b}, \hat{w})$ folgt. Es folgt, dass (y, d) eine zulässige Lösung von $\text{Dual}(G, b, w)$ ist. Der Zielfunktionswert von (y, d) entspricht

$$\begin{aligned} &\sum_{i \in N} b(i) y(i) + \sum_{\{i, j\} \in E} d(i, j) \\ &= \sum_{i \in N} b(i) (\hat{y}(i') + \hat{y}(i'')) + \sum_{\{i, j\} \in E} (\hat{d}(i', j'') + \hat{d}(i'', j')) \\ &= \sum_{i \in N} (\hat{b}(i') \hat{y}(i') + \hat{b}(i'') \hat{y}(i'')) + \sum_{\{i, j\} \in E} (\hat{d}(i', j'') + \hat{d}(i'', j')) \\ &= \hat{w}(\hat{M}). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt daraus, dass in der vorletzten Zeile der Zielfunktionswert von (\hat{y}, \hat{d}) dargestellt ist und dieser, wie zu Beginn dieses Beweises erklärt, gerade $\hat{w}(\hat{M})$ entspricht. Somit haben f und (y, d) den gleichen Zielfunktionswert, so dass aus dem schwachen Dualitätstheorem folgt, dass sowohl f als auch (y, d) optimale Lösungen darstellen. Zusammenfassend stellt f also eine halbe- b -Zuordnung maximalen Gewichts dar, wobei das Gewicht gerade dem Gewicht eines primalen bzw. dualen Optimums für (G, b, w) bzw. $(\hat{G}, \hat{b}, \hat{w})$ entspricht.

Man kann abschließend zeigen, dass (G, b, w) eine stabile Lösung genau dann besitzt, wenn das maximale Gewicht einer b -Zuordnung für (G, b, w) dem maximalen Gewicht einer halben- b -Zuordnung für (G, b, w) entspricht. Sei zunächst angenommen, dass (G, b, w) eine stabile Lösung besitzt. Gemäß Theorem 3 besitzt $\text{Primal}(G, b, w)$ dann eine integrale Optimallösung. Aus dieser integralen Optimallösung lässt sich eine b -Zuordnung maximalen Gewichts für (G, b, w) ablesen, deren Gewicht, wie gerade gezeigt, dem Gewicht der konstruierten halben b -Zuordnung maximalen Gewichts entspricht. Angenommen sei jetzt, dass das maximale Gewicht einer b -Zuordnung für (G, b, w) dem maximalen Gewicht einer halben- b -Zuordnung für (G, b, w) entspricht. Aus dem zuvor Gezeigten folgt, dass das Gewicht der betrachteten b -Zuordnung für (G, b, w) dem Gewicht eines primalen Optimums für (G, b, w) entspricht. Also besitzt $\text{Primal}(G, b, w)$ eine integrale Optimallösung, die aus der betrachteten b -Zuordnung für (G, b, w) abgelesen werden kann. Aus Theorem 3 folgt schließlich, dass (G, b, w) eine stabile Lösung besitzt. ■

Das SSG lässt sich nun folgendermaßen lösen. Zunächst wird eine b -Zuordnung maximalen Gewichts für (G, b, w) bestimmt. Wie in Lemma 2 erklärt worden ist, lässt sich diese in $O(n^2 o \log(n^2/o))$ berechnen. Als

zweites wird eine b -Zuordnung maximalen Gewichts für die zu (G, b, w) korrespondierende duplizierte Instanz $(\hat{G}, \hat{b}, \hat{w})$ bestimmt. Diese kann wiederum in $O(n^2 o \log(n^2/o))$ berechnet werden. Gemäß des Beweises von Theorem 4 entspricht das Gewicht dieser Zuordnung dem maximalen Gewicht einer halben- b -Zuordnung in (G, b, w) . Es müssen schließlich nur noch die Gewichte der ermittelten Zuordnungen miteinander verglichen werden. Entsprechend Theorem 4 existiert genau dann eine stabile Lösung einer Instanz (G, b, w) des SSG, wenn die Gewichte der ermittelten Zuordnungen gleich hoch sind. Wie zuvor erklärt worden ist, kann die stabile Lösung im Falle der Existenz aus der b -Zuordnung maximalen Gewichts für (G, b, w) abgelesen werden. Insgesamt folgt:

Theorem 5 *Das SSG kann in $O(n^2 o \log(n^2/o))$ gelöst werden.*

4.4 Eigenschaften des Kerns

In diesem Abschnitt erfolgt ein Vergleich der Auszahlungsvektoren der stabilen Lösungen eines Zuordnungsspiels der Form (G, b, w) und den zum Kern zugehörigen Allokationen. Es wird gezeigt, dass jeder Auszahlungsvektor einer stabilen Lösung von (G, b, w) eine Kernallokation darstellt. Die umgekehrte Implikation gilt dagegen nicht. Es können Kernallokationen existieren, selbst wenn es keine stabile Lösung von (G, b, w) gibt.

Proposition 3 *Der Auszahlungsvektor jeder stabilen Lösung von (G, b, w) stellt eine Kernallokation dar.*

Beweis. Sei (M, p) eine stabile Lösung von (G, b, w) . Wie in der Modellbeschreibung erklärt, ist der Auszahlungsvektor $p^t \in \mathbb{R}^n$ definiert durch $p^t(i) = \sum_{\{i,j\} \in E} p(i, j)$ für alle $i \in N$. Offensichtlich gilt $p^t(N) = \sum_{i \in N} p^t(i) = w(M) = v(N)$, wobei die letzte Gleichheit aus dem Grund gilt, dass M eine b -Zuordnung maximalen Gewichts ist.

Sei $S \subset N$ eine beliebige Koalition von Spielern. Sei weiterhin M' eine b -Zuordnung maximalen Gewichts im von S induzierten Teilgraphen von G . Dann gilt:

$$\begin{aligned}
p^t(S) &= \sum_{i \in S} p^t(i) \\
&= \sum_{i \in S} \left(\sum_{j \in N: \{i,j\} \in M} p(i, j) \right) \\
&= \sum_{i \in S} \left(\sum_{j \in N: \{i,j\} \in M \cap M'} p(i, j) + \sum_{j \in N: \{i,j\} \in M \setminus M'} p(i, j) \right) \\
&= \sum_{i \in S} \sum_{j \in N: \{i,j\} \in M \cap M'} p(i, j) + \sum_{i \in S} \sum_{j \in N: \{i,j\} \in M \setminus M'} p(i, j).
\end{aligned}$$

Falls $i \in S$ und $\{i, j\} \in M \cap M'$ gilt, gilt offensichtlich auch $j \in S$ und $\{j, i\} \in M \cap M'$. Somit folgt

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in N: \{i,j\} \in M \cap M'} p(i, j) = \sum_{\{i,j\} \in M \cap M'} (p(i, j) + p(j, i)) = \sum_{\{i,j\} \in M \cap M'} w(i, j)$$

und damit

$$p^t(S) = \sum_{\{i,j\} \in M \cap M'} w(i,j) + \sum_{i \in S} \sum_{j \in N: \{i,j\} \in M \setminus M'} p(i,j).$$

Per Definition gilt $u_p(i) = 0$, falls die Kapazität von Spieler i (durch M) nicht ausgeschöpft ist. Ist die Kapazität von Spieler i durch M stattdessen völlig erschöpft, gilt

$$|\{j \in N : \{i,j\} \in M \setminus M'\}| \geq |\{j \in N : \{i,j\} \in M' \setminus M\}|,$$

weiterhin gilt per Definition von $u_p(i)$ die Bedingung $p(i,j) \geq u_p(i)$ für alle j , die i bei M zugeordnet sind. Unter Berücksichtigung dieser Beziehungen folgt

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in N: \{i,j\} \in M \setminus M'} p(i,j) \geq \sum_{i \in S} \sum_{j \in N: \{i,j\} \in M \setminus M'} u_p(i) \geq \sum_{i \in S} \sum_{j \in N: \{i,j\} \in M' \setminus M} u_p(i)$$

und somit

$$\begin{aligned} p^t(S) &\geq \sum_{\{i,j\} \in M \cap M'} w(i,j) + \sum_{i \in S} \sum_{j \in N: \{i,j\} \in M' \setminus M} u_p(i) \\ &= \sum_{\{i,j\} \in M \cap M'} w(i,j) + \sum_{\{i,j\} \in M' \setminus M} (u_p(i) + u_p(j)), \end{aligned}$$

wobei bei der letzten Umformung genutzt wird, dass $i \in S$ und $\{i,j\} \in M' \setminus M$ die Bedingung $j \in S$ und $\{j,i\} \in M' \setminus M$ impliziert. Die Stabilitätsbedingung für Paare $\{i,j\} \in M' \setminus M$, die einander also nicht durch M zugeordnet werden, erfordert $u_p(i) + u_p(j) \geq w(i,j)$. Somit gilt schließlich

$$p^t(S) \geq \sum_{\{i,j\} \in M \cap M'} w(i,j) + \sum_{\{i,j\} \in M' \setminus M} w(i,j) = w(M') = v(S),$$

so dass p^t die von einer Kernallokation geforderte Bedingung erfüllt. ■

Um zu verdeutlichen, dass die entgegen gerichtete Implikation nicht gilt, sei ein einfaches Beispiel für (G, b, w) betrachtet. Betrachtet sei ein Kreis auf drei unterschiedlichen Ecken g_1, g_2 und g_3 , und zusätzlich wird eine vierte Ecke u mit den Kanten $\{g_2, u\}$ und $\{g_3, u\}$ eingefügt (ein solcher Graph wird auch als Diamant bezeichnet). Angenommen sei weiterhin, dass $b(g_i) = 2$ für $i \in \{1, 2, 3\}$, $b(u) = 1$ sowie $w = 1$ gilt. Man kann nun Theorem 4 nutzen, um zu zeigen, dass für die beschriebene Instanz (G, b, w) des SSG keine stabile Lösung existiert. Zunächst kann man feststellen, dass das maximale Gewicht einer b -Zuordnung 3 beträgt. Das kann man wie folgt zeigen. Wegen $b(u) = 1$ kann u entweder keiner oder genau einer anderen Ecke zugeordnet werden. Im ersten Fall können die Ecken g_1, g_2 und g_3 einander jeweils zugeordnet werden, das aus dieser Zuordnung resultierende Gewicht würde 3 betragen. Im zweiten Fall können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass u der Ecke g_2 zugeordnet wird. Die Ecke g_2 kann dann wegen $b(g_2) = 2$ nur noch der Ecke g_1 oder der Ecke g_3 zugeordnet werden und ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei angenommen, dass g_2 der Ecke g_1 zugeordnet wird. Es ist dann noch eine Zuordnung von g_1 zu g_3 möglich, das resultierende Gewicht wäre also wiederum 3.

Das maximale Gewicht einer halben- b -Zuordnung beträgt dagegen mindestens $\frac{7}{2}$, was anhand des Beispiels $f(g_1, g_2) = f(g_1, g_3) = 1$, $f(g_2, g_3) = f(g_2, u) = f(g_3, u) = \frac{1}{2}$ leicht verdeutlicht werden kann. Aus Theorem 4 folgt dann unmittelbar, dass keine stabile Lösung für die beschriebene Instanz (G, b, w) des SSG existiert. Auf der anderen Seite stellt der Auszahlungsvektor p^t , definiert durch $p^t(g_i) = 1$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ und $p^t(u) = 0$, eine Kernallokation dar. Dieser Auszahlungsvektor kann beispielsweise erreicht werden über die b -Zuordnung $M = \{\{g_1, g_2\}, \{g_1, g_3\}, \{g_2, g_3\}\}$, wobei die Auszahlungen $p(g_1, g_2) = p(g_3, g_1) = p(g_2, g_3) = 1$ die einzigen von null verschiedenen Auszahlungen darstellen. Dass der Auszahlungsvektor eine Kernallokation darstellt, lässt sich folgendermaßen erkennen. Da, wie im vorherigen Absatz gezeigt worden ist, das maximale Gewicht einer b -Zuordnung 3 beträgt, gilt per Definition $v(N) = 3$. Weiterhin gilt $p^t(N) = \sum_i p^t(g_i) + p^t(u) = 3 = v(N)$. Es ist also jetzt noch die Bedingung $p^t(S) \geq v(S)$ für alle $\emptyset \neq S \subset N$ zu prüfen. Zunächst sieht man leicht, dass $p^t(\{g_1, g_2, g_3\}) = v(\{g_1, g_2, g_3\}) = 3$ gilt. Sei nun angenommen, dass $S = \{g_1, g_2, u\}$ gilt. Es folgt $p^t(\{g_1, g_2, u\}) = 2 = v(\{g_1, g_2, u\})$, wobei man $v(\{g_1, g_2, u\}) = 2$ offensichtlich dadurch erhält, dass überhaupt nur die Zuordnungen $\{g_1, g_2\}$ und $\{g_2, u\}$ möglich sind. Völlig analog lässt sich $p^t(\{g_1, g_3, u\}) = 2 = v(\{g_1, g_3, u\})$ zeigen. Weiterhin gilt $p^t(\{g_2, g_3, u\}) = 2$ sowie $v(\{g_2, g_3, u\}) = 2$; dabei gilt $v(\{g_2, g_3, u\}) = 2$ aus dem Grund, dass u aufgrund der Kapazitätsbeschränkung entweder g_2 oder g_3 zugeordnet werden kann und zusätzlich noch die Zuordnung von g_2 zu g_3 möglich ist. Betrachten wir nun die zweielementigen Teilmengen von N . Offensichtlich kann man mit einer Menge von zwei Ecken maximal eine Zuordnung bilden, so dass $v(S) \leq 1$ für alle $S \subset N$ mit $|S| = 2$ gilt. Auf der anderen Seite gilt $p^t(S) \geq 1$, wenn $g_i \in S$ für mindestens ein $i \in \{1, 2, 3\}$ gilt. Da letztere Bedingung für eine zweielementige Menge S immer erfüllt sein muss, ist die Bedingung $p^t(S) \geq v(S)$ hier stets erfüllt. Gleiches gilt schließlich für einelementige Mengen (d.h. $|S| = 1$), da für solche Mengen stets $v(S) = 0 \leq p^t(S)$ gilt. Der beschriebene Auszahlungsvektor stellt somit eine Kernallokation dar und es folgt unmittelbar die folgende Proposition:

