FernUniversität in Hagen
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachbereich Mathematik

# Zirkuläre Homomorphismen und ihre Symmetrien

Bachelorarbeit von

**Lukas Nagel**
geboren am 19. 03. 1997

Betreut von
Prof. Dr. Winfried Hochstättler
und
Raphael Steiner

Unna, den 28. August 2019

---

Überarbeitet und korrigiert nach Hinweisen in dem Vortrag zur Verteidigung.
Version vom 23. Dezember 2019

# Inhaltsverzeichnis

**Symbolverzeichnis** **3**

**0 Einleitung und Übersicht** **6**

**1 Geschichte und Definition der zirkulären Homomorphismen und verwandter Gegenstände** **10**
1.1 Graphen-Terminologie . . . . . 10
1.2 Digraphen-Terminologie . . . . . 12
1.3 Graphenfärbung und Homomorphismen . . . . . 15
1.4 Difärbungen und Homomorphismen . . . . . 16
1.5 Zirkuläre Färbungen von Graphen und die star chromatic number . . . . . 17
1.6 Zirkuläre Färbungen von Digraphen und azyklische Homomorphismen . . . . . 18
1.7 Neueste Entwicklungen: Die star dichromatic number und zirkuläre Morphismen . . . . . 20
1.8 Neueste Entwicklungen: Dihomomorphismen und elementare Zerlegungen . . . . . 22
1.9 Neue Begriffe: Kozirkularität und Zusammenhangserhaltung . 23

**2 Vergleich mit andern Morphismenarten** **26**
2.1 Implikationen von Morphismenarten . . . . . 26
2.2 Die Zerlegung azyklischer Morphismen in Dihomomorphismen und Homomorphismen . . . . . 27
2.3 Fundamentale zirkuläre Morhismen . . . . . 29

**3 Teilmengen- und Quotientensätze** **31**
3.1 Fundamentale Teilmengensätze . . . . . 31
3.2 Der Symmetriebegriff von zirkulären Morphismen . . . . . 32
3.3 Quotienten und Ersetzungsgraphen . . . . . 33
3.4 Zirkuläre Charakterisierung vollständiger Digraphen . . . . . 37

**4 Symmetrien und Muster** **38**
4.1 Allgemeine Symmetriesätze . . . . . 38
4.2 Muster und Symmetrievererbung . . . . . 41
4.3 Symmetrieschablonen und perfekte Digraphen . . . . . 45
4.4 Antimuster und Antisymmetrie . . . . . 47

**5 Asymmetrie und induzierte Kreise** **49**
5.1 $K_n$-Symmetrie und der Asymmetrie-Index . . . . . 49
5.2 Allgemeine Symmetrie und offene Fragen . . . . . 53

**6 Die Circ-Ordnung und Kreisähnlichkeit** **55**
6.1 NP-Vollständigkeit des Färbungsproblems . . . . . 55
6.2 Elementare Eigenschaften der Circ-Ordnung . . . . . 56

**7 Zirkuläre Cores** **60**
7.1 Verhältnis der zirkulären und andern Cores . . . . . 60
7.2 Ergebnisse über azyklische Cores . . . . . 64
7.3 Ergebnisse über homomorphe Cores . . . . . 68
7.4 Dihomomorphe Cores . . . . . 76
7.5 Fundamentale Ergebnisse für zirkuläre Cores . . . . . 79
7.6 Zirkuläre und azyklische Cores und ihr Verhältnis in der Selbstsymmetrie . . . . . 85
7.7 Stochastische Ergebnisse über zirkuläre Cores . . . . . 87

**8 Zirkuläre Homomorphismen auf Hyperdigraphen als offene Verallgemeinerung** **90**
8.1 Grundlegende Definitionen für Hyperdigraphen . . . . . 90
8.2 Verschiedene Verallgemeinerungen zirkulärer Morphismen auf Hyperdigraphen . . . . . 92
8.3 Symmetriebegriffe auf Hyperdigraphen . . . . . 93
8.4 Starke Symmetrie und Asymmetrie . . . . . 96

**9 Fazit und offene Probleme** **98**

**Abbildungsverzeichnis** **103**

**Literatur** **105**

# Symbolverzeichnis

| **Symbol** | **Bedeutung** | **Definition bzw. erstes Vorkommen** |
|---|---|---|
| $\mathbb{Z}_k$ | Die ganzen Zahlen modulo k | S. 15 |
| $\mathbb{R}^2$ | Die reelle Ebene | S. 18 |
| $S_p$ | Der Kreis in $\mathbb{R}^2$, der den Ursprung als Mittelpunkt und den Umfang $p$ hat | S. 18 |
| $\|M\|$ | Mächtigkeit bzw. Größe der Menge $M$ (unendliche Mengen kommen kaum vor, daher kann der Unterschied vernachlässigt werden). | S. 10 |
| $\|a\|_k$ | Das einer ganzen Zahl $a$ nächste Vielfache von $k$ | S. 17 |
| $A \times B$ | Cartesisches Produkt aus $A$ und $B$, d.h. die geordneten Paare von Elementen aus $A$ und $B$ | S. 10 |
| $A^B$ | Menge der Abbildungen von $B$ nach $A$ | S. 69 |
| $\binom{V}{2}$ | Teilmengen aus $V$ mit genau zwei Elementen | S. 10 |
| $Bild(f)$ | Menge der Elemente, die im Bild einer Funktion $f$ liegen | S. 12 |
| $\subseteq$ | Mengeninklusion / Sub(di)graphenbezeichnung | S. 10 bzw. 11/12 |
| $\subseteq_{ind}$ | Bezeichnung von induzierten Sub(di)graphen | S. 11/12 |
| $V(D), E(G), A(D)$ | Bezeichnung der definierenden Mengen von Graphen und Digraphen | S. 10 bzw. 12 |
| $K_n$ | vollständiger (Di-)Graph mit $n$ Knoten | S. 10 |
| $P_n$ | ungerichteter Pfad mit $n$ Knoten | S. 10/11 |
| $C_n$ | ungerichteter Kreis mit $n$ Knoten | S. 10/11 |
| $H_k, G_k$ | Beispiele symmetrischer rigider Cores | S. 73 |
| $\vec{P}_n$ | gerichteter Pfad mit $n$ Knoten | S. 13 |
| $\vec{C}_n$ | gerichteter Kreis mit $n$ Knoten | S. 13 |
| $\vec{T}_n$ | transitives Turnier mit $n$ Knoten | S. 14 |

| | | |
|---|---|---|
| $\vec{W}_n$ | gerichtetes Rad mit $n$ Knoten | S. 68 |
| $\vec{P}_n(i)$, $\vec{P}_i Z_2 \vec{P}_{n-i}$, $Q(a,b)$ | Beispiele azyklischer rigider homomophischer Cores | S. 73 |
| $c(G)$ | Anzahl der Komponenten von $G$ | S. 11 |
| $g(G), g_o(G)$ | Länge des kleinsten (ungeradlangen) induzierten Kreises in $G$ ((odd) girth) | S. 11 |
| $\vec{g}(D)$ | Länge des kleinsten induzierten gerichteten Kreises in $D$ (digirth) | S. 13 |
| $\omega(G), \alpha(G)$ | Cliquenzahl und Unabhängigkeitszahl von $G$ | S. 11 |
| $\omega(D), \vec{\alpha}(D)$ | Cliquenzahl und Diunabhängigkeitszahl von $D$ | S. 13 |
| $D/D'$, | Quotienten(di)graph | S. 11/14 |
| $D[D_1, ...., D_n]$ | Ersetzungs(di)graph | S. 12/15 |
| $G^H, G \times H$ | Potenz und Produkt von (Di-)Graphen $G$ und $H$ | S. 69 |
| $U(D)$ | Unterliegender Graph von $D$ | S. 14 |
| $S(D), O(D)$ | Symmetrischer Teil und Rest von $D$ | S. 14 |
| $\chi(G)$ | chromatische Zahl von $G$ | S. 15 |
| $\psi(f), \chi_k(G)$, $\chi^*(G) = \chi_c(G)$ | zirkuläre chromatische Zahl bzw. star chromatic number von $G$ mit Vorkonstruktionen | S. 17 |
| $\vec{\chi}(D)$ | dichromatische Zahl von $D$ | S. 16 |
| $\vec{\chi}_c(D)$ | zirkuläre dichromatische Zahl von $D$ | S. 18 |
| $\vec{\chi}^*(D)$ | star dichromatic number von $D$ | S. 20 |
| $C(k,d), \vec{C}(k,d)$ | Circulant-Graphen und -Digraphen | S. 18/19 |
| $G \to H$ | Homomorphische Abbildbarkeit | S. 69 |
| $[G, H]$ | Lücke in der Hom-Ordnung | S. 70 |
| $Aut_{Digraph}(D)$ | Die Menge der Digraphen-Automorphismen auf $D$ | S.15 |
| $Hom(D, D')$ | Menge der Homomorphismen von $D$ nach $D'$ | S. 15/17 |
| $Acyc(D, D')$ | Menge der azyklischen Homomorphismen von $D$ nach $D'$ | S. 19 |

| | | |
|---|---|---|
| $Circ(D, D')$ | Menge der zirkulären Morphismen von $D$ nach $D'$ | S. 20 |
| $Dihom(D, D')$ | Menge der Dihomomorphismen von $D$ nach $D'$ | S. 22 |
| $Kocirc(D, D')$, $Koacyc(D, D')$, $Kohom(D, D')$, $Kodihom(D, D')$ | Menge der ko-zirkulären, ko-azyklischen und ko-(di)homomorphen Abbildungen | S. 23 |
| ${}^{S}_{U}\mathrm{ZEUM}(D, D')$, ${}^{S}_{U}\mathrm{ZEUM}_s(D, D')$ | Verschiedene Mengen zusammenhangserhaltender Morphismen | S. 25 |
| $ai(D)$ | Asymmetrie-Index von $D$ | S. 49 |
| $ci(D), ci'(D)$ | (erweiterteter) zirkulärer Index | S. 50 |
| $D^*$ | azyklischer Core von $D$ | S. 66 |
| $core(D)$ | Homomorphismen-Core von $D$ | S. 68 |
| $dicore(D)$, $elemdicore(D)$ | (elementar)-dihomomorpher Core $D$ | S. 77/78 |
| $D^\circ$ | irkulärer Core von $D$ | S. 80 |
| $G(p, n)$ | zufälliger Graph nach Erdös-Rényi-Modell | S. 69 |
| $\vec{G}(p, n), D(p, n)$ | Zufälliger (antisymmetrischer) Digraph | S. 87 |
| $V(H), E(H)$, $A(H)$ | Bezeichnung der definierenden Mengen von Hyper(di)graphen | S. 90 |
| $U(H), S(H)$, $S^*(H)$ | Unterliegender Hypergraph und (starker) symmetrischer Teil des Hyper(di)graphen $H$ | S. 93 |
| $\vec{C}^n_{1,\ldots,l}$ | Multikreise mit $n$ Hyperkanten | S. 94 |
| $Circ(H, H')$, $Circ_s(H, H')$, $Circ^*(H, H')$ | (strike/exakte) zirkuläre Morphismen von $H$ nach $H'$ | S. 92/93 |
| $ci(H), ai(H)$ | zirkulärer und Asymmetrie-Index von $H$ | S. 95 |
| $ai^*(H)$ | starker Asymmetrie-Index von $H$ | S. 97 |
| $P, NP$ | Polynomiale bzw. polynomial überprüfbare Komplexitätsklasse | S. 8 |
| $O(N), \Theta(n)$ | Abschätzung der Komplexität von Unten bzw. auch von Oben | S. 42/51 |

# 0 Einleitung und Übersicht

Die Frage, wie man allgemeine Verhältnisse, die denkbare Dinge zueinander haben können, abstrakt beschreiben, und vor allem Eigenschaften von Beziehungen und Netzwerken feststellen kann, ist ein grundlegender Interessensgrund an mathematischen Methoden überhaupt, da man solche Verhältnisse sich zwar im allgemeinen gut vorstellen, aber kaum auf genauere Eigenschaften solcher Beziehungen kommen kann, wenn man nicht den untersuchten Elementen Namen, und den Beziehungen zwischen ihnen eine allgemeine Form, oder einen abstrakten Formalismus geben will (etwa sie als Zahlenverhältnis beschreiben). Die allgemeinste und darum auch aussagekräftigste solcher Formen oder Ideen ist der gerichtete Graph, der nichts ist als ein Netzwerk: Man nehme Punkte von 1 bis $n$, und schreibe auf, wo es je Verbindungen von $i$ nach $j$ gibt. Hierbei fallen alle Arten von Eigenschaften der Punkte weg, ebenso wie Unterschiede im Grad oder der Qualität der Verbindung, und es bleibt ein ganz abstraktes Objekt, was nur die Tatsache der Beziehung, und nicht ihr Wie oder Weshalb enthält.

Dieses Objekt, Digraph, also gerichteter Graph genannt (im Unterschied zu Graphen ist es hier nicht dasselbe, ob man von $a$ nach $b$ oder von $b$ nach $a$ kommen kann), bildet den Ausgangspunkt der folgenden Untersuchungen. Eine wesentliche Eigenschaft von Netzwerken ist es nun, dass man sie mit andern Netzwerken vergleichen kann, etwa durch sogenannte gültige Färbungen: Man färbe jeden Knoten im Netzwerk in einer gewissen Farbe von 1 bis $k$. Diese Färbung heißt gültig, wenn man bei jedem Kreislauf im Netzwerk (d.h. einem durchgehenden Weg, der bei demselben Knoten endet, bei dem er begann) mehr als eine Farbe sieht. Die dichromatische Zahl eines solchen Netzwerks bzw. Digraphen ist dann die kleinste Anzahl verschiedener Farben, für die man so eine Färbung finden kann. Man kann sich nun schon anschaulich überlegen, dass wenn diese Zahl hoch ist, dass das Netzwerk dann komplexer ist und mehr Kreise enthält, also einem vollständig verbundenen Netzwerk ähnlicher ist, was man durch folgende Konstruktion formalisieren kann: Wenn man zwei Netzwerke $D$ und $D'$ hat, und den Knoten aus $D$ je einen von $D'$ so zuordnet, dass Verbindungen erhalten bleiben, dann heißt diese Zuordnung ein Homomorphismus. Offenbar ist jede solche Zuordnung in ein vollständiges Netzwerk auch eine Färbung, da jede Verbindung ja dann zwei verschiedene Knoten im vollständigen Netzwerk zugeordnet bekommt, also kein Kreis nur einem Knoten zugeordnet wird. Umgekehrt gilt das allerdings nicht: Ich kann mir einen Kreis vorstellen, und alle Knoten außer einem in einer Farbe, und den letzten in einer andern färben. Hier bleiben Verbindungen nicht erhalten, da ja der erste mit dem zweiten usw. bis mit

dem vorletzten verbunden sind, aber nachher eine Farbe erhalten, was im vollständig verbunden Netzwerk mit zwei Knoten immer noch nur ein Knoten wäre, also keine Verbindung im Bild vorhanden sein würde. Ich muss mir also etwas anderes überlegen, wenn ich Färbungen und damit zusammenhängende Eigenschaften durch solche Ähnlichkeiten zu andern Netzwerken erfassen will; und genau hier kommen nun die zirkulären Morphismen ins Spiel.

Damit man alle gültigen Färbungen untersuchen kann, schaut man sich solche Knotenabbildungen an, wo Rundgänge im ursprünglichen Netzwerk im Bild (d.h. im andern Netzwerk) zumindest einen Rundgang enthalten (sie müssen nicht selbst einer sein, dürfen aber zu keiner geraden Linie werden). Bei solchen Abbildungen ist es also erlaubt, geradlinige Wege, die keinen Kreis enthalten, auf einen Punkt zusammenfallen zu lassen, womit der vorherige Ausnahmefall ebenfalls beschrieben werden kann. Gleichzeitig beschreiben sie dadurch die oben antizipierte Eigenschaft, dass nur schwer zu färbende Netzwerke fast vollständig sind, indem diese nämlich nicht zirkulär auf ein kleines Netzwerk abbilden, sondern höchstens auf solche, die so viele Knoten haben wie das Netzwerk Farben braucht. Sie sind damit, wie es bei nichtgerichteten Graphen schon die Homomorphismen lange Zeit waren, das Mittel, um die Komplexität eines Digraphens einzuschätzen, und damit ein wesentliches Werkzeug zur formalen Analyse von Netzwerken und Zusammenhängen von Begriffen überhaupt.

In dieser Arbeit will ich diesen Begriff daher in zwei Richtungen genauer untersuchen: Einerseits die Unterschiede dieser Art von Netzwerkähnlichkeit gegen ältere, bekanntere Begriffe - vor allem dem Homomorphismus und dem azyklischen Morphismus, aber auch neueren Begriffen wie dem Dihomomorphismus und seiner elementaren Zerlegbarkeit - herausarbeiten (Kapitel 1 mit deren Definition und Kapitel 2 als Ausarbeitung diese Vergleichs); andererseits durch diese spezifischen Unterschiede diesen neuen Begriff in mehrere Richtungen zu erweitern:

1. Durch Untersuchungen allgemeiner Ähnlichkeiten verschiedener auseinander erzeugter Digraphen - insbesondere von Quotienten und Ersetzungsgraphen, und wann solche Ersetzungen dieselben zirkulären Zuordnungen erzeugen (Kapitel 3)

2. Durch die Ähnlichkeit oder Nicht-Ähnlichkeit eines Netzwerks und seines symmetrischen Teils, d.h. des Netzwerks, was dadurch entsteht, dass man Bögen ohne Rückweg wegnimmt. Diese Ähnlichkeit lässt sich dadurch annähern, dass man schaut, welche zirkulären Zuordnungen des symmetrischen Teils des Netzwerks zu einem anderen Digraphen

auch solche des ganzen Netzwerks sind. Wenn dies für alle Zuordnungen auf einen Digraphen $F$ gilt, heißt das Netzwerk auch $F$-symmetrisch. Die Untersuchung dieses Symmetriebegriffs wird einen weiten Raum der Darstellung einnehmen. (Kapitel 4 und 5)

3. Durch Betrachtung der Frage, welche Netzwerke überhaupt einem gewissen andern in dieser Art ähnlich sein können, d.h. dem Färbungsproblem und seiner Komplexität. (Kapitel 6)

4. Durch die Untersuchung von solchen Netzwerken, die nicht einem ihrer Teilnetzwerke ähnlich sind, der sogenannten Cores. Jedes Netzwerk enthält Cores, und ich werde nachher zeigen, dass es einen eindeutigen größten Core enthält, und auch, dass Cores etwas mit dem Symmetriebegriff zu tun haben. (Kapitel 7)

5. Durch Erweiterung dieses Ähnlichkeitsbegriffs auf komplexere Netzwerke, wo Bögen mehr als einen Anfangs- und Endpunkt haben können, sogenannte Hyperdigraphen. (Kapitel 8)

Der Ausgangspunkt, der mich überhaupt erst dazu bewog, mich mit dem Thema intensiver zu beschäftigen, war eine Arbeit von Winfried Hochstättler und Stephan Dominique Andres aus dem Jahr 2013 [AH15, das Preprint ist schon zwei Jahre zuvor erschienen]. Darin zeigten sie, dass für sogenannte perfekte Digraphen - dass sind Netzwerke, in denen es für jedes Teilnetzwerk je eine Menge von sovielen miteinander vollständig verbundenen Knoten gibt, wie man Farben braucht, um dieses Teilnetzwerk gültig zu färben - jede Färbung des symmetrischen Teils auch eine Färbung des Digraphen selbst ist. Damit formulierten sie bereits eine Vorstufe zum hier benutzen Symmetriebegriff. Ich habe diese Ergebnisse dann deutlich erweitern können, und es sind soweit ich sehen kann keine offenen Fragen mehr dazu geblieben, die nicht bis an den Punkt der NP-Vollständigkeit gehen oder unter Entbehrung von Gegenbeispielen trotzdem keine offenbaren Beweise zu haben scheinen.

Die Färbungskomplexität wurde schon von Hochstättler/Steiner in [HSS18] bewiesen; hierzu habe ich auch nicht viel mehr gefunden als einige Folgerungen und offene Fragen, die aber doch zumindest einen gewissen Anknüpfungspunkt bieten können. Außerdem musste dieses Ergebnis der Vollständigkeit halber in diese Arbeit mitaufgenommen werden, da es nicht zur Standardtheorie gehört und auch erklärt, warum ich zur Färbung nicht weiter gearbeitet habe, eben da die wichtigsten Fälle schon als NP-vollständig bewiesen sind.

Was den vierten Punkt anbetrifft, habe ich hier vor allem der homomorphen und azyklischen Core-Theorie, besonders den Arbeiten von Severino

[Sev14] und Hell/Nešetřil [HN04], einige Begriffe und Sätze entlehnt und übertragen, weswegen sie in dieser Arbeit auch nur ein Kapitel einnimmt, da sie im Wesentlichen aus einer Literaturübersicht und einigen elementaren Ergebnissen, mehr aber noch aus offenen Problemen besteht.

Das letzte Kapitel schließlich handelt von den Hyperdigraphen, bei denen sich auch einige Ergebnisse angeboten haben; die Anregung dazu kam durch das Buch von Alain Bretto [Bre13], durch das ich angeregt wurde meine ganze bisherige Theorie in allgemeineren Begriffen auszudrücken. Hier war aber das Thema zu umfassend, als dass ich es im Rahmen der mir zu Verfügung stehenden Zeit zufriendenstellend hätte bearbeiten können, so dass dieses Kapitel eher den Charakter der Skizze und der Fragestellung hat, an die anzuschließen darum eine Aufgabe dieses Textes an seine künftigen Leser bleibt.

# 1 Geschichte und Definition der zirkulären Homomorphismen und verwandter Gegenstände

Dieser Text handelt von Morphismen auf Digraphen, die als Färbungen angesehen werden können, und den Verhältnissen ihrer Mengen untereinander, worin sie gleich, wie worin sie verschieden sind. Bei solch einem Thema scheint es angemessen, zunächst einen historischen Überblick über die bisher verwendeten Morphismen und Färbungen auf Digraphen anzugeben, einerseits, um die hier geleisteten Ergebnisse in die bisherige Geschichte der Forschung einordnen zu können, andererseits, um die bisherigen Forschungsergebnisse als Grundlage für die Darstellung meiner Erkenntnisse nutzen zu können.

## 1.1 Graphen-Terminologie

Dazu folgende grundlegende Terminologie:

Ein (ungerichteter) Graph $G = (V; E)$ besteht aus einer Menge $V(G)$ von Knoten und einer Menge $E(G) \subseteq V \times V$ von Kanten, die eine binäre, irreflexive und symmetrische Relation auf $V(G)$ definiert, welche darum auch oft als Teilmenge von $\binom{V}{2} := \{V' \subseteq V(G) || V'| = 2\}$ dargestellt wird. (Daraus folgen diese Eigenschaften, da offenbar $\{v, w\} = \{w, v\}$, also $E$ nach Definition symmetrisch, und wegen $\{a, a\} = \{a\} \notin \binom{V}{2}$ bzw. $V' \in \binom{V}{2} \Leftrightarrow |V'| = 2$, $E$ ebenfalls irreflexiv und binär ist. Außerdem hat jede passende Relation $R$ so eine Darstellung, wenn man nur $E(G) = \{\{v, w\} | vRw\}$ setzt.)

Wenn es eine Kante $e = \{v, w\}$ gibt, heißt $e$ mit $v, w$ indizent, $v$ und $w$ einander adjazent, eine Menge von paarweise adjazenten Knoten heißt vollständig, von paarweise nichtadjazenten Knoten unabhängig. Der vollständige Graph mit $n$ Knoten (der bis auf Nummerierung der Knoten eindeutig ist) wird im folgenden mit $K_n$ bezeichnet. Die Menge aller zu einem gewissen Knoten adjazenten Knoten heißen auch seine Nachbarn, wenn diese nummeriert werden diese Aufzählung seine Adjazenzliste. (Adjazenzlisten können auch alternativ benutzt werden, um Graphen zu definieren, und finden auch eine weite Verwendung in der Informatik; in der mathematische Theorie werden sie dagegen weniger benutzt, ich brauche sie auch nur in einem einzigen Satz (7.47).)

Wenn bei $n$ nummerierten Knoten je einer mit dem nächsten adjazent sind, heißen diese ein Weg, und der erste und letzte Knoten verbindbar bzw. gegenseitig erreichbar; wenn zusätzlich der erste mit dem letzten adjazent ist, heißt der Weg ein Kreis; bezeichne die Graphen, die bloß aus einem Weg bzw. Kreis mit $n$ Knoten (d.h. ohne zusätzliche Adjazenzen) bestehen mit

$P_n$ bzw. $C_n$.

Wenn es von jedem Knoten zu jedem andern einen Weg gibt, heißt der Graph zusammenhängend. Jeder Graph zerfällt in zusammenhängende Teilgraphen, sogenannte Komponenten, da Wege verlängerbar und symmetrisch sind, also Verbindbarkeit eine Äquivalenzrelation ist. $c(G)$ bezeichne die Anzahl der Komponenten von $G$.

Man sagt, $G$ enthalte einen Graphen $G'$ und nennt $G'$ auch einen Subgraph von $G$, wenn durch Einbettung der Knoten von $G'$ in bestimmte Knoten von $G$ die Kanten aus $G'$ erhalten bleiben; schreibe dafür auch $G' \subseteq G$. Man nennt dieses Enthaltensein induziert bzw. $G'$ einen induzierten Subgraphen, wenn keine weiteren Kanten zwischen diesen Knoten dazukommen; schreibe dafür auch $G' \subseteq_{ind} G$. Ein enthalter Subgraph heißt echt, wenn er nicht dem Graphen gleich ist, in dem er enthalten ist.

Ein Graph ohne enthaltene Kreise heißt Wald, ein zusammenhängender Wald Baum, ein Graph ohne ungeradlange Kreise bipartit. Die Länge des kleinsten induzierten Kreises heißt girth (Taillenweite) von $G$, geschrieben $g(G)$. Die Länge des kleinsten ungeradlangen induzierten Kreises heißt odd girth (ungerade Taillenweite) von $G$, geschreiben $g_o(G)$.

Ein induzierter vollständiger Subgraph heißt Clique, die Knotenzahl der größten Clique in $G$ heißt Cliquenzahl von $G$, geschrieben $\omega(G)$. Die Knotenzahl der größten unabhängigen Menge in $G$ heißt Unabhängigkeitszahl von $G$, geschrieben $\alpha(G)$.

Für zwei Graphen sind (disjunkte) Vereinigung, Schnitt und Differenz dadurch definiert, dass man die ensprechende Operation auf die Knotenmenge anwendet und die Relation entsprechend ausdehnt. Genauer:

1. $V(G \cup G') := V(G) \cup V(G'); E(G \cup G') := E(G) \cup E(G')$
2. $V(G \cap G') := V(G) \cap V(G'); E(G \cap G') := E(G) \cap E(G')$
3. $V(G - G') := V(G) - V(G'); E(G - G') := E(G) - E(G')$

Dabei wird $G \cup G$ auch als $2G$ bezeichnet, und entsprechend allgemein die Multiplikation $nG$ von Graphen definiert.

Für einen induzierten Subgraph $G'$ von $G$ sei die Reduktion von $G'$ in $G$, bzw. der Quotient von $G$ über $G'$, geschrieben $G/G'$, definiert durch

$$V(G/G') := (V(G) \setminus V(G')) \cup \{v_{G'}\}$$

$$E(G/G') := (E(G) \cap \binom{V(G/G')}{2}) \cup \{\{u, v_{G'}\} | u \in V(G/G') \text{ mit } \exists_{v \in V(G')} \{u, v\} \in E(G)\}$$

Analog sei für disjunkte Knotenmengen $V_1, ..., V_n$ der Quotient $G/(V_1, ..., V_n)$ definiert als $((....(G/G'_1)/G'_2)...)/G'_n$, wobei $G'_i$ der mit den Knoten aus $V_i$ induzierte Subgraph von $G$ ist. Im folgenden werden im allgemeinen darum auch Knotenteilmengen und die durch sie induzierten Subgraphen meist synonym verwendet, wenn es um graphenerzeugende Operationen geht. Wenn $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, wird der Quotient über die Äquivalenzklassen auch mit $G/\sim$ abgekürzt; offenbar entspricht jeder Quotient auch einer solchen Äquivalenzrelation.

Wenn man $V(G) = \{v_1, ...., v_n\}$ annimmt und $G_1, ..., G_n$ beliebige Graphen sind, bezeichne man mit $G[G_1, ..., G_1]$ den Graphen

$$V(G[G_1, ..., G_n]) := \cup_{i=1}^{n}\{(v, i)|v \in V(G_i)\}$$

$$E(G[G_1, ..., G_n]) := (\cup_{i=1}^{n}\{\{(v, i), (w, i)\}|\{v, w\} \in E(G_i)\})$$
$$\cup(\cup_{\{v_i,v_j\}\in E(G)}\{\{(v, i), (w, j)\}|v \in V(G_i), w \in V(G_j)\})$$

der auch als Ersetzungsgraph bezeichnet wird. $G[m_1K_1, ..., m_nK_1]$ wird dabei auch mit $G[m_1, ..., m_n]$ abgekürzt und als Knotenmultiplikation bezeichnet.

Abbildungen zwischen Graphen $G, G'$ werden im folgenden als Abbildungen ihrer Knotenmengen $f : V(G) \to V(G')$ definiert, die gewisse zusätzliche Eigenschaften bezüglich ihrer Kantenmengen erfüllen. Im Allgemeinen heißt hier eine Abbildung von $G$ auf sich selbst ein Endomorphismus, eine injektive Abbildung, wo $G$ im $Bild(f)$ induziert enthalten ist, eine Einbettung, und eine surjektive Einbettung ein Isomorphismus, ein Endomorphismus schließlich, der auch ein Isomorphismus ist, ein Automorphismus.

## 1.2 Digraphen-Terminologie

Ein Digraph $D = (V, A)$ besteht aus einer Menge $V(D)$ von Knoten und einer Menge $A(D) \subseteq V \times V$ von Bögen, die eine binäre und irreflexive Relation auf $V(D)$ definiert. Anders als beim symmetrischen Fall gibt es hier keine vereinfachende Darstellung, es muss hier die Irreflexivität als Axiom behauptet werden. (Wenn diese Forderung nicht auftaucht, also sogenannte Schleifen, d.h. Elemente der Form $(a, a)$ erlaubt sind, ist die Bedingung $A \subseteq V \times V$ ausreichend. Da aber Schleifen bei allen späteren Konstruktionen nur stören würden, da alle Sätze über Zyklen immer angeben müssten, dass sie für Schleifen gerade nicht gelten, werden sie mit dieser Definition für alle weiteren Aussagen ausgeschlossen.)

Wenn es eine Kante $(u, v)$ in $D$ gibt, heißt $u$ Anfangs- und $v$ Endknoten von $(u, v)$, und $u$ in $(u, v)$ positiv, $v$ negativ indizent, und $u$ zu $v$ adjazent, entsprechend auch Nachbarn und Adjazenzlisten. (Echte) (induzierte) Subdigraphen werden analog den Graphen, nur eben über Bögen definiert.

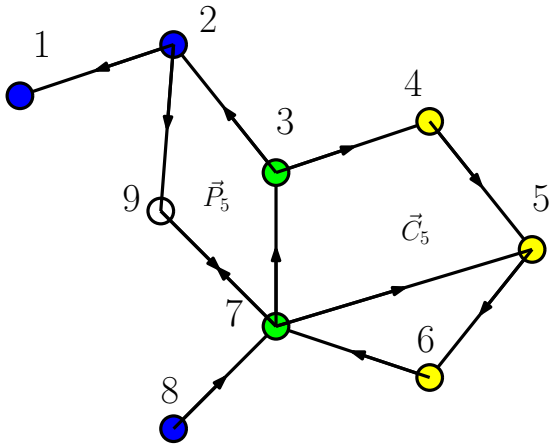



Abbildung 1: Ein Beispiel von sich schneidenen Kreisen und Pfaden. Die Knoten $1, 2, 3, 7, 8$ bilden einen induzierten $\vec{P}_4$, $5, 6, 7$ einen induzierten $\vec{C}_3$, und $3, 4, 5, 6, 7$ einen nichtinduzierten $\vec{C}_5$. $(7, 5)$ ist eine Sehne, daher kann er nicht induziert sein. $(9, 7), (7, 9)$ ist ein Digon, daher enthält $7, 3, 9, 7$ keinen induzierten Kreis, sondern nur via $7-3-2-9$ einen nichtinduzierten $\vec{P}_4$. $1, 8$ sind einzelne Knoten, die je eine starke Zusammenhangskomponente bilden, alle andern bilden eine dritte.

Wenn es Knoten $v_1, ..., v_n$ mit Bögen $(v_i, v_{i+1})$ für $i = 1, ..., n-1$ in $A(D)$ gibt, heißt $v_n$ von $v_1$ aus erreichbar und $v_1, ...., v_n$ ein Weg, als einzelner Digraph (ohne weitere Knoten/Bögen) mit $\vec{P}_n$ bezeichnet; wenn zusätzlich ein Bogen $(v_n, v_1)$ vorhanden ist, ein gerichteter Kreis, als einzelner Digraph mit $\vec{C}_n$ bezeichnet, jeder zusätzliche Bogen dann eine Kreissehne, einer der $\vec{C}_n$ heißt darum auch sehnenfreier Kreis. Offenbar ist ein Kreis genau dann induziert, wenn er sehnenfrei ist, und enthält dann mindestens einen induzierten Kreis mit mindestens drei Knoten, wenn keine Sehne in einem Digon liegt. (Siehe Abb. für Beispiele von Kreisen und Pfaden).

Wenn jeder Knoten von jedem andern erreichbar ist, heißt $D$ stark zusammenhängend; auch hier zerfällt $D$ in sogenannte starke Komponenten, die allerdings von den schwachen Komponenten von $D$ (dies sind die Komponenten von $U(D)$) zu unterscheiden sind. $D$ heißt azyklisch, wenn $D$ keinen gerichteten Kreis enthält, sonst zyklisch. $D$ heißt induziert kreisfrei, wenn $D$ keinen sehnenfreien gerichteten Kreis mit mindestens drei Knoten induziert enthält. Die Länge des kleinsten induzierten gerichteten Kreises heißt digirth von $D$, geschrieben $\vec{g}(D)$. Die Knotenzahl des größten azyklischen Subdigraphen von $D$ heißt Diunabhängigkeitszahl, geschrieben $\vec{\alpha}(D)$.

Ein Zykel von Länge 2 (d.h. ein vollständiger Digraph mit zwei Knoten) heißt Digon (auch Bigon oder Kante). Wenn $G$ ein Graph ist kann man

$G$ auch als Digraph betrachten, in dem jede Kante durch ein Digon der Endknoten ersetzt wurde (dies entspricht auch der Definition, wenn man $G$ als Relation auf einer Menge und nicht als Teilmenge von $\binom{V(G)}{2}$ ansieht).

Der symmetrische Teil von $D$, geschrieben $S(D)$, bezeichne den Digraphen, der aus $D$ entsteht, wenn man alle Bögen aus $D$ entfernt, die nicht zu einem Digon gehören; $O(D)$ bezeichne den Digraphen, aus dem alle Digon-Bögen entfernt wurden. Der unterliegende Graph $U(D)$ heißt schließlich der Graph, in dem zwei Knoten $u$, $v$ genau dann verbunden sind, wenn es den Bogen $(u, v)$ oder den Bogen $(v, u)$ in $D$ gibt. Es gilt offenbar $V(S(D)) = V(O(D)) = V(U(D)) = V(D)$. Eine Clique in $D$ wird dann als induzierter $K_n$ definiert, wie im ungerichteten Fall, analog auch die Cliquenzahl $\omega(D)$ von $D$.

Ein beliebiger Digraph $D$ heißt auch eine Orientierung von $U(D)$, speziell heißt eine Orientierung von $K_n$ auch ein Turnier. Definiere das transitive Turnier mit $n$ Knoten als $\vec{T}_n := (\mathbb{Z}_n, \{(i, j)|i > j\})$.

Für zwei Digraphen sind (disjunkte) Vereinigung, Schnitt und Differenz dadurch definiert, dass man die ensprechende Operation auf die Knotenmenge anwendet und die Relation entsprechend ausdehnt. Genauer:

1. $V(D \cup D') := V(D) \cup V(D'); E(D \cup D') := E(D) \cup E(D')$
2. $V(D \cap D') := V(D) \cap V(D'); E(D \cap D') := E(D) \cap E(D')$
3. $V(D - D') := V(D) - V(D'); E(D - D') := E(D) - E(D')$

Dabei wird $D \cup D$ auch als $2D$ bezeichnet, und entsprechend allgemein die Multiplikation $nD$ von Digraphen definiert.

Für einen induzierten Subdigraphen $D'$ aus einem Digraphen $D$ sei die Reduktion von $D'$ in $D$, bzw. der Quotient von $D$ über $D'$, geschrieben $D/D'$, definiert durch

$$V(D/D') := V(D) \setminus V(D') \cup \{v_{D'}\}$$

$$A(D/D') := (A(D) \cap V(D/D') \times V(D/D')) \cup \{(u, v_{D'})|u \in V(D/D'),$$

$$\exists_{v \in V(D')}(u, v) \in A(D)\} \cup \{(v_{D'}, u)|u \in V(D/D'), \exists_{v \in V(D')}(v, u) \in A(D)\}$$

Analog sei für disjunkte Knotenmengen $V_1, ..., V_n$ der Quotient $D/(V_1, ..., V_n)$ definiert als $((....(D/D'_1)/D'_2)...)/D'_n$, wobei $D'_i$ der mit den Knoten aus $V_i$ induzierte Subdigraph von $D$ ist. Im folgenden werden im allgemeinen darum auch Knotenteilmengen und die durch sie induzierten Subdigraphen meist synonym verwendet, wenn es um digraphenerzeugende Operationen geht. Die zu Graphen analoge Terminologie über Knotenäquivalenzrelationen wird analog für Digraphen übernommen.

Wenn man $V(D) = \{v_1, ...., v_n\}$ annimmt und $D_1, ..., D_n$ beliebige Digraphen sind, bezeichne man mit $D[D_1, ..., D_1]$ den Digraphen

$$V(D[D_1, ..., D_n]) := \cup_{i=1}^{n}\{(v, i)|v \in V(D_i)\}$$

$$A(D[D_1, ..., D_n]) := (\cup_{i=1}^{n}\{((v, i), (w, i))|(v, w) \in A(D_i)\})$$
$$\cup(\cup_{(v_i,v_j)\in A(D)}\{((v, i), (w, j))|v \in V(D_i), w \in V(D_j)\})$$

der auch als Ersetzungsdigraph bezeichnet wird. $D[m_1K_1, ..., m_nK_1]$ wird dabei auch mit $D[m_1, ..., m_n]$ abgekürzt und als Knotenmultiplikation bezeichnet.

Abbildungen zwischen Digraphen $D, D'$ werden im folgenden als Abbildungen ihrer Knotenmengen $f : V(D) \to V(D')$ definiert, die gewisse zusätzliche Eigenschaften bezüglich ihrer Bogenmengen erfüllen. Im Allgemeinen heißt hier eine Abbildung von $D$ auf sich selbst Endomorphismus, eine injektive Abbildung, wo $D$ im $Bild(f)$ induziert enthalten ist eine Einbettung und eine surjektive Einbettung ein Isomorphismus, ein Endomorphismus schließlich, der auch Isomorphismus ist, ein Automorphismus. Die Menge aller Automorphismen auf $D$ wird mit $Aut_{Digraph}(D)$ bezeichnet.

