



Fakultät für Mathematik und Informatik
Lehrgebiet Diskrete Mathematik und Optimierung

BACHELORARBEIT

**Untersuchungen zur Vervollständigung von Bouquets
geometrischer Verbände**

Christopher Roßbach

Bearbeitungsbeginn: 10. Februar 2026

Betreuer: Prof. Dr. Winfried Hochstättler

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Strukturen	3
2.1	Halbordnungen	3
2.1.1	Abbildungen zwischen Halbordnungen	4
2.1.2	Spezielle Elemente	6
2.1.3	Hasse-Diagramme	8
2.2	Verbände	9
2.3	Fast-geometrische Verbände	14
2.4	Bouquets geometrischer Verbände	18
3	Ergänzung von Bouquets	22
3.1	Ranganhebung in Bouquets	22
3.2	Ergänzung durch ein Einselement	23
4	Vervollständigung	26
4.1	Nicht-atomare Verbände	26
4.2	Nicht-submodulare Verbände	29
4.2.1	Behebende Elemente L'	29
4.2.2	Fixpunktmenge \tilde{L}	36
4.2.3	Behebende Fixpunkte L^*	38
4.3	Notwendige Bedingungen	43
5	Explorationswerkzeug	46
5.1	Überblick	46
5.2	Bearbeitung von Verbänden	46
5.3	Überprüfungen und Nutzerfunktionen	48
5.4	Import	50
5.5	Export	51
5.6	Persistenz	51
6	Zusammenfassung und Ausblick	52
	Literaturverzeichnis	54
A	Vervollständigungen	56
A.1	Weitere Vervollständigungen mit L'	56
A.2	Vervollständigungen von Gegenbeispielen	57

Abbildungsverzeichnis

2.1	Hasse-Diagramme verschiedener Halbordnungen.	8
2.2	Vier Beispiele von Verbänden.	15
2.3	Beispiele fast-geometrischer Verbände und ihrer Vervollständigungen. . .	17
2.4	Ein Bouquet geometrischer Verbände mit drei maximalen Elementen. . .	19
2.5	Eine Halbordnung, die kein Bouquet geometrischer Verbände ist.	20
3.1	Ergänzung eines Bouquets zum fast-geometrischen Verband.	25
4.1	Vervollständigung nicht-atomarer fast-geometrischer Verbände.	28
4.2	Der Verband L und zwei behebbende Elemente.	33
4.3	Die Erweiterung L' des Verbands aus Abbildung 4.2a.	33
4.4	Gegenbeispiel zur Abgeschlossenheit von L' unter \cap	35
A.1	Vervollständigung eines Rang-3-Verbands.	56
A.2	Vervollständigung eines Verbands mit drei Coatomen.	56
A.3	Vervollständigung eines Verbands mit disjunkten Coatom-Idealen.	57

Tabellenverzeichnis

6.1	Übersicht der Konstruktionsverfahren.	53
-----	---	----

1 Einleitung

Geometrische Verbände sind eine wichtige Struktur der kombinatorischen Geometrie. Sie stehen in einer engen Beziehung zu Matroiden, welche eingeführt wurden, um den Begriff der linearen Unabhängigkeit zu abstrahieren (Whitney 1935). Jeder geometrische Verband ist isomorph zum Verband der Flats eines einfachen Matroids, und umgekehrt bildet der Flat-Verband jedes einfachen Matroids einen geometrischen Verband (Birkhoff 1967). Orientierte Matroide erweitern Matroide um Vorzeicheninformation und modellieren so die Geometrie reeller Hyperebenenordnungen einschließlich der durch sie induzierten Zellzerlegungen des Raumes. In der linearen Optimierung lassen sich die zulässigen Bereiche linearer Programme als Zellkomplexe orientierter Matroide beschreiben (Richter-Gebert und Ziegler 2017).