Proposition 4 *Es gibt Zuordnungsspiele der Form (G, b, w) , die einen nicht leeren Kern besitzen, jedoch als Instanz des SSG keine stabile Lösung aufweisen.*

Die weiteren Ausführungen in diesem Kapitel untersuchen die Fragestellung, ob eine Allokation zum Kern gehört bzw. in welcher Zeit dies festgestellt werden kann. Zunächst wird gezeigt, dass der Kern durchaus leer sein kann, in dem Fall würde sich die vorherige Fragestellung natürlich erübrigen. Um dies zu verdeutlichen, sei erneut ein einfaches Beispiel für (G, b, w) betrachtet. Gegeben sei ein Kreis auf drei unterschiedlichen Ecken g_1 , g_2 und g_3 , wobei jeweils zusätzlich eine weitere Ecke h_i vom Grad 1 bei g_i für $i \in \{1, 2, 3\}$ eingefügt wird (ein solcher Graph wird auch als Netz bezeichnet). Sei $b = 2$ und $w = 1$. Es gilt dann $v(N) = 4$. Dies kann man folgendermaßen sehen. Bei der großen Koalition N könnte entweder kein Spieler, genau ein Spieler, genau zwei Spieler oder alle drei Spieler aus $\{h_1, h_2, h_3\}$ jeweils dem korrespondierenden Spieler aus $\{g_1, g_2, g_3\}$ zugeordnet werden. Im ersten Fall könnten die Spieler aus $\{g_1, g_2, g_3\}$ die Zuordnungen $\{g_1, g_2\}$, $\{g_1, g_3\}$ und $\{g_2, g_3\}$ bilden, das Gesamtgewicht wäre dann 3. Sei im zweiten Fall ohne Beschränkung der Allgemeinheit Spieler h_1 dem Spieler g_1 zugeordnet. g_1 könnte dann noch einem

der Spieler aus $\{g_2, g_3\}$ zugeordnet werden, zudem ist noch eine Zuordnung von g_2 zu g_3 möglich. Das Gesamtgewicht dieser Zuordnung lautet demnach wiederum 3. Im dritten Fall sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass Spieler h_1 dem Spieler g_1 und Spieler h_2 dem Spieler g_2 zugeordnet wird. Sowohl g_1 als auch g_2 könnten dann noch Spieler g_3 zugeordnet werden, so dass insgesamt eine Zuordnung mit Gesamtgewicht 4 resultieren würde. Im letzten Fall kann neben den Zuordnungen von h_1 zu g_1 , h_2 zu g_2 und h_3 zu g_3 aufgrund der Kapazitätsbeschränkung in Höhe von 2 innerhalb der Menge $\{g_1, g_2, g_3\}$ noch eine weitere Zuordnung erreicht werden, das Gesamtgewicht wäre also wiederum 4 und dies impliziert per Definition von v die Bedingung $v(N) = 4$.

Sei nun die Koalition $S = \{g_1, g_2, h_1, h_2\}$ betrachtet. Es gilt $v(S) = w(g_1, h_1) + w(g_1, g_2) + w(g_2, h_2) = 3$. Die Bedingung $p(S) \geq v(S)$ ist also äquivalent zu

$$p(g_1) + p(g_2) + p(h_1) + p(h_2) \geq 3.$$

Analog folgen für die Koalitionen $\{g_1, g_3, h_1, h_3\}$ sowie $\{g_2, g_3, h_2, h_3\}$ die Kernbedingungen

$$p(g_1) + p(g_3) + p(h_1) + p(h_3) \geq 3$$

und

$$p(g_2) + p(g_3) + p(h_2) + p(h_3) \geq 3.$$

Wenn jeweils die linken und rechten Seiten der Bedingungen aufsummiert werden, folgt

$$2p(g_1) + 2p(g_2) + 2p(g_3) + 2p(h_1) + 2p(h_2) + 2p(h_3) \geq 9.$$

Wegen

$$p(N) = p(g_1) + p(g_2) + p(g_3) + p(h_1) + p(h_2) + p(h_3) = v(N) = 4$$

kann diese Bedingung niemals erfüllt sein, so dass es keinen Auszahlungsvektor gibt, der alle Kernbedingungen erfüllt. Der Kern ist in diesem Beispiel somit leer.

Die Zeit, in der festgestellt werden kann, ob eine Allokation zum Kern gehört oder nicht, hängt von der Kapazitätsbeschränkung der einzelnen Spieler ab. Wir betrachten daher zunächst den Fall, in dem $b(i) \leq 2$ für alle $i \in N$ gilt. Erst im Anschluss daran wird auch eine Kapazitätsbeschränkung in Höhe von $b(i) = 3$ zugelassen. Ein Spieler i mit einer Kapazitätsrestriktion in Höhe von $b(i) = 0$ erhält stets eine Auszahlung von null und beeinflusst die Auszahlungen der anderen Spieler nicht. Ein solcher Spieler kann daher bei der Untersuchung ausgeschlossen werden, so dass zunächst der Fall $b(i) \in \{1, 2\}$ für alle $i \in N$ betrachtet wird.

Die Beweisführung im Fall $b \leq 2$ nutzt Resultate bezüglich des sogenannten Trampdampferproblems aus, daher soll dieses kurz formal definiert werden. Sei ein Graph $G = (N, E)$ zusammen mit zwei Kantengewichtungen $p : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ und $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ gegeben, wobei p als Gewinn- und w als Kostenfunktion bezeichnet wird. Sei $C = (N(C), E(C))$ ein Kreis von G . Das Verhältnis aus Gewinn und Kosten von C ist definiert als $\frac{p(C)}{w(C)}$, wobei $p(C) = \sum_{e \in E(C)} p(e)$ und $w(C) = \sum_{e \in E(C)} w(e)$ gesetzt wird. Das sogenannte Trampdampferproblem besteht darin, einen Kreis C mit einem maximalen Verhältnis aus Gewinn und

Kosten zu finden. Es gilt das folgende Lemma (eine genauere Behandlung des Problems und ein Beweis des Lemmas finden sich im Anhang zu dieser Arbeit):

Lemma 3 *Das Trampdampferproblem kann in polynomieller Zeit gelöst werden.*

Unter Benutzung von Lemma 3 kann jetzt das folgende Resultat gezeigt werden:

Theorem 6 *Falls $b \leq 2$ gilt, kann für jede Allokation in polynomieller Zeit entschieden werden, ob sie im Kern eines Zuordnungsspiels der Form (G, b, w) liegt oder nicht.*

Beweis. Sei (N, v) das kooperative Spiel mit transferierbaren Nutzen, das zu (G, b, w) korrespondiert und sei $b(i) \in \{1, 2\}$ für alle $i \in N$. Für eine beliebige, nicht leere Teilmenge $S \subseteq N$ muss eine Kernallokation $p \in \mathbb{R}^N$ die Bedingung $p(S) \geq v(S)$ erfüllen, wobei $v(S) = w(M_S)$ gilt und M_S eine b -Zuordnung maximalen Gewichts in $G[S]$ darstellt. Da nicht zugeordnete Knoten kein Gewicht verursachen, spielen diese für eine b -Zuordnung maximalen Gewichts keine Rolle und können daher bei der Bestimmung einer solchen Zuordnung vernachlässigt werden. Da zusätzlich $b(i) \in \{1, 2\}$ unterstellt wird, besteht eine b -Zuordnung maximalen Gewichts in $G[S]$ aus Kreisen und Wegen. Sei ein Kreis C beschrieben als $C = (N(C), E(C))$ und ein Weg P als $P = (N(P), E(P))$. Mit $w(C) = \sum_{e \in E(C)} w(e)$ und $w(P) = \sum_{e \in E(P)} w(e)$ lässt sich die zuvor beschriebene Kernbedingung daher alternativ formulieren als

$$\begin{aligned} p(N(C)) &\geq w(C) \text{ für alle Kreise } C \in \mathcal{C}_2, \\ p(N(P)) &\geq w(P) \text{ für alle Wege } P \in \mathcal{P}_2, \end{aligned}$$

wobei \mathcal{C}_2 die Menge aller Kreise C in G mit $b(i) = 2$ für alle $i \in N(C)$ und \mathcal{P}_2 die Menge aller Wege P mit $b(i) = 2$ für alle inneren Knoten von P beschreibt; die Bedingung $b(i) = 2$ muss für die Knoten der Kreise und inneren Punkte der Wege offensichtlich gelten, da diese jeweils zwei anderen Knoten zugeordnet sind und zusätzlich $b(i) \leq 2$ gilt. Weiterhin muss die Bedingung $p(N) = v(N)$ erfüllt sein. Für ein gegebenes $p \in \mathbb{R}^N$ kann die Gültigkeit dieser Bedingung dadurch überprüft werden, dass eine b -Zuordnung maximalen Gewichts in G berechnet wird, um $v(N)$ zu bestimmen. Gemäß Lemma 2 kann letztere Berechnung in polynomieller Zeit durchgeführt werden. Aus diesem Grund können wir uns bei der weiteren Beweisführung auf die Bedingungen zu den Kreisen und Wegen konzentrieren.

Seien hier zunächst die Restriktionen bezüglich der Kreise betrachtet. Diese Restriktionen sollen derart umformuliert werden, dass sie zu einer Instanz des Trampdampferproblems führen. Um dies zu erreichen, seien N_2 und G_2 definiert als $N_2 := \{i \in N \mid b(i) = 2\}$ und $G_2 := G[N_2]$. Im dadurch induzierten Graph $G_2 = (N_2, E_2)$ wird weiterhin $p(i, j) := (p(i) + p(j)) / 2$ für alle $\{i, j\} \in E_2$ gesetzt. Über die letzte Definition erhalten wir eine Kantengewichtung $p : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass die zuvor aufgeführten Kernrestriktionen für Kreise äquivalent sind zu der Bedingung

$$\max_{C \in \mathcal{C}_2} \frac{w(C)}{p(C)} \leq 1,$$

wobei das Maximum über alle Kreise in G_2 bestimmt wird und $p(C)$ durch $p(C) = \sum_{\{i,j\} \in E(C)} p(i,j)$ definiert ist. Die Äquivalenz der Bedingungen lässt sich folgendermaßen zeigen. Angenommen, es gelte $p(N(C)) \geq w(C)$ für alle Kreise $C \in \mathcal{C}_2$. Wegen $w(C) > 0$ folgt dann offensichtlich $p(N(C)) > 0$ und die Bedingung ist äquivalent zu $\frac{w(C)}{p(N(C))} \leq 1$ bzw. $\frac{w(C)}{\sum_{i \in N(C)} p(i)} \leq 1$ für alle $C \in \mathcal{C}_2$. Aufgrund der Definition von $p(i,j)$ und da jeder Spieler $i \in N(C)$ mit genau zwei Kanten aus $E(C)$ inzident ist, gilt weiterhin $\sum_{i \in N(C)} p(i) = \sum_{\{i,j\} \in E(C)} p(i,j)$. Somit folgt $\frac{w(C)}{\sum_{\{i,j\} \in E(C)} p(i,j)} \leq 1$ für alle $C \in \mathcal{C}_2$ und damit schließlich $\max_{C \in \mathcal{C}_2} \frac{w(C)}{p(C)} \leq 1$. Sei nun umgekehrt angenommen, es gelte $\max_{C \in \mathcal{C}_2} \frac{w(C)}{p(C)} \leq 1$. Dann folgt $\frac{w(C)}{\sum_{\{i,j\} \in E(C)} p(i,j)} \leq 1$ für alle $C \in \mathcal{C}_2$ und somit $\frac{w(C)}{\sum_{i \in N(C)} p(i)} \leq 1$ bzw. $\frac{w(C)}{p(N(C))} \leq 1$ für alle $C \in \mathcal{C}_2$, was schließlich $p(N(C)) \geq w(C)$ für alle Kreise $C \in \mathcal{C}_2$ impliziert.

Das Maximierungsproblem $\max_{C \in \mathcal{C}_2} \frac{w(C)}{p(C)}$ stellt offensichtlich eine Instanz des Trampdampferproblems dar, das gemäß Lemma 3 in polynomieller Zeit gelöst werden kann. Sei C^* eine entsprechende Lösung des Problems. Falls $\frac{w(C^*)}{p(C^*)} \leq 1$ gilt, folgt unmittelbar, dass alle zuvor formulierten Restriktionen an die Kreise $C \in \mathcal{C}_2$ erfüllt sind. Gilt stattdessen $\frac{w(C^*)}{p(C^*)} > 1$, wird mit C^* ein konkreter Kreis identifiziert, bei dem die Kernrestriktion verletzt ist. Es sei im Folgenden unterstellt, dass die erste der beiden Situationen vorliegt und es werden abschließend die Kernrestriktionen bezüglich der Wege betrachtet.