## 1.3 Graphenfärbung und Homomorphismen

Die Inspiration und erste Idee zu den titelgebenden zirkulären Morphismen war eine zweifache Abwandlung der alten Idee der Graphenfärbung und der Homomorphismen durch Zirkularität und azyklische Mengen. Ich beginne darum mit der Definition dieser älteren, und bei allem folgenden auch stets zu Grunde liegenden Struktur:

Eine Färbung eines Graphen $G = (V, E)$ mit $k$ Farben ist eine beliebige Funktion $f : V \to \mathbb{Z}_k = \{0, 1, 2, ..., k - 1\}$, durch die adjazente Knoten verschiedene Farben erhalten, d.h. dass $f^{-1}(\{i\})$ unabhängig ist für alle $i \in \mathbb{Z}_k$. Man definiert nun $\chi(G)$, die chromatische Zahl von $G$, als kleinstes mögliches $k$, für das solch eine Färbung existiert.

Ein Homomorphismus von einem Graphen $G = (V, E)$ zu einem Graphen $H = (V', E')$ ist nun eine Abbildung $f : V(G) \to V(H)$, so dass für alle in $G$ adjazenten $u, w \in V(G)$, dann auch $f(u)$ und $f(w)$ in $H$ adjazent sind. Bezeichne die Menge aller solcher Morphismen mit $Hom(G, H)$.

Ein bekanntes Ergebnis ist nun folgendes (vgl etwa [HN04, 1.7]):

**Satz 1.1.** *Die Färbungen von $G$ mit $n$ Farben bilden genau die Menge $Hom(G, K_n)$. Alle Elemente von $Hom(G, H)$ sind Färbungen mit $|V(H)|$ Farben, wobei die fehlenden Kanten in $H$ die Beschränkungen auf möglichen Färbungen darstellen, dass diese Farben keine Nachbarn färben dürfen.*

*Beweis.* Dies kann man daran sehen, dass Adjazenzen erhalten werden müssen, also adjazente Knoten nicht auf denselben Knoten abgebildet werden können, da sonst die Adjazenz verloren ginge. Wenn man nun die Knoten durchnummeriert, erhält man damit genau eine Färbung. Da beim vollständigen Graphen jedes Paar in $H$ adjazent ist, ist auch jede Färbung ein gültiger Homomorphismus, dagegen sonst die fehlenden Kanten angeben, welche Farben einander nicht benachbart sein dürfen. □

Aus diesen erst sehr einfachen Begriffen hat sich im zwanzigsten Jahrhundert eine komplexe Theorie von Färbungsstrukturen, Sätzen über $\chi(G)$, Homomorphismen etc. entwickelt, deren Entwicklung hier wiederzugeben müßig wäre, da sie wohlbekannt, zugänglich und sehr umfangreich ist, und sich dabei viel auf spezielle Graphenklassen bezieht (wie der bekannte Vierfarbensatz: $\chi(G) < 5$ für $G$ planar), die mit meiner Darstellung eigentlich nichts zu tun haben (Was ich davon benötige, wird bei Bedarf erwähnt; für eine umfassende inhaltliche, aber ahistorische Darstellung siehe [HN04].) Was sich dagegen seither neues entwickelt hat - die Digraphenfärbungen und zirkulären Färbungen - ist noch so neu, dass es nicht zum überlieferten Geschichtsgut der Mathematik zählt, daher auch sein Recht hat, eigens und umfassend in seiner Entwicklung aufgeführt zu werden:

## 1.4 Difärbungen und Homomorphismen

Im Jahre 1982 fasste Victor Neumann-Lara zum ersten Mal eine Definition der Färbungen von Digraphen [NL82]. Er definierte eine azyklische Färbung eines Digraphens $D$ (später auch Difärbung genannt) mit $k$ Farben als eine Abbildung $f : V \to \mathbb{Z}_k$, so dass es keinen gerichteten Kreis gibt, der nur in einer Farbe gefärbt ist, d.h. wenn $f^{-1}(\{i\})$ azyklisch ist für alle $i \in \mathbb{Z}_k$. Auch hier lässt sich eine dichromatische Zahl $\vec{\chi}(D)$ definieren als kleinstes dazu mögliches $k$. Wenn man einen Graphen als Digraphen ansieht, dann ist eine Difärbung mit $k$ Farben genau eine gewöhnliche Färbung mit $k$ Farben, da dann bereits jedes Digon ein Kreis mit zwei Knoten ist, und jeder Kreis solche Digons enthält, also man sie nicht auf einzelne Punkte reduzieren darf, was nichts anderes ist als die Bedingung in der alten Definition.

Wieweit man die Färbungseigenschaften auf Eigenschaften von Digons reduzieren darf, und wie symmetrisch ein Digraph ist, d.h. wieweit er sich wie ein Graph verhält, ist neben der allgemeinen Untersuchung von Digraphenmorphismen das wesentliche Thema dieses Textes, weshalb ich diese Eigenschaft besonders hervorkehren will:

**Satz 1.2.** *Alle azyklischen Färbungen von symmetrischen Graphen sind auch*

*gewöhnliche Färbungen, ebenso wie auch alle gewöhnlichen Färbungen azyklische sind, es gibt hier keinen Unterschied.*

Die zu diesen Färbungen im Allgemeinen natürlich zuordnenbaren Morphismen sind dann genau die zirkulären, wie sie später in [HS19] eingeführt wurden, weswegen die Difärbungen ein ständiger Bezugspunkt in diesem Text bleiben werden. Der Begriff des allgemeinen Homomorphismus lässt sich allerdings ebenso auf Digraphen ausdehnen (die Menge der bogenerhaltenden Abbildungen heißt ebenfalls $Hom(D, D')$), womit allerdings nicht alle azyklischen Färbungen erfasst sind:

**Satz 1.3.** *Alle Homomorphismen $D \to K_n$ sind $n$-Difärbungen, aber dies sind nicht alle Difärbungen.*

*Beweis.* Offenbar sind diese Homomorphismen gerade solche Funktionen, die verschiedene Werte bei Anfangs- und Endpunkt erhalten. Sicherlich sind nun alle Funktionen, wodurch es keinen Bogen mit gleichgefärbtem Anfangs- und Endpunkt gibt, Difärbungen, aber man kann z.B. auch einen gerichteten Kreis ganz bis auf einen Punkt in einer Farbe färben, diesen Punkt in einer andern; das ist offenbar eine Difärbung, da beide Farbklassen azyklisch sind, aber es ist kein Homomorphismus nach $K_2$, da in dem großen Bogen des Kreises ja alle Bögen auf einen Knoten zusammenschrumpfen, also Adjazenz offenbar nicht bewahrt wird. □

Darum brauchen wir hier andere Begriffe, weshalb man sich einer parallelen Entwicklung in der Theorie der Graphenfärbung bediente, die ein wenig später begann und den hier angestellten Untersuchungen wichtige Anregungen gegeben hat.

## 1.5 Zirkuläre Färbungen von Graphen und die star chromatic number

Andrew Vince verfasste im Jahr 1988 einen Artikel [Vin88], in dem er eine Größe namens star chromatic number, heute zirkuläre chromatische Zahl genannt, folgendermaßen erstmals definierte: Für $k \in \mathbb{Z}_n$ sei $|a|_k = min\{a \bmod k, -a \bmod k\}$, d.h. der kleinste Abstand von $a$ zu einem Vielfachen von $k$. Für eine Färbung $f$ von $G$ mit $k$ Farben setze $\psi(f) = \frac{k}{\min\{|f(u)-f(v)|_k | u,v \text{ adjazent}\}}$ und $\chi_k(G) = \min\{\psi(f) | f \text{ ist eine Färbung von } G \text{ mit } k\text{Farben}\}$. Definiere dann $\chi^*(G) = \min\{\chi_k(G) | k \in \mathbb{N}\}$ als die star chromatic number von $G$.

Heute wird sie meist über die Färbungen selbst definiert: Eine Färbung von $G$ mit $k$ Farben heißt $(k, d)$-Färbung, wenn $|f(u) - f(v)|_k \geq d$ für alle adjazenten $u, v$ gilt. Dann heißt $\chi_c(G) = \inf\{\frac{k}{d} | \text{Es gibt eine } (k, d)\text{-Färbung von}$

$G\}$ die zirkuläre chromatische Zahl von G. Die beiden Definitionen erweisen sich darin als gleich, dass $\chi_k(G) = \min\{\frac{k}{d} | \text{Es gibt eine } (k,d)\text{-Färbung von } G\}$ gilt, da in der Definition von $\psi$ gerade das Minimum der Differenz $|f(u) - f(v)|_k$ angenommen wird, die gerade noch ausreicht, um als passendes $d$ für eine $(k,d)$-Färbung zu dienen, d.h. $f$ ist genau dann eine $(k,d')$-Färbung, wenn $d' \leq min\{|f(u) - f(v)|_k | u, v \text{ adjazent}\}$.

Vince bewies, dass $\chi_c(G) = \lim_{k\to\infty} \chi_k(G)$ und dass es für alle $k, d$ mit $k \geq 2d$ sogenannte Circulant-Graphen (von ihm mit $G_{m,n}$, heute mit $C(k,d)$ bezeichnet) gibt, die genau $\chi^*(C(k,d)) = k/d$ erfüllen, nämlich $C(k,d) = (\mathbb{Z}_k, \{ij | |i-j|_k \geq d\})$. Vince zeigte außerdem, dass $\chi_c(G)$ aufgerundet immer die gewöhnliche chromatische Zahl $\chi(G)$ ergibt.

Die zirkuläre chromatische Zahl von Graphen ist seitdem vielfach untersucht worden, vgl. [Zhu01] für eine Übersicht. Für die hier betrachtete Frage ist aber vor allem interessant, wie dieser Begriff der zirkulären Färbung auf die Problematik der Digraphenfärbung angewandt wurde.

## 1.6 Zirkuläre Färbungen von Digraphen und azyklische Homomorphismen

Die erste Entwicklung in diese Richtung stammten von Bokal et al. [BFJ+04], die im Jahr 2003 in einem ersten Paper zusammen (das erst 2004 erschienen ist, aber im zweiten, schon zuvor erschienen Paper bereits in den Quellen steht) gleich zwei Verallgemeinerungen von $(k,d)$-Färbungen auf Digraphen präsentierten:

Für $p \in \mathbb{R}$ sei $S_p$ die Punktmenge in $\mathbb{R}^2$ des Kreises um den Ursprung mit Umfang $p$. Die starken zirkulären $p$-Färbungen sind solche Abbildungen $c : V(D) \to S_p$, für die Bilder adjazenter Knoten auf dem Kreis mindestens um eine Bogenlänge von 1 entfernt sind (d.h. insbesondere Färbungen von $U(D)$ und damit Difärbungen sind), während schwache zirkulären $p$-Färbungen solche Difärbungen $c : V(D) \to S_p$ sind, für die entweder beide Enden eines Bogens gleichgefärbt werden oder ihre Bilder um eine Bogenlänge von mindestens 1 entfernt sind.

Bokal et al. bewiesen, dass das Infimum der Menge solcher $p$, für die starke bzw. schwache zirkuläre $p$-Färbungen existieren, dasselbe ist, und es bei schwachen Färbungen immer angenommen wird; sie nannten dieses Infimum $\vec{\chi}_c(D)$, die zirkuläre dichromatische Zahl von D.

Sie definierten nun eine Verallgemeinerung von schwachen p-Färbungen, die azyklischen Homomorphismen: $f : V(D) \to V(D')$ heißt azyklischer Homomorphismus, wenn Bögen entweder erhalten werden (d.h. auf einzelne Bögen oder Digons abgebildet werden) oder die Endpunkte im Bild zusam-

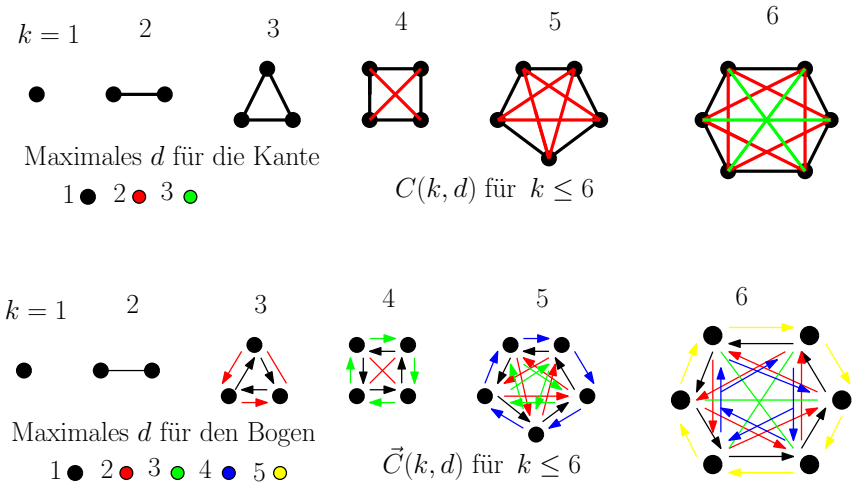



Abbildung 2: Die ersten Zirkulant-Digraphen und Graphen. Es gilt $C(k, d) = S(\vec{C}(k, d))$ für die Paare $(k, d)$, für die $C(k, d)$ definiert ist, wie hier zu sehen.

menfallen, sowie die Urbilder $f^{-1}(\{v\})$ für alle $v \in V(D')$ azyklisch sind. Die Menge solcher Abbildungen sei mit $Acyc(D, D')$ bezeichnet.

Offenbar sind dann schwache zirkuläre p-Färbungen azyklische Homomorphismen in solche Graphen, wo Bögen dann existieren, wenn die assotiierten Kreisbögen länger als 1 sind; dieses sind allerdings genau die verallgemeinerten Circulant-Graphen, die Circulant-Digraphen $\vec{C}(k, d) = (\mathbb{Z}_k, \{(i, j) | (j - i) \mod k \geq d\})$ (siehe Abb.). Es gilt $\vec{\chi}_c(\vec{C}(k, d)) = k/d$. Nach der oberen Konstruktion sind die azyklischen Homomorphismen nach $\vec{C}(k, d)$ genau die schwachen zirkulären $p$-Färbungen, woraus $\vec{\chi}_c(D) \leq k/d \Leftrightarrow \exists_f$ mit $f : D \to \vec{C}(k, d)$ azyklisch bzw. $Acyc(D, \vec{C}(k, d)) \neq \emptyset$ folgt. Offenbar gilt auch $S(\vec{C}(k, d)) = C(k, d)$ für solche $(k, d)$, für die $C(k, d)$ existiert, wie aus der Definition zu sehen und am oberen Bild demonstriert wird, sodass diese Färbungszahl eine echte Erweiterung der symmetrischen Fassung ist, wie auch azyklische Homomorphismen symmetrischer Digraphen gerade die gewöhnlichen Homomorphismen sind (vgl. später Satz 2.2).

In einem zweiten Paper bewiesen Feder et al. [FHM03] dann, dass das azyklische $F$-Färbungsproblem, also die Frage, ob es einen azyklischen Homomorphismus von $D$ nach $F$ gibt, in variablem $D$ NP-vollständig ist für alle nicht-azyklischen $F$ (wenn $F$ azyklisch ist dagegen polynomial). Damit ist das azyklische Digraphen-Färbungs-Problem offenbar für alle nichttrivialen Fälle NP-hart.

Die azyklischen Homomorphismen wurden weiter untersucht von Michael Dennis Severino in seine Dissertation [Sev14], in der er u.a. verschiedene Kon-

struktionen von Cores bzgl. azyklischen Homomorphismen untersuchte und allgemeine Ergebnisse und Kriterien für Cores fand, sowie eine Konstruktion hochchromatischer Digraphen gleichbleibenden digirths angegeben hat. Seine Ergebnisse sind sehr umfangreich und in vielen Punkten auch zu speziell, um sie hier aufgreifen zu können, aber die beiden genannten Aspekte werden an verschiedenen Stellen in meiner Arbeit genutzt, insbesondere im Kapitel über zirkuläre Cores, wo sie auch weitergehender zitiert sind, als dies in diesem einleitenden Überblick sinnvoll oder möglich wäre.

## 1.7 Neueste Entwicklungen: Die star dichromatic number und zirkuläre Morphismen

Schließlich gab es innerhalb des letzten Jahres, also ca. ab September 2018, eine Reihe von Veröffentlichungen, denen meine Arbeit sowohl ihren Begriff als auch ihren Umfang verdankt, weswegen ich sie hier ausführlicher erwähnen will. Dies ist zum einen die Arbeit von Araujo-Pardo et al. zur diachromatischen Zahl, sowie die verschiedenen Veröffentlichungen von Winfried Hochstättler und Raphael Steiner, die meine Arbeit wesentlich beeinflusst haben.

Die erste Arbeit (der Zeit nach), die für mein Thema wichtig gewesen ist, war Winfried Hochstättlers und Raphel Steiners Veröffentlichung zur star dichromatic number aus dem Herbst 2018 [HS18]. Darin definierten sie zwei Arten neuer Färbungen, nämlich die azyklischen $(k, d)$-Färbungen sowie die azyklischen $p$-Färbungen:

1. Eine Funktion $f : V(D) \to \mathbb{Z}_k$ heißt azyklische $(k, d)$-Färbung, wenn $f^{-1}(\{i, i+1 \bmod k, ..., i+d-1 \bmod k\})$ azyklisch ist für alle $i \in \mathbb{Z}_k$.

2. Für $p \in \mathbb{R}, p \geq 1$ heißt $f : V(D) \to S_p$ azyklische $p$-Färbung, wenn das Urbild jedes Kreisbogens der Länge 1 azyklisch ist.

Sie definierten nun die star dichromatic number, geschrieben $\vec{\chi}^*(D)$, als Infimum aller $p$, für die es azyklische $p$-Färbungen gibt; die Menge solcher $p$ ist abgeschlossen (siehe Proposition 3 im selben Paper) und enthält $\vec{\chi}^*(D)$, es ist $\vec{\chi}^*(D) = \inf\{k/d | \text{Es gibt eine azyklische } (k,d)\text{-Färbung von D}\}$ und $\vec{\chi}^*(D)$ ist eine rationale Zahl, so dass es $(k, d)$-Färbungen für alle $k/d \geq p$ gibt.

In einem gemeinsam mit Felix Schröder geschriebenen Paper entwickelten Hochstättler et al. schließlich Ende letzten Jahres [HSS18, die aktuelle Version ist aus diesem Januar] den Begriff zirkulärer Homomorphismen, auf dem diese gesamte Arbeit aufbaut:

$f : V(D) \to V(D')$ heißt ein zirkulärer Homomorphismus von einem Digraphen D zu einem Digraphen D', wenn Bilder zyklischer Mengen zyklisch,

bzw. wenn Urbilder azyklischer Mengen azyklisch sind. Die Menge dieser Morphismen werde mit $Circ(D, D')$ bezeichnet.

Sie fanden dabei heraus, dass

1. zirkuläre Homomorphismen auf symmetrischen Graphen gerade die gewöhnlichen Homomorphismen sind
2. azyklische Homomorphismen auch zirkuläre sind
3. das zirkuläre $F$-Färbungsproblem für $\vec{\chi}(F) = 2$, oder $S(F)$ leer oder nicht-bipartit, NP-vollständig, und polynomial für $F$ azyklisch ist (d.h. es steht noch der Fall $S(F)$ nichtleer und bipartit mit $\vec{\chi}(F) > 2$ offen)
4. $\vec{C}(k, d)$ ein zirkulärer Core ist genau dann, wenn $k, d$ koprim sind (dies wurde erst in der zweiten Version des Papers hinzugefügt),

aber vor allem, dass azyklische $(k, d)$-Färbungen dasselbe sind wie zirkuläre Homomorphismen nach $\vec{C}(k, d)$:

**Satz 1.4.** *Die Menge aller azyklischen $(k, d)$-Färbungen von $D$ ist exakt $Circ(D, \vec{C}(k, d))$.*

*Beweis.* [HSS18, Prop. 4] Zunächst sind die azyklischen Knotenmengen aus $\vec{C}(k, d)$ zu bestimmen: Wenn $A \subseteq \mathbb{Z}_k$ azyklisch ist, muss $\vec{C}(k, d)$ eine Senke $i \in A$ enthalten, d.h. es muss $\{i + d, ...., i + k - 1\} \cap A = \emptyset$ gelten, damit ist $A \subseteq \{i, ..., i+d-1\}$. Umgekehrt, sei $A \subseteq \{i, ...., i+d-1\}$. Da die Zirkulanten nach Definition kreissymmetrisch sind, reicht es zu zeigen, dass $\{0, ...., d-1\}$ azyklisch ist. Nach Definition hat diese Menge aber nur Rückwärtsbögen, damit ist sie bereits azyklisch. Also sind die azyklischen Knotenmengen der Zirkulanten gerade solche, die in einem $d$-Intervall enthalten sind. Offenbar ist also $\phi \in Circ(D, \vec{C}(k, d))$ genau dann, wenn $\phi^{-1}(\{i, ..., i+d-1\})$ azyklisch ist für alle $i \in \mathbb{Z}_k$, d.h. genau dann, wenn $\phi$ eine azyklische $(k, d)$-Färbung ist. Damit folgt die Behauptung. □

Hier will ich auf eine Schwierigkeit in dieser Terminologie aufmerksam machen: Da der Begriff der star dichromatic number in Analogie zu Vince und Neumann-Lara gebildet ist, gibt es hier gewissermaßen zwei Verwendungen des Begriffs der azyklischen $k$ bzw. $(k, d)$-Färbung, die durchaus etwas miteinander zu tun haben (da eine azyklische $k$-Färbung nach Definition von Neumann-Lara genau eine azyklische $(k, 1)$-Färbung nach Definition von Hochstättler/Steiner ist), aber nichts mit den azyklischen Homomorphismen. Darum bilden zirkuläre Homomorphismen die azyklischen

$(k, d)$-Färbungen, dagegen azyklische Homomorphismen die schwach zirkulären $(k, d)$-Färbungen ab. Diese Konstellation ist sicherlich unschön, es wäre besser, wenn die Begriffe vertauscht wären; aber die Paper von Bokal/Feder et al. und von Hochstättler/Steiner sind nun schon geschrieben, und um die Begriffe und ihre Inhalte nicht noch weiter zu verwechseln, werde ich im weiteren Verlauf bei ihnen bleiben. Da der übrige Teil der Arbeit nicht so viel mit den zirkulären und azyklischen Färbungen zu tun hat, wird diese Seite der Begriffe auch nicht weiter vorkommen, und, wenn sie dem Sinn nach verwendet werden, durch $\vec{\chi}^*$ und $\vec{\chi}_c$ ersetzt bzw. abgekürzt werden.

## 1.8 Neueste Entwicklungen: Dihomomorphismen und elementare Zerlegungen

Ein weiterer Begriff wurde von Araujo-Pardo et al. letztes Jahr, erst während der Vorbereitung zu dieser Arbeit, in einem Paper [APMBORM18] über die diachromatische Zahl eingeführt:

Die diachromatische Zahl ist die größte Anzahl von Farben, für die es eine Färbung gibt, so dass die Vereinigung von zwei Farbklassen je zyklisch wird (man nennt diese Färbung dann eine vollständige Difärbung; siehe dazu auch Hochstättlers und Steiners weitergehendes Paper [FHKS19] aus diesem Mai).

Die Autoren führten in diesem Paper zur Untersuchung dieser Größe eine neue Art von Morphismen, die Dihomomorphismen, ein:

Ein elementarer Dihomomorphismus ist eine Funktion $f : V(D) \to V(D) \setminus \{v\}$ für $v \in V(D)$, die alle Knoten außer $v$ gleich lässt und $v$ einem Knoten zugeordnet, der mit $v$ in $D$ kein Digon formt. Der entstandene Digraph kann auch als Quotient $D/\{v, w\}$ für $f(v) = w$ geschrieben werden, da alle Bögen, die vorher von bzw. nach $v$ gingen, im Bild über $w$ laufen. Ein Dihomomorphismus ist nun eine beliebige Verknüpfung von elementaren Dihomomorphismus, und kann damit auch als Quotient über eine Partition in azyklische Knotenmengen, d.h. einer Difärbung, dargestellt werden:

**Satz 1.5.** *$f : V(D) \to \{1, ..., n\}$ ist genau dann eine Difärbung, wenn $D/(f^{-1}(1), ..., f^{-1}(n))$ ein dihomomorphes Bild von $D$ ist.*

Die Menge aller Dihomomorphismen von $D$ nach $D'$ werde mit $Dihom(D, D')$ bezeichnet. Damit repräsentieren Dihomomorphismen die Difärbungen in ihrem Bild. Als Abbildungen werden Difärbungen dagegen als zirkuläre Morphismen nach $K_n$ repräsentiert.

Es herrschte einige Zeit ein Missverständnis darüber, wie genau die Dihomomorphismen im Verhältnis zu azyklischen Homomorphismen stehen; ich

werde nachher darlegen, dass sie genau solche surjektiven azyklischen Homomorphismen sind, die eine Zerlegung von azyklischen Morphismen in elementare Dihomomorphismen und eine injektive Projektion erlauben, wobei die Projektion dazu benutzt wird, zusätzliche Bögen und Knoten hinzuzufügen.

## 1.9 Neue Begriffe: Kozirkularität und Zusammenhangserhaltung

Ich möchte noch zwei weitere Morphismenarten vorstellen, die mir bei der Untersuchung insbesondere der Dihomomorphismen aufgefallen sind, und eine natürliche Erweiterung des Konzepts der zirkulären Homomorphismen darstellen.

1. $f : V(D) \to V(D')$ heißt kozirkulär, wenn $f$ azyklische Knotenmengen aus $D$ erhält bzw. Urbilder zirkulärer Knotenmengen aus $D'$ zirkulär sind. Offenbar ist $f$ injektiv und kozirkulär genau dann wenn $(f|_{Bild(f)})^{-1}$ bijektiv und zirkulär ist, daher sind insbesondere nichtinjektive kozirkuläre Homomorphismen, insbesondere auch surjektive, interessant. - Analog lassen sich auch folgende Begriffe bilden:

   - $f$ heißt kohomomorph, wenn $(u, v) \notin A(D) \Rightarrow (f(u), f(v)) \notin A(D')$
   - $f$ heißt koazyklisch, wenn $(u, v) \notin A(D) \Rightarrow (f(u), f(v)) \notin A(D')$ oder $f(u) = f(v)$
   - $f$ heißt kodihomomorph, wenn $f$ eine Verknüpfung elementarer Kodihomomorphismen ist; diese sind Kontraktionen eines Digons. Damit sind Kodihomomorphismen genau die Kontraktionen von (auch mehreren unverbundenen) zusammenhängenden Subgraphen von $S(D)$.

   Die Mengen dieser Morphismen werden analog den oberen Bezeichnungen auch mit $Kohom(D, D'), Koacyc(D, D'), Kodihom(D, D'), Kocirc(D, D')$ bezeichnet.

Zirkuläre Homomorphismen lassen sich nach Komponenten zerlegen, d.h. seien $D_1, ..., D_n$ die starken Komponenten von $D$, dann ist $f : D \to D'$ genau dann zirkulär, wenn $f|_{D_1}, ...., f|_{D_n}$ zirkulär sind. Damit können wir unsere Betrachtung auf stark zusammenhängende $D$ reduzieren; für diese gilt:

**Satz 1.6.** *Ein homomorphes, azyklisches oder dihomomorphes Bild von einem stark zusammenhängenden $D$ ist ebenfalls stark zusammenhängend.*

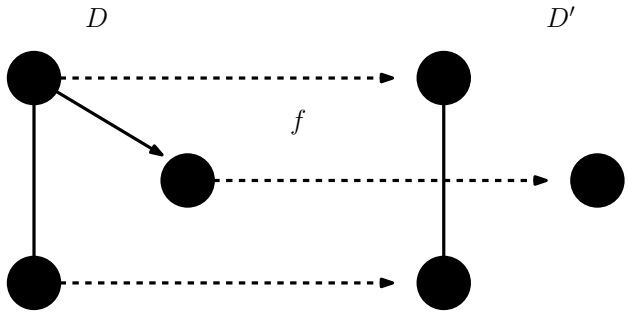



Abbildung 3: Ein nicht azyklischer, zusammenhangs-erhaltender zirkulärer Morphismus auf einem Digraphen mit zwei Komponenten

*Beweis.* Nehme für zwei Knoten $u$ und $v$ aus $D$ zwei sie in beide Richtungen verbindende Wege. Offenbar bleiben die Wege unter Homomorphismen erhalten; also ist $D$ hier stark zusammenhängend. Wenn $f$ azyklisch ist, dann kann der Weg nur verkürzt werden, da kein Bogen durch einen Nicht-Bogen ersetzt werden kann, sondern nur durch eine Kontraktion; und da die Dihomomorphismen surjektive azyklische Morphismen sind, folgt die Behauptung. □

Aber das sind ja nicht die einzigen Fälle zirkulärer Morphismen. So ist etwa die Funktion (siehe Abb.): $D = (\{a, b, c\}, \{(a, b), (b, a), (b, c)\}) \to D' = (\{a', b', c'\}, \{(a', b'), (b', a')\})$, wo je $x \to x'$ gesetzt wird, offenbar zirkulär, da der einzige Zykel das Digon zwischen $a$ und $b$ ist, aber weder azyklisch noch ein Homomorphismus, und die Bilder jeder starken Komponente sind auch wieder stark zusammenhängend, ja identisch. Es gilt sogar, wie man hier gut sehen kann:

**Satz 1.7.** *Wenn $f : D \to F$ zirkulär, so ist es auch $f' : D \to F'$, wobei aus $F'$ alle Bögen zwischen starken Komponenten entfernt wurden und $f'(v) = f(v)$.*

*Beweis.* Es müssen ja nur zirkuläre Mengen erhalten werden, d.h. eigentlich nur die Zykeln. Da zwischen den starken Komponenten von $F$ keine Zykeln verlaufen, können alle andern Bögen entfernt werden, ohne die Zirkularität von $f$ zu verändern, also ist $f'$ ebenfalls zirkulär. (vgl. zur Beweisidee [FHKS19]) □

Offenbar kann aber eine starke Komponente von $D$ auf mehrere von $F$ abbilden, anders als bei den andern Morphismen (siehe etwa Abb. 4 aus dem nächsten Kapitel). Darum bilden folgende Morphismen eine nichttriviale Schnittmenge mit den zirkulären Morphismen:

2. $f : V(D) \to V(D')$ heißt zusammenhangs- erhaltender Morphismus (kurz ZEM), wenn das Bild jeder starken Komponenten von $D$ in $D'$

stark zusammenhängend ist. $f$ heißt analog auch schwach zusammenhangs-erhaltend (UZEM, nach $U(D)$), wenn das Bild jeder schwachen Komponente von $D$ in $D'$ schwach zusammenhängend ist, und symmetrisch zusammenhangs-erhaltend (SZEM, nach $S(D)$), wenn das Bild jeder Komponente von $S(D)$ in $S(D')$ zusammenhängend ist. Die Mengen solcher Morphismen werde dann mit $\mathrm{ZEM}(D, D'), \mathrm{UZEM}(D, D'), \mathrm{SZEM}(D, D')$ bezeichnet.

3. Analog heißt (etwa für kozirkuläre und Kohomomorphismen) $f : V(D) \to V(D')$ zusammenhangserhaltend im Urbild (ZEUM), wenn das Urbild jeder starken Komponente von $D'$ in $D$ stark zusammenhängend, analog UZEUM, SZEUM wie oben, d.h. die Mengen auch $\mathrm{ZEUM}(D, D')$, $\mathrm{UZEUM}(D, D'), \mathrm{SZEUM}(D, D')$.

Alle diese Begriffe lassen sich sogar noch verschärfen: Streng (schwach/ symmetrisch) zusammenhangserhaltend (im Urbild) heißt ein Morphismus, wenn das Bild (Urbild) jeglicher stark/schwach/symmetrisch zusammenhänger Menge von $D$ bzw. $D'$ dies auch in $D'$ bzw. $D$ ist, nicht nur die Komponenten. Diese Mengen seien dann mit $\mathrm{ZEM}_s(D, D'), \mathrm{SZEM}_s(D, D'), \mathrm{ZEUM}_s(D, D')$ etc. bezeichnet.

Da alle Pfade bei (Ko-)Homomorphismen, (Ko-)Dihomomorphismen und (ko-)azyklischen Homomorphismen im (Ur-)Bld erhalten bleiben, sind dies alles nur Qualifikationen von allgemeinen zirkulären bzw. kozirkulären Homomorphismen, die mehr oder minder nahe an diesen andern Morphismenarten dran sind. Die Schnittmenge solcher Morphismen mit den zirkulären, mit $ZEMCirc(D, D') = ZEM(D, D') \cap Circ(D, D')$ bezeichnet, ist darum hier auch das eigentliche Untersuchungsobjekt.

Offenbar lassen sich alle Ergebnisse für zirkuläre Homomorphismen direkt auf kozirkuläre übertragen, weswegen ich mich auf die zirkulären beschränken werde. Es wird vielleicht eine Frage weiterer Forschung sein, die zirkulär-kozirkulären (d.i. $CircKocirc(D, F) := Circ(D, F) \cap Kocirc(D, F)$) Morphismen zu untersuchen, wozu ich aber im bisherige Verlauf meiner Forschung keine nennenswerten Ergebnisse habe erzielen können.

# 2 Vergleich mit andern Morphismenarten

## 2.1 Implikationen von Morphismenarten

Die nächste Aufgabe wird es sein, Unterschiede zwischen den verschiedenen Morphismenarten darzustellen. Dabei ist folgende Charakterisierung zentral:

**Satz 2.1.** *Jeder Dihomomorphismus und jeder Homomorphismus ist azyklisch, und jeder azyklische Morphismus ist zirkulär.*

*Beweis.* Sei $f : D \to F$ ein Dihomomorphismus. Nach Definition gibt es eine Partition $\theta$ einer Äquivalenzrelation $\sim$ auf $D$, so dass $f$ die Projektion von $D$ auf $D/\theta \cong F$ ist (d.h. $f(v) = [v]_\sim$), wobei die Farbklassen $V_i = f^{-1}(\{i\})$ jeweils azyklisch sind. Wenn nun ein Bogen $(u, v) \in D$ vorliegt, kann nach so einer Konstruktion entweder $u \sim v$, d.h. $f(u) = f(v)$, da $[u]_\sim = [v]_\sim$ oder $u \not\sim v$ sein. Im zweiten Fall muss aber, da $F \cong D/\theta$, in $F$ ein Bogen äquivalent zu $(u, v)$ vorhanden sein, d.h. es gibt einen Bogen $(f(u), f(v)) \in D$. Damit ist $f$ ein azyklischer Homomorphismus.

Wenn $f : D \to F$ ein Homomorphismus, ist $f$ offenbar azyklisch, da ja dann $f$ alle Adjazenzen erhält.

Sei also $f : D \to F$ azyklisch. Angenommen, $C$ ist eine zyklische Knotenmenge in $D$, es ist also $f(C)$ zu untersuchen. Nehme $C' \subseteq C$ als induzierten Kreis an (wobei auch ein Digon reicht, es kann somit immer eine solche Knotenmenge gefunden werden). Da $f$ azyklisch ist, muss für die Knoten $v_1, ..., v_k$ von diesem induzierten Kreis entweder $f(v_i) = f(v_{i+1})$ gelten oder ein Bogen $(f(v_i), f(v_{i+1})$ in $F$ vorhanden sein. Damit ist $f(C')$ via $f(v_1), ...., f(v_k), f(v_1)$ zyklisch, wenn $C$ nicht zu einem Punkt zusammenfällt, was aber unmöglich ist, da azyklische Homomorphismen Difärbungen sein sollen, also eine solche monochromatische Färbung des Kreises $C'$ verboten ist. Damit gibt es einen Kreis in $f(C') \subseteq f(C)$ für alle zyklischen Mengen $C \subseteq V(D)$, also ist $f$ zirkulär. □

(Dass azyklische Morphismen zirkulär sind, findet sich auch schon bei Severino, [Sev14, 3.11])

Die Frage ist also, wenn wir das Verhältnis dieser Mengen betrachten, welche Einschränkungen an zirkuläre Morphismen gemacht werden müssen um azyklisch, und welche an zirkuläre oder azyklische gemacht werden müssen, um Dihomomorphismen oder Homomorphismen zu sein. Ein Spezialfall ist dabei besonders einfach und wichtig:

**Satz 2.2.** *Wenn $D = S(D)$, d.h. $D$ symmetrisch, gilt $Circ(D, F) = Acyc(D, F) = Hom(D, F)$ für alle $F$.*

*Beweis.* Sei $f$ ein zirkulärer Morphismus auf $D = S(D)$; es bleibt zu zeigen, dass $f$ ein Homomorphismus ist (die andern Richtungen folgen dann nach dem obigen Satz). Sei $(u, v)$ ein Bogen in $D$; da $D = S(D)$ muss also auch $(v, u)$ ein Bogen in $D$ sein. Offenbar ist dann $u, v$ ein Digon, d.h. eine zyklische Menge, und es muss auch $f(u), f(v)$, zyklisch sein, also muss es Bögen $(f(u), f(v))$ und $(f(v), f(u))$ geben, um $f(u), f(v)$ zu einem Digon zu machen. Damit wird also Adjazenz erhalten und $f$ ist ein Homomorphismus. □

Dagegen ist $f$ auch auf symmetrischen $F$ nicht unbedingt ein Dihomomorphismus. Nehme dazu $D = nK_1$ an; offenbar ist hier jede mögliche Abbildung zirkulär, azyklisch und sogar ein Homomorphismus für beliebige (auch nichtsymmetrische) $F$, da es keine Bögen gibt, die hier Einschränkungen erzeugen könnten. Bei den Dihomomorphismen bedeutet das aber gerade, weil es keine neuen Bögen geben kann, da sie ja als Quotienten konstruiert wurden, dass hier nur $F = mK_1$ für $m \in \mathbb{N}$ in Frage kommen.

## 2.2 Die Zerlegung azyklischer Morphismen in Dihomomorphismen und Homomorphismen

Es gibt eine Möglichkeit, alle azyklischen Morphismen auf Dihomomorphismen und Homomorphismen zurückzuführen. Hierzu zunächst folgende Anmerkungen.

**Satz 2.3.** *Alle injektiven azyklischen Morphismen sind Homomorphismen.*

*Beweis.* Azyklische Morphismen $f$ haben ja bei allen Bögen $(u, v)$ die Wahl, entweder $f(u) = f(v)$ zu setzen oder den Bogen im Bild zu erhalten. Da bei injektiven azyklischen Morphismen die erste Möglichkeit wegfällt, müssen alle Bögen erhalten bleiben, also ist $f$ auch ein Homomorphismus. □

**Satz 2.4.** *Der einzige bijektive Dihomomorphismus ist die Identität, und alle Dihomomorphismen sind surjektiv.*

*Beweis.* Ein Dihomomorphismus ist ein Quotient, d.h. er reduziert im allgemeinen die Anzahl der Knoten; offenbar tut er es genau nur dann nicht, wenn keine Knoten identifiziert werden, d.h. wenn $f$ die Identität ist. Offenbar muss auch auf jeden Knoten im Zieldigraphen abgebildet werden, da der Zieldigraph als Quotient gerade das Bild des Digraphen ist, der partitioniert wurde, d.h. der Dihomomorphismus ist surjektiv. □

Nenne eine Abbildung homomorph-kohomomorph oder auch homomorphe Einbettung, wenn sie Adjazenz und Nichtadjazenz erhält (analog zu der oberen Definiton von Kozirkularität etc.). Dies ist äquivalent zu der oberen Definition einer allgemeinen Einbettung, wenn man die Injektivität fordert, da

sich dann allein daraus induziertes Enthaltensein ergibt. - Es gilt nun folgende sehr allgemeine Darstellung:

**Satz 2.5.** *Sei $f : D \to F$ ein azyklischer Morphismus. Dann gibt es einen Dihomomorphismus $d : D \to D'$, einen bijektiven Homomorphismus $k : D' \to F'$ und eine (injektive homomorphe) Einbettung $i : F' \to F$, so dass $f = d \circ k \circ i$ gilt, und alle drei Morphismen sind bis auf Isomorphie von $D'$ eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* Setze $F' = Bild(f)$, und $i$ als Einbettung mit $i(v) = v$. Offenbar ist $i$ injektiv und homomorph-kohomomorph, da $Bild(f)$ ein induzierter Subdigraph von $F$ ist. Offenbar ist $i$ also auch eindeutig bestimmt; nehme also, für den weiteren Verlauf dieses Beweises, $f$ surjektiv, d.h. $i = id_F$ an.