Komplexe orientierter Matroide (COMs), eingeführt von Bandelt, Chepoi und Knauer (Bandelt u. a. 2018), verallgemeinern orientierte Matroide. In der realisierbaren Variante erfassen sie die Einschränkung einer Hyperebenenordnung auf eine offene konvexe Menge. Sie modellieren damit die Situation der Optimierung, in der die Zellstruktur einer Hyperebenenordnung auf einen konvexen zulässigen Bereich eingeschränkt wird. Eine offene Vermutung von Bandelt, Chepoi und Knauer (Bandelt u. a. 2018) besagt, dass jeder COM als Faser eines orientierten Matroids darstellbar ist.

Hochstättler und Keip (Hochstättler und Keip 2024) haben gezeigt, dass die Nullstellenmengen der Vorzeichenvektoren eines COMs, geordnet durch Inklusion, ein Bouquet geometrischer Verbände bilden. Dies verallgemeinert ein Resultat von Björner et al. (Björner u. a. 1999), wonach die Nullstellenmengen eines orientierten Matroids die Flats eines Matroids und damit einen geometrischen Verband bilden. Bouquets geometrischer Verbände sind Inf-Halbverbände, in denen jedes Intervall ein geometrischer Verband ist. Sie verallgemeinern geometrische Verbände, indem sie die globale Existenz eines Supremums nicht fordern, die lokale geometrische Struktur aber bewahren.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der Frage, ob sich jedes Bouquet geometrischer Verbände zu einem geometrischen Verband vervollständigen lässt. Diese Frage ist analog zur Vermutung von Bandelt, Chepoi und Knauer, jedoch auf der Ebene der Verbände statt der orientierten Matroide. Damit ergeben sich die folgenden Zusammenhänge:



Fragestellung

Die zentrale Frage dieser Arbeit lautet: *Wann und wie lässt sich ein Bouquet geometrischer Verbände zu einem geometrischen Verband vervollständigen?*

In einem Bouquet geometrischer Verbände hat jedes Intervall die geometrische Struktur eines Matroids, ist also in gewissem Sinne “lokal-geometrisch”. Die Frage, ob sich diese lokale Struktur zu einer globalen Struktur eines geometrischen Verbands vervollständigen lässt, entspricht der Einbettung dieser lokalen Struktur in ein globales Matroid.

Wir betrachten die Vervollständigung in zwei Schritten. Zunächst zeigen wir, dass sich jedes Bouquet geometrischer Verbände zu einem fast-geometrischen Verband ergänzen lässt, also zu einem Verband, der lokal unter jedem Coatom geometrisch ist und eine Rangfunktion besitzt. Anschließend untersuchen wir die Vervollständigung fast-geometrischer Verbände zu geometrischen Verbänden.

Aufbau und Ergebnisse

In Kapitel 2 rekapitulieren wir die ordnungstheoretischen Grundlagen. Ausgehend von Halbordnungen definieren wir Verbände, atomare und submodulare Verbände und fassen diese Standardbegriffe im Begriff des geometrischen Verbands zusammen. Darüber hinaus führen wir in Abschnitt 2.3 für diese Arbeit die Begriffe des fast-geometrischen Verbands, der Coatom-Einbettung und der Vervollständigung ein, die den Rahmen für die Konstruktionen der folgenden Kapitel bilden. Abschließend führen wir Bouquets geometrischer Verbände als Inf-Halbverbände ein, in denen jedes Intervall geometrisch ist.

In Kapitel 3 zeigen wir, dass sich jedes endliche Bouquet geometrischer Verbände zu einem fast-geometrischen Verband ergänzen lässt (Satz 3.3). Die Ergänzung erfolgt in zwei Schritten: Zunächst werden die Ränge der maximalen Elemente durch Produkte mit Ketten angeglichen, anschließend wird ein Einselement hinzugefügt.