Diese werden getrennt für alle möglichen Endpunkte $i_0, j_0 \in N$ (mit $i_0 \neq j_0$) untersucht und alle möglichen Längen der Wege $k \in \{1, \dots, n-1\}$. In diesem Zusammenhang bezeichne $\mathcal{P}(i_0, j_0, k) \subseteq \mathcal{P}_2$ die Menge der Wege mit den Endpunkten i_0 und j_0 und der Länge k in G . Es wird nun ein Hilfsgraph $G(i_0, j_0, k)$ konstruiert. Im Rahmen dieser Konstruktion seien $N_2^{(1)}, \dots, N_2^{(k-1)}$ $k-1$ Kopien von N_2 . Die Knotenmenge von $G(i_0, j_0, k)$ ist dann gegeben durch $\{i_0\} \cup N_2^{(1)} \cup \dots \cup N_2^{(k-1)} \cup \{j_0\}$. Die Kopie von $i \in N_2$ in $N_2^{(r)}$ wird als $i^{(r)}$ bezeichnet. Die Kanten von $G(i_0, j_0, k)$ sowie deren Gewichte \bar{w} werden folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \{i_0, j^{(1)}\} & \text{ für } \{i_0, j\} \in E \text{ mit Gewicht } \bar{w}(i_0, j^{(1)}) := p(i_0) + p(j)/2 - w(i_0, j), \\ \{i^{(r-1)}, j^{(r)}\} & \text{ für } \{i, j\} \in E \text{ mit Gewicht } \bar{w}(i^{(r-1)}, j^{(r)}) := (p(i) + p(j))/2 - w(i, j), \\ \{i^{(k-1)}, j_0\} & \text{ für } \{i, j_0\} \in E \text{ mit Gewicht } \bar{w}(i^{(k-1)}, j_0) := p(i)/2 + p(j_0) - w(i, j_0). \end{aligned}$$

Es wird jetzt die folgende Äquivalenz bewiesen: Es gilt $p(N(P)) \geq w(P)$ für alle Wege $P \in \mathcal{P}_2$ genau dann, wenn der (bezüglich \bar{w}) kürzeste Weg mit den Endpunkten i_0 und j_0 in $G(i_0, j_0, k)$ ein Gewicht ≥ 0 hat für alle $i_0 \neq j_0$ und alle $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Um dies zu zeigen, sei zunächst angenommen, dass es einen Weg $P \in \mathcal{P}_2$ mit $p(N(P)) < w(P)$ gibt. Die Endpunkte des Weges werden als i_0 und j_0 bezeichnet, die Länge als k . Es folgt dann unmittelbar, dass P zu einem Weg \bar{P} mit den Endpunkten i_0 und j_0 in $G(i_0, j_0, k)$ korrespondiert, für den $\bar{w}(\bar{P}) < 0$ gilt. Seien die Knoten in P nämlich als Knoten $i_0, i_1, \dots, i_{k-1}, j_0$ bezeichnet, dann korrespondiert P zu einem Weg \bar{P} in $G(i_0, j_0, k)$, der die Knoten $i_0, i_1^{(1)}, \dots, i_{k-1}^{(k-1)}, j_0$ besucht. Für die

Länge dieses Wegs gilt

$$\begin{aligned}
\bar{w}(\bar{P}) &= \bar{w}(i_0, i_1^{(1)}) + \sum_{r=1}^{k-2} \bar{w}(i_r^{(r)}, i_{r+1}^{(r+1)}) + \bar{w}(i_{k-1}^{(k-1)}, j_0) \\
&= p(i_0) + \sum_{r=1}^{k-1} p(i_r) + p(j_0) - w(i_0, i_1) - \sum_{r=1}^{k-2} w(i_r, i_{r+1}) - w(i_{k-1}, j_0) \\
&= p(N(P)) - w(P) < 0.
\end{aligned}$$

Als nächstes wird unterstellt, dass $p(N(P)) \geq w(P)$ für alle Wege $P \in \mathcal{P}_2$ gilt. Sei \bar{P} ein Weg, der die Knoten $i_0, i_1^{(1)}, \dots, i_{k-1}^{(k-1)}, j_0$ besucht. Die Kanten dieses Wegs, $\{i_0, i_1^{(1)}\}, \{i_1^{(1)}, i_2^{(2)}\}, \dots, \{i_{k-2}^{(k-2)}, i_{k-1}^{(k-1)}\}, \{i_{k-1}^{(k-1)}, j_0\}$, korrespondieren zu Kanten $\{i_0, i_1\}, \{i_1, i_2\}, \dots, \{i_{k-2}, i_{k-1}\}, \{i_{k-1}, j_0\} \in E$. Somit korrespondiert \bar{P} zu einem Weg P in G mit den Endpunkten i_0 und j_0 , möglicherweise zuzüglich einer bestimmten Anzahl C_1, \dots, C_s von Kreisen in G . Aufgrund der Definition von \bar{w} gilt

$$\bar{w}(\bar{P}) = p(N(P)) - w(P) + \sum_{i=1}^s (p(N(C_i)) - w(C_i)).$$

Wie zuvor erklärt, habe ich hier unterstellt, dass die Kernrestriktionen bezüglich aller Kreise erfüllt sind. Es gilt also $p(N(C)) \geq w(C)$ für alle Kreise $C \in \mathcal{C}_2$, und somit folgt $\sum_{i=1}^s (p(N(C_i)) - w(C_i)) \geq 0$, was wegen $p(N(P)) \geq w(P)$ für alle Wege $P \in \mathcal{P}_2$ wiederum $\bar{w}(\bar{P}) \geq 0$ impliziert und uns die zuvor beschriebene Äquivalenz liefert.

Aufgrund dieser Äquivalenz kann zur Überprüfung der Bedingung $p(N(P)) \geq w(P)$ für alle Wege $P \in \mathcal{P}_2$ alternativ geprüft werden, ob der (bezüglich \bar{w}) kürzeste Weg mit den Endpunkten i_0 und j_0 in $G(i_0, j_0, k)$ ein Gewicht ≥ 0 hat für alle $i_0 \neq j_0$ und alle $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Da es n Möglichkeiten gibt, den Endpunkt i_0 festzulegen, nach Festlegung von i_0 wiederum $n-1$ Möglichkeiten existieren, den Endpunkt j_0 festzulegen, und schließlich die betrachteten Wege $n-1$ verschiedene Längen annehmen können, müssen also $O(n^3)$ Instanzen des sogenannten Problems des kürzesten Wegs gelöst werden. Das Problem des kürzesten Wegs wird im Anhang zu dieser Arbeit vorgestellt. Dort wird gezeigt, dass das Problem mittels des Algorithmus von Moore, Bellman und Ford in polynomieller Zeit gelöst werden kann. ■

In einem nächsten Schritt wenden wir uns dem Fall $b = 3$ zu. Es zeigt sich, dass die Erweiterung auf eine höhere Kapazitätsbeschränkung das Problem verkompliziert und dieses dann *coNP*-vollständig ist.

Theorem 7 *Das Problem der Entscheidung, ob eine Allokation zum Kern eines Zuordnungsspiels der Form $(G, 3, 1)$ gehört, ist *coNP*-vollständig.*

Beweis. Es ist leicht zu zeigen, dass das Problem in der Klasse *coNP* liegt. Sei nämlich eine Koalition S gegeben, für die verifiziert werden soll, dass sie die Kernbedingung verletzt. Für eine gegebene Allokation p muss dann lediglich geprüft werden, dass $v(S) > p(S)$ gilt. $p(S)$ lässt sich ganz einfach durch Summierung der einzelnen Komponenten des Auszahlungsvektors bestimmen. Um $v(S)$ zu bestimmen, muss dagegen eine b -Zuordnung maximalen Gewichts im Teilgraphen von G berechnet werden, der durch S induziert

wird. Gemäß Lemma 2 kann diese Berechnung in polynomieller Zeit durchgeführt werden. Daher kann auch in polynomieller Zeit entschieden werden, ob die Bedingung $v(S) > p(S)$ erfüllt ist.

Es wird jetzt gezeigt, dass das Problem *coNP*-vollständig ist. Um dies zu beweisen, erfolgt eine Reduktion des sogenannten kubischen Teilgraphenproblems für bipartite Graphen auf das betrachtete Problem. Beim kubischen Teilgraphenproblem wird geprüft, ob ein Graph einen Teilgraphen besitzt, bei dem jeder Knoten den Grad 3 hat. Das kubische Teilgraphenproblem gehört zu der Klasse der *NP*-vollständigen Probleme (Chvátal et al. 1979). Sei also ein bipartiter Graph $G = (N, E)$ gegeben, der eine Instanz des kubischen Teilgraphenproblems darstellt. In einem ersten Schritt wird ein neuer Graph $G' = (N', E')$ konstruiert. N' resultiert dabei aus N dadurch, dass für jeden Knoten $u \in N$ insgesamt fünf weitere Knoten zu N hinzugefügt werden, die als a_u, b_u, c_u, x_u und y_u bezeichnet werden. E' resultiert aus E daraus, dass zu den Kanten in E jede mögliche Kante zwischen einem Knoten in $\{a_u, b_u, c_u\}$ und einem Knoten in $\{u, x_u, y_u\}$ hinzugefügt wird. Insgesamt werden zu (N, E) also $5n$ Knoten und $9n$ Kanten hinzugefügt. Beachtet sei, dass jedes 6-Tupel $\{a_u, b_u, c_u, u, x_u, y_u\}$ einen vollständigen bipartiten Graph $K_{3,3}$ in G' induziert. Weiterhin ist u ein Schnittknoten von G' , der $\{a_u, b_u, c_u, x_u, y_u\}$ und $N \setminus \{u\}$ voneinander trennt. Dies sieht man sofort daran, dass keine Kante zwischen einem Knoten in $\{a_u, b_u, c_u, x_u, y_u\}$ und einem Knoten in $N \setminus \{u\}$ existiert. G' ist zudem ein bipartiter Graph. Dies lässt sich folgendermaßen beweisen: Da G bipartit ist, hat G eine Bipartition $\{N_1, N_2\}$. Eine Bipartition $\{N'_1, N'_2\}$ von G' lässt sich dann dadurch konstruieren, dass für jeden Knoten $u \in N_1$ die Knoten x_u und y_u zu N_1 und die Knoten a_u, b_u und c_u zu N_2 und für jeden Knoten $u \in N_2$ die Knoten x_u und y_u zu N_2 und die Knoten a_u, b_u und c_u zu N_1 hinzugefügt werden. Also ist auch G' bipartit.

Sei nun (N', v) das kooperative Spiel mit transferierbaren Nutzen, das zu $(G', 3, 1)$ korrespondiert (somit gilt $b = 3$ und $w = 1$). Sei p zudem ein Vektor, der die Bedingungen $p(u) = \frac{3}{2} - \frac{1}{n}$ für alle $u \in N$ und $p(i) = \frac{3}{2} + \frac{1}{5n}$ für alle $i \in \{a_u, b_u, c_u, x_u, y_u\}$ erfüllt. Dann gilt offensichtlich $p(N') = n \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n} + 5 \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{5n} \right) \right) = 9n$. Weiterhin gilt $v(N') = 9n$. Wegen $w = 1$ wäre eine Zuordnung maximalen Gewichts nämlich sicherlich dann gefunden, wenn jeder Knoten aus N' genau 3 anderen Knoten aus N' zugeordnet werden könnte, so dass die Kapazität für alle Knoten gerade vollständig ausgeschöpft wäre. Letzteres ist z.B. dadurch erreichbar, dass für alle $u \in N$ jeweils eine Zuordnung bestehend aus allen neun Kanten von $G[\{a_u, b_u, c_u, u, x_u, y_u\}]$ gewählt wird, das Gesamtgewicht der Zuordnung beträgt dann offensichtlich $9n$. Zusammengefasst folgt $p(N') = v(N')$, somit stellt p eine Allokation dar. Es wird jetzt gezeigt, dass G genau dann einen kubischen Teilgraphen besitzt, wenn p nicht zum Kern von (N', v) gehört. Dies bedeutet, dass die Verifizierung eines Ja-Zertifikats des kubischen Teilgraphenproblems äquivalent zur Verifizierung eines Nein-Zertifikats für das Kernallokationsproblem ist. Da das kubische Teilgraphenproblem *NP*-vollständig ist, ist das letztgenannte Problem *coNP*-vollständig.

Um die erste Implikation der angesprochenen Äquivalenz zu beweisen, sei zunächst angenommen, dass G einen Teilgraphen $H = (N_H, E_H)$ besitzt, bei dem jeder Knoten den Grad 3 hat. Für $N_H \subseteq N'$ sieht man sofort, dass $v(N_H) = \frac{3}{2} |N_H|$ gilt. Da jeder Knoten den Grad 3 hat und die Kapazitätsbeschränkung für jeden

Spieler 3 entspricht, kann jeder Spieler allen drei möglichen Partnern auch zugeordnet werden. Jeder Spieler ist daher daran beteiligt, ein Gewicht in Höhe von $3w = 3$ zu generieren. Da dieses mit dem jeweiligen Partner geteilt wird, entfällt auf einen Spieler ein durchschnittliches Gewicht in Höhe von $\frac{3}{2}$. Das Gesamtgewicht der Zuordnung, und damit $v(N_H)$, lautet daher $\frac{3}{2}|N_H|$. Weiterhin gilt $p(N_H) = \sum_{i \in N_H} p(i) = |N_H| \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n}\right)$. Offensichtlich folgt $v(N_H) > p(N_H)$, somit stellt p keine Kernallokation von (N', v) dar.