Setze $D' = (V(Bild(f)), \{(f(x), f(y))|(x, y) \in A(D), f(x) \neq f(y)\})$ und $k : D' \to F'$ mit $k(v) = v$. Offenbar ist $k$ bijektiv und ein Homomorphismus, da für $(x, y) \in A(D)$ mit $f(x) \neq f(y)$ nach Definition der Bogen erhalten bleiben muss, da $(f(x), f(y)) = (u, v)$ insbesondere in $A(Bild(f)) = A(F')$ liegt. Es bleibt noch zu zeigen, dass das sich ergebende $d$ tatsächlich ein Dihomomorphismus ist. - Setze $V_u := f^{-1}(\{u\})$ für alle $u \in V(Bild(f))$. Da $f$ als azyklischer Morphismus eine Difärbung ist, sind alle $V_u$ azyklisch. Es ist zu zeigen, dass $D' = D/\{V_u|u \in V(Bild(f))\}$. Wenn es einen Bogen $(x, y)$ in $D$ gibt, gilt ja nach Definition von $D'$, wenn $f(x) \neq f(y)$ ist, $(f(x), f(y)) \in A(D')$. Umgekehrt, wenn es einen solchen Bogen $(x, y)$ nicht gibt, so kann ein Bogen $(f(x), f(y))$ gar nicht in $D'$ vorkommen, da $D'$ ja nur solche Bögen enthält, für die es Pendants in $D$ gibt. Damit ist aber $D'$ bereits ein Quotient von $D$ nach den $V_u$; und also ist $d : D \to D', d(v) = f(v)$ ein Dihomomorphismus.

Es bleibt zu zeigen, dass dies die einzigen möglichen $d, k, i$ sind. Für $i$ ist dies offenbar, da $i$ injektiv und eine Einbettung sein sollte, also nur durch $F'$ und $F$ bestimmt sind. Da kein kleineres $F'$ möglich ist, da sonst Bilder von $f$ verloren gingen, und ebenso kein größeres, da $k$ bijektiv sein soll und $d$ als Dihomomorphismus surjektiv, muss $F' = Bild(f)$, also $i$ wie angegeben sein. - Es soll $k$ bijektiv und ein Homomorphismus sein. Da also nur Bögen hinzugefügt werden können, keine weggenommen, und auch alle Bögen hinzugefügt werden müssen, für die es kein Pendant in $D$ gibt (da sonst $d$ kein Dihomomorphismus sein kann, weil es sonst Bögen in $D'$ gäbe, die nicht aus der Quotientenoperation hervorkommen würden), so ist $k$ dadurch bis auf Isomorphien innerhalb $D'$ eindeutig bestimmt, da sie immer vorkommen können (bei jeder denkbaren Morphismenart zumindest, wo der Zielgraph nicht durch den Ursprungsgraph definiert ist - was nur bei den Dihomomorphismen der Fall ist). $d$ schließlich ist eindeutig definiert, da $D'$ als Knotenmenge das Bild von $f$ hat, und ja $f = d \circ k \circ i$ gelten soll, und

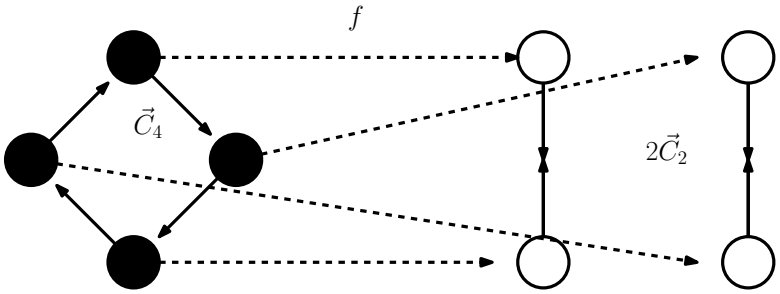



Abbildung 4: Ein komplexer fundamentaler zirkulärer Morphismus

schon $k(v) = v, i(v) = v$ gilt, d.h. $d(v) = f(v)$ gelten muss. Dass d nach den gemachten Einschränkungen im Zielgraphen ein Dihomomorphismus ist, ist bereits erwiesen; damit folgt die Behauptung. □

**Korollar 2.6.** *Homomorphismen sind genau die azkylischen Morphismen, für die d ein Quotient über unabhängige Mengen ist.*

*Beweis.* Offenbar, wenn die Mengen jeweils unabhängig in $D$, werden keine Bögen verschluckt, also ist $f$ ein Homomorphismus. Umgekehrt, wenn $f$ ein Homomorphismus ist, gilt $V_u = f^{-1}(\{u\})$ mit $D[V_u] \cong |V_u|K_1$, da sonst ein Bogen auf $(u, u)$ reduziert werden müsste, was unmöglich ist, da damit die Bogenrelation nicht, wie in der Definition gefordert, irreflexiv wäre. Also sind alle $V_u$ unabhängig. □

**Korollar 2.7.** *Surjektive azyklisch-koazyklische Morphismen sind Dihomomorphismen.*

*Beweis.* Da $f$ azyklisch und koazyklisch ist, werden sowohl Adjazenz als auch Nichtadjazenz erhalten, wenn keine Knoten zusammnfallen; offenbar ist dann aber $f = d$, da sonst weitere Bögen oder Knoten hinzukommen müssten, was nach Nichtadjazenzerhaltung und Surjektivität ausgeschlossen ist. □

Es gibt aber auch nicht azyklisch-koazyklische Dihomomorphismen, etwa $K_2 \cup K_1 \to K_2$, wo der isolierte Knoten mit einem der beiden andern vereint wird, da hier die Nichtadjazenz dieses Knotens zum gegenüberliegenden Knoten in $K_2$ zerstört wird.

## 2.3 Fundamentale zirkuläre Morhismen

Man kann nun dieselbe Reduktion auf zirkulären Morphismen ansetzen: $f = d \circ k \circ i$, wobei $i$ eine Projektion und $k$ ein bogenhinzufügender Isomorphismus ist. (Der Beweis für die Eindeutigkeit ist analog zum oberen.) $d$ ist

hier allerdings, da nur Bögen in Betracht kommen, die an Kreisen beteiligt sind, noch zu allgemein; setze also $d = l \circ d'$, wobei $l$ ein bogenentfernender Isomorphismus ist. Offenbar ist $Bild(l)$ der Digraph, der entsteht, wenn man alle Bögen zwischen zwei starken Komponenten entfernt (da diese nie zu Kreisen gehören können, und jeder Bogen innerhalb einer starken Komponente als Sehne an einem Kreis ebenfalls an einem Kreis beteiligt ist). - Setze zur Vereinfachung voraus, dass $D$ stark zusammenhängend ist, da $d$ sonst je pro starker Komponente definiert werde könnte. Nenne $d$ dann einen fundamentalen zirkulären Morphismus. Fundamentale zirkuläre Morphismen sind allerdings sehr viel komplexer als Quotienten; z.B. ist

$$f : \vec{C}_4 \to 2K_2, \text{ mit } f(1) = 1, f(3) = 2, f(2) = 1', f(3) = 2'$$

fundamental und zirkulär, aber kein Quotient (siehe Abb.); ganz im Gegenteil liegt hier $F$ im Komplement von $D$, nicht als Quotient in $D$ selbst. Weil solche Zerlegungen schnell sehr unübersichtlich werden, gerade wenn die Bildkreise Knoten gemein haben, werde ich diese Art der Untersuchung, die fundamentalen Morphismen zu isolieren, hier erst einmal übergehen und zirkuläre Morphismen im allgemeinen untersuchen; ich vermute aber, dass wenn man die fundamentalen Morphismen irgendwie kategorisieren könnte, sich viele Fragen vereinfachen würden, und somit diese Frage ein wesentlicher Ansatzpunkt künftiger Forschungen werden könnte. (Man könnte sich hier etwa fragen, ob das genannte Beispiel verallgemeinerbar ist, etwa ob das Komplement von $D$ im Allgemeinen etwas mit dem Bild von $f$ zu tun hat etc.)

# 3 Teilmengen- und Quotientensätze

## 3.1 Fundamentale Teilmengensätze

Die Frage, wie ein zirkulärer Morphismus selbst zerlegt werden könnte, habe ich am Ende des letzten Kapitels als schwieriges Problem offen gelassen; aber es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Morphismenmengen zu zerlegen, so dass sie Strukturen offenbaren, die vielleicht für die Untersuchung der Morphismen selbst und der ihnen zugrunde liegenden Strukturen und Symmetrien hilfreich sein können. Zunächst einige fundamentale Sätze, die direkt aus der Definition folgen, und ebensosehr auch für die andern Morphismenarten ihre Gültigkeit behalten, und nach der vorherigen Charakterisierung der Morphismenarten in diesen Varianten je auch impliziert enthalten sind:

**Satz 3.1.** *Für $F \subseteq F'$ gilt $Circ(D, F) \subseteq Circ(D, F')$*

*Beweis.* Offenbar ist jede Abbildung nach $F$ auch eine Abbildung zu dem (nicht notwendig induzierten) Teilgraphen von $F'$, der zu $F$ isomorph ist, da in $F'$ nach Voraussetzung alle Bögen aus $F$ erhalten bleiben, also die Zirkularität sich überträgt. □

**Korollar 3.2.**

$$Circ(D, |V(F)|K_1) \subseteq \begin{matrix} Circ(D, S(F)) \\ Circ(D, O(F)) \end{matrix} \subseteq Circ(D, F) \subseteq Circ(D, K_{|V(F)|})$$

Da $Circ(D, K_n)$ genau die n-Difärbungen von $D$ sind, sind offenbar alle zirkulären Morphismen nach $F$ auch $|V(F)|$-Difärbungen von $D$. Sie werden daher auch (zirkuläre) $F$-Färbungen von $D$ genannt.

Dies gilt analog für $Hom(D, F)$, $Acyc(D, F)$, aber nicht für $Dihom(D, F)$ - da hier $F$ selbst von $D$ abhängt und nicht beliebig vergrößert werden kann.

**Satz 3.3.** *Für $D \subseteq D'$ gilt $Circ(D', F)|_D \subseteq Circ(D, F)$*

*Beweis.* Da alle Subdigraphen von $D'$ höchstens weniger Knoten und Bögen, also auch weniger Zyklen haben können, ist jede beliebige Einschränkung auf kleinere Digraphen nur ein Entfernen gewisser Bedingungen, daher sind alle Morphismen aus $Circ(D', F)|_D$ auch in $Circ(D, F)$. □

**Korollar 3.4.**

$$Circ(K_{|V(D)|}, F) \subseteq Circ(D, F) \subseteq \begin{matrix} Circ(S(D), F) \\ Circ(O(D), F) \end{matrix} \subseteq Circ(|V(D)|K_1, F)$$

Auch dies gilt analog für $Hom(D, F)$ und $Acyc(D, F)$, allerdings hier auch für $Dihom(D, F)$; es gilt sogar, wie man leicht sehen kann:

**Korollar 3.5.** *Sei $D \subseteq D'$ ein induzierter Subdigraph mit Knotenmenge $V = V(D) \subseteq V(D') = V'$. Dann ist $Dihom(D', F)|D = Dihom(D \cup |V' \setminus V|K_1, F)$.*

*Beweis.* Offenbar sind, wenn man nur einen kleineren Abschnitt betrachtet, die äußeren Knoten unwichtig, und können überallhin zugeordnet werden; das ist aber unter Dihomomorphismen gerade das Verhalten isolierter Knoten. □

Eine entsprechende Konstruktion gibt es für Kodihomomorphismen mit $Kodihom(D \times K_{|V' \setminus V|}, F)$, und der Satz gilt analog auch für allgemeine zirkuläre Morphismen, wenn man die Einschränkung so versteht, dass die andern Knoten noch immer vorhanden sind. Da aber ohne diese andern Knoten im Falle allgemeiner Morphismen äußere Kreise, die innerhalb von $D$ zu nichtzyklischen Bogenzügen verkürzt worden sein könnten, vorkommen können, so betrachten wir diesen Fall im weitern Verlauf nicht und gehen erstmal nur von dem oberen, sehr allgemeinen Teilmengensatz aus.

## 3.2 Der Symmetriebegriff von zirkulären Morphismen

Eines der Themen, das im weiteren Verlauf dieser Arbeit eine bedeutende Rolle spielen wird, ist das Verhältnis von $D$ und $S(D)$ in den Morphismenmengen. Hierzu ergibt sich zunächst folgendes, die nächste Definition motivierende Ergebnis:

**Satz 3.6.** *Für alle Digraphen $D, F$ gilt $Circ(S(D), F) = Circ(S(D), S(F)) = Hom(S(D), S(F)) = Acyc(S(D), S(F))$.*

*Beweis.* Da in $S(D)$ alle Bögen, die keine Digons sind, entfernt wurden, sind für Abbildungen von $S(D)$ aus auch nur Digons von belang. Da nun aber jedes Digon, da es zyklisch ist, ebenfalls ein Digon als Bild haben muss, kann man alle andern Bögen im Bild ebenfalls entfernen, also kann der Bildgraph auf $S(F)$ reduziert werden. Jeder solcher Morphismus erhält also Adjazenz, damit ist er auch ein Homomorphismus; d.h. $Circ(S(D), F) \subseteq Hom(S(D), S(F))$. Mit diesem Ergebnis für die umgekehrte Richtung und der vorherigen Ungleichung $Hom(D, F) \subseteq Acyc(D, F) \subseteq Circ(D, F)$ folgt somit die behauptete Gleichheit. □

**Korollar 3.7.** *$Circ(S(D), O(F)) = Circ(S(D), |V(F)|K_1) = \{f | f : V(D) \to V(F)\}$ wenn $S(D) = |V(D)|K_1$, d.h. $D = O(D)$, sonst ist die Menge leer.*

**Korollar 3.8.**

$$Circ(D,F) = Circ(S(D),F) \Leftrightarrow Circ(D,F) = Circ(S(D),S(F))$$

Daher lässt sich ein Begriff definieren, der abhängig vom gegebenen $F$ den Grad der Symmetrie (und d.h. auch der Ähnlichkeit der zirkulären Morphismen zu Homomorphismen) bemisst, nämlich die $F$-Symmetrie:

**Definition 3.9.** $D$ heißt $F$-symmetrisch, wenn $Circ(D,F) = Circ(S(D),F)$ bzw. $Circ(D,F) = Circ(S(D),S(F))$. Analog heißt $D$ $F$-asymmetrisch, wenn dies nicht gilt.

Entsprechend heißt $D$ $F$-ko(a)symmetrisch, wenn $Circ(D,F) = Circ(D,S(F))$ (nicht) gilt; da aber hier keine Reduktion von $D$ möglich ist, da ja auch große Kreise auf ein Digon abbilden, gehe ich auf diesen Begriff hier nicht viel weiter ein, er könnte aber für weitere Untersuchungen eine leitende Funktion spielen (etwa in der Frage, welche Ergebnisse sich von der Symmetrie auf die Kosymmetrie übertragen ließe).

Aus diesem Begriff ergeben sich nun folgende vier Probleme:

1. $RSym(D)$: Welches $F$ gibt es, so dass $D$ $F$-symmetrisch ist?
2. $RASym(D)$: Welches $F$ gibt es, so dass $D$ $F$-asymmetrisch ist?
3. $LSym(F)$: Welches $D$ gibt es, so dass $D$ $F$-symmetrisch ist?
4. $LASym(F)$: Welches $D$ gibt es, so dass $D$ $F$-asymmetrisch ist?

Es wird sich am Ende dieser Arbeit zeigen, dass diese Probleme ganz ungleichgelagert sind, allerdings die genaue Darstellung ihres Verhältnisses weiterhin aussteht.

## 3.3 Quotienten und Ersetzungsgraphen

Eine weitere Frage, die mit der Ähnlichkeit von Morphismenmengen zusammenhängt, ist, wann Digraphen hinreichend ähnlich sind, um die Mengen gleich werden zu lassen, ohne dass dies, wie bei der Symmetrie, eine i.A. noch zu untersuchende Eigenschaft wäre, sondern wo sich dies allgemein bewiesen ließe. Ein sehr allgemeiner Fall sind Multiplikationen von Knoten. Ich beginne hier mit einem einfachen Spezialfall:

**Satz 3.10.** $\{(\pi \circ f, (f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{1\})))|f \in Circ(D, F[2,1,...,1])\} = \{(f,(A_1,A_2))|f \in Circ(D,F), A_1 \cup A_2 = f^{-1}(v_1)\}$ *wobei* $\pi$ *die Projektion von* $F[2,1,...,1]$ *auf* $F$ *ist.*

*Beweis.* Bezeichne die Knoten von $F' = F[2, 1, ..., 1]$ mit $\{0, 1, ..., n\}$ und die von $F$ mit $\{1, ..., n\}$. Offenbar ist, da $0, 1$ in $F'$ unabhängig, $A = f'^{-1}(\{0, 1\})$ azyklisch für alle $f' \in Circ(D, F')$. Setze $A_1 = f'^{-1}(\{0\}), A_2 = f'^{-1}(\{1\})$, und $f : D \to F$ mit $f(v) = f'(v)$ für $f'(v) \in \{1, ..., n\}$, $f(v) = 1$ für $f'(v) = 0$. Offenbar ist dann $f = \pi \circ f'$. Da $f'$ zirkulär ist, ist es auch $f$, da ansonsten Zyklen in $F'$ sein müssten, die in $F$ verschwänden, was aber unmöglich ist, da in einer zyklischen Menge in $F'$, wo 0 oder 1 beteilgt ist, alle Kreise außerhalb verlaufen müssen, da es in $\{0, 1\}$ keinen Kreis gibt, und beide nach Konstruktion dieselben Verbindungen haben; also haben alle Kreise 0 oder 1 nur als Eckpunkt, und durch die Kontraktion von $\{0, 1\}$ zu $\{1\}$ ändert sich an der Zirkularität nichts, also ist $f$ zirkulär. Umgekehrt, wenn ein Paar $(f, (A_1, A_2))$ gegeben, ist $f$ bereits zirkulär, und die Aufspaltung von 1 in die beiden Knoten $0, 1$ macht keine Bildmengen von $f$ aus $D$ nicht-zyklisch, also bleibt die Zirkularität auf $F'$ erhalten. Damit ist $f' \in Circ(D, F')$ gdw. $f = \pi \circ f' \in Circ(D, F)$, und die Behauptung ist bewiesen. □

Nach vollständiger Induktion (ggf. mit zwischenzeitlich veränderter Nummerierung) folgt:

**Korollar 3.11.** $\{(\pi \circ f, ((f^{-1}(v_{1,1}), ..., f^{-1}(v_{1.n_{v_1}})), ..., (f^{-1}(v_{|V(F)|,1}), ..., f^{-1}(v_{|V(F)|.n_{v_{|V(F)|}}})))|f \in Circ(D, F[n_1, ...., n_{|V(F)|}])\} = \{(f, ((A_{1,1}, ...., A_{1,n_{v_1}}), ...., (A_{|V(F)|,1}, ...., A_{|V(F)|,n_{v_{|V(F)|}}})))|f \in Circ(D, F), \cup_j A_{i,j} = f^{-1}(v_i)\}$, *wobei* $\pi : F[n_1, ..., n_{|V(F)|}] \to F$ *die kanonische Projektion ist.*

Damit ist z.B. $Circ(D, K_{m,n})$ darstellbar durch $Circ(D, K_2)$; $Circ(D, nK_1)$ durch $Circ(D, K_1)$ etc. Insbesondere ist $Circ(D, F)$ selbst, vermittelst $A_{i,1} := f^{-1}(v_i)$ und alle andern leer, eine echte Teilmenge von $Circ(D, F')$. Eine ähnliche Teilmengenrelation dieser Art erhält man durch Multiplikation im Ursprungsgraphen:

**Satz 3.12.** $\{(f|_{v_{1,1} \cup \{v_i | i \geq 2\}}, f|_{v_{1,2} \cup \{v_i | i \geq 2\}})|f \in Circ(D[2, 1..., 1], F)\} = \{(f_1, f_2)| f_1, f_2 \in Circ(D, F), f_1(v) = f_2(v) \forall v \neq v_1\}$

*Beweis.* Für $f' \in Circ(D', F)$ mit $D' = D[2, 1, ..., 1]$, setze $f_1(v) = f_2(v) = f(v)$ für $v \neq 1$; $f_1(1) = f'(0), f_2(1) = f'(1)$. Offenbar sind $f_1, f_2$ je auf $D$ zirkulär, da eine in $D$ zyklische Menge auch durch $f_1, f_2$ in $D'$ eingebettet zyklisch bleibt, und diese also im Bild bereits zyklisch sind, da $f'$ auf $D'$ zirkulär ist. Umgekehrt, wenn $f_1, f_2$ zwei auf $D$ zirkuläre Funktionen, die bis auf den Knoten 1 übereinstimmen, dann ist die dadurch konstruierte Funktion $f' \in Circ(D', F)$ auch zirkulär, da jeder induzierte Kreis bzw. jedes Digon in $D'$ nur entweder 1 oder 0 enthält, und jede dieser beiden Knotenmengen durch $f_1$ bzw. $f_2$ auf eine zyklische Menge abgebildet werden; damit ist aber $f'$ bereits zirkulär. Damit folgt die Behauptung. □

Mit vollständiger Induktion folgt:

**Korollar 3.13.** $\{(f|_{\{v_{1,i_1},....,v_{|V(D)|,i_{|V(D)|}}\}})_{\forall_k 1\leq i_k\leq n_k}|f\in Circ(D[n_1,...,n_{|V(D)|}],F)\}=\{(f_{i_1,....,i_{|V(D)|}})_{\forall_k 1\leq i_k\leq n_k}|f_{i_1,....,i_{|V(D)|}}\in Circ(D,F),(i_k=i'_k\Rightarrow f_{i_1,...,i_k,....,i_{|V(D)|}}(v_k)=f_{i'_1,....,i'_k,....,i'_{|V(D)|}}(v_k))\forall_{k,(i_l),(i'_l)}{}^{:1\leq i_l,i'_l\leq n_k}\}$

Damit ist insbesondere $Circ(D[n_1,...,n_|V(D)|)$ darstellbar durch $Circ(D,F)$ für die Morphismen, die alle $n_i$ Kopien von $v_i$ je gleich abbilden. Allerdings kann man hier, da alle Kopien unabhängig sind, keine Mengengleichheit erzeugen, dafür aber eine Zerlegbarkeit von $Circ(D[n_1,...,n_{|V(D)|}],F)$ in $Circ(D,F)^{n_1\times...\times n_{|V(D)|}}$, die viele Fragen auf $Circ(D,F)$ zurückwirft.

Diese Sätze lassen sich nun sehr weit verallgemeinern, wenn man die Zusammenhangseigenschaften von D bzw. F betrachtet, um damit die Ersetzung durch allgemeine (azyklische) Teildigraphen $D_i$ bzw. $F_i$ betrachten zu können:

**Satz 3.14.** *Wenn $D_i, F_i$ azyklisch sind, gilt $Circ(D[D_1,...,D_n],F[F_1,...,F_m])=Circ(D[|D_1|K_1,...,|D_n|K_1],F[|F_1|K_1,...,|F_n|K_1])$.*

*Beweis.* Zirkuläre Morphismen sind nur über die Zyklen definiert, betrachte also eine beliebige Funktion aus der ersten Menge und einen induzierter Kreis / Digon $C$. Da $D_i$ azyklisch, kann der Kreis nicht ganz innerhalb einem $D_i$ verlaufen; also muss er zumindest teilweise außerhalb verlaufen. Sei $v\in C\cap D_i$, und $\underline{v},v,...,w,\overline{w}$ der Pfad, den $C$ innerhalb $D_i$ nimmt, wobei $\underline{v},\overline{w}$ außerhalb $D_i$-s verlaufen. Da $D_i$ einen Knoten $i$ ersetzte, haben alle Knoten in $D_i$ dieselben Verbindungen; damit ist aber bereits $\underline{v},v,\overline{w}$ ein ausreichendes Bogenstück. Da nun $C$ induziert war, kann überhaupt kein Bogen innerhalb $D_i$-s verlaufen; es macht also auch keinen Unterschied für die Zirkularität, wenn sämtliche Bögen entfernt werden.

Betrachte jetzt das Bild von $C$, d.h. $f(C)$. Wenn man alle Bögen innerhalb der $F_i$-s entfernt, ergibt sich derselbe Effekt: Da kein induzierter Zykel innerhalb ihrer verläuft - und nach Voraussetzung $f(C)$ zyklisch sein muss, also insbesondere einen induzierten Zykel hat - gilt dasselbe nach Entfernen der inneren Bögen, und die Zirkularität bleibt erhalten. Damit ist die Gleichheit bewiesen. □

Ein analoger Beweis ergibt übrigens folgendes

**Korollar 3.15.** *Seien $D',F'$ die Digraphen, die man aus $D,F$ erhält, wenn man alle Bögen zwischen starken Komponenten entfernt. Dann gilt $Circ(D,F)=Circ(D',F')$.*

Offenbar folgt nun daraus:

**Satz 3.16.** $Circ(D[D_1, ..., D_n], F[|F_1|K_1, ..., |F_m|K_1) \subseteq Circ(D[|D_1|K_1, ..., |D_n|K_1], F[|F_1|K_1, ..., |F_m|K_1]) \subseteq Circ(D[|D_1|K_1, ..., |D_n|K_1], F[F_1, ..., F_m])$, *und es gilt genau dann Gleichheit in der ersten Ungleichung, wenn die* $D_i$ *azyklisch sind, und dann Gleichheit in der zweiten Ungleichung, wenn die* $F_i$ *azyklisch sind.*

*Beweis.* Für $F_i, D_i$ diskret ist die Gleichheit schon bewiesen. Offenbar müssen für die erste Gleichheit alle $D_i$ azyklisch sein, da sonst die Färbungen, die allen Knoten aus $D_i$ dieselbe Farbe zuweisen (d.i. die Einbettungen aus $Circ(D, F)$), nicht enthalten wären, dagegen bei azyklischen $D_i$ kein neuer Kreis entsteht, der nicht ebenso über einen Knoten aus $D_i$ nur als Eckknoten verläuft, wie oben bereits beewiesen. Die Ungleichung gilt darum, dass durch das Einfügen von Kreisen in die $D_i$ neue Bedingungen für die Färbungen entstehen, aber alle alten Bedingungen erhalten bleiben, d.h. vermittelst $D[|D_1|K_1, ..., |D_n|K_1] \subseteq D[D_1, ...., D_n]$ die Menge enthalten ist. Analog gilt vermittelst $F[|F_1|K_1, ...., |F_m|K_1] \subseteq F[F_1, ..., F_m]$ die zweite Ungleichung. Die zweite Gleichheit ist für den Fall, dass $F_i$ azyklisch, auch schon bewiesen; sei also $F_i$ zyklisch. Dann könnte man einen beliebigen Zykel aus $D$ auf $F_i$ abbilden, also wäre Morphismenmege größer als vorher, womit die Ungleichung im Allgemeinen gilt; ob sie dann aber mit Gleichheit erfüllt ist, steht hier noch offen. □

**Vermutung 1.** $Circ(D[|D_1|K_1, ..., , |D_n|K_1], F[|F_1|K_1, ..., |F_m|K_1]) = Circ(D[|D_1|K_1, ..., |D_n|K_1], F[F_1, ..., F_m])$ *gilt genau dann, wenn alle* $F_i$ *azyklisch sind*

Dazu wäre zu beweisen, dass es für zyklische $F_i$ immer einen Morphismus in $Circ(D, F[F_1, ..., F_n]) \setminus Circ(D, F[|F_1|K_1, ..., |F_m|K_1])$ gibt, was noch eine völlig offene Frage ist.

Ebenso ist das Verhältnis zu $Circ(D[D_1, ..., D_n], F)$ theoretisch zwar völlig klar, aber durch die Vielzahl von Morphismen in $Circ(D, F)$ für einen Morphismus aus $Circ(D[D_1, ..., D_n], F)$ ist die Möglichkeit konkreter Berechnungen doch stark eingeschränkt, wodurch etwa die Frage von Ordnungseigenschaften sich nicht ohne weiteres übertragen, sondern i.A. nur Existenzfragen (wie sie für die Symmetrie auch sehr wichtig sind, für welchen Zweck diese Konstruktion auch ursprünglich ersonnen wurde).

Wenn nun $D' = D[D_1, ..., D_n]$ bzw. $F' = F[F_1, ..., F_m]$ gegeben ist, ist offenbar bereits die Konstruktionsweise eine Zerlegung der Knoten in azyklische Teilmengen, so dass für den Quotienten gilt: $D'/(D_1, ..., D_n) = D, F'/(F_1, ..., F_m) = F$. Offenbar ist diese Zerlegung ein Dihomomorphismus. Man könnte nun vermuten

$$Circ(D, F) \cong Circ(D', F') \text{ für } D', F' \text{ dihomomorphes Bild von } D, F$$

aber dies ist im allgemeinen nicht richtig; so ist etwa $D$ dihomomorph äquivalent zu $K_{\vec{\chi}(D)}$ [APMBORM18, 21], aber i.A. $Circ(D,F) \neq Circ(K_{\chi(D)}, K_{\chi(F)})$, gerade wenn $D$ nicht symmetrisch, da sonst nur diskrete Abbildungen überhaupt zugelassen werden würden - Es gilt aber umgekehrt:

**Satz 3.17.** *Wenn $D_i, F_i$ azyklisch, $D', F'$ Quotient aus $D, F$ nach den $D_i$ bzw. $F_i$, dann ist $Circ(D', F')[\{D_i\}, \{F_i\}] \subseteq Circ(D, F)$*

*Beweis.* Nehme einen beliebigen Morphismus $f \in Circ(D', F')$. Offenbar gehört die Funktion, die eine Kopie von $f(v_{D_i})$ allen Knoten aus $D_i$ zuordnet, zu $Circ(D, F)$, d.h. diese Repräsentation von $Circ(D', F')$ liegt ganz in $Circ(D, F)$. □

Umgekehrt geht es aber nur, wenn jeder innere Weg der $D_i$ zu einem Eckknoten verkürzt werden kann; da im allgemeinen aber
$D \neq (D/(D_1, ..., D_n))[D_1, ..., D_n]$, da durch die Ersetzungsoperation jedem Knoten dieselbe Adjazenz zugeordnet wird, was vorher nicht der Fall gewesen sein musste, kann hier nur eine Teilmenge weitergelten, nämlich die, die auch vorher schon alle Bedingungen erfüllt haben, die durchs Hinzufügen dieser (möglicherweise sehr vielen) Bögen an die einzelnen Knoten von $D_i$ entstehen; jene Morphismen sind dann genau die in $Circ((D/(D_1, ..., D_n))[D_1, ..., D_n], F)$.

## 3.4 Zirkuläre Charakterisierung vollständiger Digraphen

Zum Abschluss dieser Betrachtungen folgt noch eine zirkuläre Charakterisierung von vollständigen Digraphen, die eine Umkehrung der oben angegebenen Teilmengenrelationen benutzt:

**Satz 3.18.** *$D$ ist genau dann vollständig, wenn es nur dann zirkuläre Abbildungen von $D$ in solche $F$ gibt, für die $D$ in $F$ (nicht notwendig induziert) enthalten ist. Kurz: $D = K_{|V(D)|} \Leftrightarrow (Circ(D, F) \neq \emptyset \Rightarrow D \subseteq F)$.*

*Beweis.* Wenn $D$ vollständig ist, muss das Bild von $D$ in $F$ alle Kreise, d.h. insbesondere alle Digons erhalten; damit ist das Bild eine Clique der Größe von $|V(D)|$, ist also selbst eine Kopie von $D$. Wenn $D$ dagegen unvollständig ist, muss $\vec{\chi}(D) < |V(D)|$ gelten, da es sonst keine azyklische Menge in $D$ gäbe, $D$ also vollständig wäre (sonst gilt ja höchstens $\vec{\chi}(D) = |V(D)| - 1$, wenn etwa $D = K_n - e$ für einen Bogen $e$). Da es aber immer Abbildungen von $D$ nach $K_{\vec{\chi}(D)}$ gibt, da jede Minimalfärbung in $K_{\vec{\chi}(D)}$ offenbar alle Kreise erhält, und $D$ nicht in $K_{\vec{\chi}(D)}$ enthalten sein kann gemäß $|V(K_{\vec{\chi}(D)})| = \vec{\chi}(D) < |V(D)|$, ist die Aussage über $D$ offenbar falsch. Also gilt sie genau dann, wenn $D$ vollständig ist. □

# 4 Symmetrien und Muster

Nachdem ich im vorhergehenden Kapitel verschiedene Teilmengenrelationen sehr allgemeiner Art betrachtet habe, ist es nun an der Zeit, konkreter auf das Thema dieser Arbeit, auf die Symmetrien einzugehen. Hier habe ich die meisten konkrete Ergebnisse finden können, die die Frage, für welche Digraphen $D, F$ jeweils $D$ $F$-symmetrisch ist, auf ziemlich begrenzte Gebiete einschränken. Ich betrachte hier zunächst allgemeine Symmetriesätze, die diejenigen Digraphen genau beschreiben, die absolut antisymmetrisch bzw. fast symmetrisch sind, also entweder für alle $F$ oder für keines $F$-symmetrisch sind. Diese Graphen lassen sich durch eindeutige Kriterien auszeichnen, die die Form von Mustern annehmen, die bestimmte induzierte Digraphen bezeichnen, die $D$ enthalten muss bzw. nicht enthalten darf; darum werde ich danach die Skizze einer allgemeinen Theorie jener Muster darstellen, die zwar die wesentlichen Fragen und Begriffe noch offen lässt, aber zumindest im Ansatz beantwortet, welche Probleme hier durch endliche Minoren beschrieben werden können und welche nicht. (Daran schließt sich sich dann auch die im nächsten Kapitel geleistete Analyse des Asymmetrie-Begriffs bzgl. vollständigen Digraphen an.)

## 4.1 Allgemeine Symmetriesätze

Zunächst lassen sich zwei sehr allgemeine Ergebnisse festhalten, die absolut antisymmetrische bzw. fast symmetrische Digraphen eindeutig charakterisieren.

**Satz 4.1.** *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

*(i)* $D$ *ist induziert kreisfrei*

*(ii)* $D$ *ist* $F$*-symmetrisch für alle* $F$

*(iii)* $D$ *ist* $K_n$*-symmetrisch für alle* $n \in \mathbb{N}$*.*

*Beweis.* (i) $\Rightarrow$ (ii): Eine Funktion liegt in $Circ(D, F)$ ja genau dann, wenn sie induzierte Kreise und Digons auf zyklische Mengen abbildet; da es nach Voraussetzung keine induzierten Kreise in $D$ gibt, sind die Digons die einzigen Bedingungen, d.h. die Funktionen sind genau solche, die Digons auf zyklische Mengen abbilden - was aber genau die zirkulären Morphismen auf $S(D)$ sind, d.h. $Circ(D, F) = Circ(S(D), F)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Setze $F = K_n$, die Behauptung folgt unmittelbar.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Angenommen $D$ wäre nicht induziert kreisfrei, sondern hätte einen induzierten Kreis $C \cong \vec{C}_i$. Dann wäre die Beschriftung von $D$, die

alle Knoten von $C$ mit einer, alle andern Knoten aber mit je verschiedenen andern Zahlen beschriftet, sicher eine $S(D)$-Färbung, da ja die Digons nicht innerhalb von $C$ verlaufen, die adjazenten Knoten von $S(D)$ also verschieden gefärbt sind, aber offenbar keine $D$-Färbung, da ja $C$ dabei ein monochromatischer Kreis wäre; damit ist diese Färbung in $Circ(S(D), K_{|V(D)|-i+1}) \setminus Circ(D, K_{|V(D)|-i+1})$, und $D$ ist $K_{|V(D)|-i+1}$-asymmetrisch, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass $D$ $K_n$-symmetrisch sei für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $D$ induziert kreisfrei. □

**Korollar 4.2.** *Wenn $D$ einen induzierten Kreis der Länge $i$ enthält, ist $D$ $K_{|V(D)|-i+1}$-asymmetrisch, und offenbar auch $K_n$-asymmetrisch für alle $n \geq |V(D)| - i + 1$ (da das Gegenbeispiel offenbar von $S(D)$ aus zirkulär auf größere $K_n$ abbildet und von $D$ aus nicht).*

Ich möchte hierbei noch eine Menge von Digraphen anführen, die sämtlich induziert kreisfrei sind und mich überhaupt zu diesem Satz angeregt haben:

**Definition 4.3.** $D$ heißt perfekt, wenn $\vec{\chi}(H) = \omega(H)$ für alle $H \subseteq_{ind} D$ ist.

**Satz 4.4.** *$D$ ist genau dann perfekt, wenn $S(D)$ perfekt und $D$ induziert kreisfrei ist.*

*Beweis.* [AH15, Th. 3] Wenn $S(D)$ nicht perfekt wäre, gäbe es ein $H \subseteq_{ind} S(D)$ mit $\omega(H) < \vec{\chi}(H)$. Mit $H = S(D[V(H)])$ und $\omega(F) = \omega(S(F))$ für alle $F$, folgt $\omega(D[V(H)]) = \omega(S(D[V(H)]) = \omega(H) < \vec{\chi}(H) = \chi(S(D[V(H)])) \leq \vec{\chi}(D[V(H)])$, d.h. $D$ ist nicht perfekt. Wenn $D$ nicht induziert kreisfrei, ist $D$ mit $\omega(\vec{C}_n) = 1 < 2 = \vec{\chi}(\vec{C}_n)$ ebenfalls nicht perfekt.

Es gilt nun noch zu zeigen dass wenn $S(D)$ perfekt ist, aber $D$ nicht, $D$ nicht induziert kreisfrei sein kann. Sei $H \subseteq_{ind} D$ mit $\omega(S(H) = \omega(H) < \vec{\chi}(H)$, und $f$ eine $\omega(S(H))$-Färbung von $S(H)$, die nach Perfektheit von $D$ existiert und offenbar keine gültige Färbung von $H$ ist. Damit muss es einen monochromatischen Kreis in $H$ geben, dessen Knotenmenge kein Digon aufspannen darf, da $f$ auf $S(H)$ ja eine gültige Färbung ist; also sind alle Sehnen einseitig, und es lässt sich je eine Seite des Kreises wegnehmen bis man zu einem induzierten monochromatischen Kreis gelangt. Damit ist aber $H$ nicht induziert kreisfrei, also ist es auch $D$ nicht. □

In demselben Paper von Andres und Hochstättler [AH15] werden noch folgende zwei Charakterisierungen für perfekte Digraphen angegeben, die aus den Eigenschaften perfekter Graphen geschlossen sind:

**Korollar 4.5.** *[AH15, Kor. 5] $D$ ist genau dann perfekt, wenn es weder gerichtete Kreise, noch ungerichtete Kreise $C_{2n+1}$ für $n \geq 1$, noch Komplemente solcher ungerichteten Kreise als induzierte Subdigraphen enthält.*

**Korollar 4.6.** *[AH15, Th. 9] $D$ ist genau dann perfekt, wenn der unterliegende Graph vom Komplement von $D$ perfekt ist und jede Clique von $D$ in diesem Komplement einen azyklischen Subdigraphen induziert. (Man sagt auch, das Komplement ist eine cliquen-azyklische Superorientierung von einem perfekten Graphen.)*

Die perfekten Digraphen werden nachher bei der Untersuchung der dihomomorphen Cores noch einmal vorkommen. Ansonsten verweise ich zu diesem Thema auf das zitierte Paper und die daran anschließende Untersuchung von Andres et al. [ABHW19], die ich hier nicht genauer darstellen kann, da sie mit dem Symmetriebegriff nicht viel zusammenhängt, sowie eine genauere Darstellung der perfekten Graphen voraussetzt, die nicht zum Themengebiet dieser Arbeit gehören. Das Hauptergebnis aus [AH15] ist aber dazu durchaus wichtig, da es mir überhaupt gezeigt hat, wie Symmetriebeweise zu führen sind, so wie hier die $F$-Symmetrie über alle $F$ für perfekten Digraphen bewiesen wurde.