Kapitel 4 bildet den Kern der Arbeit und behandelt die Vervollständigung fast-geometrischer Verbände zu geometrischen Verbänden. Wir unterscheiden zwei Fälle. Nicht-atomare fast-geometrische Verbände haben genau ein Coatom, und ihre Vervollständigung gelingt durch das direkte Produkt des Coatom-Ideals mit einer zweielementigen Kette. Für atomare, nicht-submodulare Verbände verfolgen wir mehrere konstruktive Ansätze. Die Konstruktion L' fügt für jedes problematische Paar (a, x) ein behebendes Element ein, ist aber im Allgemeinen nicht unter Mengenschnitten abgeschlossen und damit kein Verband. Die Fixpunktmenge \tilde{L} behebt dieses Problem, erzeugt aber zu viele Elemente und besitzt im Allgemeinen keine Rangfunktion. Die behebenden Fixpunkte L^* reduzieren \tilde{L} auf die notwendigen Elemente, lösen das Rangproblem jedoch nicht vollständig. Wir formulieren notwendige Bedingungen für jede Vervollständigung, die keine neuen Atome einführt, und stellen den Konstruktionsvorschlag L^+ vor, der diese Bedingungen systematisch berücksichtigt.

In Kapitel 5 beschreiben wir ein interaktives Werkzeug zur Konstruktion und Untersuchung von Verbänden, das die Exploration der in dieser Arbeit betrachteten Strukturen unterstützt.

Kapitel 6 fasst die Ergebnisse zusammen und formuliert offene Fragen.

2 Strukturen

In diesem Kapitel führen wir die ordnungstheoretischen Grundlagen ein, auf denen die Konstruktionen der folgenden Kapitel aufbauen. Ausgehend von Halbordnungen definieren wir Verbände und ihre für uns zentralen Unterklassen. Darüber hinaus führen wir den Begriff des fast-geometrischen Verbands ein, der die Ausgangslage für die Vervollständigung bildet, und formalisieren den Rahmen, in dem wir Vervollständigungen untersuchen. Abschließend betrachten wir Bouquets geometrischer Verbände als Verallgemeinerung geometrischer Verbände ohne globale Suprema.

2.1 Halbordnungen

Um Verbände als Halbordnungen aufzufassen, definieren wir diesen Begriff zunächst formal:

Definition 2.1 (Halbordnung (M, \leq))

Eine Halbordnung ist eine Menge M zusammen mit einer Relation \leq auf M , die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

1. $\forall x \in M : x \leq x.$ (Reflexivität)
2. $\forall x, y \in M : x \leq y \text{ und } y \leq x \implies x = y.$ (Antisymmetrie)
3. $\forall x, y, z \in M : x \leq y \text{ und } y \leq z \implies x \leq z.$ (Transitivität)

Definition 2.2 (Vergleichbarkeit, Unvergleichbarkeit, Bedeckung)

Sei (M, \leq) eine Halbordnung.

Sind $x, y \in M$ mit $x \leq y$ oder $y \leq x$, so heißen x und y vergleichbar, andernfalls unvergleichbar und wir schreiben $x \parallel y$.

Folgt für drei Elemente $x, y, z \in M$ mit $x \leq y \leq z$, dass $y = x$ oder $y = z$ gilt, so sagen wir “ z bedeckt x ” und schreiben $x \triangleleft z$.

Notation 2.3

Ist $x \leq y$ und $x \neq y$, so schreiben wir auch $x < y$. Gilt $x \leq y$, so schreiben wir auch $y \geq x$. Auf ähnliche Weise schreiben wir für $x \triangleleft y$ auch $y \triangleright x$ sowie für $x < y$ auch $y > x$.

Ein naheliegendes Beispiel ist die Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{N} mit dem üblichen “kleiner oder gleich” \leq . Dieses Beispiel erfüllt alle drei Eigenschaften einer Halbordnung, jedoch noch mehr: So gilt für zwei Zahlen x und y immer $x \leq y$ oder $y \leq x$, zwei Elemente sind also immer vergleichbar, was diese Halbordnung zu einer Totalordnung macht:

Definition 2.4 (Totalordnung)

Eine totale Ordnung ist eine Halbordnung (M, \leq) , in der jedes Paar von Elementen vergleichbar ist, d.h. $\forall x, y \in M : x \leq y$ oder $y \leq x$.

Definition 2.5 (Kette)

Sei (M, \leq) eine Halbordnung. Eine Teilmenge $K \subseteq M$ heißt Kette, wenn (K, \leq) eine Totalordnung ist. Die Länge einer endlichen Kette K ist $|K| - 1$. Eine Kette K heißt maximale Kette, wenn es keine Kette $K' \subseteq M$ mit $K \subsetneq K'$ gibt. Mit $C(n)$ bezeichnen wir eine Kette der Länge n .