Sei jetzt angenommen, dass G keinen Teilgraphen besitzt, bei dem jeder Knoten den Grad 3 hat. Es ist hier zu zeigen, dass p zum Kern von (N', v) gehört. Der Beweis ist indirekt, daher sei angenommen, dass p keine Kernallokation ist, d.h., dass es eine Koalition $\emptyset \neq S \subseteq N'$ derart gibt, dass $p(S) < v(S)$ gilt. Sei S weiterhin so festgelegt, dass $p(S) - v(S)$ minimiert wird und, falls es mehrere solche Koalitionen gibt, dann die kleinste dieser Koalitionen ist. Zunächst sei unterstellt, dass S nur Knoten aus N enthält. Da G keinen kubischen Teilgraphen enthält und $G[S]$ im Fall $S \subseteq N$ ein Teilgraph von G ist, enthält auch $G[S]$ keinen Teilgraphen, bei dem jeder Knoten den Grad 3 hat. Dies impliziert, dass es bei jeder Zuordnung der Knoten aus S mindestens einen Knoten gibt, für den die Kapazität in Höhe von 3 nicht vollständig ausgeschöpft werden kann, also gilt $v(S) \leq \frac{3}{2}|S| - 1$. Wegen $S \subseteq N$ gilt weiterhin $p(S) = \sum_{i \in S} p(i) = |S| \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n}\right)$ und somit folgt $p(S) \geq v(S)$, was der Annahme $p(S) < v(S)$ widerspricht. Somit kann S nicht nur Knoten aus N enthalten, mindestens einer der Knoten entstammt daher der Menge $\{a_u, b_u, c_u, x_u, y_u\}$ für ein $u \in N$. Wenn die Menge $S \cap \{a_u, b_u, c_u, x_u, y_u\}$ als T_u bezeichnet wird, wird demnach $|T_u| \geq 1$ für ein $u \in N$ unterstellt. Im Fall $|T_u| \leq 4$ gilt $p(S \setminus T_u) = \sum_{i \in S \setminus T_u} p(i) = \sum_{i \in S} p(i) - \sum_{i \in T_u} p(i) = p(S) - |T_u| \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{5n}\right)$. Weiterhin gilt $v(S \setminus T_u) \geq v(S) - |E(G[T_u \cup \{u\}])|$. Das liegt daran, dass durch Elimination der Knotenmenge T_u aus S alle Kanten des Graphs $G[T_u \cup \{u\}]$ wegfallen. Da diese jeweils ein Gewicht in Höhe von 1 haben, kann das maximale Gesamtgewicht höchstens um den Wert $|E(G[T_u \cup \{u\}])|$ fallen. Zusammenfassend folgt

$$p(S \setminus T_u) - v(S \setminus T_u) \leq p(S) - v(S) - |T_u| \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{5n}\right) + |E(G[T_u \cup \{u\}])| \leq p(S) - v(S),$$

was der Annahme widerspricht, dass S die Differenz $p(S) - v(S)$ minimiert und die kleinste Koalition mit dieser Eigenschaft ist. Sei also $|T_u| = 5$. Falls $u \notin S$ ist, gilt $p(S \setminus T_u) = \sum_{i \in S \setminus T_u} p(i) = \sum_{i \in S} p(i) - \sum_{i \in T_u} p(i) = p(S) - 5 \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{5n}\right)$. Weiterhin gilt $v(S \setminus T_u) \geq v(S) - 6$. Das liegt daran, dass durch Elimination der Knotenmenge $\{a_u, b_u, c_u, x_u, y_u\}$ aus S lediglich die sechs Kanten $\{a_u, x_u\}$, $\{a_u, y_u\}$, $\{b_u, x_u\}$, $\{b_u, y_u\}$, $\{c_u, x_u\}$ und $\{c_u, y_u\}$ wegfallen, deren Gewicht jeweils 1 beträgt. Somit kann das maximale Gesamtgewicht höchstens um den Wert 6 fallen. Zusammenfassend gilt

$$p(S \setminus T_u) - v(S \setminus T_u) \leq p(S) - v(S) - 5 \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{5n}\right) + 6 \leq p(S) - v(S),$$

was erneut der konkreten Wahl von S widerspricht. Sei also $u \in S$. Dann gilt

$$p(S \setminus (T_u \cup \{u\})) = \sum_{i \in S \setminus (T_u \cup \{u\})} p(i) = \sum_{i \in S} p(i) - \sum_{i \in T_u} p(i) - p(u) = p(S) - 5 \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{5n}\right) - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n}\right).$$

Weiterhin gilt $v(S \setminus (T_u \cup \{u\})) \geq v(S) - 9$. Das liegt wiederum daran, dass durch Elimination der Knotenmenge $\{a_u, b_u, c_u, x_u, y_u, u\}$ aus S alle neun Kanten zwischen einem Knoten in $\{a_u, b_u, c_u\}$ und einem

Knoten in $\{u, x_u, y_u\}$ wegfallen. Da diese jeweils ein Gewicht in Höhe von 1 haben, kann das maximale Gesamtgewicht höchstens um den Wert 9 fallen. Zusammenfassend gilt

$$p(S \setminus (T_u \cup \{u\})) - v(S \setminus (T_u \cup \{u\})) \leq p(S) - v(S) - 5 \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{5n} \right) - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n} \right) + 9 = p(S) - v(S),$$

was ein drittes Mal der Wahl von S widerspricht. Es folgt schließlich, dass keine Koalition S mit $p(S) < v(S)$ existiert und somit p eine Kernallokation von (N', v) darstellt. ■

5 Schlussbemerkungen

Die vorliegende Bachelorarbeit beschäftigt sich mit Zuordnungsproblemen. Zum einen wurde auf Basis des Papiers von Ortega (2016) der von der mobilen Dating-App Tinder verwendete Zuordnungsmechanismus untersucht. Dabei wurde gezeigt, dass dieser Mechanismus insofern problematisch ist, dass er zu instabilen Lösungen führen kann. Es wurde ein alternativer Mechanismus vorgestellt, der einfach umzusetzen ist und die Probleme des Zuordnungsmechanismus von Tinder löst. Der vorgestellte Beitrag von Biró et al. (2015) unterstreicht die Bedeutung der Annahme der Bipartitheit, gemäß der ein zugeordnetes Paar von Personen immer aus zwei Personen unterschiedlicher Gruppen besteht und ohne die die Existenz einer stabilen Lösung nicht mehr gesichert ist. Weiterhin wurde der Frage nachgegangen, ob eine vorgegebene Allokation eine Kernallokation darstellt. Bei dieser Fragestellung wurde gezeigt, dass die Kapazitätsrestriktion der Spieler von entscheidender Bedeutung ist. Ist diese stets kleiner gleich 2, kann die Frage in polynomieller Zeit beantwortet werden. Für höhere Kapazitäten ist das entsprechende Problem *coNP*-vollständig.

Eine interessante Erweiterung der behandelten Modelle würde meiner Meinung nach darin bestehen, Unsicherheit zuzulassen. In den Modellen wird nämlich unterstellt, dass die Menge der potentiellen Partner deterministisch und allen Akteuren bekannt ist. Bei Biró et al. (2015) wird eine entsprechende Annahme zusätzlich bezogen auf den Wert aller möglichen Koalitionen eingeführt, auch diese sind deterministisch und allen Spielern bekannt. In der Praxis herrscht sicherlich eine gewisse Unsicherheit bezüglich der angesprochenen Variablen. Es ist zu vermuten, dass eine entsprechende Modellierung dieser Unsicherheit die Entscheidungssituationen verkompliziert. Es wäre daher interessant zu untersuchen, ob die in dieser Arbeit hergeleiteten Resultate auch bei Unsicherheit noch gelten würden.

6 Anhang

6.1 Beweis von Theorem 1

Der Beweis basiert auf Echenique und Oviedo (2006). Er besteht aus vier Schritten. In einem ersten Schritt werden eine Abbildung sowie die Menge der Fixpunkte dieser Abbildung definiert. In den Schritten 2 und 3 wird gezeigt, dass die bei Schritt 1 definierte Fixpunktmenge unter den gegebenen Bedingungen der Menge der mengenweise stabilen Zuordnungen entspricht. In einem letzten Schritt wird schließlich gezeigt, dass eine Zuordnung genau dann das Ergebnis eines teilspielperfekten Gleichgewichts von $S(\succ)$ ist, wenn sie zu der Menge der in Schritt 1 definierten Fixpunkte gehört.

Schritt 1: Sei eine Vor-Zuordnung definiert als ein Paar $v = (v_F, v_M)$ mit $v_F : F \rightarrow 2^M$ und $v_M : M \rightarrow 2^F$. Seien $\mathcal{V}_F = (2^M)^F$ und $\mathcal{V}_M = (2^F)^M$ die Mengen aller solcher Funktionen v_F und v_M . Sei $\mathcal{V} = \mathcal{V}_F \times \mathcal{V}_M$ die Menge aller Vor-Zuordnungen.

Sei nun v eine Vor-Zuordnung und

$$U(f, v) = \{m \in M : f \in Ch_m(v(m) \cup \{f\})\}$$

sowie

$$V(m, v) = \{f \in F : m \in Ch_f(v(f) \cup \{m\})\}.$$

$U(f, v)$ beschreibt die Menge der Männer, die ausgehend von v bereit wären, der Frau f zugeordnet zu werden, analog lässt sich $V(m, v)$ interpretieren.

Sei nun die Abbildung $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ definiert durch

$$(Tv)(a) = \begin{cases} Ch_a(U(a, v)), & \text{falls } a \in F, \\ Ch_a(V(a, v)), & \text{falls } a \in M. \end{cases}$$

$(Tv)(f)$ bestimmt aus der Menge der Männer, die ausgehend von v bereit wären, der Frau f zugeordnet zu werden, diejenigen Männer, denen die Frau f optimalerweise zugeordnet werden möchte. $(Tv)(m)$ lässt sich analog interpretieren. Die Menge der Fixpunkte von T sei als FP bezeichnet, es gelte also $FP = \{v \in \mathcal{V} : v = Tv\}$.

Schritt 2: Sei MS die Menge der mengenweisen stabilen Allokationen. In Schritt 2 dieses Beweises wird gezeigt, dass $MS \subseteq FP$ gilt. Sei μ eine Allokation, für die $\mu \notin FP$ gilt. Es ist dann zu zeigen, dass $\mu \notin MS$ gilt. Falls μ nicht individuell stabil wäre, wäre μ nicht mengenweise stabil und der Beweis wäre fertig. Sei im Folgenden μ daher individuell stabil.

Wegen $\mu \notin FP$ gibt es also mindestens eine Person a , für die $\mu(a) \neq Ch_a(U(a, \mu))$ bzw. $\mu(a) \neq Ch_a(V(a, \mu))$ gilt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei angenommen, dass dies für die Frau $\bar{f} \in F$ der Fall ist, dementsprechend folgt $\mu(\bar{f}) \neq Ch_{\bar{f}}(U(\bar{f}, \mu))$. Die individuelle Stabilität von μ impliziert $\mu(\bar{f}) \subseteq U(\bar{f}, \mu)$. Dies liegt daran, dass für alle $m \in \mu(\bar{f})$ auch $\bar{f} \in \mu(m)$ gilt und somit

$$\bar{f} \in \mu(m) = Ch_m(\mu(m)) = Ch_m(\mu(m) \cup \{\bar{f}\}),$$

wobei die Bedingung $\mu(m) = Ch_m(\mu(m))$ aus der individuellen Stabilität der Zuordnung μ folgt. Inhaltlich bedeutet $\mu(\bar{f}) \subseteq U(\bar{f}, \mu)$, dass die Frau \bar{f} natürlich nur den Männern zugeordnet werden kann, die auch bereit wären, der Frau \bar{f} zugeordnet zu werden.

Im weiteren Verlauf des Beweises wird ein mengenweiser Block $(M' \cup F', \mu')$ für μ konstruiert, womit $\mu \notin MS$ bewiesen wäre. Seien dafür $F' = \{\bar{f}\}$ und $M' = Ch_{\bar{f}}(U(\bar{f}, \mu)) \setminus \mu(\bar{f})$. Die betrachtete Koalition besteht also aus der Frau \bar{f} und allen Männern, die der Frau \bar{f} bei μ nicht zugeordnet sind, die die Frau \bar{f} aus $U(\bar{f}, \mu)$ aber gerne auswählen würde. Die Allokation $\mu' \in \mathcal{M}$ sei folgendermaßen definiert: Zunächst gilt $\mu'(\bar{f}) = Ch_{\bar{f}}(U(\bar{f}, \mu))$. Für alle $m \in M$ gilt

$$\mu'(m) = \begin{cases} Ch_m(\mu(m) \cup \{\bar{f}\}), & \text{falls } m \in M', \\ \mu(m), & \text{falls } m \in [\mu'(\bar{f}) \cap \mu(\bar{f})] \cup [\mu'(\bar{f}) \cup \mu(\bar{f})]^C, \\ \mu(m) \setminus \{\bar{f}\}, & \text{falls } m \in \mu(\bar{f}) \setminus \mu'(\bar{f}). \end{cases}$$

Das bedeutet also, dass jeder Mann m aus M' seinen bevorzugten Partnern aus $\mu(m) \cup \{\bar{f}\}$ zugeordnet wird. Alle Männer, die der Frau \bar{f} entweder in beiden oder in keiner der Situationen zugeordnet werden, bleiben bei der ursprünglichen Zuordnung $\mu(m)$. Alle Männer, die der Frau \bar{f} in der ursprünglichen Situation zugeordnet werden, in der neuen aber nicht, bleiben allen anderen Frauen außer \bar{f} zugeordnet. Schließlich kann die Zuordnung $\mu'(f)$ für alle $f \in F \setminus F'$ aus $\mu'(m)$ abgeleitet werden, somit ist μ' eine Zuordnung. Es gilt $\mu'(\bar{f}) \setminus \mu(\bar{f}) = Ch_{\bar{f}}(U(\bar{f}, \mu)) \setminus \mu(\bar{f}) = M'$. Weiterhin gilt für alle $m \in M'$ die Bedingung $\mu'(m) \setminus \mu(m) = Ch_m(\mu(m) \cup \{\bar{f}\}) \setminus Ch_m(\mu(m)) = \bar{f}$. Damit ist die erste Bedingung aus der Definition des mengenweisen Blocks gezeigt.