Zum nächsten Satz benötigen wir folgendes

**Lemma 4.7.** *Wenn $D$ azyklisch ist, sind alle Abbildungen von $D$ zu jedem $F$ zirkulär, und für azyklische $F$ sind dies auch die einzigen möglichen Abbildungen nach $F$.*

*Beweis.* Wenn $D$ azyklisch ist, gibt es offenbar keine zyklische Knotenmenge in $D$, damit aber auch keine Bedingungen für zirkuläre Morphismen; also ist bereits jede Knotenabbildung zirkulär. Wenn $F$ umgekehrt azyklisch ist, und $D$ nicht azyklisch wäre, müsste man einen Zykel aus $D$ auf eine zyklische Knotenmenge in $F$ abbilden, was unmöglich ist, da es eine solche nicht gibt, also muss in so eine Fall $D$ auch stets azyklisch sein, wenn es überhaupt zirkuläre Morphismen von $D$ nach $F$ geben kann. □

**Satz 4.8.** *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

*(i)* $D = O(D)$ *ist nicht azyklisch*

*(ii)* $D$ *ist* $F$*-asymmetrisch für alle* $F$

*(iii)* $D$ *ist* $K_1$*-asymmetrisch.*

*Beweis.* (i) ⇔ (iii): Da $D = O(D)$, ist $S(D) = |V(D)|K_1$, d.h. azyklisch, also ist die triviale und einzige Abbildung von $S(D)$ nach $K_1$ zirkulär; da aber $D$ nicht azyklisch, ist diese Abbildung nicht zirkulär auf $D$, d.h. sie ist in $Circ(S(D), K_1) \setminus Circ(D, K_1)$, also ist $D$ $K_1$-asymmetrisch. Wenn umgekehrt $D$ $K_1$-asymmetrisch ist, muss es ein Gegenbeispiel, d.h. eine zirkuläre

Abbildung von $S(D)$ nach $K_1$ geben, d.h. $S(D)$ muss azyklisch sein, da es $K_1$ ist. Damit dies ein Gegenbeispiel ist, darf diese Funktion aber nicht zirkulär auf $D$ sein, d.h. $D$ muss zyklisch sein, also folgt dass $D = O(D)$ und $D$ nicht azyklisch sein muss.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Wenn $D$ $F$-asymmetrisch ist für alle $F$, ist $D$ offenbar auch $K_1$-asymmetrisch. Umgekehrt, wenn $D$ $K_1$-asymmetrisch, bilde man $D$ ganz auf einen beliebigen Knoten in $F$ ab, d.h. wir betrachten eine beliebige konstante Funktion $f : V(D) \to V(F)$. Offenbar, da nach dem erste Teil $D = O(D)$ nicht azkylisch, ist dies keine zirkuläre Abbildung auf $D$, da $D$ nicht azkylisch, aber sie ist zirkulär auf $S(D)$, da $D = O(D)$, d.h. $S(D) = |V(D)|K_1$ gilt. Damit liegt diese Abbildung in $Circ(S(D), F) \setminus Circ(D, F)$, also ist $D$ $F$-asymmetrisch für beliebige $F$. □

**Korollar 4.9.** *Es gibt kein $F$, so dass alle $D$ $F$-symmetrisch bzw. $F$-asymmetrisch sind.*

Ich werde darum im nächsten Abschnitten zunächst solche $F$, die für möglichst viele bzw. möglichst wenige $D$ die Symmetrie erfüllt, zu beschreiben versuchen, bevor ich umgekehrt das Problem von der Seite bestimmter anderer möglicher $D$ betrachten werde.

## 4.2 Muster und Symmetrievererbung

Mit diesen beiden Sätzen hat sich die vollständige Symmetrie oder Asymmetrie als durch die $K_n$-Symmetrie ausreichend beschreibbar erwiesen, und ist als Kriterium für diese Symmetrie die Existenz gewisser induzierter Kreise hervorgehoben. Es scheint nun die Frage angemessen, ob es vergleichbare Muster oder Symmetriebrecher für andere Digraphen $F$ im Bezug auf die $F$-Symmetrie gibt, oder ob dies die einzigen sind, wozu ich nun einige elementaren Ergebnisse vorstellen werde:

**Definition 4.10.** Eine Menge von Digraphen heißt $F$-Symmetriebrecher, wenn alle $D$ mit einem induziertem Digraphen aus dieser Menge $F$-asymmetrisch sind, $F$-charakterisierend (oder $F$-Symmetriemuster) wenn alle $D$ ohne solche Subdigraphen $F$-symmetrisch sind, und $F$-Muster, wenn sie beides zugleich sind, d.h. $D$ genau dann $F$-symmetrisch ist, wenn es keinen der Digraphen aus dieser Menge als Subdigraphen enthält. Ein Muster heißt $\subseteq$-minimal, wenn jeder Digraph in ihm keinen andern induziert enthält.

**Anmerkung 1.** *Offenbar ist $\{\vec{C}_i | i \geq 3\}$ die kleinste $F$-charakterisierende Menge, und $\{D | D$ ist $F$-asymmetrisch$\}$ der exakte Symmetriebrecher, eben darum auch der gröbste und nicht charakterisierend. Ein allgemeines Muster für jedes $F$ lässt sich nicht angeben, daher werden wir im folgenden die*

*Muster in ihrer Struktur, und dahingehend, was sie über $F$ aussagen, untersuchen:*

**Satz 4.11.** *Ein $\subseteq$-minimales $F$-Muster ist Teilmenge jedes andern $F$-Musters*

*Beweis.* Sei $M$ ein $\subseteq$-minimales Muster, $D \in M$, und $M'$ ein anderes Muster. Da $D$ sich selbst enthält, ist es $F$-asymmetrisch, muss also nach Definition von $M'$ einen Digraphen $D' \in M'$ induziert enthalten. Wenn $D'$ nun ein echter Teildigraph von $D$, müsste er, da er mit $D' \in M'$ auch F-asymmetrisch ist, also auch einen Digraphen $D''$ aus M induziert enthalten, und dieser wäre wiederum ein echter induzierter Subdigraph von $D$ - was der $\subseteq$-Minimalität von $M$ widerspricht. Also ist selbst $D \in M'$, d.h. $M \subseteq M'$. □

Wir können nun für gewisse, sehr stark eingeschränkter Digraphen $F$ die Existenz $\subseteq$-minimaler Muster beweisen. $F$ heißt hierfür symmetrievererbend, wenn alle induzierten Teildigraphen $F$-symmetrischer Digraphen wiederum $F$-symmetrisch, bzw. wenn Oberdigraphen $F$-asymmetrischer Digraphen wiederum $F$-asymmetrisch sind.

**Satz 4.12.** *Jedes symmetrievererbende $F$ hat ein $\subseteq$-minimales Muster, wenn es überhaupt ein Muster $M$ hat, und solch eins lässt sich in $O(n^2)$ (bezüglich $|M|$) aus $M$ berechnen, wenn eine Auswahlfunktion für $M$ und seine Teilmengen bekannt ist.*

*Beweis.* (Unter Voraussetzung des Auswahlaxioms, sofern die Funktion nicht bekannt ist.) Sei $M$ ein $F$-Muster, was nicht unbedingt $\subseteq$-minimal ist. Gehe nun iterativ folgendes Verfahren durch, angefangen mit leerem $M'$:

1. Wähle einen beliebigen Digraphen $D \in M$ aus (hier wird das Auswahlaxiom benötigt)

2. Entferne aus $M$ alle Digraphen, die $D$ als induzierten Subdigraphen enthalten, einschließlich $D$ selbst

3. Überprüfe ob in $M'$ ein Digraphen ist, den $D$ als induzierten Subdigraphen enthält. Wenn nein, füge $D$ zu $M'$ hinzu und entferne alle Digraphen aus $M'$, in denen $D$ als induzierter Subdigraph enthalten ist.

Als Pseudo-Code (wobei *teilm-ind* das induzierte Enthaltensein, *in* dagegen die Mengen-Elementbeziehung bedeutet):

```
While(M != {}) begin
        D := M.randomElement();
        M := M - {D' in M | D teilm-ind D'};
        If ({D' in M' | D' teilm-ind D} = {})
                M' := M' union {D} - {D' in M' | D teilm-ind D'}
end
```

Auf diese Weise werden alle Digraphen aus $M$, die benötigt werden, um ein $\subseteq$-minimales Muster zu erzeugen, in $M'$ aufgenommen, und die größeren Digraphen in $M'$ nach und nach durch kleinere ersetzt. Die Symmetrievererbung von $F$ garantiert dabei, dass dies stets möglich ist, und wir die kleineren Digraphen nicht benötigen, um die größeren mitabzudecken. - Da wir maximal alle Digraphen von $M$ durchgehen müssten, wenn wir die Schleife durchlaufen, und dabei die bisherigen Digraphen in $M'$ und die alten aus $M$ anschauen müssen, fällt selbst, wenn keine Digraphen mit entfernt werden (was der übliche Fall wäre, also je nach Wahrscheinlichkeitsverteilung das Verfahren auf etwa $O(log^2 n)$ reduziert)), maximal ein Aufwand von $O(n^2)$ dabei heraus, wenn eine Auswahlfunktion gegeben ist. Diese zu konstruieren ist i.A. nicht möglich, daher muss diese (etwa für endliche $M$) in Spezialfällen angepasst werden. (Für eine solch gegebene Funktion ist das Auswahlaxiom natürlich oben nicht nötig, aber wenn es nötig ist, gilt umgekehrt dieses Komplexitätsergebnis nicht.) □

Es gilt nun aber auch umgekehrt, dass die Existenz beliebiger Muster bereits ausreicht, um Graphen als symmetrievererbend zu klassifizieren:

**Satz 4.13.** *Wenn $F$ ein Muster hat, ist $F$ symmetrievererbend*

*Beweis.* Sei $M$ ein $F$-Muster. Offenbar sind alle Digraphen aus $M$ $F$-asymmetrisch, und $D$ ist genau dann $F$-asymmtrisch, wenn $D$ einen induzierten Teilgraphen aus $M$ hat. Nun wird diese Eigenschaft aber durch Oberdigraphenbildung erhalten: Wenn $D$ $F$-asymmetrisch, dann enthält $D$ einen Teildigraphen aus $M$. Aber ein $D'$, dass $D$ als induzierten Teilgraphen enthält, enthält ja darum auch den Teilgraphen aus $M$ als induzierten Teildigraphen, also ist $D'$ selbst $F$-asymmetrisch. □

Offenbar gilt dies für $F$-charakterisierende Mengen bzw. $F$-Symmetriebrecher nicht, da dort entweder der erste oder der letzte Schluss nicht notwendig funktioniert.

Die vorher angegebenen Sätze erlauben nun eine weitgehende Charakterisierung von symmetrievererbenden Digraphen, die sie nicht nur sehr stark einschränken, sondern außerdem eine vergleichbare Gruppe von ihr entgegenstehenden Digraphen zur Betrachtung bringt.

**Satz 4.14.** *$F$ ist symmetrievererbend $\Leftrightarrow$ alle nicht induziert kreisfreien Digraphen sind $F$-asymmetrisch.*

*Beweis.* Wenn $F$ symmetrieverebend, und $D$ nicht induziert kreisfrei, folgt daraus, dass die gerichteten Kreise selbst $F$-asymmetrisch für alle $F$ sind, dass $D$ als Oberdigraph eines induzierten Kreises also ebenfalls $F$-asymmetrisch sein muss. Wenn umgekehrt $F$ diese Eigenschaft hat, so folgt aus der Eigenschaft, das Subdigraphen induziert kreisfreier Digraphen ebenfalls induziert kreisfrei, bzw. Oberdigraphen nicht induziert kreisfreier Digraphen ebensowenig induziert kreisfrei sind, dass dasselbe auch für $F$-Symmetrie bzw. -Asymmetrie gilt, also $F$ symmetrievererbend ist. □

**Korollar 4.15.** *Die vollständigen Digraphen $K_n$ sind nicht symmetrievererbend.*

*Beweis.* Offenbar ist $D = K_{n+1} \cup \vec{C}_i$ nicht $K_n$-asymmetrisch, da $S(D)$ keine Abbildung nach $K_n$ erlaubt, aber $D$ ist nicht induziert kreisfrei. □

**Anmerkung 2.** *Allerdings ist die Menge $\mathcal{F} = \{K_n | n \in \mathbb{N}\}$ symmetrievererbend; hier werden die Aussagen dann als: $F$-symmetrisch für ein $F \in \mathcal{F}$ bzw. $F$-asymmetrisch für alle $F \in \mathcal{F}$ gelesen.*

**Korollar 4.16.** *Das $\subseteq$-minimale Muster ist für alle symmetrievererbenden Digraphen $F$ dasselbe, nämlich die induzierten Kreise $\{\vec{C}_i | i \geq 3\}$.*

*Beweis.* Offenbar ist kein induziert kreisfreier Digraphen $F$-asymmetrisch, also müssen alle Digraphen im Muster induzierte Kreise enthalten. Da nun nach obigem Ergebnis aber für alle nicht induziert kreisfreien Digraphen gilt, dass sie $F$-asymmetrisch sind, müssen sie alle induzierte Digraphen aus dem Muster enthalten. Offenbar enthalten nun die Kreise nicht einander, und kein Digraph, der induzierte Kreise von nur einer Länge enthält, enthält einen andern, der induzierte Kreise von anderer Länge enthält. Darum müssen die Kreise selbst im Muster sein, und durch die obere Konstruktion folgt, dasss einzig diese übrig bleiben, dass das $\subseteq$-minimale Muster also $M = \{\vec{C}_i | i \geq 3\}$ sein wird. □

**Satz 4.17.** *Wenn $F$ symmetrievererbend, sind auch alle $F'$ mit induziertem $F$ symmetrievererbend*

*Beweis.* Sei $D$ nicht induziert kreisfrei. Nach Voraussetzung ist $D$ $F$-asymmetrisch, d.h. es gibt eine Ausnahme, also einen Morphismus in $Circ(S(D), F) \setminus Circ(D, F)$. Nun sind aber diese beiden Mengen je Teilmengen von $Circ(S(D), F')$ bzw. $Circ(D, F')$, d.h. es gibt auch hier diese Ausnahme, und da der Morphismus eben nur auf F, nicht auf den Rest von F' abbildet, ist er ebenfalls

nicht in $Circ(D, F')$, d.h. er ist auch dort eine Ausnahme, und $D$ ist $F'$-asymmetrisch. Also sind alle nicht induziert kreisfreien $D$ $F'$-asymmetrisch, also $F'$ symmetrievererbend. □

**Korollar 4.18.** *Jede Digraphen-Menge, die beliebig große Cliquen enthält, ist symmetrievererbend.*

*Beweis.* Offenbar gilt für jedes $n$, dass einer der Digraphen $K_m$ mit einem $m \geq n$ enthält; damit sind aber auch alle vollständigen Digraphen unter ihnen induziert kreisfrei, so dass nach der obigen Aussage auch die neue Menge symmetrievererbend ist. □

Nach diesen Ergebnissen ist es völlig offen, ob einzelne Digraphen überhaupt symmetrievererbend sind. Ich vermute daher erst einmal:

**Vermutung 2.** *Symmetrievererbend sind nur Digraphenmengen, die mindestens abzählbar unendlich viele Digraphen enthalten*

da dies genau das obere Beispiel ist, und endlich viele endliche Digraphen zusammen eben einen einzelnen endlichen Digraphen, nämlich deren disjunkte (oder irgendwie verbundene) Summe, ebenfalls symmetrieverebend machen würden, was ich aber gerade für sehr unwahrscheinlich halte. Trotzdem ist es natürlich nicht ausgeschlossen, dass man über sehr komplexe Konstruktionen nicht doch symmetrievererbende Digraphen findet, weshalb es interessant wäre, sich Digraphen mit möglichst vielen verschiedenen induzierten Subdigraphen anzuschauen, da man dann ja beliebig große, und asymptotisch fast alle Digraphen mit einem solchen Verhalten ausgestattet betrachten müsste. Dass dies unmöglich ist, scheint fast durch die nachfolgenden Aussagen über asymptotische induzierte Kreisfreiheit im späteren Core-Kapitel bestätigt; da aber mit fast demselben Argument, wie hier das asymptotische induzierte Enthaltensein eines symmetrievererbenden Digraphen behauptet wird, später ein Widerspruch in dem Beweis gefunden werden kann, den ich hier gerade benötige, reicht dies als Argument nicht aus, und es müsste eine andere Konstruktion der Unmöglichkeit einzelner endlicher symmetrievererbender Digraphen gefunden werden.

## 4.3 Symmetrieschablonen und perfekte Digraphen

Hierhin gehört nun auch folgendes allgemeine Ergebnis zur Übertragung von Symmetrie:

**Satz 4.19.** *Wenn $D$ $F$-symmetrisch, dann ist $D$ $F'$-symmetrisch für alle induzierten Teilgraphen $F'$ von $F$*

*Beweis.* Nehme im Gegenteil an, $D$ wäre $F'$-asymmetrisch. Dann müsste es einen Morphismus in $Circ(S(D), F') \setminus Circ(D, F')$ geben; solch ein Morphismus wäre dann aber auch in $Circ(S(D), F)$ $Circ(D, F)$, da $F' \subseteq_{ind} F$, d.h. keine weiteren Kreise hinzugefügt worden sein konnten, die den Morphismus auf $D$ zirkulär machen würden. Also wäre $D$ auch $F$-symmetrisch, im Widerspruch zu Behauptung. □

**Korollar 4.20.** *Wenn $D$ $F$-asymmetrisch, ist $D$ $F'$-asymmetrisch für alle einen $F$ induzierenden Oberdigraphen $F'$.*

Nenne nun einen Digraphen $F$ eine $D$-Symmetrieschablone, wenn $F$ alle Digraphen $F'$, für die $D$ $F'$-symmetrisch ist, als induzierten Subdigraphen enthält. Wir können nun für einen Spezialfall direkt eine solche Schablone angeben:

**Satz 4.21.** *Wenn $D$ antisymmetrisch, aber nicht azyklisch ist, ist jeder Digraph eine Symmetrieschablone von $D$. Ansonsten ist kein endlicher Digraph eine Symmetrieschablone von $D$*

*Beweis.* Offenbar erfüllt $D$ nach Bedingung keine Symmetrie, also ist für die Symmetrieschablone auch keine zu erfüllen. Damit ist bereits jeder Digraph $F$ eine Symmetrieschablone von $D$. Wenn nun die Bedingung nicht erfüllt ist, ist $D$ $nK_1$-symmetrisch für alle $n$, d.h. $F$ müsste beliebig große $nK_1$ induziert enthalten. Also kann $F$ kein endlicher Digraph sein. □

Zu den unendlichen Schablonen kann man folgende Konstruktion finden:

**Satz 4.22.** *Wenn $D$ induziert kreisfrei ist, ist die eindeutige Symmetrieschablone $F = \cup_{F' Digraph} F'$, d.h. enthält alle möglichen Digraphen. Diese Schablone nenne ich auch maximale Symmetrieschablone. (D.h. dies gilt insbesondere für $D$ azyklisch)*

*Beweis.* Offenbar sind ind. kreisfrteie Digraphen auf alle Digraphen $F'$ schon $F'$-symmetrisch. Da die Schablone auch nicht größer sein kann, ist die Behauptung bewiesen. □

Für den übrigen Fall kann man leicht sehen, dass die Schablone ebenfalls sehr groß sein muss:

**Korollar 4.23.** *Wenn $D$ nicht azyklisch und nicht antisymmetrisch, enthält jede Symmetrischablone den ind. Subdigraphen $F = \cup_{F' azyklisch} F'$. Diesen Digraphen nenne ich auch minimal nichttriviale Symmetrieschablone.*

*Beweis.* Offenbar ist dann $D$ trivial $F'$-symmetrisch für alle azyklischen $F'$, da kein Digon nach $F'$ zirkulär abgebildet werden kann, d.h. $Circ(D, F') = Circ(S(D), F') = \emptyset$ gilt. Damit muss aber, da $F$ als disjunkte Vereinigung azyklischer Digraphen bereits azyklisch ist, $D$ auch $F$-symmetrisch sein, d.h. jede Schablone $F$ als induzierten Subdigraphen enthalten. □

Umgekehrt ist offenbar eine minimale Symmetrischablone höchstens so groß wie $F = \cup_{\omega(F')\leq ai(D)} F'$. Nenne diese Schablone die zu $D$ *ai*-äquivalente Symmetrieschablone. Man kann nun vermuten:

**Vermutung 3.** *Die ai-äquivalente Symmetrieschablone ist (fast) immer die minimale.*

Zu diesen beiden Varianten habe ich bisher keine Gegenbeispiele gefunden, da sich unendliche Digraphen schwer konstruktiv auf Symmetrien untersuchen lassen, da i.A. überabzählbar große Morphismenmengen zu untersuchen sind, und man hier außer mit sehr allgemeinen Sätzen, wie denen über induziert kreisfreie, azyklische oder antisymmetrische Digraphen, nicht leicht ein Ergebnis erzielt werden zu können scheint. (Hier wäre es vielleicht auch interessant, analytische Methoden anzuwenden, die in überabzählbaren Situationen ja eher Antworten geben können; da aber solche Mengen, wie sie hier die Morphismenmengen unendlicher Digraphen sind, nicht stetig im Bezug auf sinnvolle Fragen transformierbar sind, da die Überabzählbarkeit nur durch Produktbildung allgemeiner Relationen, nicht durch natürliche Grapheneigenschaften zu Stande kommt, und der Folgen- bzw. Baire-Raum auch ansonsten mit dem hier behandelten Stoff wenig zu tun hat. Es lohnt sich aber sicher, in dieser Richtung neue Konstruktionen zu wagen, wenn man der Frage allgemeiner Symmetrieschablonen, wie auch der Kategorisierung von Digraphenmengen gewisser Eigenschaften (wie oben der Symmetrievererbung, oder weiter unten der ZEM-Ähnlichkeit), weitere Einsichten gewinnen will.)

## 4.4 Antimuster und Antisymmetrie

Nachdem ich die symmetrievererbenden Digraphen, d.h. gerade die möglichst asymmetrisierenden, betrachtet habe, will ich nun die entgegengesetzte Eigenschaft untersuchen: Nenne $F$ ein Antimuster, oder einen möglichst symmetrisierenden Digraphen, wenn alle $D$, für die nicht $D = O(D)$ und $D$ nicht azyklisch gilt, $F$-symmetrisch sind. Hier gibt es ebenfalls eine charakterisierende Eigenschaft, die allerdings deutlich einfacher ist:

**Satz 4.24.** *$F$ ist ein Antimuster $\Leftrightarrow$ $F$ enthält kein Digon, d.h. $F = O(F)$ (also $F$ antisymmetrisch).*

*Beweis.* $\Rightarrow$: Sei $F$ ein Antimuster. Offenbar gilt für den Digraphen $D$, der aus $K_2$ entsteht, wenn man einen Knoten durch einen gerichteten Kreis ersetzt, dass $D \neq O(D)$, also muss $D$ $F$-symmetrisch sein. Wenn nun $F$ aber ein Digon enthielte, dann könnte man $S(D)$ offenbar ganz darauf abbilden, indem man alle Knoten des gerichteten Kreises auf die eine, den andern Knoten des Digons in $D$ auf die andere Seite des Digons in F abbildete, was offenbar in $Circ(S(D), F) \setminus Circ(D, F)$ liegt, im Widerspruch zur vorausgesetzen $F$-Symmetrie von $D$. Also kann es in $F$ keine Digons geben.

$\Leftarrow$: Angenommen, $F$ enthalte keine Digons. Wenn $D$ azyklisch ist, ist $D$ trivial $F$-symmetrisch; sei also $D \neq O(D)$ und $D$ zyklisch, d.h. insbesondere nichtleer. Dann muss $D$ aber ein Digon enthalten, also muss jeder zirkuläre Morphismus auf $D$ bzw. $S(D)$ dieses auf eines in $F$ abbilden - was unmöglich ist; somit ist $D$ ebenfalls trivial $F$-symmetrisch, da es somit auch von $S(D)$ aus keine zirkulären Morphismen nach $F$ gibt. Damit sind beide Fälle abgehandelt und $F$ ein Antimuster. □

Mit diesen Betrachtungen können wir also sehen, dass bei den Fragen von möglichst großer Symmetrie bzw. Antisymmetrie für gegebene F sich bisher entweder nur unbefriedigende oder wenig weitgehende Ergebnisse erzielen ließen. Dementsprechend werde ich im nächsten Kapitel versuchen, für ein gegebenes $D$, was nicht unbedingt den starken Einschränkungen der induzierten Kreisfreiheit oder Antisymmetrie entspricht, den Symmetrie- und Antisymmetriebereich unter den möglichen $F$ besser zu bestimmen, um die Ähnlichkeit gewisser $D$ zu fast symmetrischen (d.i. induziert kreisfreien) oder absolut antisymmetrischen Digraphen besser einschätzen zu können

# 5 Asymmetrie und induzierte Kreise

## 5.1 $K_n$-Symmetrie und der Asymmetrie-Index

Im letzten Kapitel hat sich abgezeichnet, dass für die Untersuchung des Symmetriebegriffs und der Asymmetrie insbesondere die $K_n$-Symmetrie eine besondere Rolle spielt, da ein Digraph ja, wenn er für alle $n$ $K_n$-symmetrisch ist, auch für alle Digraphen $F$ insgesamt $F$-symmetrisch ist, und umgekehrt $K_1$-Asymmetrie bereits allgemeine $F$-Asymmetrie ergibt. Es scheint also wichtig, den Begriff der $K_n$-Symmetrie eigens zu untersuchen, und es ergeben sich auch tatsächlich eine Reihe von Sätzen, die diese Symmetriebegriffe ziemlich genau eingrenzen können. Ich beginne mit einer einfachen Beobachtung:

**Satz 5.1.** *Wenn $D$ $K_n$-asymmetrisch, ist $D$ auch $F$-asymmetrisch für alle $F$ mit $\omega(F) \geq n$.*

*Beweis.* Nach Voraussetzung existiert ein $f \in Circ(S(D), K_n) \backslash Circ(D, K_n)$. Sei also $F$ mit $\omega(F) \geq n$ gegeben und $V' = \{v_1, ..., v_{\omega(F)}\}$ eine Maximalclique in $F$. Offenbar bildet $\{v_1, ..., v_n\}$ eine $n$-Clique in $F$, d.h. ein isomorphes Bild von $K_n$. Setze nun $f' : D \to F, f'(u) = v_{f(u)}$ für alle $u \in D$; dann ist offenbar $f' \in Circ(S(D), F) \setminus Circ(D, F)$, da die Zirkularität nicht von den andern Knoten in $F$ außerhalb des Bildes abhängt, also ist $D$ $F$-asymmetrisch. □

**Korollar 5.2.** *Wenn $D$ $K_n$-asymmetrisch, dann ist $D$ auch $K_{n+1}$-asymmetrisch.*

Also ist für die ganze Frage der $K_n$-Symmetrie nur entscheidend, ab welchem $n$ $D$ nicht mehr $K_n$-symmetrisch ist. Definiere daher

$$ai(D) := inf\{i \in \mathbb{N} | D \text{ ist } K_i\text{-asymmetrisch}\}$$

als den Asymmetrie-Index von $D$. Offenbar gilt nach dem bisherigen Ergebnis:

**Korollar 5.3.** *$D$ ist genau dann $K_n$-symmetrisch wenn $n < ai(D)$.*

Wir können darum die Ergebnisse des letzten Kapitels als Grenzbestimmungen formulieren: $ai(D) = \infty$ gdw. $D$ induziert kreisfrei ist; $ai(D) = 1$ gdw. $D = O(D)$ und $D$ nicht azyklisch ist. Für die dazwischenliegenden Werte ist die Frage aber noch offen und auch nicht ganz leicht zu beantworten. Wir erhalten aber aus dem oberen Widerspruchsbeweis für 4.1 (bzw. 4.2) folgende Abschätzung:

$$\vec{C}_i \subseteq_{ind} D \Rightarrow ai(D) \leq |V(D)| - i + 1$$

Wir können daher

$$ci(D) := sup\{i \in \mathbb{N} | \vec{C}_i \subseteq_{ind} D\}$$

als zirkulären Index von $D$ definieren und unsere Abschätzung auf

$$ai(D) \leq |V(D)| - ci(D) + 1$$

verbessern. Wenn wir noch beachten, dass es in diesem Beweis ja nur darauf ankam, dass man eine zyklische, aber antisymmetrische Knotenmenge in $D$ findet, die man einfarbig färben kann, ergibt sich mit

$$ci'(D) := sup\{|C||C = O(C) \subseteq_{ind} D \text{ ist nicht azyklisch}\}$$

als erweiterten zirkulären Index von $D$ sogar

$$ai(D) \leq |V(D)| - ci'(D) + 1.$$

Offenbar ist diese Grenze für $ai(D) = 1$ sowie $ai(D) = \infty$ exakt nach obigem Beweis und der Gleichheit im unendlichen (da für induziert kreifreie $D$ ja $ci(D) = ci'(D) = sup\emptyset = -\infty, ai(D) = inf\emptyset = \infty$ gilt, also auch $ai(D) = |V(D)| - (-\infty) + 1 = \infty + k = \infty$ für $k \in \mathbb{N}$), ob dies im allgemeinen der Fall ist, ist aber unklar. Da aber die beiden Spezialfälle aus dem letzten Kapitel hierunter fallen, vermute ich:

**Vermutung 4.** *Die Ungleichung ist exakt*

Falls sich diese Vermutung bestätigen würder, würde dies gemäß den nächsten Ergebnissen zugleich einen Beweis der NP-Härte von $ci'$, d.h. u.A. auch für $\alpha(G)$ für symmetrische Graphen bedeuten; da dies eine starke Behauptung ist, werde ich sie zunächst stehen lassen und auf Gegenbeispiele warten, da, um sie direkt zu beweisen, ich hier nicht die richtigen Mittel zur Verfügung habe.

Es gibt nun aber noch eine andere Bestimmung von $ai(D)$, durch die dieser Parameter deutlich besser beschrieben werden kann als durch induzierte Kreise:

**Satz 5.4.** *Wenn $D$ nicht induziert kreisfrei, ist $ai(D) \in \{\vec{\chi}(S(D)), \vec{\chi}(S(D)) + 1\}$, und für $\vec{\chi}(D) > \vec{\chi}(S(D))$ gilt immer $ai(D) = \vec{\chi}(S(D))$.*

*Beweis.* Da für $n < \vec{\chi}(S(D))$ auch $Circ(S(D), K_n) = \emptyset$, weil alle zirkulären Morphismen eben auch Difärbungen sind, und daher dann beide Mengen leer sind, ist $D$ auch $K_n$-symmetrisch für alle solche $n$; also muss $ai(D) \geq \vec{\chi}(S(D))$ gelten.

Wenn $\vec{\chi}(D) > \vec{\chi}(S(D))$, sei $f$ eine beliebige $S(D)$-Minimalfärbung. Offenbar ist $f$ nicht auf $D$ zirkulär, da es keine zirkulären Morphismen von $D$ zu Teilgraphen von $K_{\vec{\chi}(D)-1}$ geben kann, also ist $f$ ein Gegenbeispiel und $D$ bereits $K_{\vec{\chi}(S(D))}$-asymmetrisch, also $ai(D) = \vec{\chi}(S(D))$.

Wenn $\vec{\chi}(D) = \vec{\chi}(S(D))$ gilt, hängt es davon ab, ob es eine Minimalfärbung von $S(D)$ gibt, die auf $D$ nicht zirkulär ist; dann gilt offenbar aus demselben Grund wie eben $ai(D) = \vec{\chi}(S(D))$.

Nehme also an, dass es so eine Minimalfärbung nicht gibt, d.h. $ai(D) \geq \vec{\chi}(S(D))$, und sei stattdessen $f$ ein beliebiger Morphismus aus $Circ(D, K_{\vec{\chi}(D)}) = Circ(S(D), K_{\vec{\chi}(S(D))})$, und $C$ ein beliebiger induzierter Kreis in $D$. Offenbar ist der Morphismus $f'$, der die Knoten von $C$ in der neuen Farbe $\vec{\chi}(D)+1$ färbt und den Rest bei den Farben aus $f$ belässt, zirkulär auf $S(D)$, da die neue Farbklasse in $S(D)$ unabhängig ist und alle andern Farbklassen ja nur verkleinert wurden, also unabhängig bleiben; und ebenso offenbar ist die neue Farbklasse zyklisch in $D$, d.h. $f'$ auf $D$ nicht zirkulär. Damit ist $f' \in Circ(S(D), K_{\vec{\chi}(S(D))+1}) \setminus Circ(D, K_{\vec{\chi}(S(D))+1})$, d.h. $D$ ist $K_{\vec{\chi}(S(D))+1}$-asymmetrisch, also ist $ai(D) = \vec{\chi}(S(D)) + 1$. □

Hieraus kann man nun deutlich sehen, dass $ai(D)$ sich nicht durch einfaches Abzählen von Kreisen oder ähnliche polynomiale Operationen wird lösen lassen, es folgt hieraus nämlich:

**Satz 5.5.** *Das Problem der Bestimmung von $ai(D)$ für beliebige Digraphen $D$ ist NP-vollständig.*

*Beweis.* Seien $D_k$ antisymmetrische Digraphen mit $\vec{\chi}(D_k) \geq k$ in polynomialer Größe. Solche Digraphen gibt es nach [EGK91], da nach diesem Paper die minimale Größe eines Graphens $G$, der eine Orientierung mit dichromatischer Zahl $m$ besitzt, in der Größenordnung $\theta(m^2 ln^2(m))$ liegt, also solche $D_m$ in polynomialer Größe bereitgestellt werden können.

Wir können nun die Bestimmung von $ai(D)$ für allgemeine Digraphen polynomial auf das Graphen-Färbungs-Problem reduzieren. Setze dazu für einen beliebigen symmetrischen Graphen $G$

$$D_G := G \cup D_{|V(G)|+1}.$$

Es gilt $\vec{\chi}(D_G) = max\{\chi(G), \vec{\chi}(D_{|V(G)|+1})\} \geq |V(G)| + 1 > |V(G)| \geq \chi(G) = \chi(G \cup |V(D_{|V(G)|+1})|K_1) = \vec{\chi}(S(D_G))$. Also gilt nach obigem Satz $ai(D_G) = \vec{\chi}(S(D_G)) = \chi(G)$, d.h. $ai(D_G) \leq k$ gdw. $\chi(G) \leq k$.

Wäre nun $ai(D) \leq k$ für beliebige Digraphen polynomial lösbar, so wäre es auch $\chi(G) \leq k$ für beliebige Graphen. Da dieses Problem aber bekanntlich NP-vollständig ist, so gilt dasselbe für die Bestimmung von $ai(D)$ für beliebige Digraphen $D$. □

**Korollar 5.6.** *Die $K_n$-Symmetrie ist NP-hart für $n > 2$*

Da offenbar die $K_1$-Asymmetrie nach obigem allgemeinen Satz und die $K_2$-Asymmetrie nach der Äquivalenz zur Bipartition von $S(D)$, die nicht auf $D$ zirkulär ist, in polynomialer Zeit gelöst werden können, liegt folgende Vermutung nahe:

**Vermutung 5.** *Die $F$-Symmetrie ist polynomial für bipartite $S(F)$ und sonst (d.h. insb. $\omega(F) > 2$) NP-hart.*

Hierzu habe ich aber keine weiteren Ergebnisse finden können, da zwar die $S(F)$-Färbbarkeit von $S(D)$ nach den bekannten Ergebnissen von [HN90] polynomial ist, aber ich keine so offenbare Möglichkeit sehe, alle solchen Färbungen herauszufinden bzw. zu überprüfen (da sie ja nicht unbedingt, wie bei $K_2$ und zusammenhängendem $S(D)$, eindeutig sein müssen, sondern i.A. Permutationen über die Bildknoten benötigt, deren Anzahl in exponentiellem Maße mit $|V(D)| * |V(F)|$ ansteigt). Außerdem überträgt sich die NP-Härte nicht so leicht, da zwar deren NP-Härte auf die von $K_n$ offenbar reduziert werden kann, die umgekehrte Übertragung aber nicht derart offenbar ist. Dies wird daran deutlich, dass es, wie im nächsten Abschnitt gezeigt, auch solche $F$ gibt, dass $D$ $F$-asymmetrisch und $\omega(F) \leq ai(D)$ gilt, d.h. das Problem sich nicht auf die Symmetrien vollständiger Digraphen reduziert, sondern dadurch lediglich in dem Cliquenzahl-Bereich, für die es überhaupt Symmetrie geben kann, eingeschränkt werden kann.

Es kann nun hieraus die Existenz gewisser Kreise gefolgert werden, da nach obigen Ungleichungen gilt:

$$ci(D) \leq |V(D)| - ai(D) + 1 \leq |V(D)| - \vec{\chi}(S(D)) + 1$$

was offenbar äquivalent ist zu

$$\vec{\chi}(S(D)) \leq |V(D)| - ci(D) + 1$$

allerdings selbst beim Erweitern auf $ci'(D)$ nur die bekannte Abschätzung

$$\chi(G) \leq |V(G)| - \alpha(G) + 1$$

für beliebige Graphen $G$ wiederholt. Aufgrund der NP-Vollständigkeit ist auch nicht sehr viel mehr zu erwarten, weswegen ich hiermit meine Ausführungen zu $ai(D)$ abschließe.

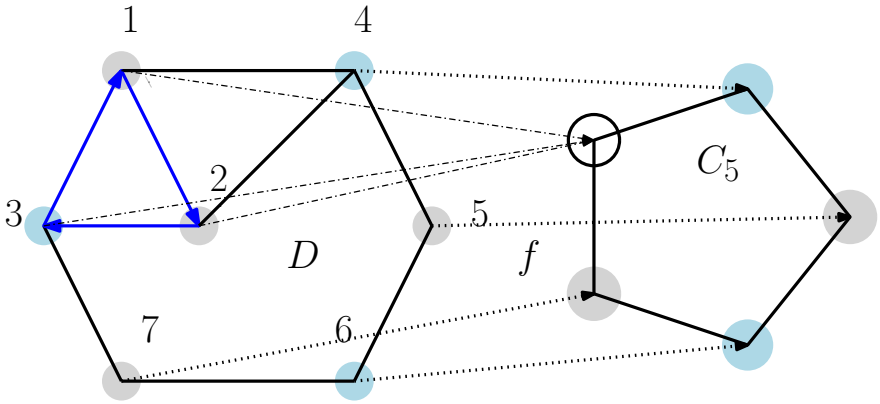



Abbildung 5: Das Gegenbeispiel zur *ai*-Vermutung

## 5.2 Allgemeine Symmetrie und offene Fragen

Ich will abschließend zu Asymmetrie noch ein Beispiel angeben, was zeigt, dass der Asymmetrie-Index nicht ausreicht, um Asymmetrie im allgemeinen zu charakterisieren, und eine offene Frage zur weiteren Forschung eröffnet.