Totalordnungen auf der gesamten Grundmenge sind für uns zu einschränkend und daher nicht weiter von Interesse. Ein Beispiel für eine weniger offensichtliche Halbordnung auf der Menge der natürlichen Zahlen ist die Teilbarkeitsrelation: $x \leq y$ genau dann, wenn x ein Teiler von y ist.

Beispiel 2.6 $(\mathbb{N}, |)$ als Halbordnung

Die Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{N} mit der Teilbarkeitsrelation $|$ bildet eine Halbordnung. Dabei bedeutet $x|y$ für $x, y \in \mathbb{N}$, “ x teilt y ”, also $y = k \cdot x$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

1. Reflexivität: Jede Zahl teilt sich selbst, also $x|x$ für alle $x \in \mathbb{N}$.
2. Antisymmetrie: Wenn $x|y$ und $y|x$, dann muss $x = y$ sein, da beide Zahlen die gleichen Teiler haben.
3. Transitivität: Wenn $x|y$ und $y|z$, dann teilt x auch z , also $x|z$.

Allerdings ist diese Halbordnung keine Totalordnung, da zum Beispiel 2 und 3 nicht vergleichbar sind, da weder $2|3$ noch $3|2$ gilt.

Ein weiteres Beispiel für eine Halbordnung, die keine Totalordnung ist, ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ einer Menge X mit der Teilmengenrelation \subseteq . Der allgemeinere Fall ist für uns so wichtig, dass wir ihn hier festhalten:

Proposition 2.7 (\mathcal{M}, \subseteq) ist Halbordnung

Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem über X , dann ist (\mathcal{M}, \subseteq) eine Halbordnung.

Beweis.

1. Reflexivität: Es gilt $A \subseteq A$ für jede Teilmenge $A \in \mathcal{P}(X)$.
2. Antisymmetrie: Ist $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$, dann haben A und B die gleichen Elemente und damit ist $A = B$.
3. Transitivität: Wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$, dann ist A auch eine Teilmenge von C , also $A \subseteq C$.

□

Im Allgemeinen ist (\mathcal{M}, \subseteq) keine Totalordnung. Sei beispielsweise $\mathcal{M} = \{\{x\}, \{y\}\}$ für verschiedene $x, y \in X$, dann sind diese beiden Mengen nicht vergleichbar, da weder $\{x\} \subseteq \{y\}$ noch $\{y\} \subseteq \{x\}$ gilt.

2.1.1 Abbildungen zwischen Halbordnungen

Tatsächlich gilt auch die “umgekehrte Richtung” der Proposition 2.7: Es lässt sich jede

Halbordnung als Inklusion auf einem Mengensystem auffassen, wir können uns also jede Halbordnung anschaulich als eine Teilmengenrelation vorstellen. Wir nehmen diese Tatsache als Motivation, um einige Begriffe zu definieren, die in der Arbeit häufig auftauchen werden:

Definition 2.8 (Monotone Abbildung)

Seien (M, \leq_M) und (N, \leq_N) Halbordnungen. Eine Abbildung $\varphi : M \rightarrow N$ heißt monoton oder ordnungserhaltend, wenn für alle $x, y \in M$ gilt:

$$x \leq_M y \implies \varphi(x) \leq_N \varphi(y). \quad (2.1)$$

Monotone Abbildungen respektieren die Struktur der Halbordnungen, können aber durchaus Elemente zusammenführen, d.h. es kann $x \neq y$ mit $\varphi(x) = \varphi(y)$ geben. Wollen wir aus $\varphi(x) \leq_N \varphi(y)$ auch $x \leq_M y$ folgern können, so benötigen wir eine stärkere Bedingung:

Definition 2.9 (Ordnungseinbettung)