Als nächstes wird gezeigt, dass die Allokation μ' innerhalb des Blocks individuell stabil ist. Dies ist leicht zu zeigen, da aus $\mu'(\bar{f}) = Ch_{\bar{f}}(U(\bar{f}, \mu))$ die Beziehung $Ch_{\bar{f}}(\mu'(\bar{f})) = Ch_{\bar{f}}(Ch_{\bar{f}}(U(\bar{f}, \mu)))$ folgt. Aufgrund der Konsistenzbedingung lautet der Ausdruck auf der rechten Seite $Ch_{\bar{f}}(U(\bar{f}, \mu)) = \mu'(\bar{f})$, womit insgesamt $\mu'(\bar{f}) = Ch_{\bar{f}}(\mu'(\bar{f}))$ folgt. Analog folgt aus $\mu'(m) = Ch_m(\mu(m) \cup \{\bar{f}\})$ für alle $m \in M'$ die Bedingung $\mu'(m) = Ch_m(\mu'(m))$.

Zuletzt wird gezeigt, dass jede Person aus $M' \cup F'$ die Allokation μ' der Allokation μ vorzieht. Aus $\mu(\bar{f}) \subseteq U(\bar{f}, \mu)$ und $\mu'(\bar{f}) = Ch_{\bar{f}}(U(\bar{f}, \mu))$ folgt $\mu'(\bar{f}) \succ_{\bar{f}} \mu(\bar{f})$. Analog impliziert $\mu'(m) = Ch_m(\mu(m) \cup \{\bar{f}\})$ für alle $m \in M'$ die Bedingung $\mu'(m) \succ_m \mu(m)$. Es folgt schließlich, dass es sich bei $(M' \cup F', \mu')$ um einen mengenweisen Block für μ handelt und somit $\mu \notin MS$ gilt.

Schritt 3: In diesem Beweisschritt wird gezeigt, dass die Bedingung $FP \subseteq MS$ gilt, wenn für alle $m \in M$ die Präferenzrelation \succ_m die Bedingung der starken Substituierbarkeit erfüllt und für alle $f \in F$ die Präferenzrelation \succ_f die Bedingung der Substituierbarkeit erfüllt. Sei also $\mu \in FP$. Zunächst wird gezeigt, dass μ dann eine individuell stabile Zuordnung darstellt. Im Rahmen dieses Beweises schreiben wir $\mu = (\mu_F, \mu_M)$, wobei μ_F den Vektor der μ_f der einzelnen Frauen und μ_M analog den Vektor der μ_m der einzelnen Männer beschreibt. Betrachtet sei ein bestimmtes $m \in \mu_F(f)$. Es wird gezeigt, dass $f \in \mu_M(m)$ gilt. Aus $\mu \in FP$ und der Definition von FP folgt

$$m \in \mu_F(f) = (T\mu)(f) = Ch_f(U(f, \mu)),$$

somit gilt $m \in U(f, \mu)$. Aus der Definition von $U(f, \mu)$ folgt wiederum

$$f \in Ch_m(\mu_M(m) \cup \{f\}) \succsim_m \mu_M(m),$$

wobei die schwache Relation gilt, da m aus $\mu_M(m) \cup \{f\}$ die Zuordnung $\mu_M(m)$ auswählen kann, aber nicht unbedingt muss. Wegen $\mu_F(f) = Ch_f(U(f, \mu))$ und der Konsistenzbedingung bezüglich Ch_f gilt

$$Ch_f(\mu_F(f)) = Ch_f(Ch_f(U(f, \mu))) = Ch_f(U(f, \mu)) = \mu_F(f).$$

Aus $m \in \mu_F(f)$ folgt offensichtlich $Ch_f(\mu_F(f)) = Ch_f(\mu_F(f) \cup \{m\})$. Die Bedingung $\mu_F(f) = Ch_f(\mu_F(f))$ impliziert dann wiederum $f \in V(m, \mu)$. Wegen $\mu \in FP$ gilt weiterhin

$$\mu_M(m) = (T\mu)(m) = Ch_m(V(m, \mu))$$

und dies impliziert unmittelbar $\mu_M(m) \subseteq V(m, \mu)$. Zusammenfassend gilt also

$$Ch_m(\mu_M(m) \cup \{f\}) \subseteq \mu_M(m) \cup \{f\} \subseteq V(m, \mu),$$

wobei die zweite Inklusion aus $\mu_M(m) \subseteq V(m, \mu)$ und $f \in V(m, \mu)$ folgt. Aufgrund der Beziehungen $\mu_M(m) = Ch_m(V(m, \mu))$ und $Ch_m(\mu_M(m) \cup \{f\}) \subseteq V(m, \mu)$ gilt somit $\mu_M(m) \succsim_m Ch_m(\mu_M(m) \cup \{f\})$. Aus der Annahme der Antisymmetrie der Präferenzordnung folgt schließlich $\mu_M(m) = Ch_m(\mu_M(m) \cup \{f\})$ und wegen $f \in Ch_m(\mu_M(m) \cup \{f\})$ somit $f \in \mu_M(m)$. Abschließend folgt aus $\mu_M(m) = Ch_m(\mu_M(m) \cup \{f\})$ und $f \in \mu_M(m)$ die Bedingung $\mu_M(m) = Ch_m(\mu_M(m))$.

Sei nun ein bestimmtes $f \in \mu_M(m)$ betrachtet. Völlig analog zu der gerade beschriebenen Beweisführung kann dann $m \in \mu_F(f)$ und $\mu_F(f) = Ch_f(\mu_F(f))$ gezeigt werden. Es gilt also $m \in \mu_F(f) \Leftrightarrow f \in \mu_M(m)$, somit ist μ eine Zuordnung. $\mu_F(f) = Ch_f(\mu_F(f))$ sowie $\mu_M(m) = Ch_m(\mu_M(m))$ besagen, dass diese Zuordnung individuell stabil ist.

Dass $\mu \in MS$ gilt, soll per indirektem Beweis gezeigt werden, angenommen sei daher $\mu \notin MS$, wobei μ jetzt wiederum ohne Subskripte dargestellt wird. Es existiert demnach ein mengenweiser Block für μ , der als $(M' \cup F', \mu')$ bezeichnet wird. Sei ein bestimmtes $\bar{f} \in F'$ betrachtet, so dass $\mu'(\bar{f}) \succ_{\bar{f}} \mu(\bar{f})$ gilt. Aus der letztgenannten Bedingung und der individuellen Stabilität von μ folgt $Ch_{\bar{f}}(\mu(\bar{f}) \cup \mu'(\bar{f})) \not\subseteq \mu(\bar{f})$, da ansonsten \bar{f} die Zuordnung μ' nicht gegenüber μ bevorzugen würde. Sei nun ein $\bar{m} \in Ch_{\bar{f}}(\mu(\bar{f}) \cup \mu'(\bar{f}))$ betrachtet derart, dass $\bar{m} \in \mu'(\bar{f}) \setminus \mu(\bar{f})$. Da $\succ_{\bar{f}}$ die Bedingung der Substituierbarkeit erfüllt, folgt aus den Bedingungen $\mu(\bar{f}) \subseteq \mu(\bar{f}) \cup \mu'(\bar{f})$ und $\bar{m} \in Ch_{\bar{f}}(\mu(\bar{f}) \cup \mu'(\bar{f})) = Ch_{\bar{f}}(\mu(\bar{f}) \cup \mu'(\bar{f}) \cup \{\bar{m}\})$ die Bedingung $\bar{m} \in Ch_{\bar{f}}(\mu(\bar{f}) \cup \{\bar{m}\})$ und somit $\bar{f} \in V(\bar{m}, \mu)$.

Aus $\bar{m} \in \mu'(\bar{f}) \setminus \mu(\bar{f})$ folgt wiederum $\bar{m} \in M'$, \bar{m} gehört also zum mengenweisen Block, somit gilt $\mu'(\bar{m}) \succ_{\bar{m}} \mu(\bar{m})$. Da innerhalb eines mengenweisen Blocks individuelle Stabilität vorausgesetzt ist, gilt weiterhin $\mu'(\bar{m}) = Ch_{\bar{m}}(\mu'(\bar{m}))$. Da μ' eine Zuordnung ist, gilt $\bar{f} \in \mu'(\bar{m})$. Zusammen impliziert dies $\bar{f} \in Ch_{\bar{m}}(\mu'(\bar{m}) \cup \{\bar{f}\})$. Da $\succ_{\bar{m}}$ die Bedingung der starken Substituierbarkeit erfüllt, folgt wegen $\mu'(\bar{m}) \succ_{\bar{m}} \mu(\bar{m})$ auch $\bar{f} \in Ch_{\bar{m}}(\mu(\bar{m}) \cup \{\bar{f}\})$. Die Bedingungen $\bar{f} \in V(\bar{m}, \mu)$ sowie $\mu \in FP$ implizieren offensichtlich $\mu(\bar{m}) \cup \{\bar{f}\} \subseteq V(\bar{m}, \mu)$. Die Bedingung $\bar{f} \in Ch_{\bar{m}}(\mu(\bar{m}) \cup \{\bar{f}\})$ steht dann im Widerspruch zu $\mu(\bar{m}) =$

$Ch_{\bar{m}}(V(\bar{m}, \mu))$, was den Beweis dieses Schrittes abschließt. Die erste Bedingung besagt nämlich, dass sich der Mann \bar{m} , ausgehend von μ , besser stellt, wenn er zusätzlich der Frau \bar{f} zugeordnet ist. Die zweite Bedingung schließt dies jedoch aus, da $\mu(\bar{m})$ für \bar{m} die optimale Zuordnung aus $V(\bar{m}, \mu)$ beschreibt und \bar{f} zu der Menge $V(\bar{m}, \mu)$ gehört.

Schritt 4: Es wird abschließend gezeigt, dass unter der Annahme der Substituierbarkeit von \succ_f für alle $f \in F$ eine Zuordnung μ genau dann das Ergebnis eines teilspielperfekten Gleichgewichts von $S(\succ)$ ist, wenn $\mu \in FP$ gilt. Die beiden entsprechenden Implikationen werden nacheinander bewiesen. Sei also zunächst eine Zuordnung μ betrachtet, die das Ergebnis eines teilspielperfekten Gleichgewichts (A^*, B^*) von $S(\succ)$ darstellt. Da die gleichgewichtige Strategie für alle $f \in F$ optimal ist, gilt

$$B_f^*(A) \cap \{m \in M : f \in A_m\} = Ch_f(\{m \in M : f \in A_m\}).$$

Für einen beliebigen Mann $m \in M$ bezeichne A_{-m} den Vektor $(A_1, \dots, A_{m-1}, A_{m+1}, \dots, A_{|M|})$. Wir definieren

$$Y(A_{-m}) = \{f \in F : m \in Ch_f(\{\tilde{m} \in M : f \in A_{\tilde{m}}\} \cup \{m\})\}.$$

Diese Funktion beschreibt also die Menge aller Frauen, die gerne m zugeordnet würden, gegeben, dass diese Frauen zwischen m und allen anderen Männern wählen können, von denen sie zuvor ausgewählt worden sind. Aus der Optimalität der gleichgewichtigen Strategie für jeden Mann $m \in M$ folgt $A_m^* \cap Y(A_{-m}^*) = Ch_m(Y(A_{-m}^*))$.