Nach den oberen Ausführungen ist folgende Situation bezüglich der Symmetrie noch völlig offen: $D$ sei nicht induziert kreisfrei und nicht azyklisch, $F$ unvollständig und nicht azyklisch mit $|V(F)| \geq \vec{\chi}(D)$, $\omega(F) < ai(D) \leq \vec{\chi}(S(D))$. Es liegt nun nahe, da der Fall $\omega(F) \geq ai(D)$ eindeutig negativ beantwortet wurde, zu vermuten, dass sämliche übrigen Digraphenpaare eine Symmetrie erzeugen; dem ist aber nicht so.

**Beispiel 5.7.** Definiere $D := (\mathbb{Z}_7, \{(1,2),(2,3),(3,1),(1,4),(4,1),(2,4),(4,2),(4,5),(5,4),(5,6),(6,5),(6,7),(7,6),(7,3),(3,7)\})$. Da $D \neq O(D)$ gilt, ist $D$ $K_1$-symmetrisch, und da $S(D)$ bipartit ist, so dass die eindeutige 2-Färbung von $S(D)$ auch eine 2-Difärbung von $D$ ist, da $1, 2$ zur einen und 3 zur andern Menge der Partition gehören, ist $D$ auch $K_2$-symmetrisch, d.h. $ai(D) > 2$. $D$ ist $C_5$-asymmetrisch, da $f : D \to C_5$ mit

$$f(1) = f(2) = f(3) = 1', f(4) = 2', f(5) = 3', f(6) = 4', f(7) = 5'$$

ein Homomorphismus auf $S(D)$, aber nicht zirkulär auf $D$ ist, da der Zyklus $1-2-3$ auf einen Knoten abgebildet wird, also kein zyklisches Bild hat. Es ist aber $\omega(C_5) = 2$, d.h. es gilt $D$ $F$-asymmetrisch und $\omega(F) = 2 < ai(D)$. (Die ganze Konstruktion ist zum einfacheren Nachvollzug auf Abbildung 5 zu sehen.)

Das Beispiel hat offenbar folgende allgemeine Form:

**Satz 5.8.** *Wenn $C = O(C) \subseteq_{ind} D$ nicht azyklisch, ist $D$ $D/C$-asymmetrisch*

*Beweis.* Bilde die Knoten aus $C$ auf den Quotientenknoten ab. Offenbar ist das ein Homomorphismus auf $S(D)$, da $S(C) = S(O(C)) = |C|K_1$, aber da $C$ nicht azyklisch ist, ist es kein zirkulärer Morphismus auf $D$. Also ist mit diesem Gegenbeispiel $D$ $D/C$-asymmetrisch. □

**Korollar 5.9.** *$D$ ist $D/(C_1, ...., C_n)$-asymmetrisch wenn $C_i = O(C_i)$ und mindestens ein $C_i$ nicht azyklisch. $D[D_1, ..., D_n]$ ist $D$-asymmetrisch wenn $D_i = O(D_i)$ und mindestens ein $D_i$ nicht azyklisch.*

Definiere darum $D/ := \{D'|D' = D/(C_1, ..., C_n)$ mit $C_i = O(C_i) \subseteq_{ind} D$ und mind. ein $C_i$ nicht azyklisch$\}$ als asymmetrischen Quotientenraum von D. Ich vermute:

**Vermutung 6.** *Wenn $\omega(F) < ai(D)$ und $F$ keinen Digraphen aus $D/$ induziert enthält, ist $D$ $F$-symmetrisch.*

Ich habe zu dieser Vermutung bisher kein Gegenbeispiel gesehen, aber auch keinen Ansatz gefunden, hier eine größere Klasse von Digraphenpaaren als symmetriebildend zu beweisen oder auszuschließen. Ich lasse darum die Vermutung an dieser Stelle als Frage offen.

Die andere offene Frage ist, ob man noch weiteres über die induzierten Kreise in $D$ herausfinden kann, außer, dass sie eine gewisse Größe nicht überschreiten. Ich werde im nächsten Kapitel die Kreisgröße noch von unten beschränken können (durch den girth), aber das besagt ebensowenig etwas über die tatsächliche Existenz gewisser Kreisgrößen. Auch diese Frage werde ich darum wohl zuerst offen lassen müssen.

# 6 Die Circ-Ordnung und Kreisähnlichkeit

Nachdem die letzten drei Kapitel sich mit der Gleichheit oder Ungleichheit der Mengen $Circ(D, F)$ beschäftigt haben, möchte ich in diesem Kapitel die Ergebnisse, die ich zum Problem der möglichen Existenz zirkulärer Morphismen, d.h. dem zirkulären Färbungsproblem bzw. der zirkulären Ordnung gefunden habe, zusammenfassen. (Es wird hierfür auch $D \to F$ statt $Circ(D, F) \neq \emptyset$ geschrieben.)

## 6.1 NP-Vollständigkeit des Färbungsproblems

Zunächst werde ich hier den Beweis der NP-Vollständigkeit des zirkulären Färbungsproblems für die meisten Fälle, wie es von Hochstättler et al. [HSS19] bewiesen wurde, wiedergeben, um die grundlegende Schwierigkeit dieser Frage deutlich zu machen:

**Satz 6.1.** *Wenn $F$ nicht induziert kreisfrei, und a) $S(F)$ ist nicht-bipartit oder leer, oder b) $\vec{\chi}(F) = 2$, dann ist das zirkuläre $F$-Färbungs-Problem NP-vollständig*

*Beweis.* [HSS18, Th. 8] Offenbar sind alle $F$-Färbungs-Probleme in NP, da jeder zirkuläre Homomorphismus ein Zertifikat der Färbbarkeit ist, das sich polynomial in $|V(D)|$ auf seine Zirkularität überprüfen lässt. Es ist also noch für die genannten Fälle die NP-Vollständigkeit zu beweisen:

a) Sei $S(F)$ nicht-bipartit oder leer. Setze $k = \vec{g}(F)$, $H_F := (V(F), \{(u, v) | v \neq u, \{v, u\} \subseteq C \subseteq V(F), F[C] \cong \vec{C}_k\})$. Wenn $S(F)$ leer ist, muss $k \geq 3$ gelten, also bildet ein beliebiger induzierter Kreis $v_1, ..., v_k$ eine $k$-Clique in $H_F$, d.h. $H_F$ enthält ein Dreieck. Wenn $S(F)$ nicht bipartit gilt $k = 2$, und da für ein Digon in $F$ auch ein Digon in $H_F$ liegt, gibt es also einen ungeradlangen Kreis in $H_F$; d.h. $H_F$ nicht bipartit, also ist nach dem Ergebnis von Hell/Neshtril [HN90, zitiert nach [HSS18]] das $H_F$-Färbungsproblem NP-vollständig.

Sei $G$ ein ungerichteter Graph und $\vec{G}$ eine azyklische Orientierung von $G$, dann erzeuge man $D_G$ aus $\vec{G}$ durchs hinzufügen einer Kopie von $\vec{P}_{k-1}$ für jeden Bogen, so dass jeder Bogen $e$ in einem andern $k$-Zykel $C(e)$ enthalten ist. Offenbar ist die Größe dieser Konstruktion polynomial in $|V(G)|$, weswegen, wenn $G \to_{Hom} H_F \Leftrightarrow D_G \to_{Circ} F$ gelten sollte, das $H_F$-Färbungsproblem auf das zirkuläre $F$-Färbungsproblem reduzierbar ist, also das zweite ebenfalls NP-vollständig sein muss. Dies gilt es also zu beweisen:

$\Rightarrow$ Sei $\phi : V(G) \to V(H_F)$ ein Homomorphismus, dann ist, da für $e = (x, y) \in \vec{G}$ auch $\phi(x)\phi(y) \in H_F$ gilt, ein gerichteter Kreis $C'(e)$ von Länge $k$ in $F$ enthalten, der auch die Knoten $\{\phi(x), \phi(y)\}$ enthält. Da $|V(C(e)) \setminus$

$\{x,y\}| = |V(C'(e))\backslash\{\phi(x),\phi(y)\}| = k-2$ für alle $e$, gibt es jeweils Bijektionen $f_e : V(C(e)) \setminus \{x,y\} \to V(C'(e)) \setminus \{\phi(x),\phi(y)\}$. Setze nun

$$\phi' : V(D_G) \to V(F), \phi'(u) = \begin{cases} \phi(u) & \text{wenn } u \in V(G) \text{ ist,} \\ f_e(u) & \text{wenn } u \in V(C(e)) \setminus \{x,y\} \\ & \text{für ein } e \in E(G) \text{ ist.} \end{cases}$$

$\phi'$ ist ein zirkulärer Homomorphismus, da jede zyklische Menge in $D_g$, da $\vec{G}$ azyklisch war, einen ganzen Kreis $C(e)$ enthalten muss, also mit $\phi'(V(C(e)) = V(C'(e))$ nach Definition von $f_e$ das Bild unter $\phi'$ ebenfalls zyklisch ist.

$\Leftarrow$ Sei umgekehrt $\phi' : V(D_G) \to V(F)$ zirkulär, dann ist $\phi'(V(C(e))$ offenbar zyklisch für alle Kanten $e \in G$, in einem Kreis, der nach Definition von $k$ mindestens $k$ lang sein muss, wegen $|\phi'(V(C(e)))| \leq |V(C(e))| = k$ also exakt $k$ lang ist, d.h. $\phi'(V(C(e)))$ ist ein Minimalkreis von $F$. Da $\phi'$ auf $V(C(e))$ injektiv sein muss, damit das Bild überhaupt zyklisch bleibt, da es kleinere Kreise ja nicht geben kann, gilt $\phi'(x) \neq \phi'(y)$, und nach Definition von $H_F$ gibt es also eine Kante $\phi'(x)\phi'(y)$ für jede Kante $e = xy \in E(G)$, d.h. $\phi = \phi'|_{V(G)}$ ist ein Homomorphismus von $G$ nach $H_F$.

b) Sei $\vec{\chi}(F) = 2$, d.h. $F \to K_2$. Da in a) bereits der Fall für leere $S(F)$ bewiesen wurde, sei $S(F)$ nichtleer, d.h $K_2 \to F$; also ist das $F$- und das $K_2$-Färbungproblem äquivalent. Da nach [BFJ+04, Th. 3.1] das 2-Difärbungsproblem NP-vollständig ist, gilt dasselbe also auch für die zirkuläre $F$-Färbung. Damit sind die beiden Fälle bewiesen. □

## 6.2 Elementare Eigenschaften der Circ-Ordnung

Damit wird, wenn nicht $S(F)$ nichtleer, bipartit, aber $F$ nicht 2-färbbar, jede Ordnungseigenschaft der Circ-Ordnung auch ein NP-Vollständigkeits-Beweis jener Eigenschaften, die zirkuläre $F$-Färbbarkeit charakterisieren, was zum einen die möglichen Ordnungseigenschaften einschränkt, andererseits viele Größen als NP-hart charakterisiert. In demselben Paper werden bereits zwei solcher Eigenschaften angegeben:

**Satz 6.2.** *Wenn $D \to F$ ist, dann gilt $\vec{\chi}^*(D) \leq \vec{\chi}^*(F)$ und $\vec{\chi}_f(D) \leq \vec{\chi}_f(F)$.*

*Beweis.* [HSS18, Prop. 6] Die Ungleichung für $\vec{\chi}^*$ folgt direkt aus der Charaktersierung von azyklischen $(k,d)$-Färbungen als zirkulären Morphismen nach $\vec{C}(k,d)$ und der Komposition von zirkulären Morphismen.

Für die fraktionale chromatische Zahl, sei $f : D \to F$ zirkulär und $x'$ eine Lösung des folgenden linearen Programms für $F$:

$$min\{\sum_{A \subseteq_{ind} V(F) \text{ azyklisch}} x_A | \sum_{A \subseteq_{ind} V(F) \text{ azyklisch}, v \in A} x_A \geq 1 \forall v; x \geq 0\}$$

und setze

$$x_A := \sum_{A' \subseteq_{ind} V(F) \text{ azyklisch}, f^{-1}(A')=A} x'_{A'}$$

für alle azyklischen $A \subseteq V(D)$. Da $f^{-1}(A') \subseteq V(D)$ nach Zirkularität von $f$ azyklisch ist für alle azyklischen $A' \subseteq V(F)$, ist $x$ eine mögliche Lösung mit

$$\vec{\chi}_f(D) \leq \sum_{A \subseteq_{ind} V(D) \text{ azyklisch}} x_A = \sum_{A' \subseteq_{ind} V(F) \text{ azyklisch}} x'_{A'} = \vec{\chi}_f(F)$$

□

Eine andere Charakterisierung der zirkulären Ordnung liegt in einem Satz, die mögliche Abbildbarkeit mit dem Digirth in enge Beziehungen setzt:

**Satz 6.3.** *Wenn $D \to F$ gilt, dann ist $\vec{g}(D) \geq \vec{g}(F)$ oder $D$ azyklisch.*

*Beweis.* Offenbar bilden azyklische $D$ in beliebige $F$ ab. Sei also $D$ nicht azyklisch und $D \to F$. Dann gibt es einen Kreis $C = \vec{C}_{\vec{g}(D)} \subseteq_{ind} D$, der irgendwie auf $F$ abbildet. Wenn nun $\vec{g}(D) < \vec{g}(F)$ gälte, dann wäre das Bild von $C$ in $F$ aber stets azyklisch, da es überhaupt keinen Kreis gibt, der klein genug wäre, im Widerspruch zu $D \to F$. Also gilt $\vec{g}(D) \geq \vec{g}(F)$. □

**Korollar 6.4.** *Wenn $D \to F$ und $D$ zyklisch, ist $ci(D) \geq \vec{g}(F)$.*

**Korollar 6.5.** *Sei $D_i$ eine Familie von Digraphen mit verschiedenem Digirth. Dann wird $D_i$ durch $\to$ (zirkuläre Abbildbarkeit) partiell geordnet.*

Umgekehrt gilt dies allerdings nicht, da ein beliebiges $D$ mit $D \not\to F$ und $\vec{g}(D) > \vec{g}(F)$ ja zu $D' = D \cup K_{\vec{g}(F)}$ erweitert werden kann, so dass offenbar $D' \not\to F$, $\vec{g}(D) = \vec{g}(F)$ gilt. Daher kann hier nicht von der NP-Härte der Färbbarkeit auf die des Digirths geschlossen werden. Trotzdem liegt darumwillen nahe:

**Vermutung 7.** *Die Berechnung des Digirths beliebiger Digraphen ist NP-vollständig*

Bei der Anwendung auf Kreise lässt sich nun noch einiges weiteres beobachten, und noch einige mit diesen Bemerkungen eng verwandte Begriffe einführen. So gilt etwa:

**Korollar 6.6.** $\vec{C}_i \to \vec{C}_j \Leftrightarrow i \geq j$

Definiere nun das Kreisintervall von $D$ als $[\vec{g}(D), ci(D)]$. Der obere Satz besagt also, dass wenn das Kreisintervall von $D$ nichtüberlappend hinter dem von $F$ liegt, $D$ nicht auf $F$ abbilden kann, also müssen, wenn $D \to F$ und $F \to D$ gilt, sich die Kreisintervalle überlappen. Darum gilt:

**Korollar 6.7.** *Sei $D_i$ eine Familie von Digraphen mit einander nicht überlappenden Kreisintervallen. Dann wird $D_i$ durch $\to$ (zirkuläre Abbildbarkeit) partiell geordnet.*

**Korollar 6.8.** *Das Kreisintervall eines induzierten Subdigraphens $D'$ von $D$ ist ein Subintervall des Kreisintervalls von $D$*

*Beweis.* Die Kreise aus $D'$ können nur aus $D$ stammen. Wäre ein Kreis in $D'$ länger als $ci(D)$, so wäre er auch in $D$, ebenso bei kleinere Kreisen kleiner als $\vec{g}(D)$, also in beiden Fällen ein Widerspruch. □

Wir finden also durch einfach zu berechnende Subdigraphen vielleicht eher eine Möglichkeit, das Kreisintervall anzunähern. Das Problem dabei ist natürlich, dass das Problem bei der Bestimmung des Kreisintervalls gerade die Suche nach gewissen induzierten Subdigraphen - nämlich gerade den induzierten gerichteten Kreisen ist, weswegen uns das hier nicht wirklich weiterhilft.

Es gilt außerdem nach dem oberen Satz:

**Korollar 6.9.** *Wenn $D \to \vec{C}_i$, ist $\vec{g}(D) \geq i$ oder $D$ azyklisch*

da ein kleineres $i$ gar nicht auf den ganzen Kreis abbildbar wäre, also nie zyklisch sein könnte. Damit gilt hier, dass das Kreisintervall sich nur am Rand überlappen kann. Definiere danach also:

F heißt schwach kreisähnlich, wenn für alle nicht azyklischen $D \to F$ $\vec{g}(D) \geq \vec{g}(F)$, und stark kreisähnlich wenn $\vec{g}(D) \geq ci(F)$. $F$ heißt stärker trennend als Kreise, wenn für ein nicht azyklisches $D \to F$ $\vec{g}(D) > ci(F)$, und absolut kreisstärker wenn dies für alle solchen D gilt. Da schwache Kreisähnlichkeit offenbar nach dem oberen Satz für alle Digraphen gilt, sind die andern Eigenschaften genauer zu untersuchen:

**Satz 6.10.** *Wenn $F$ ein nichttiviales Kreisintervall hat, ist $F$ nicht stark kreisähnlich*

*Beweis.* Nimm einen beliebigen $\vec{C}_{\vec{g}(F)}$ aus $F$ und bilde ihn per Projektion auf sich selbst ab. Offenbar gilt $\vec{g}(D) = \vec{g}(F) < ci(F)$ nach Nichttrivialität von $[\vec{g}(F), ci(F)]$. □

**Korollar 6.11.** *$F$ ist genau dann stark kreisähnlich wenn $\vec{g}(F) = ci(F)$.*

**Satz 6.12.** *$F$ ist genau dann stärker trennend als Kreise (und dann auch absolut kreisstärker), wenn $F$ azyklisch ist.*

*Beweis.* Ansonsten nimm einen beliebigen $\vec{C}_{ci(F)}$. Offenbar ist dann $\vec{g}(D) = ci(F) \not> ci(F)$. Offenbar ist außerdem für jedes azyklische $F$ auch mit allen nicht azyklischen $D$ die Gleichung $\vec{g}(D) \geq 2 > 1 = ci(F)$ (da $K_1$ als 1-Zykel zählt) trivialerweise erfüllt. □

Diese Begriffe erweisen sich also als äquivalent zur Azyklizität und zur Aussage, dass $\vec{g}(F) = ci(F)$. Letzteres ist offenbar eine Aussage darüber, das der Zyklenraum von $F$ in einem gewissen Sinne einfach strukturiert ist, auch wenn hier von der Anzahl bzw. Überlappung von den Kreisen noch keine Aussage getroffen ist. Diese Strukturierung könnte, wenn man hier in der Lage wäre, sie genauer zu treffen, dabei helfen, für elementare Morphismen genauere Aussagen treffen zu können.

# 7 Zirkuläre Cores

## 7.1 Verhältnis der zirkulären und andern Cores

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen über die Ordnung der zirkulären Morphismen will ich nun einige Ergebnisse über die zirkulären Cores und ihr Verhältnis zu den azyklischen und homomorphen Cores wiedergeben: Ein Core bezüglich einer gewissen (Di-)Graphen-Morphismenart ist ein (Di)-Graph, der keinen echten Sub(di)graphen enthält, auf den eine entsprechende Abbildung existiert. Ein Semicore ist ein (Di-)Graph, der keine solchen induzierten Sub(di)graph enthält, und ein schwacher Core einer, der keinen solchen Sub(di)graphen geringerer Knotenzahl enthält. Zunächst gilt es das Verhältnis von diesen drei Begriffen zu untersuchen. Zunächst folgt aus diesen Definitionen:

**Satz 7.1.** *Ein Core ist auch ein Semicore. Ein Semicore ist dasselbe wie ein schwacher Core bzl. zirkulären/ZEM-zirkulären/azyklischen/homomorphen/ dihomomorphen etc. Abbildungen.*

*Beweis.* Die erste Aussage gilt, da die Definition eines Semicores ja eine Teilbedingung der Definition des Cores ist.

Sei $D$ ein Semicore. Da die Abbildungsart keine der Ko-Arten (kozirkulär etc.) ist, ist jede Abbildung auf einen Subdigraphen kleinerer Knotenzahl auch eine auf den durch diese Knoten induzierten Subdigraphen, also ist jeder Semicore auch ein schwacher Core. Umgekehrt folgt es daraus, dass echte induzierte Subdigraphen eine kleinere Knotenzahl haben. □

Man kann die Unterschiede mithilfe folgender Definition noch weiter einschränken:

**Satz 7.2.** *$D$ ist ein azyklischer/homomorpher/dihomomorpher Core gdw. er ein entsprechender Semicore ist.*

*Beweis.* Wenn $D$ keine entsprechenden Abbildungen auf Subdigraphen von sich selbst hat, so offenbar auch keine auf induzierten. Umgekehrt, wenn es keine Abbildungen auf induzierten Subdigraphen gibt, so kann es keine Abbildungen auf einen nichtinduzierten Subdigraphen $D'$ mit kleinerer Knotenzahl geben, da $D$ ja ein Semicore, d.h. nach oberem Satz auch ein schwacher Core ist. $|V(D')| = |V(D)|$ impliziert für die genannten Morphismenarten, dass kein Knoten im Bild ausgelassen wird, also höchstens Bögen weggelassen werden könnten; da aber nach Definition für azyklische Morphismen Bögen nur dann wegfallen können, wenn Knoten zusammenfallen, ist dies unmöglich. Also muss $D' = D$ gelten, und $D$ ist nicht nur Semicore, sondern auch Core. □

**Definition 7.3.** Für einen beliebigen Digraphen $D$ sei der Digraph, der aus $D$ entsteht, wenn man alle Brücken zwischen starken Komponenten entfernt, die Zusammenhangs-Reduktion $D_z$ von $D$.

**Satz 7.4.** *$D$ ist ein zirkulärer Semicore gdw. $D_z$ ein zirkulärer Core ist.*

*Beweis.* Da $D$ ein zirkulärer Semicore ist, gibt es nur solche zirkulären Abbildungen auf Subdigraphen von sich selbst, die alle Knoten übernehmen, aber denen evtl. einige Bögen fehlen. Offenbar kann so ein Bogen nicht in einem induziertem Kreis in $D$ liegen, da dessen Bild wiederum ein Kreis sein muss, und entweder sich eine Reduktion in einen kleineren Graphen durch Verrringerung der Länge des Kreises bildet - was aber nach $|V(D')| = |V(D)|$ gerade ausgeschlossen wurde - oder der Kreis mit einem andern zusammenfällt, wodurch ebenfalls weniger Knoten benötigt werden. Nichtinduzierte Kreise haben allerdings dasselbe Problem, da sie aus induzierten Kreisen bzw. Digons aufgebaut sind; und da nun verschiedene Kreise nicht kollidieren dürfen, müssen sie in verschiedenen Konstellationen alle erhalten bleiben. DIe einzigen Bögen, die also ohne weiteres wegfallen dürfen, bestehen aus solchen, die nicht Teil eines Kreises sind, das sind aber genau Bögen zwischen verschiedenen Komponenten. Wenn solche also nicht vorhanden ist - mit andern Worten, wenn wir $D_z$ betrachten - gibt es auch keine Abbildungen mehr, also ist $D_z$ ein echter zirkulärer Core, auch wenn $D$ nur ein Semicore ist. □

Ein Beispiel für einen zirkulären Semicore, der kein zirkulärer Core wäre, ließe sich also nur aus einem nicht zusammenhängenden zirkulären Core gewinnen. Man kann hierzu etwa folgende Form von Beispielen finden:

**Beispiel 7.5.** Wenn $\chi(B) > |V(A)|$, $B$ $A'$-frei (auch nicht-induziert) für alle dihomomorphen Bilder $A'$ von $A$, und $A, B$ beide symmetrische Core-Graphen sind, dann ist der Digraph, der aus $A \cup B$ entsteht, wenn man Bögen von allen Knoten aus $A$ zu allen aus $B$ zieht, ein echter zirkulärer Semicore, d.i. ein zirkulärer Semicore, der kein zirkulärer Core ist.

*Beweis.* Offenbar ist der Digraph kein zirkulärer Core, da man bloß die Bögen entfernen muss und dadurch einen zirkulären Morphismus auf einen echten, Bogenreduzierten Subdigraphen erhält.

Es ist also zu erweisen, dass dabei keine Knoten entfernt werden können: Offenbar kann man $A$ nicht auf $B$ abbilden, da $B$ ja gerade $A'$-frei sein sollte, und die dihomomorphen Bilder, da $A$ symmetrisch ist, auch alle Möglichkeiten abdecken, $A$ mittels eines zirkulären Homomorphismus in $B$ einzudecken (da alle solche Einbettungen azyklisch sind, und jeder azyklische Morphismus ja im Bild zumindest nicht-induziert ein dihomomorphes Bild enthalten muss, wie die Zerlegung der azyklischen Morphismen in Kap. 2.2

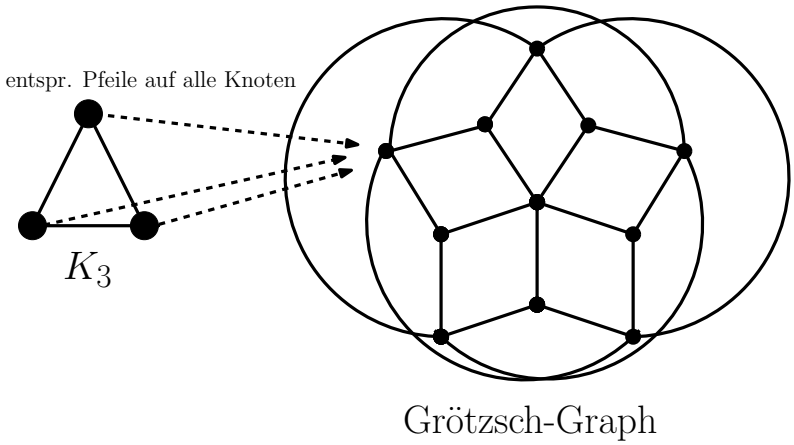



Abbildung 6: Ein Beispiel der konstruierten Semi-Cores aus dem Grötzsch-Graphen. Er ist zugleich ein echter ZEM-Semicore

gezeigt hat). Ebensowenig kann $B$ in $A$ abgebildet werden, da die Knoten in $A$ für die Färbungszahl von $B$ einfach nicht ausreicht. Damit muss $A$ in $A$, $B$ in $B$ abgebildet werden, und da beide Cores sind, heißt dass, dass das Bild nicht kleiner sein kann, das zirkuläre Bild insgesamt alle Knoten enthalten muss. Damit ist der Digraph zumindest ein schwacher Core, d.h. auch ein Semi-Core. Mit der ersten Aussage zusammen folgt die Behauptung. □

**Korollar 7.6.** *Wenn $\vec{\chi}(D) < m < \omega(D)$, ist $\vec{P}_2[K_m, D]$ ein echter zirkulärer Semi-Core.*

Eine Anwendung dafür bietet etwa der Grötzsch-Graph, d.i. der kleinste knotenkritische 4-chromatische dreiecksfreie Graph. Wenn man dann $A$ als Dreieck ($= K_3$) wählt, ist dieses offenbar in $B$ nicht enthalten, $B$ erfüllt die oberen Bedingungen, und der Satz gilt. Das Beispiel ergibt sich damit zu folgendem Bild:

Offenbar ist eine analoge Konstruktion mit beliebigen Graphen bzw. Digraphen möglich, die jeweils selbst Semicores sind und nicht aufeinander abbilden können. (Dies wird nachher noch einmal unter der etwas andern Terminologie der Cores eines Graphen/Digraphen in allgemeinen Circ-Core-Sätzen dargestellt.)

Wenden wir uns nun der Verhältnisse verschiedener Core-Arten zu, die sich in den betrachteten Morphismen unterscheiden. Gemäß der Morphismenartbestimmung nach Kapitel 2 gilt nach Definition:

**Satz 7.7.** *Jeder zirkuläre (Semi)Core ist ein azyklischer Core, und jeder azyklische Core ist ein homomorpher und dihomomorpher Core. Jeder symmetrische homomorphe Core ist ein zirkulärer Core.*

**Satz 7.8.** *Wenn $S(D)$ ein Core ist, ist $D$ ein zirkulärer Semicore (d.h. insb. auch ein azyklischer etc. Core).*

*Beweis.* Jede zirkuläre Abbildung in einen induzierten Subdigraphen, also in $Circ(D, D')$ mit $D' \subseteq D$, muss auch in $Circ(S(D), D')$ liegen. Angenommen, es gäbe so eine Abbildung; dann gäbe es aber, da $Circ(S(D), F) = Cird(S(D), S(F))$, auch eine Abbildung in $Circ(S(D), S(D'))$, also wäre wegen $S(D') \subseteq_{ind} S(D)$ damit auch $S(D)$ kein Core. Wenn also $S(D)$ ein Core - also wenn $S(D)$ ein homomorphischer Core, weil dies trivial dasselbe ist für symmetrische Graphen - dann muss auch $D$ ein Core sein im Bezug auf induzierte Subdigraphen, d.h. ein zirkulärer Semicore. □

Der zweite Teil lässt sich nach den allgemeinen Symmetriesätzen sogar umkehren zu:

**Satz 7.9.** *Wenn $D$ ein induziert kreisfreier zirkulärer Semicore, ist $S(D)$ ein Core.*

*Beweis.* Sei $D$ induziert kreisfrei, dann ist offenbar $Circ(D, F) = Circ(S(D), S(F))$. Da $D$ ein zirkulärer Core, ist $Circ(D, D')$ für $D' \subsetneq D$ leer, also mit $Circ(D, D') = Circ(S(D), S(D'))$ auch diese Menge. Nun hat aber jede Menge $Circ(S(D), H)$ für $H \subsetneq S(D)$ die Gestalt $Circ(S(D), S(D'))$ für ein $D' \subsetneq D$ mit $H = S(D')$, also ist damit auch $S(D)$ ein (zirkulärer) Core, da alle diese Mengen leer sind. Da die Mengen, deren Leerheit für die Core-Eigenschaft von $S(D)$ betrachtet werden müssen, nur kleinere Digraphen umfasst - da für homomorphische Cores die Cores und Semicores genau zusammenfallen - reicht es hier aus, $D$ als Semicore vorauszusetzen.

□

Da nur auf die Symmetrie im Bezug auf Subdigraphen von $D$ zurückgegriffen wurde, gilt allgemein:

**Korollar 7.10.** *Wenn $D$ $D'$-symmetrisch für alle $D' \subseteq D$, gilt: $D$ ist ein zirkulärer Semicore gdw. $S(D)$ ein Core ist.*

Ich werde diesen Satz nachher in der statistischen Betrachtung auf allgemeine selbstsymmetrische $D$ ausdehnen.

Dass diese Sätze in umgekehrter Form bzw. im Allgemeinen nicht gelten, wird weiter unten an einigen Beispielen gezeigt (z.B. den Rädern $\vec{W}_k$ und an $S(\vec{C}_i)\circ = iK_1\circ = K_1$).

Zum Verhältnis von Cores und ihren unterliegenden Graphen habe ich bisher nur folgendes negative Ergebnis finden können:

**Satz 7.11.** *Wenn $D$ ein Core, ist $U(D)$ nicht notwendig ein Core, und umgekehrt*

*Beweis.* Setze $D = \vec{C}_k$. Offenbar ist $D$ ein Hom- und Circ-Core, da alle Subdigraphen azyklisch sind, $D$ als ganzes aber nicht, so dass sich $D$ nicht auf einen seiner Subdigraphen abbilden lässt. Allerdings lässt sich $U(\vec{C}_4) = C_4$ auf $K_2$ homomorph abbilden, da bekanntermaßen $\chi(C_4) = 2$ gilt, also ist $U(D)$ hier nicht notwendigerweise ein Core.

Umgekehrt, sei $D = \vec{T}_n$. Offenbar ist $D$ azyklisch, lässt sich also zirkulär auf einen seiner Punkte abbilden; damit ist $D$ kein zirkulärer Core. Aber es gilt $U(D) = K_n$, und $K_n$ ist ein zirkulärer Core; also muss in so einem Fall auch $U(D)$ nicht notwendigerweise kein Core sein. □

Das zweite Ergebnis lässt sich offenbar folgendermaßen ausdehnen:

**Korollar 7.12.** *Wenn $G$ transitiv orientierbar ist, oder auch nur azyklisch orientierbar ist, gibt es eine Orientierung von $G$, die kein zirkulärer Core ist.*

Da aber jeder Graph ein Subgraph von $K_n$ ist, dieser aber eine azyklische, nämlich die transitive Orientierung $\vec{T}_n$ hat, gilt:

**Korollar 7.13.** *Jeder Graph $G$ hat eine Orientierung, die kein zirkulärer Core ist. Eine solche ist etwa $(\mathbb{Z}_{|V(G)|}, \{(i,j)|v_iv_j \in E(G), i > j\})$.*

## 7.2 Ergebnisse über azyklische Cores

Da alle zirkulären Cores auch azyklische etc. sind, gelten nun alle Ergebnisse, die für die azyklischen oder homomorphen Cores gefunden wurden, auch für die zirkulären, weswegen es sinnvoll erscheint, sie hier im Überblick zusammenzufassen. So finden sich bei Severino [Sev14] folgenden allgemeinen Ergebnisse über azyklische Cores:

**Definition 7.14.** Eine azyklische Retraktion ist ein azyklischer Morphismus von $D$ nach $H \subseteq D$, der auf $H$ eingeschränkt die Identität ist.

**Satz 7.15.** *[Sev14, 3.1, 3.2, 3.3] Folgende Aussagen sind äquivalent*

*(i)* *$D$ ist ein azyklischer Core*

*(ii)* *$D$ ist eindeutig azyklisch $D$-färbbar*

*(iii)* *Alle Morphismen in $Acyc(D, D)$ sind bijektiv*

*(iv)* *$D$ retrahiert azyklisch auf keinen echten (induzierten) Subdigraphen $H$ von sich selbst.*

*Beweis.* $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Sei $D$ ein azyklischer Core, d.h. $D$ ist nicht azyklisch $D'$-färbbar für jeden echten Subdigraphen $D'$ von $D$. Offenbar ist eine azyklische Färbung dann auf einen Subdigraphen reduzierbar, wenn ein Nichtbogenpaar auf ein Bogenpaar abbildet, da sonst im Bild ein Bogen entfernt werden könnte; also könnte, wenn $D$ auf mehrere unterschiedliche Arten $D$-färbbar wäre, ein Bogen entfernt werden, und die Abbildung bliebe azyklisch, d.h. $D$ wäre auf einen Subdigraphen azyklisch abbildbar, also $D' = D - e$-färbbar, im Gegensatz zur Voraussetzung. Also ist $D$ (bis auf Isomorphismen) eindeutig azkylisch $D$-färbbar.

Umgekehrt, wenn $D$ eindeutig $D$-färbbar ist, kann $D$ nicht auf einen Subdigraphen abbilden, da jede solche Abbildung ja eine andere $D$-Färbung wäre, die sich in der Anzahl der Farben schon von der identischen $D$-Färbung von $D$ unterscheidet. Also kann es keine solchen Abbildungen geben, und $D$ ist ein azyklischer Core.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ (vgl. [HKMR12]) Für alle $H$-Färbungen $\phi, \psi$ von einem eindeutig $H$-färbbaren $D$ gibt es einen Automorphismus $\pi$ von $H$ mit $\phi = \pi \circ \psi$, d.h. wenn $D$ eindeutig azyklisch $D$-färbbar, muss $\phi = \pi$ gelten, also müssen auch alle Morphismen in $Acyc(D, D)$ Automorphismen, also bijektiv sein.

Umgekehrt, wenn $\phi, \psi$ in $Acyc(D, D)$ sich nicht um einen Homomorphismus unterscheiden würden, hieße dass, da wenn $\phi$ bijektiv ist, $\phi$ auch ein Automorphismus wäre, dass dann $\psi$ nicht bijektiv wäre, also nicht alle Morphismen bijektiv sind; also in Kontraposition, dass wenn es so ist, sie sich je nur durch Automorphismen unterscheiden, also $D$ auch eindeutig azyklisch $D$-färbbar ist.

$(ii) \Leftrightarrow (iv)$ Offenbar wäre ein solche Retraktion eine azyklische $D$-Färbung von $D$, also kann sie nicht existieren, wenn $D$ eindeutig azyklisch $D$-färbbar ist.

Umgekehrt, sei $D$ nicht retrahierbar, aber auch nicht eindeutig azyklisch $D$-färbbar, sondern habe einen Homomorphismus $f$ nach $H \subset D$, aber auf keinen Subdigraphen von $H$. Es muss so einen Subdigraphen geben, da sonst alle azyklischen Homomorphismen auf $D$ bijektiv wären, also nach $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ $D$ doch eindeutig $D$-färbbar wäre. Es gibt also echte Subdigraphen von $D$, auf die $D$ selbst abbildet, wovon man nur irgendeinen wählen muss; von da an nehme man immer kleinere passende Subdigraphen, bis es keine kleineren mehr gibt. Offenbar ist $H$ ein azyklischer Core, da sonst eine beliebige Abbildung $\phi : H \to H'$ für $H' \subseteq H$ ein $f' = f \circ \phi : D \to H'$ impliziert, im Widerspruch dazu, dass $D$ auf keinen echten Subdigraphen von $H$ mehr abbildet. Offenbar ist also jeder Homomorphismus auf $H$ ein Automorphismus, also auch $\psi = f|H$. Damit ist $\psi$ invertierbar, und $\psi^{-1} \circ f : D \to H$ ist eine Retraktion von $D$ auf $H \subseteq D$, im Widerspruch zur Behauptung, dass $D$ nicht retrahierbar ist. Also ist $D$, wenn nicht retrahierbar, auch nicht auf

echte Subdigraphen abbildbar, also ein azyklischer Core. □

**Lemma 7.16.** *[Sev14, 3.4] Azyklische Retrakte von einem Digraphen $D$ sind induzierte Subdigraphen von $D$.*

*Beweis.* Da Retrakte einen azyklischen Morphismus von $D$ aus haben, auf dem sie konstant bleiben, müssen alle Bögen erhalten werden, und da sie auch Subdigraphen von $D$ sind, können sie keine weiteren enthalten, also sind sie je induzierte Digraphen. □

**Satz 7.17.** *[Sev14, 3.5] Jeder endliche Digraph $D$ hat einen azyklischen Core, der ein induzierter Subdigraph von $D$ und bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.*

*Beweis.* Offenbar hat $D$ nur endlich viele Retrakte, damit auch ein minimales bzgl. $\subseteq$, welches also ein Core in $D$ sein muss (analog zur oberen Argumentation) und induziert in $D$ liegt. Seien $H, H'$ zwei solche Retrakte mit azyklischen Morphismen $f, f'$ auf $D$. Offenbar muss dann $\phi = f|H' : H' \to H, \psi = f'|H : H \to H'$ azyklisch sein, also $\phi \circ \psi$ und $\psi \circ \phi$ bijektiv, also sind beide Funktionen Isomorphismen„ weshalb $H \cong H'$ gelten muss. Damit ist der Core in $D$ induziert enthalten und bis auf Isomorphie eindeutig. □

Nenne diesen eindeutigen azyklischen Core $D^*$ auch den (azyklischen) Core von $D$.