Seien (M, \leq_M) und (N, \leq_N) Halbordnungen. Eine injektive Abbildung $\varphi : M \rightarrow N$ heißt Ordnungseinbettung, wenn für alle $x, y \in M$ gilt:

$$x \leq_M y \iff \varphi(x) \leq_N \varphi(y). \quad (2.2)$$

Die Injektivität folgt dabei bereits aus der Äquivalenz (2.2), da aus $\varphi(x) = \varphi(y)$ sowohl $x \leq_M y$ als auch $y \leq_M x$ folgt, also $x = y$. Existiert die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : N \rightarrow M$ einer Ordnungseinbettung φ , so sind die Halbordnungen (M, \leq_M) und (N, \leq_N) in gewisser Weise äquivalent. Wir definieren:

Definition 2.10 (Ordnungsisomorphismus, ordnungsisomorph)

Seien (M, \leq_M) und (N, \leq_N) Halbordnungen. Eine bijektive Abbildung $\varphi : M \rightarrow N$ heißt Ordnungsisomorphismus, wenn für alle $x, y \in M$ gilt:

$$x \leq_M y \iff \varphi(x) \leq_N \varphi(y). \quad (2.3)$$

Existiert ein solcher Isomorphismus, so heißen (M, \leq_M) und (N, \leq_N) ordnungsisomorph und wir schreiben $M \cong N$.

Wir wenden nun die eben eingeführten Begriffe an, um zu zeigen, dass jede Halbordnung ordnungsisomorph zu einem Mengensystem ist:

Proposition 2.11

Jede Halbordnung (M, \leq) ist ordnungsisomorph zu einem Mengensystem (\mathcal{M}, \subseteq) .

Beweis. Wir definieren die Abbildung $\langle \cdot \rangle : M \rightarrow \mathcal{P}(M)$, $a \mapsto \{x \in M \mid x \leq a\}$, die jedem Element die Menge der Elemente, die kleiner oder gleich diesem Element sind, zuordnet. Setzen wir $\mathcal{M} := \{\langle a \rangle \mid a \in M\} \subseteq \mathcal{P}(M)$ und betrachten die Abbildung $\varphi : M \rightarrow \mathcal{M}$, $a \mapsto \langle a \rangle$.

- Ist $a \leq b$, so folgt aus der Transitivität: $x \leq a$ impliziert $x \leq b$, also $\langle a \rangle \subseteq \langle b \rangle$. φ ist also monoton.
- Ist umgekehrt $\langle a \rangle \subseteq \langle b \rangle$, so folgt aus $a \in \langle a \rangle$ (Reflexivität), dass $a \in \langle b \rangle$, also $a \leq b$. φ ist also eine Ordnungseinbettung.

Damit gilt $a \leq b \iff \langle a \rangle \subseteq \langle b \rangle$, woraus insbesondere die Injektivität folgt (aus $\langle a \rangle = \langle b \rangle$ folgt $a \leq b$ und $b \leq a$, also $a = b$). Nach Definition ist φ surjektiv auf \mathcal{M} , damit ist φ ein Ordnungsisomorphismus. \square

2.1.2 Spezielle Elemente

Im Beweis der Proposition 2.11 haben wir die Abbildung $\langle \cdot \rangle$ eingeführt, die jedem Element a einer Halbordnung die Menge der Elemente zuordnet, die kleiner oder gleich a sind. Diese Menge hat eine besondere Bedeutung, weshalb wir ihr einen eigenen Namen geben:

Definition 2.12 (Hauptideal)

Sei (M, \leq) eine Halbordnung und $a \in M$. Die Menge

$$\langle a \rangle := \{x \in M \mid x \leq a\} \quad (2.4)$$

heißt das Hauptideal von a .

Das Hauptideal $\langle a \rangle$ erfasst alle Elemente unterhalb von a . Eine verwandte Konstruktion schränkt die Betrachtung auf Elemente zwischen zwei Elementen ein:

Definition 2.13 (Intervall)

Sei (M, \leq) eine Halbordnung und $a, b \in M$ mit $a \leq b$. Die Menge

$$[a, b] := \{x \in M \mid a \leq x \leq b\} \quad (2.5)$$

heißt das Intervall von a bis b .