Sei (\bar{A}, \bar{B}) die Strategiekombination, die aus (A^*, B^*) derart gewonnen wird, dass keine der Frauen in Stufe 3 einen Mann auswählt, der die Frau zuvor (d.h. in Stufe 1) nicht ebenfalls ausgewählt hat und dass keiner der Männer in Stufe 1 eine Frau auswählt, die dieses Angebot in Stufe 3 ablehnen wird. Formal gilt also $\bar{B}_f(A) = B_f^*(A) \cap \{m \in M : f \in A_m\}$ sowie $\bar{A}_m \cap Y(A_{-m}^*) = A_m^* \cap Y(A_{-m}^*)$ für alle $f \in F$ und $m \in M$. Als nächstes wird gezeigt, dass (\bar{A}, \bar{B}) ebenfalls ein teilspielperfektes Gleichgewicht darstellt und dass μ das Ergebnis dieses Gleichgewichts ist. Offensichtlich gilt $\bar{A}_m = \mu(m)$ für alle $m \in M$, da die aus A_m^* eliminierten Frauen m nicht ausgewählt hatten und somit keine weitere Zuordnung entstanden wäre. Für alle $f \in \mu(m)$ gilt zudem $m \in \bar{B}_f(\bar{A})$, somit führt (\bar{A}, \bar{B}) zur Zuordnung μ . Gegeben ein beliebiges Strategieprofil A ist jede Frau f indifferent zwischen der Wahl von $\bar{B}_f(A)$ und $B_f^*(A)$, da beide Alternativen zu der gleichen Zuordnung für f führen. Aus der ursprünglichen Optimalität von $B_f^*(A)$ aus Sicht der Frau f folgt somit die Optimalität von $\bar{B}_f(A)$. Sei für einen beliebigen Mann m angenommen, dass $Y(A_{-m}^*) = Y(\bar{A}_{-m})$ erfüllt ist. Aus $A_m^* \cap Y(A_{-m}^*) = Ch_m(Y(A_{-m}^*))$ und $A_m^* \cap Y(A_{-m}^*) = \bar{A}_m \cap Y(A_{-m}^*)$ folgt dann $\bar{A}_m \cap Y(\bar{A}_{-m}) = Ch_m(Y(\bar{A}_{-m}))$ und somit $\bar{A}_m = Ch_m(Y(\bar{A}_{-m}))$ und dies bedeutet, dass (\bar{A}, \bar{B}) ein teilspielperfektes Gleichgewicht darstellt. Um also zu zeigen, dass es sich bei (\bar{A}, \bar{B}) um ein teilspielperfektes Gleichgewicht handelt, muss die Bedingung $Y(A_{-m}^*) = Y(\bar{A}_{-m})$ für alle $m \in M$ verifiziert werden. Per Definition von $Y(A_{-m}^*)$ gilt $f \in Y(A_{-m}^*) \Leftrightarrow m \in Ch_f(\{\tilde{m} \in M : f \in A_{\tilde{m}}^*\} \cup \{m\})$. Weiterhin

gilt

$$\begin{aligned}
Ch_f(\{\tilde{m} \in M : f \in A_m^*\} \cup \{m\}) &= Ch_f(Ch_f(\{\tilde{m} \in M : f \in A_m^*\}) \cup \{m\}) \\
&= Ch_f(\mu(f) \cup \{m\}) \\
&= Ch_f(\{\tilde{m} \in M : f \in \bar{A}_m\} \cup \{m\}),
\end{aligned}$$

wobei die erste Umformung die Bedingung $Ch_a(C \cup D) = Ch_a(Ch_a(C) \cup D)$ für $C, D \subseteq PA(a)$ ausnutzt (siehe Proposition 2.3 in Blair 1988). Zusammenfassend folgt

$$f \in Y(A_{-m}^*) \Leftrightarrow m \in Ch_f(\{\tilde{m} \in M : f \in \bar{A}_m\} \cup \{m\}) \Leftrightarrow f \in Y(\bar{A}_{-m})$$

und somit $Y(A_{-m}^*) = Y(\bar{A}_{-m})$.

Es wird jetzt bewiesen, dass $\mu \in FP$ gilt. Sei ein beliebiger Mann $m \in M$ betrachtet. Wie zuvor gezeigt wurde, gilt

$$Y(\bar{A}_{-m}) = \{f \in F : m \in Ch_f(\mu(f) \cup \{m\})\}$$

und somit $Y(\bar{A}_{-m}) = V(m, \mu)$. Aus $\bar{A}_m = \mu(m)$ und $\bar{A}_m = Ch_m(Y(\bar{A}_{-m}))$ folgt weiterhin $\mu(m) = \bar{A}_m = Ch_m(Y(\bar{A}_{-m})) = Ch_m(V(m, \mu))$.

Sei jetzt eine beliebige Frau $f \in F$ betrachtet. Zunächst wird die Inklusion $\mu(f) \subseteq U(f, \mu)$ bewiesen. Aus $m \in \mu(f)$ folgt $f \in \mu(m) = \bar{A}_m$. Zuvor wurde gezeigt, dass $\bar{A}_m = Ch_m(Y(\bar{A}_{-m}))$ gilt, aus der Konstruktion von \bar{A} folgt $\bar{A}_m = Ch_m(\bar{A}_m)$. Wir erhalten $f \in \bar{A}_m = Ch_m(\bar{A}_m) = Ch_m(\mu(m) \cup \{f\})$ und gemäß der Definition von $U(f, \mu)$ daher $m \in U(f, \mu)$. Zusammengefasst folgt aus $m \in \mu(f)$ die Bedingung $m \in U(f, \mu)$, somit gilt $\mu(f) \subseteq U(f, \mu)$.

Als nächstes wird die Inklusion $Ch_f(U(f, \mu)) \subseteq \mu(f)$ bewiesen, die zusammen mit $\mu(f) \subseteq U(f, \mu)$ zu der Bedingung $\mu(f) = Ch_f(U(f, \mu))$ führt. Letzteres liegt daran, dass aus $\mu(f) \subseteq U(f, \mu)$ die Beziehung $Ch_f(\mu(f)) \subseteq Ch_f(U(f, \mu))$ und wegen der Optimalität der Strategien für die Frauen $\mu(f) = Ch_f(\mu(f))$ gilt. Sei ein Mann $m \in Ch_f(U(f, \mu))$ betrachtet. Wegen $\mu(f) \subseteq U(f, \mu)$ folgt $\mu(f) \cup \{m\} \subseteq U(f, \mu)$. Die Bedingung der Substituierbarkeit von \succ_f impliziert dann $m \in Ch_f(\mu(f) \cup \{m\})$ und somit gilt $f \in V(m, \mu)$. Im Rahmen eines indirekten Beweises sei nun angenommen, dass $m \notin \mu(f)$ gilt, was wiederum $f \notin \mu(m)$ impliziert. Neben $m \in Ch_f(\mu(f) \cup \{m\})$ gilt wegen $m \in U(f, \mu)$ auch $f \in Ch_m(\mu(m) \cup \{f\})$. Es folgt $f \in Ch_m(\mu(m) \cup \{f\}) = \bar{A}_m = \mu(m)$, was der Bedingung $m \notin \mu(f)$ widerspricht. Also gilt $m \in \mu(f)$ und somit $Ch_f(U(f, \mu)) \subseteq \mu(f)$. Wie zuvor erklärt, folgt somit $\mu(f) = Ch_f(U(f, \mu))$. Da zudem $\mu(m) = \bar{A}_m = Ch_m(V(m, \mu))$ gilt, folgt $\mu \in FP$.

Sei abschließend angenommen, dass $\mu \in FP$ gilt. Es bleibt zu zeigen, dass μ dann auch das Ergebnis eines teilspielperfekten Gleichgewichts von $S(\succ)$ darstellt. Der Beweis erfolgt konstruktiv. Sei zunächst (\bar{A}, \bar{B}) definiert durch $\bar{A}_m = \mu(m)$ für alle $m \in M$ und $\bar{B}_f(A) = Ch_f(\{m \in M : f \in A_m\})$ für alle $f \in F$. Sei $\bar{\mu} \in \mathcal{M}$ das Ergebnis von (\bar{A}, \bar{B}) . Im Folgenden wird gezeigt, dass (\bar{A}, \bar{B}) ein teilspielperfektes Gleichgewicht darstellt und $\bar{\mu} = \mu$ gilt.

Aufgrund der Definition von \bar{A}_m gilt für beliebige $f \in F$ und $m \in M$ die Bedingung $\{\tilde{m} \in M : f \in \bar{A}_{\tilde{m}}\} \cup \{m\} = \mu(f) \cup \{m\}$. Somit gilt

$$\{f \in F : m \in Ch_f(\{\tilde{m} \in M : f \in \bar{A}_{\tilde{m}}\} \cup \{m\})\} = \{f \in F : m \in Ch_f(\mu(f) \cup \{m\})\} = V(m, \mu).$$

Wegen $\mu \in FP$ folgt weiterhin $\bar{A}_m = \mu(m) = Ch_m(V(m, \mu))$. Dies bedeutet, dass die Wahl von \bar{A}_m optimal ist für m gegeben die Entscheidungen aller anderen Männer und Frauen. Per Konstruktion ist zudem $\bar{B}_f(A)$ optimal für f gegeben die Entscheidungen aller anderen Spieler. Dies beweist, dass (\bar{A}, \bar{B}) ein teilspielperfektes Gleichgewicht darstellt.

Es sei daran erinnert, dass μ eine individuell stabile Zuordnung darstellt (wegen $\mu \in FP$). Also gilt $m \in \mu(f) \Leftrightarrow f \in \mu(m) = \bar{A}_m$, beziehungsweise $\mu(f) = \{m \in M : f \in \bar{A}_m\}$. Wegen der individuellen Stabilität von μ folgt dann $\bar{B}_f(\bar{A}) = Ch_f(\mu(f)) = \mu(f)$. Zusammenfassend gilt $f \in \bar{\mu}(m) \Leftrightarrow f \in \bar{A}_m = \mu(m)$ und $m \in \bar{\mu}(f) \Leftrightarrow m \in \bar{B}_f(\bar{A}) = \mu(f)$, somit folgt $\bar{\mu} = \mu$.

6.2 Kürzeste Wege

In diesem Abschnitt wird das sogenannte Problem des kürzesten Wegs vorgestellt. Zudem wird der Moore-Bellman-Ford Algorithmus zur Lösung des Problems analysiert. Die Darstellungen basieren auf Kapitel 7 von Korte und Vygen (2012).

Beim Problem des kürzesten Wegs werden ein Graph $G = (N, E)$, eine Kantengewichtungsfunktion $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ sowie zwei Knoten $s, t \in N$ vorgegeben. Die Aufgabe besteht darin, einen kürzesten Weg von s nach t zu finden, also einen Weg P von s nach t , für den $w(E(P))$ minimiert wird oder festzustellen, dass t von s aus nicht erreichbar ist. Die Lösung des Problems des kürzesten Wegs ist grundsätzlich problematisch, wenn G Kreise mit einem negativen Gesamtgewicht enthält. Daher gibt der Moore-Bellman-Ford Algorithmus den kürzesten Weg von s nach t nicht aus, falls ein solcher Kreis identifiziert wird.

Im Folgenden wird der Algorithmus vorgestellt, es wird gezeigt, dass er korrekt arbeitet und eine polynomielle Laufzeit hat. Dabei beschränke ich mich auf den Fall eines gerichteten Graphen G . Ein ungerichteter Graph könnte leicht in einen gerichteten Graphen transformiert werden, indem jede Kante des Graphen durch ein Paar entgegengesetzt gerichteter Kanten ersetzt wird, die das gleiche Gewicht zugeordnet bekommen wie die ursprüngliche Kante (wenn eine Kante negatives Gewicht hat, würde dadurch allerdings ein Kreis mit negativem Gewicht entstehen). Der Algorithmus erhält als Eingabe also einen gerichteten Graph $G = (N, E)$, eine Gewichtungsfunktion $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ sowie einen Knoten $s \in N$, es sei wiederum $n = |N|$. Er gibt entweder einen Kreis C mit negativem Gesamtgewicht oder die Länge der kürzesten Wege von s zu allen $t \in N \setminus \{s\}$ aus, zudem lassen sich die entsprechenden Wege leicht bestimmen. Konkret wird im zweiten Fall nämlich $l(t)$ sowie $p(t)$ für alle $t \in N \setminus \{s\}$ ausgegeben. Dabei bezeichnet $l(t)$ die Länge eines kürzesten Wegs von s nach t , dieser setzt sich wiederum aus einem kürzesten Weg von s nach $p(t)$ und der Kante $\{p(t), t\}$ zusammen. Kann t von s aus nicht erreicht werden, so gilt $l(t) = \infty$ und $p(t)$ ist nicht definiert. Bei der praktischen Umsetzung des Algorithmus muss ∞ natürlich durch eine konkrete Zahl ersetzt werden,

die beispielsweise dadurch festgelegt werden kann, dass $w(E)$ berechnet wird und dann eine Zahl strikt größer $w(E)$ anstatt ∞ verwendet wird.

Um neben der Länge $l(t)$ auch den kürzesten Weg von s nach t zu bestimmen, betrachtet man als nächstes die Zerlegung des kürzesten Wegs von s nach $p(t)$ in den kürzesten Weg von s nach $p(p(t))$ und die Kante $\{p(p(t)), p(t)\}$. Dieses Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis der Knoten s erreicht worden ist.

Der Algorithmus kann durch die folgenden drei Schritte charakterisiert werden:

1. Setze $l(s) := 0$ und $l(t) := \infty$ für alle $t \in N \setminus \{s\}$.
2. Für $i := 1$ bis $n - 1$:
 Für jede Kante $\{t, u\} \in E$:
 Falls $l(u) > l(t) + w(t, u)$ dann
 setze $l(u) := l(t) + w(t, u)$ und $p(u) := t$.
3. Falls es eine Kante $\{t, u\} \in E$ mit $l(u) > l(t) + w(t, u)$ gibt, dann
 setze $x_n := u$, $x_{n-1} := t$, $x_{n-i-1} := p(x_{n-i})$ für $i \in \{1, \dots, n-1\}$ und liefere
 irgendeinen Kreis C im Graph $(N, \{\{x_{i-1}, x_i\} : i \in \{1, \dots, n-1\}\})$ als Ausgabe.