**Satz 7.18.** *[Sev14, 3.6] Wenn $U(D)$ bzw. $D$ stark zusammenhängend, dann ist $U(D^*)$ bzw. $D^*$ stark zusammenhängend.*

*Beweis.* Sei $U(D)$ bzw. $D$ stark zusammenhängend, $f : D \to D^*$, $x, y \in D^*$ mit Weg $x = u_1, u_2, ..., u_n = y$ in $D$, so dass $(u_i, u_{i+1})$ (bzw. je auch $(u_{i+1}, u_i)$) existiert. Setze $v_i = f(u_i)$, d.h. $v_1 = x, v_n = y$, und durch die Azyklizität von $f$ werden die Bögen entweder erhalten oder die Knoten fallen zusammen, so dass $v_1, ..., v_n$ auch in $U(D^*)$ bzw. $D^*$ einen Weg bildet. Da $x, y$ beliebig, sind $U(D^*)$ bzw. $D^*$ stark zusammenhängend. □

Nach Severino werden Digraphen als homomorphisch (genauer gesagt: ayzklisch-homomorphisch) äquivalent genannt, wenn es von einem zum andern einen azyklischen Homomorphismus gibt. Mithilfe der Cores lassen sich diese Äquivalenzen nun eindeutig charakterisieren:

**Satz 7.19.** *[Sev14, 3.7, vgl. 3.4] Digraphen sind (azyklisch)-homomorphisch äquivalent gdw. ihre azyklischen Cores isomorph sind. Insbesondere sind zueinander (azyklisch)-homorphe Cores isomorph.*

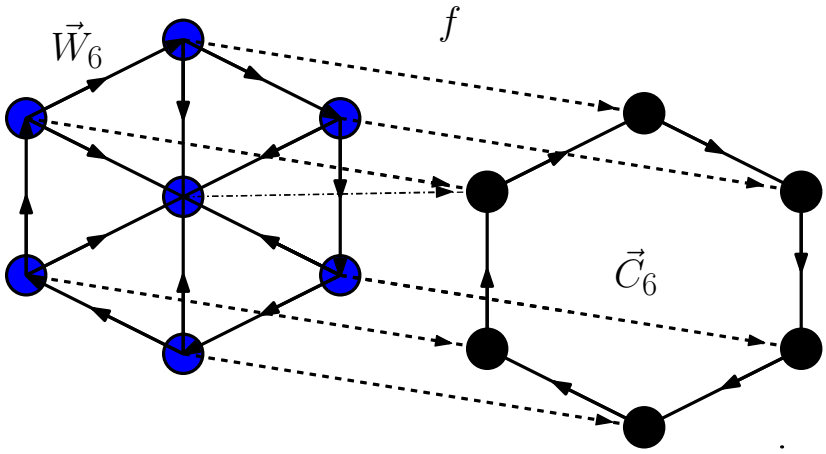



Abbildung 7: Eine zirkuläre Abbildung des nach innen gerichteten Rads mit sechs Knoten auf den gerichteten Kreis mit sechs Knoten. (vgl. 7.52.2)

*Beweis.* Offenbar sind $D$ und $D^*$ homomorphisch äquivalent, da $D \to D^*$ als Redukt und $D^* \to D$ als Einbettung unmittelbar gegeben sind, womit der erste Teil der Behauptung folgt, da somit für isomorphe Cores auch verschiedene Digraphen über diese Isomorphie miteinander mit azyklische Morphismen verbunden werden können.

Seien nun $D, H$ (azyklisch-)homomorphisch mit Cores $D^*, H^*$ gegeben. Offenbar, da $D^* \to D \to H \to H^*$ azyklisch gilt, gilt auch $D^* \to H^*$ und analog $H^* \to D^*$ mit Morphismen $\phi, \psi$, so dass $\phi \circ \psi, \psi \circ \phi$ azyklische Morphismen auf Cores sind, also bijektive und damit Isomorphismen sind. Damit gilt dasselbe aber auch für $\phi$ und $\psi$, und $D^*$ und $H^*$ sind isomorph. Die zweite Behauptung folgt nun unmittelbar, wenn man $D = D^*, H = H^*$ voraussetzt. □

Folgende Existenzbeweise stehen ebenfalls dort:

**Satz 7.20.** *[Sev14, 3.8] Wenn irgendein bestimmter Digraph $D$ eindeutig azyklisch, und zwar surjektiv $F$-färbbar ist, ist $F$ ein azyklischer Core.*

*Beweis.* Sei $D$ wie gefordert mit der eindeutigen Surjektion $f \in Acyc(D, F)$. Wenn $f' \in Acyc(F, F^*)$ eine Retraktion ist, dann ist $f' \circ f \in Acyc(D, F)$, also $f' \circ f = h \circ f$ für einen Automorphismus $h$ auf $H$, da $D$ eindeutig azyklisch $H$-färbbar ist. Da $f$ surjektiv und $h$ ein Automorphismus, also $Bild(h \circ f) = F$ ist, gilt $Bild(f' \circ f) = Bild(h \circ f) = F$, also mit $Bild(f') = H^*$ ebenfalls $H \subseteq H^*$, d.h. $H = H^*$ und $H$ ist ein Core. □

**Satz 7.21.** *[Sev14, 3.12] Für alle $k \geq 2$ ist das (nach innen oder außen) gerichtete Rad $\vec{W}_k$ ein azyklischer Core. (Siehe Abb. für ein Beispiel eines solchen Rads; offenbar sieht man auch dort, dass es kein zirkulärer Core ist, wie nachher noch genauer dargestellt wird.)*

*Beweis.* Sei $V(\vec{W}_k) = \{v_0, ..., v_{k-1}, c\}$, wobei $v_i$ den Kreis und $c$ das Zentrum bilden, d.h. $E(\vec{W}_k) = E(\vec{C}_k) \cup \{(v_i, c) | i = 0, ...., k-1\}$ bzw. $E(\vec{W}_k) = E(\vec{C}_k) \cup \{(c, v_i) | i = 0, ...., k-1\}$. Da jeder azyklische Morphismus von $\vec{W}_k$ auf sich selbst insbesondere zirkulär ist (bei Severino hierzu eigens bewiesen) und die einzige zyklische Menge von $k$ Knoten in $\vec{W}_k$ der äußere Kreis ist, wird dieser dabei auf sich selbst bijektiv abgebildet; nehme an, dass in einem solchen $f$ dann im Bild $(f(v_i), f(v_{i+1}))$, aber nicht $(f(v_i), f(v_{i-1})$ gültige Bögen sind. (Durch die Azyklizität können die Knoten nicht vertauscht werden, so dass auch nur diese beiden Möglichkeiten bleiben.) Wenn nun $f(c) = f(v_0) \neq f(v_1)$ wäre, dann müsste nach Azyklizität von $f$ auch $(f(v_1), f(v_0))$ ein Bogen sein, da $f(c) \neq f(v_1)$ ja $(c, v_1)$ im Ursprungsgraphen ein Bogen ist, was aber nicht sein kann, analog $f(c) \neq f(v_i)$ für alle $i$; damit muss also $f(c) = c$ gelten. Also muss $f$ eine Bijektion sein; damit sind alle azyklischen Morphismen von $\vec{W}_k$ auf sich selbst bijektiv, also ist $\vec{W}_k$ ein azyklischer Core. □

## 7.3 Ergebnisse über homomorphe Cores

Es gibt nun einige analoge Ergebnisse für homomorphische Cores, die ich von Hell/Nešetřil [HN04] übernehme:

**Satz 7.22.** *[HN04, 1.31] Ein Digraph $D$ ist genau dann ein homomorphischer Core, wenn er nicht auf einen echten Subdigraphen homomorphisch retrahiert*

*Beweis.* Wenn $D$ auf einen seiner Subdigraphen homomorphisch retrahiert, dann ist diese Retraktion bereits ein Homomorphismus. Umgekehrt, sei $H$ der Subdigraph von $D$ mit den wenigsten Knoten, auf den $D$ homomorphisch abbildet, via $f : D \to H$. Offenbar muss $f|_H$ homomorphisch sein, also bijektiv, damit ist ${f|_H}^{-1} \circ f$ eine Retraktion von $D$ nach $H$. □

**Satz 7.23.** *[HN04, 1.32] Jeder Digraph $D$ ist homomorphisch äquivalent zu einem eindeutigen Homomorphismen-Core $core(D)$.*

*Beweis.* Wenn $H, H'$ sind homomorphische Retrakte von $D$ sind, via Retraktionen $f : D \to H, f' : D \to H'$, und $H, H'$ Cores sind, dann sind $f|_{H'}^{-1} \circ f', f'|_H^{-1} \circ f$ Automorphismen auf $H$ bzw. $H'$, also sind $H, H'$ via $f|_{H'}^{-1}, f'|_H^{-1}$ isomorph. □

Ein wichtiges Ergebnis für die spätere stochastische Betrachtung, das bei Hell/Nešetřil mit deutlich weitergehenden statistischen Methoden bewiesen wird, ist:

**Satz 7.24.** *[HN04, 3.24, 3.25, 2.26, 3.28] Asymptotisch sind fast alle Graphen homomorphische Cores,*

Dabei bedeutet "fast alle", dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufälliger Graph $G(p,n)$ (der $n$ Knoten hat und mit Wahrscheinlichkeit $p$ je eine Kante zwischen zwei beliebigen Knoten) für alle $p$ mit $n \to \infty$ gegen 0 geht. (Diese Konstruktion heißt Erdös-Rényi-Modell, so genannt etwa in [FHKS19, S.15]). Ich werde im späteren Abschnitt dafür abkürzend "fast alle (Di-)Graphen" etc. sagen, auch wenn man sich bewußt machen muss, dass es unendlich viele Ausnahmen gibt, es also nur unwahrscheinlich, nicht unmöglich wird, einen Nicht-Core zu erwischen.

Schließlich sind einige Ergebnisse zu Lücken in der Hom-Core-Ordnung erwähnenswert; hierzu benötigen wir zunächst folgende Definitionen:

**Definition 7.25.** Für Digraphen $G, H$ setze

$$G \times H = (V(G) \times V(H), \{((u,v),(u',v'))|(u,u') \in A(G), (v,v') \in A(H)\})$$

$$H^G = (V(H)^{V(G)}, \{(f,f')|\forall_{(v,v') \in E(G)}(f(v), f'(v')) \in E(H)\})$$

wobei $A^B$ für Mengen $A, B$ die Menge aller Abbildungen von $B$ nach $A$ ist.

**Satz 7.26.** *[HN04, 2.17,18] Es gilt $H^{G \times F} \cong (H^G)^F$ für beliebige Digraphen $F, G, H$, d.h. $Hom(G \times F, H) = Hom(F, G^H)$ und damit $G \times F \to H \Leftrightarrow F \to H^G$*

*Beweis.* Für alle $m : V(F) \to V(H^G)$ definiere $\Phi(m) : V(G \times F) \to V(H)$ durch $\Phi(m)(u,v) = (m(v))(u)$, was wegen $m(v) : V(G) \to V(H)$ wohldefiniert ist. Offenbar ist $\Phi : V((H^G)^F) \to V(H^{G \times F})$ bijektiv und ein Homomorphismus, da mit $(m, m') \in (H^G)^F$ auch $(\Phi(m), \Phi(m')) \in H^{G \times F}$ gilt, weil $((\Phi(m)(u,v)),$
$(\Phi(m')(u',v'))) = ((m(v))(u), (m'(v'))(u'))$ ein Bogen in $H$ ist gdw. $((u,v),(u',v'))$ ein Bogen in $G \times F$ ist. Damit ist $\Phi$ ein Isomorphismus und die Digraphen $H^{G \times F}$ und $(H^G)^F$ sind isomorph. □

**Lemma 7.27.** *[HN04, 2.23] Für $g, k \in \mathbb{N}, g \geq 3$ ungerade, gibt es mindestens einen Graphen $S(g,k)$ mit $g_o(S(g,k)) \geq g$ und $\chi(S(G,k)) \geq k$.*

**Satz 7.28.** *[HN04, 3.30] Für homomorphische Cores $G \neq H$ mit $G \to H, (G,H) \neq (K_1, K_2)$, gibt es einen Graphen $X$ mit $G \to X \to H$ aber $H \not\to X \not\to G$*

*Beweis.* Wenn $G = K_1$ und $\chi(H) \geq 2$ gilt, erfüllt $X = K_2$ die Bedingung. Offenbar ist $G \neq K_1, 2K_1, K_2; H = K_2$ und $G \to H$ unmöglich, also nehmen wir im weiteren $\chi(G) > 1$ und $\chi(H) > 2$ an.

Man suche ein $Z$ mit $g_o(Z) > g_o(H), \chi(Z) > \chi(G^H)$, etwa $Z = S(g_o(H)+1, \chi(G^H)+1)$. Setze dann $X = G \cup (H \times Z)$. Offenbar gilt $G \to X$ als Projektion, und es ist $X \to H$ via $G \to H$ und $H \times Z \to H$ durch Projektionen für ein beliebiges festes $v \in V(Z)$.

Da nach der Voraussetzung, dass $G, H$ verschiedene (d.h. nichtisomorphe) Cores sind, $H \not\to G$ gilt, muss es eine Komponente von $C$ von $H$ geben mit $C \not\to G$. Wenn $H \to X$ gelten würde, dann gälte $C \to H \times Z \to Z$, und wegen $\chi(G) > 1$ wäre $C$ nicht bipartit, was $g_o(C) < g_o(Z)$ widerspricht. Also gilt $H \not\to X$.

Wenn $X \to G$ gelten würde, dann wäre $H \times Z \to G$, d.h. $Z \to G^H$ nach obigem Satz, was $\chi(Z) > \chi(G^H)$ widerspricht. Also gilt $X \not\to G$. □

Es wird nun von Hell/Nešetřil daraus gefolgert, dass darum sich zwischen zwei durch homomorphe Abbildbarkeit geordneten Hom-Cores der oberen Art stets ein dritter befindet, also wenn $\mathcal{C}_S$ für diese Ordnung von Cores steht:

**Definition 7.29.** Eine Lücke $[G, H]$ in einer Abbildungsordnung $G, H \in \mathcal{C}$ besteht dann, wenn $G < H$, d.h. $G \to H$, $H \not\to G$ gilt und es kein $X \in \mathcal{C}$ gibt, so dass $G < X < H$ gelten würde.

**Satz 7.30.** *[HN04, 3.31]* $[K_1, K_2]$ *ist die einzige Lücke von* $\mathcal{C}_S$.

Dazu findet sich noch das folgende Resultat, was Lücken für die Nicht-Core-Ordnung auch im weiten Umfang ausschließt:

**Satz 7.31.** *[HN04, 3.32] Wenn* $H$ *ist ein stark zusammenhängender, nichtazyklischer homomorphischer Core-Digraph ist, ist* $[G, H]$ *keine Lücke für jeden Digraphen* $G < H$ *in der Ordnung* $\mathcal{C}$ *aller Digraphen bezüglich homomopher Abbildbarkeit.*

*Beweis.* Sei $(a, b)$ ein Bogen in einem Zykel in $H$ und $I = (H - (a, b)) \cup K_1[= a'] \cup (a', b)$, und $n > |V(G)|$, und $G'$ der Ersetzungsgraph aus $\vec{T}_n$, wo alle Bögen $(x, y)$ durch $I[x = a, y = a']$ ersetzt werden, d.h.

$$G' = (\mathbb{Z}_n \cup (\cup_{1 \leq i < j \leq n} V(I) \times \{(i, j)\}), \{((v, (i, j)), (w, (i, j)))|(v, w) \in E(I)\} \cup$$
$$\{(i, (a, (i, j))), ((a', (i, j)), j)|1 \leq i < j \leq n\})$$
$$/\{(i, (a, (i, j))), ((a', (i, j)), j)|1 \leq i < j \leq n\}$$

Setze nun $X = G' + G$.

$G \to X$ gilt via Projektion, und $X \not\to G$ ebenso, weil sonst zwei Knoten von $\vec{T}_n$ identifziert werden müssten, also das Bild in $G$ auch $H$ enthalten würde, im Widerspruch zur Annahme $G < H$.

Nehme nun an, es gäbe einen Homomorphismus $g : H \to G'$, und setze $f : G' \to H$ via $f(v) = a$ für alle $v \in \vec{T}_n$, und betrachte sonst $f$ als Projektion auf die Knoten, von denen sie kopiert worden sind. Da $H$ ein Core ist, ist $f \circ g$ ein Automorphismus; setze nun $h = (f \circ g)^{-1}$. Offenbar liegt nun das Bild $u$ von $a$ unter $g \circ h : H \to G'$ in $\vec{T}_n$, so dass also $f(u) = a$; also liegt das zusammenhängende Bild von $H$ unter $g \circ h$ in der Umgebung von $u$. Setze $u' = g(h(b))$; da $f(u') = b$, liegt $u'$ in der Nachbarschaft von $b$, d.h. liegt in einer Kopie von $b$ in einem $I$ mit $a' \sim u$ (d.h. $u$ ist aus einem $a'$ bei der Quotentienbildung hervorgegangen); allerdings liegt $(u, u')$ in keinem Zykel in $g(h(H))$, was aber der Annahme, dass $(a, b)$ in einem Zykel in $H$ liegt, widerspricht, da $f \circ g \circ h = id_H$. Also gibt es keinen Morphismus $g : H \to G'$, also auch keinen von $H$ nach $X$, also gilt $G < X < H$. Damit ist $[G, H$ keine Lücke in $\mathcal{C}$. □

**Definition 7.32.** Wenn $(G \not\to H) \Leftrightarrow (F \to G)$, heißen die Digraphen $(F, H)$ ein einfaches Dualitäts-Paar.

$H$ ist durch $F$ eindeutig bestimmt, und heißt das Duale von $F$. Wenn $F$ ein Core ist, dann ist auch $H$ ein Core und $F$ ist zusammenhängend, da sonst $F_i \to H$ für alle Komponenten gelten würde, weil $F_i \not\to H$ wäre, da $F$ ein Core ist, also $F \to H$ ist, was nicht sein kann. Es folgt aus den oberen beiden Sätzen, dass man die Dualitätspaare mit homomorphen Cores genau bestimmen kann:

**Satz 7.33.** *[HN04, 3.33] $(K_2, K_1)$ ist das einzige einfache Dualitäts-Paar in der homomorphen Core-Ordnung $\mathcal{C}_S$*

*Beweis.* Wenn $(F, H)$ ein einfaches Dualitäts-Paar von Cores mit $F \neq K_2$ ist, dann ist $F$ nicht bipartit, enthält also einen ungeraden Zykel, nehme an $C_{2k+1}$. Sei $G$ ein Graph mit $g_o(G) > 2k + 1, \chi(G) > \chi(H)$, etwa $S(2k + 2, \chi(H) + 1)$. Offenbar gilt $F \not\to G$ durch den odd-girth von $G$ und $G \not\to H$ wegen $\chi(G)$, im Widerspruch zur Behauptung, dass $(F, H)$ ein Dualitätspaar ist. Also muss $F = K_2$ gelten, und da $K_2 \to G$ für alle $G$, die Kanten haben, gilt, ist die Bedingung nur mit $H = K_1$ zu erfüllen. Also ist $(K_2, K_1)$ das einzige passende einfache Dualitätspaar. □

**Satz 7.34.** *[HN04, 3.34] Ein Dualitätspaar $(F, H)$ unter Cores impliziert eine Lücke $[F \times H, F]$, und umgekehrt eine Lücke $[A, B]$ mit stark zusammenhängendem $B$ ein Dualitätspaar $(B, A^B)$. Dies gilt je für $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}_S$.*

*Beweis.* Wenn $(F, H)$ ein Dualitätspaar ist, bedeutet $F \not\to K$ ja schon $K \to H$, also würde $K \to F$ und $F \not\to K$ auch $K \to F \times H$, also $F \times H \not< K$ bedeuten, damit gilt $F \times H < K < F$ für kein $K$, damit ist $[F \times H, F]$ eine Lücke.

Sei $[A, B]$ eine Lücke von Cores mit stark zusammenhängendem $B$. Wenn $B \to G \to A^B$ gilt, dann gilt auch $B \to B \times A^B$; und da ohnehin nach obigem Ergebnis $B \times A^B \to A$ gilt, würde $B \to A$ gelten, im Widerspruch dazu, dass $[A, B]$ eine Lücke ist. Wenn nun $G \not\to A^B$ und $B \not\to G$ wäre, dann würde $C = A + G \times B$ die als falsch angenommene Ungleichung $A < C < B$ erfüllen, da $C \not\to A$ durch $G \times B \to A \Leftrightarrow G \to A^B$ und $B \not\to C$ gilt, da sonst $B \to G \times B$ gelten würde, im Widerspruch zu $B \not\to G$. Also ist $(B, A^B)$ ein einfaches Dualitätspaar. □

Die bei Hell/Nešetřil darauf folgenden Ergebnisse beziehen sich auf die Homomorphismen-Ordnung $\mathcal{C}$ (d.h. nicht besonders auf die Cores), die uns hier aber nicht weiter betrifft, da Homomorphismen nur Spezialfälle von zirkulären Morphismen sind, daher diese Ordnung in dieser Untersuchung keine gesonderte Rolle hat, umgekehrt dagegen die zirkulären Cores sämtlich homomorphische Cores sind, die Hom-Core-Ordnung also hier universale Eigenschaften übertragbar macht.

Außerdem finden sich bei Hell/Nešetřil nun noch folgende Existenzaussagen für Cores:

**Definition 7.35.** $G$ ist knotentransitiv, wenn es für jedes Knotenpaar $(u, v)$ einen Automorphismus auf G gibt, der $u$ auf $v$ abbildet, und knotenkritisch, wenn $\chi(G) > \chi(G - u)$ für alle Knoten $u$ in $V(G)$ gilt.

**Satz 7.36.** *[HN04, Übung 1.6]*

1. *Wenn $G$ ein knotentransitiver Graph mit koprimen $|V(G)|$ und $\alpha(G)$ ist, ist $G$ ein homomorpher Core*

2. *Wenn $G$ ein knotenkritischer Graph ist, ist $G$ ein homomorpher Core.*

*Beweis.* 1. Wenn $G$ knotentransitiv ist, gibt es offenbar je passende Automorphismen $f_{(u,v)}$ mit der geforderten Eigenschaft. Ein Homomorphismus $f : G \to H$ kann dargestellt werden als eine Partition von $G$ in unabhängige Mengen $V_i = f^{-1}(w_i)$ für $w_i \in V(H)$. Da nun $G$ knotentransitiv ist, muss für $f$ auch $f \circ f_{(u,v)}$ ein Homomorphismus sein, da $f_{(u,v)}$ ein Isomorphismus ist. Es müssen also alle $V_i$ gleich groß sein, da alle austauschbar sind; da aber $\alpha(G)$ und $|V(G)|$ koprim, kann es so

eine Partition nicht geben, da die Aufteilung nie gleichmäßig geschehen kann, also gibt es nur ein einziges $V_i$, und $f$ ist bijektiv, d.h. ein Isomorphismus, da $f$ ein Homomorphismus ist (und z.B. nicht bloß zirkulär). Damit ist $G$ ein Core.

2. Wenn $G$ knotenkritisch, dann lässt sich $G$ nicht auf einen seiner Subgraphen abbilden, da jeder Subgraph eine kleinere chromatische Zahl hat, also $G$ nicht auf ihn abbildet, da $G$ sonst auch auf $K_{\chi(G)-2}$ abbilden würde, im Widerspruch zur Definition von $\chi(G)$. Damit ist $G$ ein homomorpher Core, da er sich nicht reduzieren lässt.

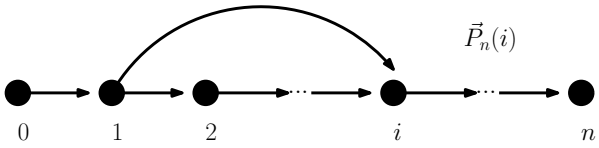
□

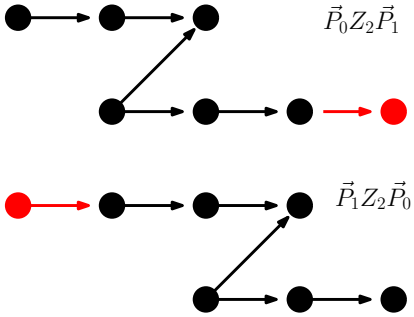
**Satz 7.37.** *[HN04, 4.1 - 4.6] Folgende Digraphen sind rigide, d.h. Cores mit nur einem einzigen Automorphismus: (siehe Abb. für 2. bis 6.)*

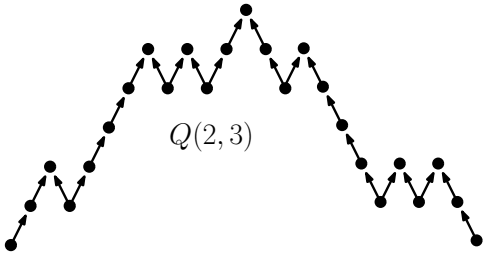
1. *Jeder azyklische hamiltonische Digraph*
2. $\vec{P}_n(i) = \vec{P}_n \cup (1, i)$
3. $\vec{P}_i Z_2 \vec{P}_{n-i} = \vec{P}_{i+2} \cup \vec{P}_{n-i+2} \cup (1', i)$ *wobei* $1'$ *der erste Knoten des zweiten und* $i'$ *der letzte des ersten Pfades ist.*
4. $Q(i, 2n+1-i)$ *wobei* $Q(a, b) = Z(a) * Z(b) * (Z(a))^{-1} * (Z(b))^{-1}$*, wobei* $P^{-1}$ *der umgekehrte Pfad von* $P$ *ist und* $Z(a)$ *die* $a$*-fache Hintereinanderfügung von* $Z_i = (\{k, k' | k = 1, ..., i\} \cup \{a, z\}\}, \{(k, k'), (k, (k-1)') | k = 2, ..., i\} \cup \{(a, 1), (1, 1')(i', z)\})$.
5. $H_k = C_{3k+7} \cup \{i(i+2) | i = 1, ..., 3k+5\} \cup (1, 6)$
6. *Der Graph* $G_k$*, der aus dem Graphen* $(\{z, u, u', u'', w, w', x, a, b, c\}, \{zu, uu', u'u'', zw, ww', zx\})$ *durch Einfügen paralleler Pfade der Länge* $k$ *zwischen* $w'$ *und* $c$*,* $c$ *und* $u''$ *sowie* $u''$ *und* $a$*, sowie paralleler Pfade der Länge* $k+1$ *zwischen* $a$ *und* $x$*,* $x$ *und* $b$ *sowie* $b$ *und* $w'$ *entsteht.*

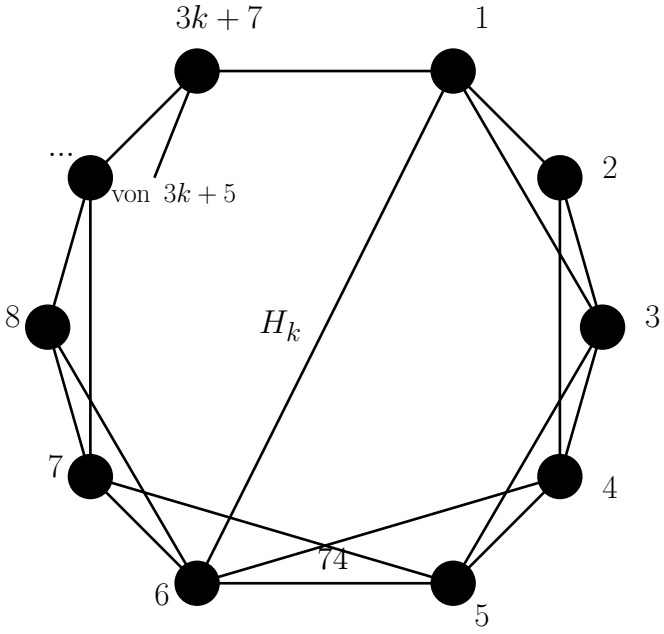
*Beweis.* 1. Offenbar können keine zwei Knoten identifiziert werden, da sonst über dem Pfad ein Zykel entsteht; da der hamiltonische Pfad eindeutig und gerichtet ist, können die Knoten auch nicht verändert werden, darum gibt es keine andern Automorphismen als die Identität, also ist der Digraph ein rigider Core.

2., 3., 4. folgt unmittelbar daraus, da dies Mengen modifizierter Pfade sind, die nicht aufeinander abbilden und je hamiltonisch sind, also das Gesamtgebilde nach derselben Argumentation ein rigider Core ist.


$\vec{P}_n(i)$
0
1
2
$i$
$n$


$\vec{P}_0 Z_2 \vec{P}_1$
$\vec{P}_1 Z_2 \vec{P}_0$


$Q(2,3)$


$3k+7$
1
...
von $3k+5$
2
8
$H_k$
3
7
4
74
6
5

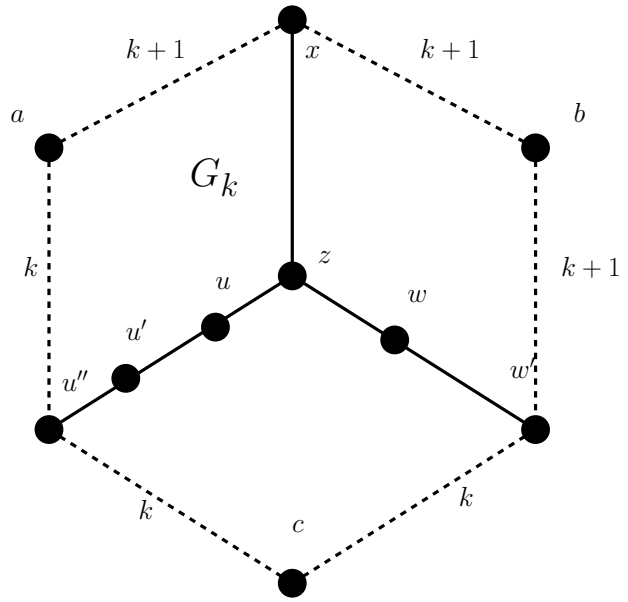



Abbildung 8: Beispiele von homomorphen Cores aus Satz 7.37

5. Es gilt $\chi(H_k) = 4$ für $k \geq 1$, da jede 3-Färbung durch die Kanten von Abstand 1 und 2, wenn die ersten drei Knoten je $1, 2, 3$ gefärbt seien (sonst benenne die Farben um), eine Färbung $f(3l + i) = i$ impliziert, damit aber $3k+7$ und 1 dieselbe Farbe erhalten würden, obwohl sie benachbart sind. Damit funktioniert es also erst mit einer vierten Farbe. Wenn nun irgendein Knoten entfernt wird, reichen drei Farben allerdings wiederum aus, also ist $H_k$ knotenkritisch, damit ein Core. Ein Automorphismus von $H_k$ muss 6 auf sich selbst abbilden, da dies der einzige Knoten mit Grad 5 ist; und da $6-1$ die einzige Kante bei 6 ist, die nicht in einem Dreieck liegt, bringt der Automorphismus auch 1 zu sich selbst. Da 2 als einziger Knoten mit Grad 3 keinen Nachbarn mit Grad 3 hat, wird 2 auf sich abgebildet, und von da an wird je, etwa 3, da es allein zu 1 und 2 adjazent ist, etc, auf sich abgebildet, bis klar ist, das der Automorphismus die Identität ist. Damit hat $H_k$ nur einen einzigen Automorphismus, nämlich die Identität, und ist rigide.

6. Da $G_k$ ungerade Zyklen enthält, kann $core(G_k)$ nicht bipartit sein. Für jeden Knoten $v$ wäre $G_k - v$ entweder ein ungerader Zykel mit drei anhängenden Pfaden (wenn das Zentrum gelöscht wird), oder zwei Zyklen, die sich einen Weg teilen, mit zwei anhängenden Pfaden (bei den restlichen Knoten); deren Core wären also ungerade Zykeln. Darum wäre, wenn $G_k$ kein Core, $core(G_k)$ einer der drei Zykeln von Länge

$2k+5$. Aber jeder solche Zykel enthält einen Knoten $u$, der adjazent zu einem Knoten $v$ außerhalb des Zykels und zu den Knoten $u', u''$ auf dem Zykel ist, so dass $v-u-u'$ und $v-u-u''$ Sequenzen in andern Zyklen der Länge $2k+5$ sind. Damit kann man $v$ aber auf keinen Knoten des Zykels abbilden, also lässt sich $G_k$ nicht auf den Zykel retrahieren; und da solche Zykeln die einzigen infragekommenden Subdigraphen waren, ist $G_k$ also ein Core. Betrachte nun irgendeinen Automorphismus auf $G_k$: Das Zentrum $z$ ist der einzige Knoten mit Grad 3, der einen Abstand von 1, 2, und 3 zu den andern drei Knoten mit Grad 3, $u'', w', x$, hat, weshalb das Zentrum und diese Knoten auf sich selbst abgebildet werden müssen. Über die Adjazenzbeziehungen folgt, dass der Automorphismus die Identität, $G_k$ also rigide ist.

□

Mit weitergehenden analytischen Methoden wird dort sogar bewiesen

**Satz 7.38.** *[HN04, 4.7] Asymptotisch sind fast alle Graphen rigide*

was für die weitere stochastische Betrachtung bei mir von wesentlicher Bedeutung ist. - Ein entsprechender Satz über Digraphen wird sich aus der analogen Betrachtung über zirkuläre Cores ergeben. Damit folgt das natürlich auch, der oberen Klassifikation entsprechend, zurück in die Untersuchung von Homomorphismus, und dehnt dieses Ergebnis auf Digraphen aus (während der entsprechende Satz bei Hell/Nešetřil nur über Hom-Core-Graphen bewiesen wurde). - Die weiteren Analysen bei Hell/Nešetřil, die sich auf Graphen unendlicher Knotenmengen beziehen und dort eine Rigiditäts-Konstruktion ausführen, werde ich hier übergehen, da ich mich in meiner weiteren Analyse auf endliche Objekte beschränken will, wiewohl auch diese Sätze natürlich umgekehrt für zirkuläre Cores, wenn es um Allgemeinaussagen geht, Gültigkeit behalten - und es eine offene Frage für die weitere Untersuchung bleibt, wann diese unendlich großen homomorphischen Cores auch zirkuläre sein können.

## 7.4 Dihomomorphe Cores

Der Vollständigkeit halber werde ich hier die grundlegende Terminologie auch für dihomomorphe Cores ausführen, da sie ebenso auf zirkuläre Cores zutrifft und bisher nicht eigens dargestellt worden ist. - Ein Digraph heißt ein dihomomorpher Core, wenn er keinen Dihomomorphismus auf einen seiner echten Subdigraphen erlaubt. Offenbar ist dies aquivalent ausgedrückbar durch:

**Satz 7.39.** *Ein Digraph $D$ ist genau dann kein dihomomorpher Core, wenn es einen Dihomomorphismus von $D$ auf einen seiner echten induzierten Subdigraphen gibt, d.h. eine Zerlegung von $V(D)$ in azyklische Mengen $V_1, ...., V_n, n > 1$, so dass $D/(V_1, ..., V_n) \subset D$ gilt.*

Das trifft offenbar nun auf eine große Menge von Digraphen zu:

**Satz 7.40.** *Perfekte nichtvollständige Digraphen sind keine dihomomorphen Cores.*

*Beweis.* Sei $D \neq K_{|V(D)|}$ ein perfekter Digraph. Offenbar bildet $D$ dihomomorph auf $K_{\vec{\chi}(D)}$ ab. Da $D$ perfekt, ist diese Clique in $D$ induziert enthalten, und da $D$ nicht vollständig, ist sie nicht mit $D$ selbst identisch; also bildet $D$ dihomomorph auf einen echten induzierten Subdigraphen ab, ist also kein dihomorpher Core. □

Umgekehrt sind die vollständigen Digraphen ein offenbares Beispiel dihomomorpher Cores, da sie ja überhaupt keine elementaren Dihomomorphismen außer der Identität erlauben. Genauer gilt für diese:

**Korollar 7.41.** *Perfekte Digraphen sind genau dann zirkuläre, also auch dihomomorphe und azyklische Cores, wenn sie vollständig sind. Perfekte Digraphen sind also genau dann zirkuläre Cores, wenn sie dihomomorphe Cores sind.*

Offenbar gilt also:

**Satz 7.42.** *$D$ ist genau dann ein dihomomorpher Core, wenn $Dihom(D, D) = \{id_D\}$ bzw. wenn alle Dihomomorphismen von $D$ auf sich selbst bijektiv sind (da der einzige eben die Identität ist).*

**Satz 7.43.** *Jeder Digraph $D$ enthält induziert einen eindeutigen dihomomorphen Core $dicore(D)$ der bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.*

*Beweis.* Offenbar hat $D$ nur endlich viele azyklische Quotienten bzw. dihomomorphe Bilder, also auch unter diesen ein $\subseteq$-minimales, welches nach Konstruktion ein induzierter Subdigraph von $D$ sein muss. Seien $H, H'$ zwei solche Quotienten, und $f, f'$ die ihnen zugeordneten Dihomomorphismen; dann wären $f|_{H'}, f'|_H$ Dihomomorphismen, also sind $H, H'$ dihomomorphe Bilder voneinander, damit sind sie isomorph. □

**Korollar 7.44.** *Für jeden perfekten Digraphen $D$ gilt $dicore(D) = K_{\vec{\chi}(D)}$*

**Satz 7.45.** *Für jeden Digraphen $D$, und azkylische Digraphen $D_1, ..., D_n$ für $n = |V(D)|$, gilt $dicore(D[D_1, ..., D_n]) = dicore(D)$*

*Beweis.* Offenbar lässt sich $D[D_1, ..., D_n]$ auf $D$ dihomomorph abbilden, indem man alle Knoten der $D_i$ auf den jeweiligen Knoten aus $D$ abbildet. Da alle $D_i$ azyklisch sind, ist die Abbildung dihomomorph, und $D$ ist auch ein induzierter Subdigraph aus $D[D_1, ..., D_n]$ (man nehme etwa den ersten Knoten jedes $D_i$), so dass der dihomomorphe Core aus $D[D_1, ..., D_n]$ nur innerhalb von $D$ liegen kann - also derselbe Dicore ist wie der von $D$. □

Offenbar ist es in diesem Beispiel möglich, von $D[D_1, ..., D_n]$ zu $D$ zu gelangen, indem man nur elementare Dihomomorphismen durchführt und dabei innerhalb von $D$ bleibt. Nenne solche Cores darum auch elementar-dihomomorphe Cores, bzw. kurz $elemdicore(D)$ für den kleinsten induzierten Subdigraphen von $D$, den man durch elementare Dihomomorphismen erreichen kann, deren Bilder in jedem Schritt in $D$ induziert enthalten bleiben. Damit erhalten wir nach vorherigem Satz:

**Korollar 7.46.** *Für jeden Digraphen $D$, und azkylische Digraphen $D_1, ..., D_n$ für $n = |V(D)|$, gilt $elemdicore(D[D_1, ..., D_n]) = elemdicore(D)$*

Es lässt sich nun folgende Charakterisierung elementar-dihomomorpher Cores erzeugen:

**Satz 7.47.** *$D$ ist genau dann ein elementar-dihomomorpher Core, wenn $D$ keinen nichtidentischen elementaren Dihomomorphismus auf sich selbst erlaubt, und dies gilt gdw. in $D$ die Adjazenzliste keines Knoten die eines anderen enthält.*

*Beweis.* Offenbar ordnet ein elementarer Dihomomorphismus zwei Knoten einander zu. Da keine Adjazenzliste des Knotens sich selbst enthält, würde ein Digon bedeuten, dass die beiden Listen je nicht inenander enthalten sind, wodurch die vollständige Abdeckung durch Digons (d.i. Vollständigkeit) durch die Bedingung schon gesichert ist.

Angenommen es gäbe nun doch einander enthaltende (vielleicht sogar gleiche) Adjazenzlisten. Dann kann man offenbar den Knoten, dessen Adjazenzliste im andern enthalten ist, auf diesen abbilden. Also gibt es dann einen elementaren Dihomomorphismus, der diese Knoten verbindet (da sie insbesondere kein Digon bilden), und da die Adjazenz enthalten wir, entstehen im Quotienten keine zusätzlichen Bögen, also ist das Redukt induziert in $D$ enthalten, und $D$ kein elementar-dihomomorpher Core.