Existiert das Minimum $\mathbf{0}$ einer Halbordnung (M, \leq) , so gilt $\langle a \rangle = [\mathbf{0}, a]$, denn da $\mathbf{0}$ unter jedem Element liegt, bedeutet die Bedingung $x \leq a$ bereits $\mathbf{0} \leq x \leq a$.

Neben Intervallen spielen auch ausgezeichnete Elemente wie Extrema und Schranken eine zentrale Rolle in Halbordnungen:

Definition 2.14 (Minimum, Maximum, Infimum, Supremum)

Sei (M, \leq) eine Halbordnung und $N \subseteq M$.

Wir nennen $x \in N$ ein maximales Element von N , wenn es kein $y \in N$ mit $x < y$ gibt, und ein minimales Element von N , wenn es kein $y \in N$ mit $y < x$ gibt. Ein Element $x \in N$ heißt Maximum oder größtes Element von N , wenn $y \leq x$ für alle $y \in N$ gilt, und Minimum oder kleinstes Element von N , wenn $x \leq y$ für alle $y \in N$ gilt.

Ein Element $x \in M$ heißt untere Schranke von N , wenn $x \leq y$ für alle $y \in N$ gilt, und obere Schranke von N , wenn $y \leq x$ für alle $y \in N$ gilt.

Ein Infimum von N ist die größte untere Schranke von N , ein Supremum von N ist die kleinste obere Schranke von N .

Beispiel 2.15 (Minimum, Maximum auf (\mathbb{N}, \leq))

Betrachten wir die Halbordnung (\mathbb{N}, \leq) , so erkennt man leicht, dass 0 das Minimum von \mathbb{N} ist, aber \mathbb{N} kein Maximum besitzt, da es keine größte natürliche Zahl gibt.

Beispiel 2.16 (Extrema auf $(\mathcal{M}(X), \subseteq)$)

Betrachten wir, um Details der Definitionen herauszuarbeiten, die Halbordnung (\mathcal{M}, \subseteq) auf dem Mengensystem $\mathcal{M} = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$. Man erkennt, dass \mathcal{M} weder Minimum noch Maximum besitzt, da für kein Element $x \in \mathcal{M}$ gilt, dass $x \subseteq y$ für alle $y \in \mathcal{M}$ oder $y \subseteq x$ für alle $y \in \mathcal{M}$, also kein Element unter allen anderen liegt oder über allen anderen liegt. Jedoch sind sowohl $\{a\}$ als auch $\{b\}$ minimale Elemente bzw. $\{a, b, c\}$ und $\{a, b, d\}$ maximale Elemente, da es keine Elemente unterhalb von $\{a\}$ oder $\{b\}$ gibt, bzw. es keine Elemente oberhalb von $\{a, b, c\}$ oder $\{a, b, d\}$ gibt.

Auf ähnliche Weise ist für die Teilmenge $N = \{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$ jedes Element in $\{\{a\}, \{b\}\}$ eine untere Schranke von N , da $\{a\} \subseteq \{a, b, c\}$ und $\{a\} \subseteq \{a, b, d\}$ sowie $\{b\} \subseteq \{a, b, c\}$ und $\{b\} \subseteq \{a, b, d\}$ gilt, aber es gibt keine größte untere Schranke, da weder $\{a\}$ noch $\{b\}$ die andere enthält, also besitzt N kein Infimum.

Notation 2.17 (Null- und Einselement)

Besitzt in einer Halbordnung (M, \leq) die Menge M selbst ein Minimum, so bezeichnen wir dieses mit $\mathbf{0}$, besitzt sie ein Maximum, so bezeichnen wir dieses mit $\mathbf{1}$.

Definition 2.18 (Atome, Coatome)

Sei (M, \leq) eine Halbordnung mit Minimum $\mathbf{0}$ und Maximum $\mathbf{1}$.

Ein Element $a \in M$ heißt Atom, wenn $a \succ \mathbf{0}$ gilt. Wir bezeichnen die Menge aller Atome von M mit A_M oder einfach A , wenn die Grundmenge aus dem Kontext klar ist. Außerdem bezeichnen wir mit $A_M(x)$ oder einfach $A(x)$ die Menge der Atome, die unter x liegen, also $A(x) = \{a \in A \mid a \leq x\}$.