Man erkennt sofort, dass der Algorithmus eine polynomielle Laufzeit hat. Dies liegt daran, dass, wie bei Schritt 2 beschrieben, $n - 1$ Schleifen durchlaufen werden und in jedem dieser Durchläufe alle Kanten berücksichtigt werden.

Es wird jetzt gezeigt, dass der Algorithmus korrekt arbeitet. Dafür bezeichne für $t \in N \setminus \{s\}$ und zu irgendeinem Zeitpunkt des Algorithmus $k(t)$ diejenige Iteration, bei der $l(t)$ auf seinen aktuellen Wert reduziert wurde und es sei $k(t) := 0$, falls zum betrachteten Zeitpunkt $l(t) = \infty$ gilt. Sei weiterhin $F := \{\{p(y), y\} : y \in N, k(y) > 0\}$ sowie $F' := \{\{t, u\} \in E : l(u) > l(t) + w(t, u)\}$. Man sieht relativ leicht, dass

$$l(y) \geq l(x) + w(x, y) \text{ und } k(x) \geq k(y) - 1 \text{ für alle } \{x, y\} \in F \quad (9)$$

gilt. Wegen $k(y) > 0$ folgt nämlich $l(y) := l(p(y)) + w(p(y), y) < \infty$ und wenn x für $p(y)$ eingesetzt wird, gilt $l(y) = l(x) + w(x, y)$. Wenn $p(y)$ auf x gesetzt wird, gilt weiterhin $k(x) \geq k(y) - 1$. Wäre nämlich $k(x) < k(y) - 1$, dann hätte sich der Wert von $l(x)$ in der $(k(y) - 1)$ -ten Iteration nicht geändert und die Aufdatierung von $p(y)$ auf x hätte in einer früheren Iteration, nicht aber der $k(y)$ -ten Iteration geschehen können. Die Behauptung folgt dann daraus, dass im Laufe des Algorithmus $l(x)$ niemals zunehmen und $k(x)$ niemals abnehmen wird.

Weiterhin lässt sich zeigen, dass, wenn $F \cup F'$ einen Kreis C enthält, dieser ein negatives Gesamtgewicht hat. Um dies zu beweisen, sei ein solcher Kreis C im Graphen $(N, F \cup F')$ betrachtet. Für das Gesamtgewicht dieses Kreises gilt

$$\sum_{\{t,u\} \in E(C)} w(t, u) = \sum_{\{t,u\} \in E(C)} (w(t, u) + l(t) - l(u)),$$

wobei die Gleichheit daraus folgt, dass $\sum_{\{t,u\} \in E(C)} (l(t) - l(u)) = 0$ gilt, was man wiederum daran erkennt, dass alle $l(t)$ (bzw. $l(u)$) genau einmal addiert und einmal subtrahiert werden. Da $l(u) \geq l(t) + w(t, u)$

für alle $(t, u) \in F$ und $l(u) > l(t) + w(t, u)$ für alle $(t, u) \in F'$ gilt, folgt sofort $\sum_{\{t,u\} \in E(C)} w(t, u) \leq 0$. Gleichheit kann nur in dem Fall gelten, bei dem $E(C) \subseteq F$ gilt. Dieser Fall lässt sich sofort ausschließen. Wird nämlich zu irgendeinem Zeitpunkt des Algorithmus ein Kreis C in (N, F) erzeugt, indem $p(y) := x$ gesetzt wird, dann muss unmittelbar davor $(x, y) \in F'$ eingesetzt worden sein (da $l(y) > l(x) + w(x, y)$ Voraussetzung für die Aufdatierung ist, wie in Schritt 2 des Algorithmus beschrieben).

Falls der Algorithmus in Schritt 3 eine Kante $\{t, u\} \in F'$ findet, dann muss die Voraussetzung für eine Anpassung von $l(t)$ beim letzten Schleifendurchlauf bei Schritt 2 erfüllt gewesen sein und somit gilt $k(t) = n - 1$ bzw. $k(x_{n-1}) = n - 1$. Wegen $x_{n-2} = p(x_{n-1})$ folgt $\{x_{n-2}, x_{n-1}\} \in F$ und somit $k(x_{n-2}) \geq k(x_{n-1}) - 1 = n - 2$. Auf ganz ähnliche Weise lässt sich $k(x_i) \geq i$ für alle $i \in \{1, \dots, n - 3\}$ zeigen, also ist die Folge x_0, \dots, x_n wohldefiniert. Da sie aus $n + 1$ Knoten besteht, enthält sie zudem eine Wiederholung. Damit gibt der Algorithmus also tatsächlich einen Kreis C aus; wie zuvor gezeigt, hat dieser negatives Gesamtgewicht.

Angenommen sei jetzt, dass beim Abbruch des Algorithmus $l(u) \leq l(t) + w(t, u)$ für alle $\{t, u\} \in E$ gilt. Sei zunächst ein Knoten t betrachtet, der von s aus nicht erreicht werden kann. Bei der ersten Iteration des Algorithmus kann lediglich bei denjenigen Knoten u eine Anpassung von $l(u)$ erfolgen, die über eine Kante $\{s, u\}$ mit s verbunden sind, da nur $l(s)$ zu diesem Zeitpunkt endlich ist. Allgemein kann bei einer beliebigen Iteration des Algorithmus nur bei denjenigen Knoten u eine Anpassung von $l(u)$ erfolgen, die von s aus erreicht werden können. Kann t von s aus nicht erreicht werden, so findet keine Anpassung von $l(t)$ statt. Es gilt also $l(t) = \infty$ und der Knoten t wird über den Algorithmus korrekt identifiziert.

Sei $R := \{t \in N : l(t) < \infty\}$. Im Folgenden können wir uns auf $G[R]$ beschränken, da keiner der Knoten aus $N \setminus R$ von s aus erreicht werden kann und somit keiner dieser Knoten auf irgendeinem Weg von s nach $t \in R$ liegen kann. Es gilt

$$\sum_{\{t,u\} \in E(C)} w(t, u) = \sum_{\{t,u\} \in E(C)} (w(t, u) + l(t) - l(u)) \geq 0$$

für jeden Kreis C in $G[R]$, somit enthält $G[R]$ keinen Kreis mit negativem Gesamtgewicht. Mit dem zuvor Gezeigten folgt dann sofort, dass (R, F) keinen Kreis enthält.

Gemäß (9) gilt für $(y, x) \in F$ die Bedingung $l(x) \geq l(y) + w(y, x)$, somit ist $l(x)$ zu jedem Zeitpunkt des Algorithmus mindestens gleich der Länge des Wegs von s nach x in (R, F) . Es wird jetzt umgekehrt gezeigt, dass nach k Iterationen des Algorithmus für jedes $x \in R$ die Länge eines kürzesten Wegs von s nach x mit höchstens k Kanten größer oder gleich $l(x)$ ist. Der entsprechende Beweis erfolgt per Induktion. Es bezeichne $P^{k;s,x}$ einen kürzesten Weg von s nach x bestehend aus höchstens k Kanten. Die Induktionsvoraussetzung laute $l(x) \leq w(E(P^{k-1;s,x}))$. Die Anfangsbedingung vor der ersten Iteration des Algorithmus ist offenbar erfüllt. Es gilt nämlich $l(s) = 0$ und somit $l(s) \leq w(E(P^{0;s,s}))$. Für $x \neq s$ gilt vor der ersten Iteration des Algorithmus $l(x) = \infty$. Da kein Weg von s nach x bestehend aus null Kanten existiert, gilt aber auch $w(E(P^{0;s,x})) = \infty$. Wie zu Beginn des Kapitels erklärt, wird ∞ bei der Durchführung des Algorithmus durch eine konkrete Zahl ersetzt und daher gilt $l(x) = w(E(P^{0;s,x}))$. Es bezeichne jetzt $\{u, x\}$ die letzte Kante von $P^{k;s,x}$. Man kann nun zeigen, dass $P_{[s,u]}^{k;s,x}$ ein kürzester Weg von s nach u mit höchstens $k - 1$

Kanten ist. Dies wird über einen indirekten Beweis gezeigt. Sei also Q ein Weg von s nach u mit $|E(Q)| \leq k-1$, der kürzer als $P_{[s,u]}^{k;s,x}$ ist, so dass also $w(E(Q)) < w\left(E\left(P_{[s,u]}^{k;s,x}\right)\right)$ gilt. Dann folgt offenbar $w(E(Q)) + w(u, x) < w\left(E\left(P_{[s,u]}^{k;s,x}\right)\right) + w(u, x) = w(E(P^{k;s,x}))$. Falls x nicht in Q enthalten ist, würde $P^{k;s,x}$ also nicht den kürzesten Weg von s nach x mit höchstens k Kanten beschreiben, was im Widerspruch zu der Voraussetzung steht. Also muss x in Q enthalten sein. Dann folgt

$$\begin{aligned} w(E(Q_{[s,x]})) &= w(E(Q)) + w(u, x) - w(E(Q_{[x,u]}) + \{u, x\}) \\ &< w(E(P^{k;s,x})) - w(E(Q_{[x,u]}) + \{u, x\}) \leq w(E(P^{k;s,x})), \end{aligned}$$

wobei die Gleichung daraus folgt, dass das Gewicht des Wegs von s nach x geschrieben werden kann als das Gewicht des Wegs von s nach u abzüglich des Gewichts des Wegs von x nach u . Die erste Ungleichung folgt unmittelbar aus der Bedingung $w(E(Q)) + w(u, x) < w(E(P^{k;s,x}))$ und die letzte Ungleichung folgt daraus, dass $E(Q_{[x,u]}) + \{u, x\}$ die Kanten eines Kreises beschreibt und $G[R]$, wie zuvor gezeigt, keinen Kreis mit negativem Gesamtgewicht enthält. Erneut würde daher $P^{k;s,x}$ nicht den kürzesten Weg von s nach x mit höchstens k Kanten beschreiben, im Widerspruch zu der Voraussetzung. Also ist $P_{[s,u]}^{k;s,x}$ ein kürzester Weg von s nach u mit höchstens $k-1$ Kanten. Gemäß der Induktionsvoraussetzung gilt $l(u) \leq w\left(E\left(P_{[s,u]}^{k;s,x}\right)\right)$ nach $k-1$ Iterationen des Algorithmus. In der k -ten Iteration wird unter anderem die Kante $\{u, x\}$ untersucht, daher gilt $l(x) \leq l(u) + w(u, x) \leq w\left(E\left(P_{[s,u]}^{k;s,x}\right)\right) + w(u, x) = w(E(P^{k;s,x}))$, was den Induktionsbeweis abschließt.

Insbesondere gilt also, dass nach $n-1$ Iterationen des Algorithmus für jedes $x \in R$ die Länge eines kürzesten Wegs von s nach x mit höchstens $n-1$ Kanten größer oder gleich $l(x)$ ist. Es gibt keine Wege mit mehr als $n-1$ Kanten, da ansonsten nicht alle besuchten Knoten unterschiedlich sein könnten. Somit folgt, dass bei Abbruch des Algorithmus $l(x)$ die Länge des kürzesten Wegs von s nach x beschreibt, falls kein Kreis mit negativem Gesamtgewicht gefunden worden ist. Der Algorithmus arbeitet also korrekt.

6.3 Das Trampdampferproblem

In diesem Abschnitt wird das sogenannte Trampdampferproblem erläutert und ein Lösungsalgorithmus vorgestellt. In diesem Zusammenhang erfolgt zudem ein Beweis von Lemma 3. Die Darstellung des Problems basiert auf Kapitel 5.7 von Ahuja et al. (1993). Anders als im Modell von Biró et al. (2015) wird dabei der Fall eines gerichteten Graphen $G = (N, E)$ betrachtet. Wie bereits im vorherigen Abschnitt erklärt worden ist, kann ein ungerichteter Graph leicht in einen gerichteten Graphen transformiert werden. Als $p(i, j)$ wird der Gewinn bezeichnet, der bei einer Fahrt von i nach j (mit $\{i, j\} \in E$) entsteht, als $w(i, j)$ die entsprechenden Kosten. Der Einfachheit halber sei angenommen, dass $p, w : E \rightarrow \mathbb{N}$. Da es sich jeweils um Geldbeträge handelt und diese in der kleinsten Geldeinheit dargestellt werden können, ist diese Annahme für praktische Zwecke nicht wirklich restriktiv. Es sei C ein Kreis von G . Dann ist das Verhältnis aus Gewinn und Kosten von C definiert als $\frac{\sum_{\{i,j\} \in E(C)} p(i,j)}{\sum_{\{i,j\} \in E(C)} w(i,j)}$. Das Problem besteht darin, einen Kreis C mit einem maximalen Verhältnis aus Gewinn und Kosten zu finden. Dieser würde eine optimale Route beschreiben,

die der Dampfer immer wieder abfahren sollte.

Um das Problem zu lösen, definieren wir $c(i, j) := -p(i, j)$ für alle Kanten $\{i, j\}$ von G und suchen daher nach einem Kreis C , für den

$$\gamma(C) := \frac{\sum_{\{i,j\} \in E(C)} c(i, j)}{\sum_{\{i,j\} \in E(C)} w(i, j)}$$

minimiert wird.