Wenn die beiden Listen nun nicht enthalten sind, kann ein elementarer Dihomomorphismus diese Beiden Knoten nicht direkt aufeinander abbilden, sondern müsste beide auf einen dritten Knoten abbilden. Nun muss aber dieser Knoten dann auf einem andern landen, und dabei muss Adjazenz erhalten bleiben, also ist die Adjazenzliste dieses Knoten in einem der andern

enthalten usw. Es ist also offenbar, dass wenn keine Adjazenzliste ineinander enthalten ist für beliebige Knotenpaare, dass dann so eine Drehung unmöglich ist, also auch keine elementare Dihom-Quotientenbildung, die als induzierter Subdigraph verbleibt.

In beiden Fällen aber sind also die Adjazenzlisten enthalten, wenn es einen Morphismus gibt, also ist ein Digraph mit je einander nicht enthaltenen Adjazenzlisten ein elementarer dihomomorpher Core. (Allerdings können alle Adjazenzlisten verschieden sein; hierzu müssen nur gewisse Bögen aus einem Digraphen mit gleichen Adjazenzlisten entfernt werden, da dadurch ja Abbildbarkeit durch nichts eingeschränkt wird. Als Beispiel kann man hierzu etwa $(\{1,2,3\},\{(1,2),(2,1),(1,3)\})$ betrachten, wo man die Knoten 2 und 3 aufeinander reduzieren kann, obwohl die Adjazenzlisten nicht gleich sind, sondern nur die eine in der andern enthalten ist.)

□

**Korollar 7.48.** *Die Frage, ob ein gegebenener Digraph ein elementar-dihomomorpher Core ist, lässt sich in Polynomialzeit (genauer: quadratisch in der Anzahl der Adjazenzen) lösen.*

Damit können wir zumindest davon ausgehen, dass zirkuläre Cores je verschiedene Adjazenzen haben. Ansonsten scheinen die dihomomorphen Cores keine leicht erkennbaren Struktureigenschaften zu haben, die Frage nach der NP-Vollständigkeit etc. ist ebenfalls hier noch völlig offen. (Die Frage nach der Häufigkeit dihomomorpher Cores wird unten, mit der Frage der Häufigkeit zirkulär-rigider Cores, mitbeantwortet.)

## 7.5 Fundamentale Ergebnisse für zirkuläre Cores

Welche solcher Ergebnisse lassen sich nun auf zirkuläre Cores übertragen? Es gilt zumindest:

**Satz 7.49.** *Folgende Aussagen sind äquivalent*

*(i)* $D$ *ist ein zirkulärer Semi-Core*

*(ii) Alle Morphismen in* $Circ(D,D)$ *sind bijektiv*

*(iii)* $D$ *retrahiert zirkulär auf kein* $D' \subseteq_{ind} D, D' \neq D$

*Beweis.* $(i) \Rightarrow (ii)$ Sei D ein zirkulärer Semi-Core. Wenn ein zirkulärer Morphismus $f : D \to D$ nicht bijektiv ist, dann wäre er auch nicht injektiv, also $Bild(f) \neq V(D)$. Damit aber bildet $f$ $D$ auf einen induzierten Subdigraphen $D[Bild(f)] \neq D$ ab, im Widerspruch zur Annahme dass $D$ ein Semi-Core ist; also ist jedes solche $f$ bijektiv.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Wenn alle Morphismen in $Circ(D, D)$ bijektiv sind, dann kann es keine Retraktionen geben, da jede Retraktion nicht-injektiv ist.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Wenn $D$ nicht retrahiert, dann kann es auch keine Abbildung auf einen Subdigraphen geben, da jeder Subdigraph ja ein Teilgraph einer Retraktion, d.h. eines induzierten Subdigraphen ist; damit aus der Tatsache, dass $D$ nicht auf $D'$ retrahiert, folgt, dass $D$ ein zirkulärer Core bezüglich aller $D[V(D')]$ ist, d.h. ein zirkulärer Semi-Core. □

**Satz 7.50.** *$D$ ist ein zirkulärer Core gdw. $D$ zirkulär auf kein $D' \subseteq D, D' \neq D$ retrahiert, und in diesem Fall sind alle Morphismen aus $Circ(D, D)$ bijektiv.*

*Beweis.* Sei $D$ ein zirkulärer Core. Wenn ein zirkulärer Morphismus $f : D \to D$ nicht bijektiv (was für alle Retraktionen auf kleinere Subdigraphen gilt), dann wäre er auch nicht injektiv, also $Bild(f) \neq V(D)$. Damit aber bildet $f$ $D$ auf einen (nicht notwendig induzierten) Subdigraphen $Bild(f) \neq D$ ab, im Widerspruch zur Annahme dass $D$ ein Core ist; also ist jedes solche $f$ bijektiv. Unter den bijektiven Abbildungen kann nun ebenfalls keine Funktion sein, die retrahiert, da sonst ebenfalls die Core-Eigenschaft widerlegt werden würde, also gibt es kein $D'$ im Bild von $f$, für das $f$ eine Retraktion sein könnte.

Wenn umgekehrt $D$ nicht retrahiert, dann kann es auch keine Abbildung auf einen Subdigraphen geben, da jeder Subdigraph ja eine Retraktion ist; damit aus der Tatsache, dass $D$ nicht auf $D'$ retrahiert, folgt, dass $D$ ein zirkulärer Core ist. (Allerdings reicht hier die Annahme der Bijektivität alleine nicht aus. Eben das macht den Unterschied von Semi-Cores und Cores aus.) □

**Satz 7.51.** *Jeder Digraph $D$ hat einen bis auf Isomorphie eindeutigen zirkulären Core $D^\circ$ als (nicht notwendig induzierten) Subdigraphen, auf den $D$ abbildet.*

*Beweis.* Betrachte alle möglichen zirkulären Morphismen $D \to D[V']$ für $V' \subseteq V(D)$, und suche ein Minimum $D'$ bezüglich $\subseteq_{ind}$, welches es gibt, da es zirkuläre Cores in $D$ gibt (zumindest $K_1$). Offenbar ist $D'$ ein zirkulärer Core, da, wenn $D'$ auf einen seiner Teilgraphen zirkulär abbilden würde, $D$ zunächst auf $D'$ via einer Funktion $f'$ und dann auf diesen Teilgraphen abbilden könnte, also $D'$ nicht $\subseteq_{ind}$-minimal wäre. Sei nun $D''$ ein zweites Minimum, dass über eine Funktion $f''$ erreicht würde. Offenbar muss nun $f'|_{D''}$ bzw. $f''|_{D'}$ zirkulär sein, also sind $f'|_{D''} \circ f''|_{D'}$ und $f''|_{D'} \circ f'|_{D''}$ zirkuläre Morphismen auf $D'$ bzw. $D''$; da sie zirkuläre Cores sind, müssen dies Isomorphismen sein, da sonst sich Bögen entfernen ließen, also sind die Funktionen Isomorphismen und $D, D'$ isomorph. □

Es gibt allerdings keinen eindeutigen zirkulären Semicore. Wenn nämlich $D$ ein echter Semi-core ist, lässt sich $D \cup D^\circ$ offenbar sowohl auf $D$ als auch auf $D^\circ$ abbilden, und beide sind Semi-Cores; man kann sogar noch weitergehendere Konstruktionen vornehmen, etwa mit Semicores $D, D'$ mit $D^\circ = D'^\circ$, aber $D \not\subseteq D', D' \not\subseteq D$, woran man sehen kann, dass hier auch keine Hierarchie leicht hergestellt werden kann. In jedem Falle ist der zirkuläre Core hier der eigentliche Begriff, so dass sich die weitere Untersuchung im wesentlichen mit ihm und nicht mit dem Semi-Core-Begriff beschäftigen wird, auch wenn dieser und die möglichen Semi-Core-Räume noch einige Untersuchung offen lassen, gerade da sie sich nicht so leicht durch ein einzelnes Objekt charakterisieren lassen.

**Satz 7.52.** *1.* $K_n^\circ = K_n$

*2.* $\vec{C}_n^\circ = \vec{W}_k^\circ = \vec{C}_n$

*3.* $\vec{C}(k,d)^\circ = \vec{C}(k/ggT(k,d), d/ggT(k,d))$

*4.* $D^\circ = K_1$ *für azyklische und nichtleere* $D$ *(d.h. nur* $K_1$ *und* $\emptyset$ *sind azyklisch und zirkuläre Cores)*

*5.* $(nD)^\circ = D^\circ$

*6.* $D[m_1, ...., m_n]^\circ = D^\circ$*, und allgemeiner* $D[D_1, ..., D_n]^\circ = D^\circ$ *für* $D_i$ *azyklisch*

*7. Das Kreisintervall von* $D^\circ$ *liegt in dem von* $D$

*8. Wenn* $D$ *knotenkritisch bezüglich* $\vec{\chi}$*,* $\vec{\chi}^*$ *oder* $\vec{\chi}_f$*, dann ist* $D$ *ein zirkulärer Semi-Core; wenn* $D$ *bogenkritisch bezüglich einer dieser Parameter ist, ist* $D$ *ein zirkulärer Core.*

*Beweis.* 1. $K_n$ ist ein zirkulärer Core, da $K_n = S(K_n)$ und $K_n$ ein (homomorphischer) Core ist.

2. $\vec{C}_n$ ist ein zirkulärer Core, da bei Entfernen irgendeines Knotens oder Bogens der ganze Digraph azyklisch wird, also der gerichtete Kreis nicht darauf abgebildet werden kann. Nun zeigt die Abbildung von $\vec{W}_k$ auf $\vec{C}_k$, bei der das Zentrum auf einen beliebigen Randknoten abgebildet wird, dass $\vec{W}_k$ auf den $\vec{C}_k$, der sein Teilgraph ist, abbildet, also $\vec{W}_k^\circ$ isomorph gleich zu $\vec{C}_k$ ist.

3. [HSS18, Prop. 8] Setze $l = ggT(k,d), f : \mathbb{Z}_k \to \mathbb{Z}_{k/l}$ mit $f(i) = \lfloor i/l \rfloor$. $f$ ist eine $(k/l, d/l)$-Färbung von $\vec{C}(k,d)$, d.h. eine Abbildung von $\vec{C}(k,d)$ nach $\vec{C}(k/l, d/l)$ ist, weshalb mit $\vec{C}(k/l, d/l) \subseteq_{ind} \vec{C}(k,d)$ die Kontraktion gezeigt ist. Sei nun $ggT(k,d) = 1$. Wenn nun $\vec{C}(k,d)$ kein Semicore wäre, gäbe es ein nichtbijektiven zirkulären Homomorphismus $\phi : \vec{C}(k,d) \to \vec{C}(k,d), D = \vec{C}(k,d)[Bild(\phi)]$. Dann gilt also $k/d = \vec{\chi}^*(\vec{C}(k,d)) \leq \vec{\chi}^*(D) \leq \vec{\chi}^*(\vec{C}(k,d)) = k/d$, und da $k/d = \vec{\chi}^*(D)$ mit Zähler höchstens $|V(D)| < |V(\vec{C}(k,d))| = k$ darstellbar ist (nach [HSS18, Th. 4] als Ergebnis zur star dichromatic number), können $k/d$ nicht koprim sein, im Widerspruch zur Voraussetzung - also sind alle $\vec{C}(k,d)$ mit $ggT(k,d) = 1$ ein Semicore. Außerdem ist offenbar $\vec{C}_k = \vec{C}(k, k-1) \subseteq \vec{C}(k,d)$ für alle $d$, d.h. $\vec{C}(k,d)$ ist Hamiltonisch und damit offenbar stark zusammenhängend. Also ist $\vec{C}(k/l, d/l)$ ein stark zusammenhängender Semicore, d.h. ein Core, und die Behauptung ist bewiesen.

4. Ein azyklisches $D$ bildet insgesamt auf $K_1$ ab, und enthält $K_1$ induziert für $V \neq \emptyset$. Also gilt dann $D^\circ = K_1$.

5. Offenbar ist $nD \to D$, bei der jede Kopie eines Knotens aus $D$ auf den ursprünglichen Knoten abgebildet wird, ein zirkulärer Morphismus, also ist für einen Morphismus $f : D \to D^\circ$ (den es nach Definition von $D^\circ$ geben muss) auch eine Abbildung $nD \to D^\circ$ zirkulär. Wenn nun $nD$ einen kleineren Core hätte, so müsste er sich auf die verschiedenen Komponenten als $C_1, ..., C_n$ für Komponenten $D_1, ..., D_n$ verteilen; man kann nun aber auch einfach alle $C_i$ auf $D_1$ abbilden, da dadurch ja nur im Zweifelsfall Knoten zusammengelegt werden, aber keine Kreise verloren gehen können, und höchstens sich sogar die Knotenanzahl verringert. Nun lässt sich aber dann auch jede einzelne Kopie $D_i$ via Projektion $D \to nD$ auf diese Zusammenlegung abbilden, im Widerspruch der Minimalität von $D^\circ$, da ja der Core für $nD$ kleiner als der von $D^\circ$ sein würde. Also folgt die Behauptung, und $nD^\circ = D^\circ$.

6. Es ist die Abbildung, die alle kopierten Knoten aus den $m_i K_1$ auf nur einen ihrer abbildet, eine zirkuläre Abbildung, die offenbar eine zirkuläre Äquivalenz erzeugt, da sowohl $D[m_1, ..., m_n]$ auf $D$, als auch $D$ auf $D[m_1, ..., m_n]$ via Projektion auf den ausgewählten Knoten abbildet. Da hier $D$ ein induzierter Subdigraph von $D[m_1, ..., m_n]$ ist, ist der Core von $D[m_1, ...., m_n]$ nicht größer als der von $D$, und da sich jeder doppelte Knoten auf einen einzelnen abbilden lässt, also mit Sicherheit kein Core ist, muss der Core des größeren Digraphen der des kleineren

sein, d.h. $D[m_1, ..., m_n]^\circ = D^\circ$.

Die allgemeinere Aussage beweise man analog durch $D \subseteq_{ind} D[D_1, ...., D_n]$ und die Abbildbarkeit jedes $D_i$ auf einen repräsentativen Knoten. Damit gilt also allgemein $D[D_1, ..., D_n]^\circ = D^\circ$ für $D_i$ azyklisch. Insbesondere ist kein $D[D_1, ...., D_n]$ mit irgendeinem azyklischen $D_i$ ein Core, da sich der betreffende Subdigraph reduzieren lässt. (Ob nun auch $D[D_1, ..., D_n]^\circ = D[D_1^\circ, ..., D_n^\circ]^\circ$ gilt - da ja in diesem Fall $D[D_1, ..., D_n]^\circ = D[K_1, ..., K_1]^\circ = D^\circ$ gilt für $D_i$ azyklisch - ist dagegen noch völlig unklar.)

7. Nach dem oberen Satz ist $D^\circ \subseteq D$, damit folgt die Behauptung daraus, dass die Kreismenge höchstens verkleinert werden kann.

8. Wenn D knotenkritsch bezüglich einer der genannten Parameter, dann ist $D$ offenbar ein Semicore, weil $D$ dann nicht auf einen seiner induzierten Subdigraphen abbilden kann (weil nach [HSS18] die entsprechenden Parameter nicht sinken können), also nach dem oberen Ergebnis (siehe Abschnitt 7.1) ein Semicore ist. Wenn $D$ zudem bogenkritisch ist, gilt dies auch für nichtinduzierte Subdigraphen von $D$, also ist $D$ insgesamt ein zirkulärer Core.

□

Analog zu Punkt 5 ergibt sich folgendes allgemeinere Ergebnis:

**Satz 7.53.** *Wenn $D^\circ = D'^\circ$, gilt $(D \cup D')^\circ = D^\circ$. Im Allgemeinen gilt $(D \cup D')^\circ = (D^\circ \cup D'^\circ)^\circ$ auch für $D, D'$ mit verschiedenen Cores, und sogar $D^\circ = (\cup_{i=1}^n D_i^\circ)^\circ$ wenn $D_i$ die starken Komponenten von $D$ sind.*

*Beweis.* Wenn die Komponenten $D_i$ gegeben seien, dann ist offenbar $D \to (\cup_{i=1}^n D_i^\circ)$ eine mögliche zirkuläre Abbildung, indem man einfach jede Komponente auf ihren jeweiligen Core abbildet. Da dies ein Redukt ist, ist der Core von $D$ der Core dieses Redukts, und die restliche Behauptung folgt als Spezialfall aus dieser allgemeinsten der behaupteten Formeln. □

Die Frage, die vom Anfang dieses Kapitels geblieben ist - die Unterscheidung von zirkulären Cores und Semi-Cores - lässt sich damit auf die Frage zurückführen, für welche zirkulären Cores $D, D'$ eine der Abbildungen $D \to D', D' \to D$ existieren, d.h. welche Cores vergleichbar sind. Offenbar gilt also:

**Korollar 7.54.** *Für einen gewissen Digraphen sind sein Core und jeder minimale Semi-Core identisch, wenn die Cores sämtlicher seiner Komponenten zirkulär vergleichbar sind. Insbesondere sind dann die Semicores aus sämtlichen Komponenten zirkulär vergleichbare.*

Die folgenden Ergebnisse übertragen sich ebenfalls auf offenbare Weise aus dem azyklischen Fall:

**Satz 7.55.** *Wenn $|Circ(D,F)| = 1$ für einen beliebigen Digraphen $D$ gilt, so dass der Morphismus nach $F$ surjektiv abbildet, ist $F$ ein zirkulärer Core*

*Beweis.* Ansonste wäre, wenn man $Circ(D,F) = \{\phi\}$ mit Surjektion $\phi$ annimmt, eine Retraktion $f : F \to F'$ für einen beliebigen Subdigraph $F'$ von $F$ genug, um die Aussage vermittelst $\phi \circ f$ zu einem Widerspruch zu führen wenn $F \neq F'$. Also ist durch $\phi$ $F'$ eindeutig bestimmt, d.h. es gilt $F' = F$ und $F$ ist ein zirkulärer Core. □

Außerdem gilt, wenn man die Selbstabbildungen als Struktur betrachtet:

**Satz 7.56.** *Wenn $Circ(D,D) = Aut_{Digraph}(D)$, d.h. $D$ ist eindeutig zirkulär $D$-färbbar, ist $D$ ein zirkulärer Core*

*Beweis.* Wenn $D$ zirkulär nur isomorph auf sich selbst, d.h. eindeutig auf sich abbildet, folgt mit dem oberen Satz bereits, dass $D$ als Bilddigraph einer eindeutigen Färbbarkeit ein zirkulärer Core ist. □

Während umgekehrt etwas vorausgesetzt werden muss, etwa:

**Satz 7.57.** *Wenn $D$ ein zirkulärer Core, ist $D$ eindeutig $D$-färbbar, wenn $S(D)$ ein Core ist und $D$ selbstsymmetrisch.*

*Beweis.* Nach Annahme ist $D$ selbstsymmetrisch, also $Circ(D,D) = Circ(S(D), S(D)) = Acyc(S(D), S(D)) = Aut_{Digraph}(D)$, da $S(D)$ nach Annahme ebenfalls ein Core ist und azyklische Cores eindeutig selbstfärbbar sind, also als Morphismen nur Isomorphismen erlauben. □

Allerdings gilt dies im allgemeinen sonst nicht umgekehrt, da etwa $\vec{C}_n$ offenbar ein zirkulärer Core, allerdings beispielsweise

$$f : \vec{C}_4 \to \vec{C}_4, f(1) = 3, f(2) = 4, f(3) = 1, f(4) = 2$$

ein zirkulärer Homomorphismus, aber kein Isomorphismus ist. Hier offenbart sich erneut die deutlich höhere Komplexität der zirkulären Morphismen im Gegensatz zu den azyklischen oder Homomorphismen, die schon bei der Unklarheit einer Zerlegung in elementare Morphismen deutlich geworden ist. (Der Versuch eines umgekehrten Beweises, wie er in der vorherigen Version vorhanden war, enthielt eine petitio principii, und ist darum aus gegenwärtiger Version weggelassen worden.)

Damit haben wir eine analoge einseitige Charakterisierung zu der von den Semi-Cores gefunden, wobei hier allerdings zur Bijektivität die Isomorphie

hinzukommt, die eben im allgemeinen bei zirkulären Morphismen nicht unmittelbar geschlossen werden kann. Nenne darum auch eine Digraphenmenge, wo jeweils aus $Circ(D, D) \neq Aut_{Digraph}(D)$ folgt, dass es einen nichtbijektiven Morphismus in $Circ(D, D)$ gibt, Acyc-ähnlich (da bereits bei azyklischen Morphismen Cores und Semicores zusammenfallen). In solch einer Menge sind offenbar zirkuläre Cores und Semicores dasselbe, so etwa bei symmetrischen bzw. induziert kreisfreien Digraphen, in der Menge der Circulanten etc. Damit folgt etwa:

**Korollar 7.58.** *1. Für selbstsymmetrische $D$ sind Core- und Semicore-Eigenschaften identisch*

*2. $\vec{C}(k/ggT(k,d), d/ggT(k,d))$ ist der einzige Semicore in $\vec{C}(k,d)$, analog für andere stark zusammenhängende Digraphen*

und analoge Ergebnisse für andere Acyc-ähnliche Digraphenmengen und -Eigenschaften. Hier wird auch offenbar, warum es so schwierig ist, echte Semicores zu finden, da sie diese Eigenschaft verletzen müssten, was nicht leicht möglich ist, weshalb sie aus verschiedenen Komponenten, die aufeinander nicht abbilden können, zusammengesetzt werden müssen.

## 7.6 Zirkuläre und azyklische Cores und ihr Verhältnis in der Selbstsymmetrie

Was lässt sich nun zu dem Verhältnis von $D^\circ$ und $D^*$ sagen? Zunächst erhalten wir folgendes grundlegende Ergebnis:

**Definition 7.59.** $D$ heißt auch selbstsymmetrisch wenn $D$ $D$-symmetrisch.

**Lemma 7.60.** *Wenn $D$ selbstsymmetrisch, ist $D^\circ = D^* = core(S(D))$.*

*Beweis.* Wenn $D$ selbstsymmetrisch ist, ist also $Circ(D, D) = Circ(S(D), D) = Circ(S(D), S(D))$. Damit ist jeder zirkuläre Morphismus auf $D$ ein Homomorphismus, und wenn $S(D)$ ein (homomorphischer) Core, ist $D$ bereits ein Core. Wenn $D$ kein Core ist, gibt es einen Core $D^\circ$ in $D$; allerdings muss dieser nur erfüllen, dass er keine Homomorphismen bzgl. $S(D)$ in sich selbst hat, da alle zirkulären Morphismen bereits solche Homomorphismen sind; analog folgt dasselbe für azyklische Morphismen. Also gilt $D^\circ = D^* = core(S(D))$. □

**Korollar 7.61.** *Wenn $D$ induziert kreisfrei, gilt $D^\circ = D^* = core(S(D))$, insbesondere also $S(D)^\circ = S(D)^* = core(S(D))$.*

*Beweis.* Wenn $D$ induziert kreisfrei, ist $D$ $F$-symmetrisch für alle $F$, d.h. $D$ $D$-symmetrisch; damit folgt die Behauptung aus dem Lemma. □

Es gilt ja nach dem oberen Satz schon, dass wenn $D$ ein induziert kreisfreier zirkulärer Semicore, auch $S(D)$ ein Core ist - d.h. dass für induziert kreifreie Digraohen nach oberen Satz auch $D$ selbst zum Core werden kann, wenn nur einzelne Bögen entfernt werden, und darum alle Core-Arten damit zusammenfallen:

**Lemma 7.62.** *Wenn $D^\circ = D^* = core(D) = D$, d.h. wenn $D$ ein zirkulärer Core, dann ist $D$ genau dann $D$-symmetrisch, wenn $S(D)$ ein Core ist.*

*Beweis.* Offenbar ist $D$ ja auch ein azyklischer Core, d.h. $Acyc(D, D)$ besteht aus Isomorphismen, da $D$ eindeutig azyklisch $D$-färbbar. Da nun $id_{S(D)} = id_D$ ist $Circ(D, D) \subseteq Circ(S(D), D)$. Offenbar gilt das umgekehrte nur, wenn auch $Circ(S(D), D) = Circ(S(D), S(D)) = Acyc(S(D), S(D))$ aus Isomorphismen besteht, d.h. wenn $S(D)$ ein azyklischer, damit auch ein zirkulärer Core ist. □

Darum beschäftigen ich mich hier mit allgemeinen Digraphen, die nicht unbedingt selbst (Semi-)Cores sind, aber in den Beziehungen ihrer verschiedenen Cores analoge Eigenschaften aufweisen können. Es gilt hier allerdings **nicht**, wie man leicht vermuten könnte:

**Vermutung 8.** *$D$ ist genau dann selbstsymmetrisch, wenn $D^\circ = D^* = core(D)$.*

Man kann sich dazu etwa folgende Eigenschaft vornehmen: $\omega(D) < ai(D)$, aber $D$ nicht $D$-symmetrisch. Ich nenne solche Digraphen pseudoselbstsymmetrisch, da $\omega(D) < ai(D)$ für alle selbstsymmetrischen Digraphen gilt, aber dafür keine hinreichende Bedingung ist. Offenbar gilt sie zudem nicht einmal für alle zirkulären Cores:

**Satz 7.63.** *$\vec{C}_i$ ist für $i \geq 3$ nicht selbstsymmetrisch, ja nicht einmal pseudoselbstsymmetrisch.*

*Beweis.* Offenbar ist für $i \geq 3, \omega(\vec{C}_i) = 1$. Außerdem ist $\vec{C}_i$ $K_1$-asymmetrisch, da $S(\vec{C}_i) = iK_1$ azyklisch, $\vec{C}_i$ aber nicht. Damit gilt aber $ai(\vec{C}_i) = 1 = \omega(\vec{C}_i)$, d.h. $\vec{C}_i$ nicht pseudoselbstsymmetrisch, also auch nicht selbstsymmetrisch. □

Damit ist Selbstsymmetrie eine starke Einschränkung selbst auf Cores.

Es ist nun noch unklar, ob das Verhältnis von $core(D)$ und $D^*$ damit etwas zu tun hat. So gilt ja $D^* = core(D)$ für jeden azyklischen Core; kann

man hier eine Schranke in $ai(D)$ o.Ä. finden, die eine ähnliche Einschränkung in den Core-Eigenschaften gestattet, wie bei den zirkulären Cores mit der Selbstsymmetrie angegeben werden kann? (D.h. dass eine gewisse Klasse von azyklischen Cores auch Core-Eigenschaften für symmetrische Teile o.Ä. bestimmt werden können?)

## 7.7 Stochastische Ergebnisse über zirkuläre Cores

Ich möchte nun noch einmal genauer auf die stochastische Betrachtung der Cores zurückkommen. Nach den oberen Sätzen über die Wahrscheinlichkeitsverteilung homomorpher Cores und ihrer Eigenschaft als zirkulären Cores folgt unmittelbar:

**Korollar 7.64.** *Fast jeder symmetrische Digraph ist ein zirkulärer Core.*

Lässt sich das ausdehnen? Wir benötigen zunächst eine Ausdehnung des Begriffs eines zufälligen Graphen auf Digraphen, wobei das Erdös-Rényi-Modell (vgl. [FHKS19, S.15]), wie es auch bei Hell/Nešetřil verwendet wurde, auf zwei Arten ausgedehnt werden kann, wobei ich, da ich beliebige Digraphen, nicht bloß Orientierungen beliebiger Graphen haben will, folgende Konstruktion vorschlage:

**Definition 7.65.** $\vec{G}(p;n)$ ist der zufällige allgemeine Digraph. Er unterscheidet sich von $D(n;p)$ (siehe [HM12]) darin, dass beide Bögen, $(a,b)$ und $(b,a)$, als unabhängige Ereignisse betrachtet werden, also mit Wahrscheinlichkeit $p^2$ ein Digon entstehen kann.

Offenbar gilt also für dieses Modell:

**Korollar 7.66.** $S(\vec{G}(p;n)) = G(p^2,n)$

Da die folgenden Ergebnisse, als Erweiterung des Ergebnisses von Hell/Nešetřil, mit steigenden $n$ fast immer für alle $p$ gelten, und das $p$ nur die Geschwindigkeit dazu festlegt, werde ich bei den nächsten Ergebnissen diese Parameter $p$ und $n$ ausblenden und stattdessen die allgemeine Frage, ob fast alle Digraphen zirkuläre Cores sind, genauer betrachten.

Damit, dass Digraphen, deren symmetrischer Teil ein Core ist, zumindest Semicores sind, und aus dem vorherigen Ergebnis von Hell/Nešetřil folgt:

**Satz 7.67.** *Für fast alle Digraphen $D$ gilt: Wenn $D$ selbstsymmetrisch, dann ist $D$ ein zirkulärer Semi-Core.*

*Beweis.* Nach dem obigem Korollar gilt, dass fast alle $S(D)$ Cores sind; offenbar gilt in diesen fast-immer-vielen Fällen, dass wenn dann $D$ selbstsymmetrisch, dann $D$ auch ein zirkulärer Semi-Core ist. □

Nach dem oberen Ergebnis von Hell/Neshetril sind nun aber fast alle Graphen rigide. Damit folgt

**Satz 7.68.** *Fast alle Digraphen sind selbstsymmetrisch und zirkulär rigide*

*Beweis.* Sei $S(D)$ rigide. Dann gilt $|Circ(S(D), S(D))| = 1$, also ist die Identität die einzige Selbsabbildung von $S(D)$, damit ist aber $D$ selbstsymmetrisch, da diese offenbar auch eine (und damit die einzige) Selbstabbildung von $D$ ist. □

Wir benötigen noch folgendes Ergebnis über die statistischen EIgenschaften von Digraphen:

**Lemma 7.69.** *Fast alle Digraphen sind stark zusammenhängend.*

*Beweis.* Damit zwei Knoten nicht direkt verbunden sind, muss eine Wahrscheinlichkeit von $1-p^2$ erfüllt sein, damit, dass es keinen Hinweg über einen andern Knoten oder keinen Rückweg gibt, ist $1-(np^2)^2 = 1-n^2p^4$ zu erfüllen, für drei Knoten entsprechend $1-(np(n-1)p^2)^2 = 1-n^2(n-1)^2p^6$, dass es also überhaupt keinen Zusammenhang gibt also bei $1-p^2(1+n^2p^2(1+(n-1)^2p^2....))$. Irgendwann ist, bei steigendem $n$ und gleichbleibenden $p$, die Wahrscheinlichkeit, die hier abgezogen wird, größer als 1, d.h. es ist unmöglich, dass die Knoten nicht doch zumindest indirekt verbunden werden. Damit sind für fast alle $n$ (mit einem je verschiedenen Abschnittspunkt für verschiedene $p$) stark zusammenhängend.

□

**Korollar 7.70.** *Fast alle Semicores sind Cores*

*Beweis.* Ein stark zusammenhängender Semicore ist bereits ein Core, da dann der Digraph gleich seiner Zussammenhangs-Reduktion ist, also nach 7.4 selbst ein Core sein muss. □

Mit der oberen Aussage folgt also

**Korollar 7.71.** *Fast alle Digraphen sind zirkuläre Cores. Genauer: Fast alle Digraphen sind zirkulär rigide Cores (d.h. insb. selbstsymmetrische Cores).*

Also offenbar auch:

**Korollar 7.72.** *Fast alle Digraphen sind rigide azyklische, homomorphische, dihomomorphe und ZEM-zirkuläre Cores*

Es folgt hieraus aber nicht, wie ich vorher gedacht hatte, dass auch fast alle Digraphen induziert kreisfrei sind. So ist etwa, wenn man den Graphen $H_k$ aus den Beispielen von Hell/Nešetřil nimmt für $k \geq 2$, und die Knoten 3, 6 und 9 in einem induzierten Kreis verbindet, der symmetrische Teil offenbar nach obigem Satz rigide, aber der Digraph nicht induziert kreisfrei. Damit ist über die Frage, ob Symmetrie überhaupt statistisch wahrscheinlich ist, also noch nichts gesagt, und diese Frage ist eine noch offene, die weiterer Untersuchung bedarf.

Es ist noch offen, ob auch fast alle selbstsymmetrischen Digraphen Cores sind, da die Verteilung der selbstsymmetrischen Digraphen auf den zufälligen Digraphen, die keine Cores sind, noch ungeklärt ist (ja nicht einmal die der pseudoselbstsymmetrischen besonders deutlich wird, da dafür ja eine Untersuchung von $ai(D)$, d.h. von $\chi(S(D))$ nötig wäre). Es ist aber mit den geleisteten Ergebnissen klar, dass fast alle Digraphen insgesamt selbstsymmetrische Cores sind, also nur Nichtcores überhaupt für eine andere Verteilung der Selbstsymmetrie in Frage kommen. Von dieser Seite scheint eine weitere Aufhellung des Gebiets der Symmetrieeigenschaften auch der Frage nach einer besseren Lösung des Färbungsproblems und der Core-Eigenschaft einigen Aufschluss geben zu können. Ich werde u.a. auch wegen solchen offenen Fragen im nächsten Kapitel eine allgemeinere Konstruktion vorstellen, die zwar bisher noch wenig neue Ergebnisse liefert, aber Ansatzpunkte zu neuen Untersuchungen bereitstellt, mit denen man sich dieser Frage vielleicht etwas besser annähern kann.

# 8 Zirkuläre Homomorphismen auf Hyperdigraphen als offene Verallgemeinerung

## 8.1 Grundlegende Definitionen für Hyperdigraphen

Ich möchte am Ende noch einen Ausblick auf eine sehr allgemeine Erweiterung des hier gegebenen Begriffs zirkulärer Morphismen auf Hyperdigraphen geben, die etliche Fragen offen lässt, aber vielleicht gerade darum auch auf Lücken in der bisherigen Theorie und auf neue Ansätze ihrer Erkundung hinweisen könnte.

Der Begriff des Hyperdigraphen leitet sich vom Begriff des Hypergraphen ab, zu dem seit den Sechziger Jahren eine umfangreiche Theorie ausgearbeitet wurde, vgl. Alain Bretto, Hypergraph Theory [Bre13]. Ein Hypergraph $H$ ist hierbei eine beliebige Menge von Knoten $V(H)$ und eine Menge $E(H)$ von nichtleeren Teilmengen dieser Menge, genannt Hyperkanten; offenbar sind Graphen in dieser Darstellung Hypergraphen mit konstanter Kantengröße 2 (2-uniform in der Notation von Bretto) bzw. Kantengröße $\leq 2$ (wenn Schleifen zugelassen werden). Es lassen sich auch (induzierte) Subhypergraphen, Hypergraphenfärbungen und -morphismen etc. wie gewohnt definieren, nur dass eben nun alle Kanten mehr als nur zwei Knoten haben.

Ein gerichteter Hypergraph, oder Dirhypergraph bzw. Hyperdigraph $H$ ist nun die analoge Erweiterung des Begriffs des Digraphen, der aus einer beliebigen Knotenmenge $V(H)$ und einer Menge $A(H)$ von geordneten Paaren von Teilmengen dieser Menge, den Hyperbögen, besteht. Je nach Definition wird dabei wahlweise verlangt, dass die beiden Mengen disjunkt sein sollen, oder eine nichtleer, oder beide nichtleer, oder dies alles zusammen; um die folgende Diskussion zu vereinfachen, nehmen wir an, dass die Mengen disjunkt und beide nichtleer sind und dass keine Hyperkante doppelt vorkommt (welches nach der Definition von Bretto nicht ausgeschlossen ist, da in seiner Konstruktion stets ein Index mitgeführt wird, sodass er keine Hyperbogenmenge, sondern eine Hyperbogenliste zur Definition benutzt). Dagegen ist dies immer noch eine sehr viel weiterer Begriff als die einfachen Hyperdigraphen (simple dirhyperdgraphs), bei denen nach [Bre13, S. 96] für je zwei Hyperbögen $(A, A'), (B, B')$ entweder $A, B$ oder $A', B'$ und entweder $A, B'$ oder $A', B$ disjunkt sein müssen, womit etwa mit $(X, Y)$ $(Y, X)$ kein Hyperbogen sein kann, ebenso $(X \cup \{a\}, Y \cup \{b\})$ usw. Diese Einschränkung, die man auch als starke Antisymmetrie bezeichnen könnte (da sie sich bei Digraphen eben auf Antisymmetrie reduziert, aber eine stärkere Forderung ist als bloß für $(X, Y) \in H$ auch $(Y, X) \notin H$ zu fordern - was im Gegensatz dazu eine schwache Antisymmetrie wäre), wird im folgenden vor allem des-

halb weniger interessant sein, da ich mich ja gerade für eine Erweiterung des Begriffs von zirkulären Morphismen und ihrer Symmetrien auf Hyperdigraphen interessieren werde, wo diese Einschränkung natürlich keine besonders interessanten Untersuchungsobjekte mehr übrig lassen wird. Darum werde ich mich im weitern auch nicht stärker auf das Buch von Bretto und dem darin entwickelten Ansatz der Untersuchung von Hyperdigraphen beziehen, da er die Antisymmetrie im starken Sinne für seine Untersuchung insgesamt voraussetzt.

Mit $(a, b)$ bzw. $(a, )$ oder $(, b)$ in $e$ für einen Hyperbogen $e$ sei gemeint, dass wenn $e = (A, B)$, dass dann $a \in A$ und $b \in B$ ist, d.h. dass $e$ von $a$ nach $b$ zeigt. Es heißt hier nicht, dass $e = (a, b) := (\{a\}, \{b\})$.

In der bisherigen Literatur zu dem Thema [GLPN93, TT09, Bre13, Bec19] wird vor allem eine Art von schwachen oder allgemeinen Zyklen und Kreisen betrachtet, die ich darum auch zuerst einführen will: Für eine Reihe von Knoten $v_0, v_1, ..., v_n$ und Hyperbögen $e_1, ..., e_n$ heißt $(v_0, e_1, v_1, ...., e_n, v_n)$ ein Hyperpfad von $v_0$ nach $v_n$, wenn $(v_{i-1}, v_i)$ je in $e_i$ liegt für alle $i = 1, ..., n$. Wenn es solche $v_i$ gibt, heißen die Hyperbögen $e_1, ..., e_n$ auch nichtstrikter Pfad. Wenn jeweils $e_i = (A_i, B_i)$ gilt, heißt $e_1, ..., e_n$ dagegen ein strikter Hyperpfad wenn $A_{i+1} = B_i$ für $i = 1, ..., n - 1$. Offenbar ist jeder strikter Hyperpfad ein Hyperpfad, da nach Definition keine der Mengen $A_i, B_i$ leer sein können, also sich jeder Knoten in $B_i$ als ein $v_i$ eignet. $e_1, ..., e_n$ heißt vorwärts-strikt, wenn $B_i \subseteq A_{i+1}$ und rückwärts-strikt wenn $A_i \subseteq B_{i-1}$. Offenbar ist ein Pfad genau dann strikt, wenn er vorwärts-strikt und rückwärts-strikt ist. Außerdem gilt offenbar:

**Lemma 8.1.** *Ein Pfad $e_1, ..., e_n$ ist genau dann vorwärts-strikt, wenn $e_n, ..., e_1$ rückwärtsstrikt ist*

Ein allgemeiner Pfad heißt Kreis, wenn $v_n = v_0$; (vorwärts/rückwärts)-strikte Kreise werden analog zu strikten Pfaden konstruiert. Es lässt sich dabei nun eine spezielle Menge von Kreisen definieren, auf die wir unsere bisherigen Ergebnisse ziemlich direkt übertragen können: Ein (strikter) Kreis $e_1, ..., e_n$ heißt (striker) Erhaltungskreis oder Injektivkreis, wenn für alle $i$ $|A_i| = |B_i|$ gilt. Ein strikter Erhaltungskreis heißt auch ein Multikreis. Offenbar gilt nun

**Lemma 8.2.** *Ein Erhaltungskreis ist genau dann vorwärts-strikt, wenn er rückwärts-strikt ist*

womit es nur zwei Arten von Erhaltungskreisen, die strikten und die nichtstrikten, gibt. Jene Dualität war maßgebendes Vorbild für die Definitionen im nächsten Abschnitt, auch wenn sie deutlich allgemeiner angewandt werden können.