Sei γ^* der optimale Wert von $\gamma(C)$, d.h. der Wert von $\gamma(C)$ bei demjenigen Kreis C , der $\gamma(C)$ minimiert. Für einen beliebigen Wert von γ sei eine Kantengewichtungsfunktion $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}$ über $\{i, j\} \rightarrow \lambda(i, j) := c(i, j) - \gamma w(i, j)$ definiert. Bei der Vorstellung des Algorithmus von Moore, Bellman und Ford zur Lösung des Problems des kürzesten Wegs im vorherigen Abschnitt hatte ich gezeigt, dass dieser in polynomieller Zeit feststellen kann, ob ein Kreis mit negativem Gesamtgewicht existiert. Angenommen, der Moore-Bellman-Ford Algorithmus würde auf den gerichteten Graphen G angewendet, wobei die $\lambda(i, j)$ als Kantengewichte dienen. Man kann die folgenden drei Fälle unterscheiden (wobei der Moore-Bellman-Ford Algorithmus zwischen den Fällen 2 und 3 nicht differenzieren kann, dies für die spätere Argumentation aber nicht von Bedeutung ist):

Fall 1: G enthält einen Kreis C mit negativem Gesamtgewicht. Somit gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\{i,j\} \in E(C)} \lambda(i, j) &= \sum_{\{i,j\} \in E(C)} (c(i, j) - \gamma w(i, j)) = \sum_{\{i,j\} \in E(C)} c(i, j) - \gamma \sum_{\{i,j\} \in E(C)} w(i, j) < 0 \\ &\Leftrightarrow \gamma > \frac{\sum_{\{i,j\} \in E(C)} c(i, j)}{\sum_{\{i,j\} \in E(C)} w(i, j)} \geq \gamma^*. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass γ eine obere Schranke für γ^* darstellt.

Fall 2: G enthält keinen Kreis C mit negativem Gesamtgewicht, dafür aber einen Kreis C^* mit einem Gesamtgewicht in Höhe von null. Da es keinen Kreis mit negativem Gesamtgewicht gibt, folgt

$$\gamma \leq \frac{\sum_{\{i,j\} \in E(C)} c(i, j)}{\sum_{\{i,j\} \in E(C)} w(i, j)}$$

für alle Kreise C . Analog gilt

$$\gamma = \frac{\sum_{\{i,j\} \in E(C^*)} c(i, j)}{\sum_{\{i,j\} \in E(C^*)} w(i, j)}$$

und beide Bedingungen zusammen implizieren $\gamma = \gamma^*$, somit stellt der Kreis C^* eine Lösung des Trampdampferproblems dar.

Fall 3: Jeder Kreis C von G hat ein positives Gesamtgewicht. Somit gilt

$$\gamma < \frac{\sum_{\{i,j\} \in E(C)} c(i, j)}{\sum_{\{i,j\} \in E(C)} w(i, j)}$$

für alle Kreise C . Dies bedeutet wiederum, dass γ eine untere Schranke für γ^* darstellt.

Aufbauend auf der gerade beschriebenen Fallunterscheidung wird ein binärer Suchalgorithmus vorgestellt, der das Trampdampferproblem in polynomieller Zeit löst. Zunächst wird ein Intervall $[\gamma_n, \gamma_h]$ betrachtet, das so groß gewählt wird, dass es γ^* in jedem Fall enthält, es gilt also $\gamma_n \leq \gamma^* \leq \gamma_h$. In jedem

Schritt des binären Suchalgorithmus wird $\gamma_m := (\gamma_n + \gamma_h)/2$ gesetzt und es wird geprüft, ob der Graph G einen Kreis C mit negativem Gesamtgewicht enthält, wobei das Gewicht einer jeden Kante $\{i, j\}$ als $\lambda(i, j) := c(i, j) - \gamma_m w(i, j)$ definiert wird. Existiert ein solcher Kreis, findet Fall 1 Anwendung und somit gilt $\gamma_m > \gamma^*$. In diesem Fall setzen wir $\gamma_h := \gamma_m$ und führen eine weitere Iteration des Algorithmus durch. Existiert kein solcher Kreis, liegt entweder Fall 2 oder Fall 3 vor, so dass $\gamma_m \leq \gamma^*$ gilt. In diesem Fall setzen wir $\gamma_n := \gamma_m$ und führen eine weitere Iteration des Algorithmus durch.

Es bleibt noch zu klären, nach wie vielen Iterationen der Algorithmus abbricht. Definiert sei $w_0 := \max\{w(i, j) : \{i, j\} \in E\}$. Zur Vereinfachung der Notation sei zudem $c(C) := \sum_{\{i, j\} \in E(C)} c(i, j)$ sowie $w(C) := \sum_{\{i, j\} \in E(C)} w(i, j)$ für jeden Kreis C von G . Jedes Intervall $[\gamma_n, \gamma_h]$ mit Länge kleiner als $1/w_0^2$ enthält dann maximal einen Wert der Menge $\{c(C)/w(C) : C \text{ ist ein Kreis von } G\}$. Wenn nämlich angenommen würde, dass es zwei Kreise C_1 und C_2 mit $c(C_1)/w(C_1) \neq c(C_2)/w(C_2)$ gäbe, würde offensichtlich

$$\left| \frac{c(C_1)}{w(C_1)} - \frac{c(C_2)}{w(C_2)} \right| = \left| \frac{c(C_1)w(C_2) - c(C_2)w(C_1)}{w(C_1)w(C_2)} \right| \neq 0$$

gelten. Da alle Einträge ganzzahlig sind, muss der Betrag des Zählers des mittleren Ausdrucks (d.h., $|c(C_1)w(C_2) - c(C_2)w(C_1)|$) mindestens eins betragen. Der Betrag des entsprechenden Nenners (d.h., $|w(C_1)w(C_2)|$) beträgt maximal w_0^2 . Es gilt also $\left| \frac{c(C_1)}{w(C_1)} - \frac{c(C_2)}{w(C_2)} \right| \geq 1/w_0^2$ und dies beweist die vorherige Aussage.

Sei die ursprüngliche Länge des Intervalls $[\gamma_n, \gamma_h]$ vor der ersten Iteration des Algorithmus als $U > 0$ bezeichnet. Da die Länge des Intervalls bei jeder Iteration halbiert wird, ist die Länge des Intervalls $[\gamma_n, \gamma_h]$ nach $O(\log(Uw_0^2))$ Iterationen kleiner als $1/w_0^2$. Das lässt sich wie folgt begründen. Angenommen, k bezeichne die Anzahl der Iterationen. Dann ist nach dem kleinsten k derart gesucht, dass $\frac{U}{2^k} < 1/w_0^2$ gilt. Letztere Bedingung ist äquivalent zu $2^k > Uw_0^2 \Leftrightarrow k > \log(Uw_0^2)$.

Der Suchalgorithmus bricht also ab, wenn die Länge des Intervalls kleiner als $1/w_0^2$ ist. Die Menge $\{c(C)/w(C) : C \text{ ist ein Kreis von } G\}$ enthält dann einen einzigen Wert, der offensichtlich dem Wert γ^* entspricht. G enthält also einen Kreis C , für den $c(C) = \gamma^*w(C)$ bzw. $c(C) - \gamma^*w(C) = 0$ gilt. Dies bedeutet wiederum, dass der Kreis ein Gesamtgewicht von null bezüglich der Gewichtung $\lambda(i, j) = c(i, j) - \gamma^*w(i, j)$ hat. Der entsprechende Kreis löst das Trampdampferproblem und muss abschließend bestimmt werden.

Sei also $G = (N, E)$ zusammen mit der Kantengewichtungsfunktion $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\{i, j\} \rightarrow \lambda(i, j) := c(i, j) - \gamma^*w(i, j)$ gegeben. Sei zudem $\Delta(i)$ die Entfernung eines kürzesten Wegs (bezüglich $\lambda(i, j)$) in diesem Graphen von einem vorgegebenen Knoten $s \in N$ zu $i \in N$ und $\lambda^\Delta(i, j) := \lambda(i, j) + \Delta(i) - \Delta(j)$. Mit dem Moore-Bellman-Ford Algorithmus können die $\Delta(i)$ und damit die $\lambda^\Delta(i, j)$ in polynomieller Zeit berechnet werden. Da $\Delta(j)$ die Entfernung eines kürzesten Wegs von s zu j beschreibt, gilt zudem $\Delta(j) \leq \Delta(i) + \lambda(i, j)$ und somit $\lambda^\Delta(i, j) \geq 0$. Sei zuletzt G^0 der Teilgraph von G , der nur aus denjenigen Kanten $\{i, j\}$ besteht, für die $\lambda^\Delta(i, j) = 0$ gilt.

Man kann jetzt zeigen, dass eine Bijektion zwischen den Kreisen mit Gesamtgewicht von null in G und

den Kreisen in G^0 existiert. Sei C nämlich ein Kreis mit Gesamtgewicht von null in G . Dann gilt

$$0 = \sum_{\{i,j\} \in E(C)} \lambda(i,j) = \sum_{\{i,j\} \in E(C)} \lambda(i,j) + \Delta(i) - \Delta(j) = \sum_{\{i,j\} \in E(C)} \lambda^\Delta(i,j).$$

Wegen $\lambda^\Delta(i,j) \geq 0$ folgt demnach $\lambda^\Delta(i,j) = 0$ für alle $\{i,j\} \in E(C)$ und somit liegt C in G^0 . Sei jetzt ein Kreis C aus G^0 betrachtet. Für diesen gilt offensichtlich

$$0 = \sum_{\{i,j\} \in E(C)} \lambda^\Delta(i,j) = \sum_{\{i,j\} \in E(C)} \lambda(i,j) + \Delta(i) - \Delta(j) = \sum_{\{i,j\} \in E(C)} \lambda(i,j).$$

Also stellt C einen Kreis mit einem Gesamtgewicht von null in G dar.

Um einen Kreis mit Gesamtgewicht von null in G zu bestimmen, reicht es also aus, einen beliebigen Kreis in G^0 zu finden. Dies kann beispielsweise mit einem einfachen topologischen Sortieralgorithmus in polynomieller Zeit erreicht werden; ein solcher Algorithmus wird in Kapitel 3.4 von Ahuja et al. (1993) dargestellt.

Da $\log(Uw_0^2)$ unabhängig von $|N|$ und $|E|$ ist, der Algorithmus von Moore, Bellman und Ford in polynomieller Zeit feststellen kann, ob ein Kreis mit negativem Gesamtgewicht existiert, und der Kreis mit Gesamtgewicht von null bezüglich der Gewichtung $\lambda(i,j) = c(i,j) - \gamma^*w(i,j)$ ebenfalls in polynomieller Zeit bestimmt werden kann, kann das Trampdampferproblem in polynomieller Zeit gelöst werden.

7 Literaturverzeichnis

- Ahuja, R.K., Magnati, T.L. und J.B. Orlin (1993): *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*, Prentice Hall, New Jersey.
- Biggs, N.L. (2002): *Discrete Mathematics*, 2. Auflage, Oxford University Press, Oxford.
- Biró, P., Bomhoff, M., Golovach, P.A., Kern, W., und D. Paulusma (2014): Solutions for the Stable Roommates Problem with Payments, *Theoretical Computer Science*, 540-541, 53-61.
- Biró, P., Kern, W., Paulusma, D. und P. Wojtuczky (2015): The Stable Fixtures Problem with Payments, Diskussionspapier.
- Blair, C. (1988): The Lattice Structure of the Set of Stable Matchings with Multiple Partners, *Mathematics of Operations Research*, 13, 619-628.
- Chvátal, V., Fleischner, H., Sheehan, J. und C. Thomassen (1979): Three-Regular Subgraphs of Four-Regular Graphs, *Journal of Graph Theory*, 3, 371-386.
- Echenique, F. und J. Oviedo (2006): A Theory of Stability in Many-to-many Matching Markets, *Theoretical Economics*, 1, 233-273.
- Eriksson, K. und J. Karlander (2001): Stable Outcomes of the Roommate Game with Transferable Utility, *International Journal of Game Theory*, 29, 555-569.
- Gale, D. und L.S. Shapley (1962): College Admissions and the Stability of Marriage, *American Mathematical Monthly*, 69, 9-15.
- Gibbons, R. (1992): *A primer in game theory*. Pearson Education Limited, Harlow.
- Jehle, G.A. und P.J. Reny (2011): *Advanced Microeconomic Theory* (3. Ausgabe). Pearson Education Limited, Harlow.
- Korte, B. und J. Vygen (2012): *Kombinatorische Optimierung*, 2. Auflage, Springer-Verlag, Heidelberg.
- Letchford, A.N., Reinelt, G. und D.O. Theis (2008): Odd Minimum Cut Sets and b-Matchings Revisited, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 22, 1480-1487.
- Ortega, J. (2016): The Tinder Stable Marriage Problem, Diskussionspapier.
- Sotomayor, M. (1992): The Multiple Partners Game, in Majumdar, M. (ed), *Equilibrium and Dynamics: Essays in Honor of David Gale*, Macmillan Press Ltd, New York.

8 Erklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Abschlussarbeit mit dem Thema

Stabile Hochzeiten in polygynandrischen Gesellschaften

selbstständig und ohne unzulässige Inanspruchnahme Dritter verfasst habe. Ich habe dabei nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet und die aus diesen wörtlich, inhaltlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche den wissenschaftlichen Anforderungen entsprechend kenntlich gemacht. Die Versicherung selbstständiger Arbeit gilt auch für Zeichnungen, Skizzen oder graphische Darstellungen. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form weder derselben noch einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht. Mit der Abgabe der elektronischen Fassung der endgültigen Version der Arbeit nehme ich zur Kenntnis, dass diese mit Hilfe eines Plagiatserkennungsdienstes auf enthaltene Plagiate überprüft und ausschließlich für Prüfungszwecke gespeichert wird.