## 8.2 Verschiedene Verallgemeinerungen zirkulärer Morphismen auf Hyperdigraphen

Entsprechend der verschiedenen Kreisdefinitionen gibt es nun auch verschiedene Begriffe von azyklischen Mengen: eine Knotenmenge heißt (injektiv) ((vorwärts/rückwärts-)strikt) azyklisch, wenn es keinen ((vorwärts/rückwärts)-strikten) (Erhaltungs-)Kreis gibt, dessen Knoten nur aus dieser Menge stammen. Entsprechend gibt es verschiedene Begriffe von (ko-)zirkulären, (ko)-azyklischen und (ko-)dihomomorphen Morphismen zwischen den Knotenmengen zweier Hyperdigraphen, die nun analog zur Definition für Digraphen gebildet sind, damit sich nur der Begriff der benutzen Azyklizität unterscheiden kann: Es soll etwa jeweils für zirkuläre Morphismen das Urbild einer azyklischen Menge azyklisch sein, für azyklische, dihomomorphe etc. kommen die bekannten Einschränkungen hinzu. Insbesondere betrachten wir im weiteren den Begriff der allgemeinen und der (injektiven) strikten Zirkularität. Folgendes Ergebnis lässt sich dabei unmittelbar auf alle Arten von Zirkularität übertragen:

**Satz 8.3.** *$f$ ist genau dann zirkulär, wenn das Bild von induzierten Kreisen einen Kreis enthält*

*Beweis.* Wenn $f$ zirkulär, muss das Urbild einer azyklischen Menge ebenfalls azyklisch sein, kann also keinen Kreis enthalten, darum dürfen alle solchen Kreise im Bild nicht azyklisch sein, müssen also einen Kreis enthalten. Umgekehrt folgt aus dieser Eigenschaft, dass eine azyklische Menge nicht Bild eines Kreises sein kann, also ebensowenig irgendeine ihrer Teilmengen, darum weder sie noch irgendeines ihrer Teile im Urbild zyklisch sein kann, deshalb also azyklisch ist. □

Für strikte Kreise funktioniert die analoge Reduktion auf induzierte Kreise nicht, da es strikte Kreise gibt, die keinen induzierten strikten Kreis enthalten (siehe Abbildung 9); daher werden in der weiteren Betrachtung, wenn sie sich auf strikte Kreise fokussiert, Einschränkungen in den möglichen Kreisen zu treffen sein.

Offenbar bilden also zirkuläre Morphismen Kreise auf Kreise und strikt zirkuläre Morphismen strikte Kreise auf strikte Kreise ab; also gilt:

**Korollar 8.4.** *$f$ bildet genau dann strikte Kreise auf strikte Kreise und nichtstrikte Kreise auf nichtstrikte Kreise ab, wenn $f$ sowohl nichtstrikt als auch strikt zirkulär.*

Nenne solche $f$ exakt zirkulär. Damit haben wir für zwei gegebene Hyperdigraphen $H, H'$ drei Morphismenmengen $Circ(H, H'), Circ_s(H, H')$ und

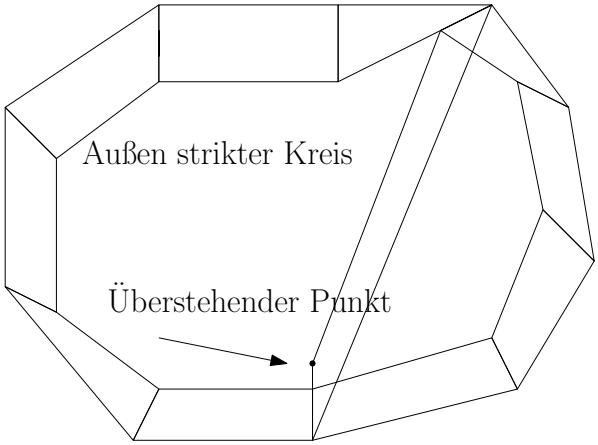



Abbildung 9: Ein Beispiel eines strikten Kreises, der keinen induzierten strikten Kreis enthält

$Circ^*(H, H') = Circ(H, H') \cap Circ_s(H, H')$. Offenbar gilt $Circ(H, H') = Circ_s(H, H')$, wenn H, H' gewöhnliche Digraphen sind; wenn dies sonst passiert, nenne $(H, H')$ zirkulär-digraphenähnlich.

## 8.3 Symmetriebegriffe auf Hyperdigraphen

Um nun eine dem Digraphen-Fall analoge Frage der Symmetrie stellen zu können, können wir wie zuvor den symmetrischen Teil $S(H)$ von $H$ als den Subhyperdigraphen definieren, der die Hyperbögen $(A, B)$ enthält, für die $(B, A)$ auch Hyperbögen sind. Der bei Digraphen natürliche Bezug zu Graphen lässt sich ebenfalls in einen Bezug der Hyperdigraphen zu Hypergraphen ausbauen, der allerdings deutlich vielfältiger ist: Für einen Hyperdigraphen H definiere den unterliegenden Hypergraphen $U(H)$ durch

$$V(U(H)) = V(H)$$

$$E(U(H)) = \{A \cup B | (A, B) \in A(H)\}$$

Ein Hyperdigraph heißt nun hypergraphenähnlich oder stark symmetrisch wenn er sich als Vereinigung aller möglichen Darstellungen seines unterliegenden Hypergraphen darstellen lässt, und der größte stark symmetrische Subhyperdigraph von $H$ heißt sein stark symmetrischer Teil, geschrieben $S^*(H)$. Offenbar galt in der bisherigen Untersuchung ja folgendes:

**Satz 8.5.** *Ein Digraph D ist genau dann symmetrisch, wenn er stark symmetrisch ist,*

eben da eine Kante nur zwei Darstellungen hat, also die Vereinigung beider, das Digon, bereits alle möglichen enthält. Bereits bei einer Hyperkante mit drei Knoten ist dies allerdings nicht mehr der Fall; $abc$ lässt sich als $(a, bc), (bc, a), (b, ac), (ac, b), (c, ab), (ab, c)$ darstellen, und während bei einem symmetrischen Hyperdigraphen nur je ein Paar oder auch zwei vorkommen können, müssen in einem stark symmetrischen Hyperdigraphen alle sechs Hyperbögen vorhanden sein. Offenbar ergeben sich also (da beide Knotenmengen nichtleer sein müssen, $(M, \emptyset)$ und $(\emptyset, M)$ also ausgeschlossen sind) $2^{|M|}-2$ Hyperbögen, die pro dargestellter Hyperkante $M$ im darstellenden Hyperdigraphen vorhanden sein müssen, womit dieser darstellende Hyperdigraph, nenne ihn etwa $D_H$, exponentiell in der Größe der maximalen Hyperkante wächst. Damit scheint der Begriff der starken Symmetrie zum einen berechnungsmäßig deutlich schwerer handhabbar, ist aber auf der andern Seite bei gegebenen Hyperdigraphen deutlich besser dafür geeignet, einschränkende Subhyperdigraphen zu finden.

Nun können wir ein Hyperdigraphen-Äquivalent des Symmetrieproblemes stellen: Seien $H, H'$ Hyperdigraphen gegeben; gilt $Circ(H, H') = Circ(S(H), H')$ oder $Circ_s(H, H') = Circ_s(S(H), H')$ oder $Circ(H, H') = Circ(S^*(H), H')$ etc.? - die verschiedenen Probleme heißen nach den verschienen Morphismen und symmetrischen Teilen, d.h. Symmetrie, strikte Symmetrie, starke Symmetrie, (injektive) exakte Symmetrie etc. etc. Es gibt viele offenbare Probleme, für die es keine leichte Lösung zu geben scheint, wie

**Vermutung 9.** *Sind $(H, H')$ zirkulär-digraphenähnlich gdw. ($H$ $H'$-symmetrisch gdw. $H$ strikt $H'$-symmetrisch gdw. $H$ stark $H'$-symmetrisch)?*

Betrachten wir aber einmal nur die strikte Symmetrie. Strikt zirkuläre Morphismen beruhen auf der Abbildung von strikten Kreisen, die sich als Multikreise $\vec{C}^n_{l_1,...,l_n} \simeq (\{v_{1,1}, ..., v_{1,l_1}\}, ...., \{v_{n,1}, ..., v_{n,l_n}\})$, also als eine Reihe von Knotenmengen, darstellen lassen. Nun lässt sich folgende Unterklasse von Hyperdigraphen definieren:

**Definition 8.6.** Ein Hyperdigraph $H$ heißt kreisäquivalent zu Digraphen, wenn jeder Kreis einen induzierten Multikreis enthält.

Offenbar haben Digraphen diese Eigenschaft, da jeder Kreis in D einen induzierten Kreis bzw. ein Digon enthält. Wenn wir das nun voraussetzen, können wir aber alle Hauptergebnisse aus Kapitel 4 und 5 ziemlich direkt übertragen und erhalten folgende Sätze:

**Satz 8.7.** *Sei $H$ kreisäquivalent zu Digraphen. Dann gilt*

1. *$f : H \to H'$ ist ((vorwärts/rückwärts-)strikt) zirkulär gdw. Bilder von induzierten Multikreisen ((vorwärts/rückwärts-)strikt) zyklisch sind*

2. *$H$ ist induziert Multikreisfrei gdw. $H$ ist strikt $H'$-symmtrisch für alle $H'$ gdw. $H$ ist strikt $D_{K_n}$-symmetrisch für alle $n$*

3. *$H = O(H)$ ist nicht strikt azyklisch gdw. $H$ ist strikt $H'$-asymmetrisch für alle $H'$ gdw. $H$ ist strikt $D_{K_1}$-asymmetrisch*

4. *Wenn $ci(H)$ die Größe des größten induzierten Multikreises ist, ist $H$ strikt $K_{|V(H)|-ci(H)+1}$-asymmetrisch*

5. *$H$ ist strikt $D_{K_i}$-symmetrisch gdw. $i < ai(H) = min\{n|H$ strikt $K_n$-asymmetrisch$\} \in \{\chi(S(H)), \chi(S(H))+1\}$, und $ai(H)$ ist i.A. NP-vollständig, da es $\chi(S(H))$ ist.*

Offenbar sind die bisherigen Sätze darin vermöge $\vec{C}_n = \vec{C}^n_{1,...,1}$ als Spezialfälle enthalten.

Formaler erhält man dies durch folgende Reduktion: Sei $H$ ein Hyperdigraph, setze $F_H = (P(V(H)), \{(v_A, v_B)|(A, B) \in A(H)\})$. Offenbar erzeugt ein strikter Kreis in $H$ genau einen Kreis in $F_H$ und umgekehrt; also sind die strikten zirkulären Homomorphismen zwischen Hyperdigraphen gerade die zirkulären Morphismen ihrer Reduktionen, die mit den Mengen vereinbar sind (d.h. wenn $A$ auf $A'$, $B$ auf $B'$ abbildet, muss $A \cup B$ auf $A' \cup B'$ abbilden). Dadurch werden offenbar die meisten Abbildungseigenschaften erhalten, obwohl auch etliche verloren gehen, insb. die Eigenschaften, die alle Abbildungen insgesamt und vor allem Existenz-, d.h. Ordnungseigenschaften betreffen, da manchmal die möglichen Morphismen keine für die Reduktionen auch gültigen sind.

Aber das gilt eben nicht für den bloß zirkulären oder den exakten Fall! Dort müssen ja auch die nichtstrikten Kreise mitberücksichtigt werden, welche sich aber eben nicht so einfach definieren lassen; man müsste etwa folgende Konstruktion bemühen:

**Beispiel 8.8.** Sei $l$ die Länge des Kreises. Für jedes $1 \leq k \leq l$ seien $q_k, s_k$ die Anzahl der Knoten, die zu den Quellen bzw. Senken des Bogens gehören, aber nicht im Kreis verbleiben, und $f_k$ die im Fluss verbleibenden. Offenbar muss also $f_{k-1 \bmod l} + q_k - s_k = f_k$ für alle $k$ gelten; konstruiere dann die Knotenmenge aus den $v_{i,k}$ für $i = 1, ..., f_{k-1 \bmod l}$ und $v^q_{i,k}$ für $i = 1, ..., q_k$ und $v^s_{i,k}$ für $i = 1, ..., s_k$. Die Hyperbögen werden dann so konstruiert, dass die Quellen- bzw. Ursprungsmenge aus den $v_{i,k}$ und den $v^q_{i,k}$, und die Senken- bzw. Zielmenge aus den $v^s_{i,k}$ und den $v_{i,(k+1 \bmod l)}$ bestehen.

Offenbar ist diese Konstruktion von lokalen Parametern abhängig, und ergibt noch nicht einmal immer eine durch induzierte Teilelemente bestimmbare Form, da gewisse Quellen bzw. Senken aus den $v^q$ bzw. $v^s$ ja identisch sein können (wenn auch nicht direkt hintereinander, aber es könnte ja $v^q_{i,k} = v^q_{j,(k+3)} = v^s_{j,(k-3)}$ etc. sein) oder zwischen sich noch andere Bögen haben. Somit ergibt sich hier ein allgemeineres flusstheoretisches Problem: Wie kann man hier Zirkularität auch nur feststellen? Ist das zirkuläre Färbungsproblem hier überhaupt NP-vollständig - bzw. ist es überhaupt in NP, kann man hier alle solchen Kreise in Polynomialzeit überhaupt überprüfen bzw. die Zirkularität sicherstellen?

(Da dies bei strikten Kreisen geht (d.h. insb. bei kreisäquivalenten zu Digraphen, wie vorher betrachtet) - man suche nur durch sukzessive Teilung des Hyperdigraphen nach Multikreisen - ist das strikte zirkuläre Färbungsproblem auch in NP, d.h. NP-vollständig gdw. $H'$ nicht azyklisch, d.h. insbesondere hier, wenn $H'$ nicht multikreisfrei ist)

Kann man hier vielleicht $ci(H)$ im bezug auf allgemeine Kreise über Flussmaximierung errechnen (wo die $q_i$ bzw. $s_i$ dann 0-Fluss haben sollen, bzw. die Rolle von reinen Senken/Quellen im Fluss haben würden, d.h. als $\{v^q_{i,k}\}, \{v^s_{i,k}\}$-Fluss)?

Es gibt nun noch eine weitere Reduktion auf Digraphen: Mit

$$D(H) := (V(H) \cup E(H), \{(a,e),(e,b)|e = (A,B), a \in A, b \in B\})$$

sind allgemeine Kreise in $H$ genau die Kreise in $D(H)$, so dass sich alle vorherigen allgemeinen Ergebnisse prinzipiell übertragen lassen. Aber da die Hyperbögen nur direkt aneinander angrenzenden disjunkt sein müssen, nicht über längere Abstände - und umgekehrt auch der Unterschied strikter und nichtstrikter Kreise hier gar nicht sichtbar werden kann - kann es eigene Hyperdigraphen-Methoden geben, die durch Digraphen selbst nicht ausgeschöpft werden. Insbesondere allerdings ist die Frage, welchen Status die induzierten Kreise in $D(H)$ für $H$ besitzen, und ob sie für die Untersuchung von Hyperdigraphen irgendwie nutzbar zu machen sind.

## 8.4 Starke Symmetrie und Asymmetrie

Anschließend an das obere Problem der Darstellung von Hypergraphen als Hyperdigraphen stellt sich die Frage: Gibt es einen strukturellen Unterschied von Symmetrie und starker Symmetrie (d.h. der Frage, ob $Circ(H,H') = Circ(S^*(H),H')$ gilt), bzw. was kann hier überhaupt an Ergebnissen oder Eigenschaften übertragen werden? Das Problem der starken Symmetrie scheint

ja, aufgrund der mit der Fakultät ansteigenden Bogenzahl, kaum in NP zu liegen; gibt es aber vielleicht irgendeine andere Möglichkeit, Gegenbeispiele zu verifizieren, bei der nicht erst entsprechend komplexe Subhyperdigraphen konstruiert werden müssten?

Das einzige Ergebnis, was mir dabei leicht zugänglich erscheint, ist folgendes:

**Satz 8.9.** *Wenn $H$ stark ((vorwärts/rückwärts-)strikt) (injektiv) $H'$-symmetrisch, dann ist $H$ auch nicht-stark ((vorwärts/rückwärt-)strikt) (injektiv) $H'$-symmetrisch*

*Beweis.* Es gilt offenbar $Circ(H, H') \subseteq Circ(S(H), H') \subseteq Circ(S^*(H), H')$, da mit dem Entfernen von Hyperbögen auch Bedingungen an zirkuläre Morphismen verschwinden. Wenn also die erste und letzte Menge gleich sind, und nichts anderes besagt starke Symmetrie, dann müssen beide auch der mittleren gleich sein, also ist $H$ auch nicht-stark $H'$-symmetrisch. Offenbar ändert sich daran nichts, wenn man statt $Circ$ nun $Circ_s$ etc. verwendet. □

**Korollar 8.10.** *Wenn $H$ ((vorwärts/rückwärt-)strikt) (injektiv) $H'$-asymmetrisch, dann ist $H$ auch stark ((vorwärts/rückwärts-)strikt) (injektiv) $H'$-asymmetrisch.*

Wenn wir auf die oberen Analogiebildungen zurückgreifen, können wir für $H$ kreisäquivalent zu Digraphen nun als zweite Größe den starken Asymmetrie-Index

$$ai^*(H) = min\{n | H \text{ ist stark strikt } D_{K_n}\text{-asymmetrisch}\} \leq ai(H)$$

definieren. Offenbar gilt:

**Korollar 8.11.** *$ai^*(D) = ai(D)$ für alle Digraphen $D$.*

Welche Hyperdigraphen sind nun ai-Digraphen-ähnlich, d.h. haben auch $ai^*(H) = ai(H)$? Welche sind im Gegenteil absolut unähnlich, haben also etwa $ai(H) = \infty$ und $ai^*(H) = 1$?

# 9 Fazit und offene Probleme

Zum Abschluss möchte ich noch einmal aufzählen, welche Fragen noch offen geblieben sind und wo die Theorie weitgehend abgeschlossen ist. Zunächst kann man die Ergebnisse der Untersuchungen zu den vier in Kapitel 3.2 genannten Symmetrieproblemen in folgenden Punkten allgemein zusammenfassen:

- $LSym(F)$ hat für alle $F$ die induziert kreifreien Digraphen als Lösung, sowie für ein gewisses $F$ zumindest alle Digraphen mit kleinerem digirth, da diese überhaupt nicht abbilden. Ansonsten steht das Problem noch ziemlich offen
- $LAsym(F)$ hat alle nicht azyklischen antisymmetrischen Digraphen als allgemeine Lösung, sowie für spezielle $F$ zumindest die Digraphen mit kleinerem Asymmetrie-Index als $\omega(F)$ und alle, die durch Erweiterung von $F$ durch nicht induziert kreisfreie Digraphen entstanden sind. Ansonsten steht das Problem noch völlig offen.
- $RSym(D)$ und $RAsym(D)$ hat wegen den allgemeinen Lösungen der andern beiden Probleme keine allgemeine Lösung. Für $RSym$ ist aber durch die Antimuster, d.i. durch die möglichst symmetrisierenden Digraphen zumindest noch eine weitgehene Lösung gefunden, während sie für $RAsym$ in Form der symmetrievererbenden Digraphen immer noch aussteht
- Es ist ein statistisches Ergebnis, dass Selbstsymmetrie nahezu immer erfüllt ist. Über andere Symmetrieverhältnisse ist damit aber nichts genaueres gesagt.
- Das Problem $LSym(K_n)$ bzw. $LAsym(K_n)$ ist nach den Ergebnissen über den Asymmetrie-Index NP-vollständig. Über die NP-Vollständigkeit der andern Probleme, sofern sie durch die genannten Partialergebnisse nicht abgedeckt sein sollten (siehe Vermutung 6), ist damit aber nichts weiter gesagt.

Demnach gibt es in den verschiedensten Punkten noch offene Fragen und Ansätze, die verschiedentlich weiterverfolgt werden können. Auf die einzelnen Kapitel aufgeteilt bedeutet das konkreter:

Kap. 1.9 Die Untersuchung kozirkulärer, koazyklischer Morphismen etc. habe ich nicht in den Einzelheiten ausführen können, so dass sich hier vielleicht noch einige Ergebnisse jenseits trivialer Dualisierungen verbergen

könnten. Ebenso ist das Gebiet der azyklisch-koazyklischen, zirkulärkozirkulären Morphismen etc. noch völlig unbearbeitet, wie auch weitere Einschränkungen bezüglich Zusammenhangserhaltung, im Urbild insbesondere, sowie auch der strengen Zusammenhangserhaltung.

Kap. 2.1/2.2 Zum Vergleich der verschiedenen Morphismenarten ist das meiste bereits getan; man könnte höchstens weitere Arten untersuchen, wovon mir hierzu aber keine vorgekommen sind.

Kap. 2.3 Ich habe, wie bereits angemerkt, keine brauchbaren Ergebnisse zur Einordnung fundamentaler zirkulärer Morphismen finden können. Hier bietet sich ein ziemlich weites und ebenfalls unbearbeitetes Gebiet

Kap. 3.3 Die Teilmengen- und Quotientensätze scheinen mir nahezu vollständig zu sein, außer man untersucht noch weitere Arten oder Konstruktionsweisen von Quotienten. Die einzige offene Frage ist die Existenz von Morphismen in $Circ(D, F[F_1, ..., F_m]) \setminus Circ(D, F)$ für mind. ein zyklisches $F_i$, welche nach Vermutung 1 stets existieren müssen, welche hier aber keineswegs nachgewiesen sind. Andererseits ist das Verhältnis von Dihomomorphismen und solchen Quotientenbildungen hier nur teilweise untersucht worden (nur um eine Vermutung zu wiederlegen, noch ist hier nicht viel bewiesen), woran sich vielleicht mit anderen Methoden anknüpfen ließe.

Kap. 4.1 Die allgemeinen Symmetrieeigenschaften, sofern sie alle $F$ ohne Unterschied betreffen, sind ebenfalls abgeschlossen und scheinen mir nicht mehr erweiterungsbedürftig zu sein.

Kap. 4.2 Zwar habe ich die Menge symmetrievererbender Digraphen ziemlich einschränken können, aber bin noch einen Existenzbeweis eines einzelnen solchen Digraphens schuldig geblieben. Gibt es überhaupt symmetrievererbende Digraphen (und nicht nur solche Digraphenmengen), und kann man vielleicht sogar einen expliziten Konstruktionsbeweis durchführen?

Zusatz: Oder gilt doch Vermutung 2, und alle symmetrievererbenden Digraphenmengen sind mindestens abzählbar unendlich?

Kap. 4.3 ~~Ich habe nicht viel Gelegenheit gehabt, die Vermutung zu überprüfen, dass perfekte Digraphen Symmetrieschablonen sind; sind etwa alle Symmetrieschablonen perfekt? Oder gibt es auch perfekte Digraphen, die keine Schablone ihrer selbst sind?~~

Stattdessen: Wie lässt sich weiter mit der Theorie unendlich großer Symmetrieschablonen verfahren? Lassen sich dazu weitere Ergebnisse ettablieren?

Kap. 4.4 Antimuster sind dagegen vollständig als die antisymmetrischen Digraphen bestimmt.

Kap. 5.1 Ist die $F$-Symmetrie für nicht bipartite $S(F)$ als NP-hart beweisbar? Offenbar erfordert es hierzu neuer Ergebnisse oder Parameter, aber mir ist noch völlig unklar, welche hierzu benutzt werden könnten.

Zusatz: Auch die allgemeine NP-Härte der Symmetrie überhaupt ist noch nicht bewiesen, was lässt sich hierzu erzielen?

Kap. 5.1 Kann man einen expliziten Konstruktionsbeweis für induzierte Kreise gewisser Größe nach Symmetrieeigenschaften führen? Vgl. hierzu etwa die Arbeit [CMZ15], wo gezeigt wird, dass wenn $D$ keinen Kreis der Länge $r \mod k$ für $k \geq r \geq 1$ enthält, $D$ $k$-difärbbar ist, so dass hier aus der Nichtexistenz von Morphismen die Existenz dieser Kreise gefolgert werden kann. Kann etwas ähnliches für die Symmetrie durchgeführt werden?

Kap. 5.2 Gibt es einen Digraphen, der Vermutung 6 widerspricht, also $F$-asymmetrisch ist, obwohl er einen größeren Asymmetrie-Index als die Cliquenzahl von $F$ hat und $F$ keinen zyklischen Quotienten dieses Digraphen enthält?

Kap. 6.1 Der NP-Vollständigkeitsbeweis hat noch eine offene Stelle, wenn nämlich $F$ induziert kreisfrei, oder wenn $S(F)$ bipartit oder leer und zugleich $F$ nicht 2-difärbbar. Vielleicht ließe sich hier an der induzierten Kreisfreiheit etwas herausfinden, aber mir ist derzeit nicht klar wie dies gehen sollte, da diese sich ja hier auf den Bild- und nicht den Quell-Digraphen bezieht.

Kap. 6.2 Die allgemeine zirkuläre Ordnung ist ein ungelöstes Problem. Zwar ist klar, dass es NP-vollständig ist, also nicht durch leicht zu berechenbare Parameter einzuschränken ist, aber dennoch ist es eine interessante Frage, ob nicht durch andere, dann ebenfalls NP-harte Parameter, dieses morphismentheoretische Problem in ein algebraisches umzuwandeln wäre.

Kap. 7.1 Das Verhältnis der zirkulären Cores zu den andern Corearten scheint mir hinreichend genau beschrieben, als dass es noch einen weiten Raum offener Fragen geben sollte. ~~Dagegen sind echte zirkuläre Semicores~~

~~noch nicht angegeben, ebenso wie ihr Verhältnis zu den ZEM-zirkulären Cores noch einige offenen Fragen lässt, an denen man gewiss einiges finden könnte, wenn überhaupt erst einmal einige Beispiele konstruiert wären, an denen man so etwas testen könnte.~~ Außerdem ist das Problem der unterliegenden Graphen von Cores noch völlig offen, bis auf das eine hier gefundene Ergebnis.

Stattdessen: Gibt es überhaupt ZEM-(Semi-)Cores, die keine zirkulären sind? Und lassen sich die zirkulären Semicores irgendwie jenseits gegebener Beispiele kategorisieren?

Kap. 7.3 Gibt es analoge Ergebnisse zur zirkulären Core-Ordnung wie zur homomorphen? Kann man insbesondere die Menge an Lücken irgendwie beschränken?

Kap. 7.4 Ich hatte wenig Zeit, mich mit dieser Core-Art zu beschäftigen, da sie mir erst gegen Ende der Bearbeitungszeit als Untersuchungsobjekt aufgefallen sind, so dass es mir scheint, dass sie noch einige interessante Ergebnisse bringen könnten.

Kap. 7.6 ~~Zur Vermutung, dass die aus der Selbstsymmetrie gefolgerte Gleichheit von azyklischem und zirkulärem Core auch für diese hinreichend sein soll, habe ich keine weiteren Hinweise gefunden, diese Frage steht also noch völlig offen.~~

Zusatz: Diese Frage ist eigentlich schon durch das Gegenbeispiel negativ beantwortet worden, daher erübrigt sich diese Frage.

Kap. 7.7 Ebenso die Frage, welche oder wieviele selbstsymmetrische Digraphen Cores sind, was an der Verteilung der homomorphen nichtsymmetrischen Cores hängt.

Zusatz: Außerdem steht die Frage der statistischen Wahrscheinlichkeit von Symmetrie überhaupt wieder offen. Welche Ergebnisse können hier überhaupt erreicht werden, wenn selbst die Rigidität nicht zu befriedigenden Ergebnissen hat führen können?

Kap. 8.2 Die hier gegebene Ausdehnung des zirkulären Morphismenbegriffs auf Hyperdigraphen scheint mir die natürlichste zu sein. Trotzdem könnte es sich lohnen, nach alternativen Begriffsbildungen Ausschau zu halten.

Kap. 8.3 Ich habe bei weitem noch nicht die Menge der vorherigen Ergebnisse auf Hyperdigraphen, die kreisäquivalent zu Digraphen sind, übertragen. So fehlt etwa eine Theorie von Hyperdigraphen-Cores noch vollkommen,

und auch die Komplexität des Färbungsproblem lässt sich augenscheinlich nicht leicht übertragen, da die dort vorgenommene Graphenkonstruktion auf Hypergraphen nicht ohne weiteres funktioniert, da dort der Satz von Mohar über die Färbungskomplexität nicht im allgemeinen bewiesen wurde. Außerdem ist die Kreisäquivalenz zu Digraphen selbst noch genauer zu bestimmen.

Kap. 8.3 Die Betrachtung allgemeiner Symmetrien auf Hyperdigraphen ist, wie bereits angedeutet, ohne Flusstheorie und eine detailliertere Betrachtung der möglichen Kreise und Knotenidentitäten kaum zu machen. Hier bietet sich also ein weites Gebiet, an das ich wegen fehlender Klarheit der zu suchenden Methode wie der notwendigen Beschäftigung mit der Flusstheorie auf Hypergraphen und -digraphen nicht anschließen konnte; insbesondere die Ergebnisse auf [Bec19] könnten hierzu hilfreich sein.

Zusatz: Wie lässt sich das Verhältnis der verschiedenen Digraphen-Reduktionen erfassen? Was bedeuten insbesondere induzierte Kreise in $D(H)$)?

Kap. 8.4 Die starke Zirkularität und starke Symmetrie, wie den verwandten Problem der $ai$-Ähnlichkeit und der Komplexität von $ai^*(H)$ überhaupt, scheinen mir einen guten Anknüpfungspunkt zur Lösung der allgemeineren Probleme zur Symmetrie und Circ-Ordnung zu bieten, wenn vorher die Fragen der Technik, mit der die Hyperdigraphen zu untersuchen sind, genauer bearbeitet wurde.

Diese ganzen offenen Fragen zeigen, dass insbesondere das Problem der starken Zirkularität und der starken Symmetrie einen Anknüpfungspunkt bildet, der für eine Lösung allgemeinerer Probleme interessant werden könnte, und der vor allem, wenn man hier zu weiteren Ergebnissen kommen kann, etwa der Charakterisierung von Symmetrien, umgekehrt Probleme der gewöhnlichen zirkulären Morphismen auf Digraphen mitlösen könnte, etwa indem Kreisäquivalenz zu Digraphen oder $ai$-Ähnlichkeit etc. genauer charakterisiert würden. Was zu diesen ganzen Problemen geleistet werden kann, weiß ich nicht, aber es scheint mir durchaus möglich, dass durch flusstheoretische Betrachtungen in der Hyperdigraphen-Theorie diesem ganzen Gebiet ein theoretischer Abschluss gegeben werden könnte, der dem Thema angemessen ist und seine Einordnung in die Graphentheorie, als allgemeine Betrachtung ihrer Funktionen und Funktionsverhältnisse auf fundamentalster Ebene, darzustellen fähig wäre. Darauf allerdings bleibt mir hier nur zu warten.

# Abbildungsverzeichnis


1 Ein Beispiel von sich schneidenen Kreisen und Pfaden: Ein Beispiel von sich schneidenen Kreisen und Pfaden. Die Knoten $1, 2, 3, 7, 8$ bilden einen induzierten $\vec{P}_4$, $5, 6, 7$ einen induzierten $\vec{C}_3$, und $3, 4, 5, 6, 7$ einen nichtinduzierten $\vec{C}_5$. $(7, 5)$ ist eine Sehne, daher kann er nicht induziert sein. $(9, 7), (7, 9)$ ist ein Digon, daher enthält $7, 3, 9, 7$ keinen induzierten Kreis, sondern nur via $7 - 3 - 2 - 9$ einen nichtinduzierten $\vec{P}_4$. $1, 8$ sind einzelne Knoten, die je eine starke Zusammenhangskomponente bilden, alle andern bilden eine dritte. Hier nur dazu gedacht, die Terminologie von induziertem Kreis und Zusammenhang zu verdeutlichen. . . . . 13

2 Die ersten Zirkulant-Digraphen und Graphen. Es gilt $C(k, d) = S(\vec{C}(k, d))$ für die Paare $(k, d)$, für die $C(k, d)$ definiert ist, wie hier zu sehen: In diesem Bild werden die Zirkulant-Graphen und Digraphen als Kantenteilmengen von vollständigen Graphen dargestellt. Die Farbreihe von Schwarz bis Gelb zeigt die verschiedenen $d$; so wird bei $\vec{C}(k, 1)$ der ganze Digraph benutzt, bei $\vec{C}(k, 2)$ alle Bögen außer den schwarzen etc. bis bei $\vec{C}(k, 5)$ nur noch die gelben Bögen übrig bleiben. Am Bild kann man ebenfalls die Identitäten $\vec{C}(k, 1) = K_k, \vec{C}(k, k-1) = \vec{C}_k, \vec{C}(k, n) = kK_1$ für $n \geq k$ ablesen, sowie $K_k - C(k, 1) = C_k$. 19

3 Ein nicht azyklischer, zusammenhangs-erhaltender zirkulärer Morphismus auf einem Digraphen mit zwei Komponenten: Dieses Bild illustriert eine zusammenhangserhaltende Abbildung, die weder azyklisch noch homomorph ist, aber zirkulär, um die Definition der Morphismenart $ZEMCirc$ zu rechtfertigen. 24

4 Ein komplexer fundamentaler zirkulärer Morphismus: Mit diesem Beispiel soll demonstriert werden, dass fundamentale zirkuläre Morphismen, im Gegensatz zu elementaren Dihomomorphismen, eine komplexe Struktur aufweisen und u.a. nicht zusammenhangserhaltend sein müssen. Damit wird gezeigt, dass die Untersuchung solcher Morphismen nicht das unmittelbare Objekt dieser Arbeit sein kann, sondern Objekt künftiger Forschungen bleibt. . . . . 29

5 Das Gegenbeispiel zur $ai$-Vermutung: In diesem Bild wird das Gegenbeispiel zur Vermutung, dass zirkuläre Symmetrie allein anhand von $ai(D)$ bestimmt werden könnte, gezeigt; die oberen drei Punkte bilden dabei einen gerichteten Kreis, weswegen die Bögen im Gegensatz zu den Kanten blau gefärbt sind. Die Farben der Knoten von $D$ bilden die 2-Färbung von $D$ ab, die gestrichelten Pfeile den wiederlegenden zirkulären Homomorphismus . . . . . 53
6 Ein Beispiel der konstruierten Semi-Cores aus dem Grötzsch-Graphen: Dieses Bild gibt ein Beispiel eines Semi-Cores, der die bisher offene Suche danach beendet. Außerdem ist er zugleich ein echter ZEM-Semicore, was die vorherige Vermutung zur Corenotwendigkeit über ZEM-Circ widerlegt. . . . . 62
7 Eine Abbildung des nach innen gerichteten Rads mit sechs Knoten auf den gerichteten Kreis mit sechs Knoten. (vgl. 7.52.2): Dieses Bild sei beigefügt, um einen azyklischen Core zu zeigen, der kein zirkulärer ist, indem eine zirkuläre Reduktion explizit angegeben wird. . . . . 67
8 Die Beispiele von homomorphen Cores aus Satz 7.37: In diesem Bild werden verschiedene Homomorphe Cores dargestellt. Offenbar sind die oberen Digraphen azyklisch und haben mehr als einen Knoten, nach dem späteren Ergebnis aus 7.52.4 also keine zirkulären Cores, dagegen die unteren schon, da sie symmetrische Cores sind. Die Bilder sind sämtlich aus Kapitel 4, Fig. 4.1-4.3, 4.6, 4.7 von [HN04] . . . . . 75
9 Ein Beispiel eines strikten Kreises, der keinen induzierten strikten Kreis enthält: Hierdurch wird gezeigt, dass die Beschränkung auf induzierte Kreise nicht möglich ist und eine echte Hyperdigraphen-Theorie anders aufgebaut werden müsste. . . 93

# Literatur


[ABHW19] Stephan Dominique Andres, Helena Bergold, Winfried Hochstättler, and Johanna Wiehe. A semi-strong perfect digraph theorem. arXiv:1906.05650, 2019.

[AH15] Stephan Dominique Andres and Winfried Hochstättler. Perfect digraphs. J. Graph Theory, 79(1):21–29, 2015.

[APMBORM18] Gabriela Araujo-Pardo, Juan José Montellano-Ballesteros, Mika Olsen, and Christian Rubio-Montiel. The diachromatic number of digraphs. Electron. J. Combin., 25(3):Paper 3.51, 17, 2018.

[Bec19] Isabel Leonie Beckenbach. Matchings and Flows in Hypergraphs. 2019. Dissertation / Thesis (Ph.D.)–FU Berlin.

[BFJ+04] Drago Bokal, Gašper Fijavž, Martin Juvan, P. Mark Kayll, and Bojan Mohar. The circular chromatic number of a digraph. J. Graph Theory, 46(3):227–240, 2004.

[Bre13] Alain Bretto. Hypergraph theory. Mathematical Engineering. Springer, Cham, 2013. An introduction.

[CMZ15] Zhibin Chen, Jie Ma, and Wenan Zang. Coloring digraphs with forbidden cycles. J. Combin. Theory Ser. B, 115:210–223, 2015.

[EGK91] Paul Erdős, John Gimbel, and Dieter Kratsch. Some extremal results in cochromatic and dichromatic theory. J. Graph Theory, 15(6):579–585, 1991.

[FHKS19] Stefan Felsner, Winfried Hochstättler, Kolja Knauer, and Raphael Steiner. Complete acyclic colorings. arXiv:1905.08670, 2019.

[FHM03] Tomás Feder, Pavol Hell, and Bojan Mohar. Acyclic homomorphisms and circular colorings of digraphs. SIAM J. Discrete Math., 17(1):161–169, 2003.

[GLPN93] Giorgio Gallo, Giustino Longo, Stefano Pallottino, and Sang Nguyen. Directed hypergraphs and applications. volume 42, pages 177–201. 1993. Combinatorial structures and algorithms.

[HKMR12] Ararat Harutyunyan, P. Mark Kayll, Bojan Mohar, and Liam Rafferty. Uniquely $D$-colourable digraphs with large girth. Canad. J. Math., 64(6):1310–1328, 2012.

[HM12] Ararat Harutyunyan and Bojan Mohar. Two results on the digraph chromatic number. Discrete Math., 312(10):1823–1826, 2012.

[HN90] Pavol Hell and Jaroslav Nešetřil. On the complexity of $H$-coloring. J. Combin. Theory Ser. B, 48(1):92–110, 1990.

[HN04] Pavol Hell and Jaroslav Nešetřil. Graphs and homomorphisms, volume 28 of Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications. Oxford University Press, Oxford, 2004.

[HS18] Winfried Hochstättler and Raphael Steiner. The star dichromatic number. arXiv:1809.00142, 2018.

[HSS18] Winfried Hochstättler, Felix Schröder, and Raphael Steiner. On the complexity of digraph colourings and vertex arboricity. arXiv:1812.02420, 2018.

[NL82] V. Neumann Lara. The dichromatic number of a digraph. J. Combin. Theory Ser. B, 33(3):265–270, 1982.

[Sev14] Michael Dennis Severino. Digraphs and homomorphisms: Cores, colorings, and constructions. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2014. Thesis (Ph.D.)–University of Montana.

[TT09] Mayur Thakur and Rahul Tripathi. Linear connectivity problems in directed hypergraphs. Theoret. Comput. Sci., 410(27-29):2592–2618, 2009.

[Vin88] A. Vince. Star chromatic number. J. Graph Theory, 12(4):551–559, 1988.

[Zhu01] Xuding Zhu. Circular chromatic number: a survey. volume 229, pages 371–410. 2001. Combinatorics, graph theory, algorithms and applications.