Ein Element $c \in M$ heißt Coatom, wenn $c \prec \mathbf{1}$ gilt. Wir bezeichnen die Menge aller Coatome von M mit C_M oder einfach C , wenn die Grundmenge aus dem Kontext klar ist. Außerdem bezeichnen wir mit $C_M(x)$ oder einfach $C(x)$ die Menge der Coatome, die über x liegen, also $C(x) = \{c \in C \mid x \leq c\}$.

Beispiel 2.19 (Atome und Coatome in $(\mathbb{N}, |)$)

Betrachten wir erneut die Halbordnung $(\mathbb{N}, |)$ mit der Teilbarkeitsrelation aus Beispiel 2.6, dann ist $1 \in \mathbb{N}$ das Minimum, da 1 die einzige Zahl ist, die jede andere teilt. Außerdem ist 0 ein maximales Element, da 0 keine Zahl außer sich selbst teilt. 0 ist sogar das Maximum, da nach Definition von $|$ für jede Zahl $x \in \mathbb{N}$ gilt, dass $x|0$ (da $0 = 0 \cdot x$). Die Atome dieser Halbordnung sind die Primzahlen, da diese genau die Zahlen sind, die direkt über $\mathbf{0} = 1$ liegen. Es gibt kein Coatom, da es keine Zahl gibt, die direkt unter $\mathbf{1} = 0$ liegt: Für jede Zahl $x \neq 0$ gilt, dass $x|2x$ und $2x|0$, aber $x \neq 2x$ und $2x \neq 0$ und damit $x \not\prec 0$.

Die Abbildung A , die jedem Element die Menge der Atome unter ihm zuordnet, ist ordnungserhaltend:

Proposition 2.20 (A ist ordnungserhaltend)

Für $d, e \in M$ gilt:

$$d \leq e \implies A(d) \subseteq A(e). \quad (2.6)$$

Beweis. Das folgt mit: $A(d) = \langle d \rangle \cap A \subseteq \langle e \rangle \cap A = A(e)$. □

Da wir im Folgenden ausschließlich mit endlichen Strukturen arbeiten, halten wir folgende Beobachtung fest:

Proposition 2.21

Sei (M, \leq) eine endliche Halbordnung und $N \subseteq M$ eine nichtleere Teilmenge. Dann besitzt N mindestens ein minimales und mindestens ein maximales Element.

Beweis. Wir zeigen die Existenz eines minimalen Elements. Sei $x_0 \in N$ beliebig. Ist x_0 bereits minimal in N , so sind wir fertig. Andernfalls existiert ein $x_1 \in N$ mit $x_1 < x_0$. Ist x_1 minimal, so sind wir fertig, andernfalls finden wir ein $x_2 \in N$ mit $x_2 < x_1$. Da N endlich ist, muss diese absteigende Kette $x_0 > x_1 > x_2 > \dots$ nach endlich vielen

Schritten abbrechen, und das letzte Element dieser Kette ist ein minimales Element von N . Der Beweis für maximale Elemente verläuft analog. \square

Wie Beispiel 2.16 zeigt, können endliche Halbordnungen jedoch durchaus mehrere minimale oder maximale Elemente besitzen, sodass Minimum, Maximum, Infimum oder Supremum nicht existieren müssen. Ebenso müssen nicht zwingend obere oder untere Schranken existieren, wie wir in Beispiel 2.22 sehen werden.

2.1.3 Hasse-Diagramme

Ein für uns besonders wichtiges Werkzeug zur Veranschaulichung von endlichen Halbordnungen sind die sogenannten *Hasse-Diagramme*, die uns für endliche Halbordnungen zur Verfügung stehen. Hasse-Diagramme überführen die Elemente der Halbordnung mittels der Ordnungsrelation in einen gerichteten Graphen. Die Elemente der Halbordnung bilden die Knoten des Graphen, und es gibt eine gerichtete Kante von x nach y genau dann, wenn $x < y$. Die Richtung der Kante stellen wir durch die Anordnung der Knoten dar, so dass x unter y liegt, wenn $x < y$ gilt.

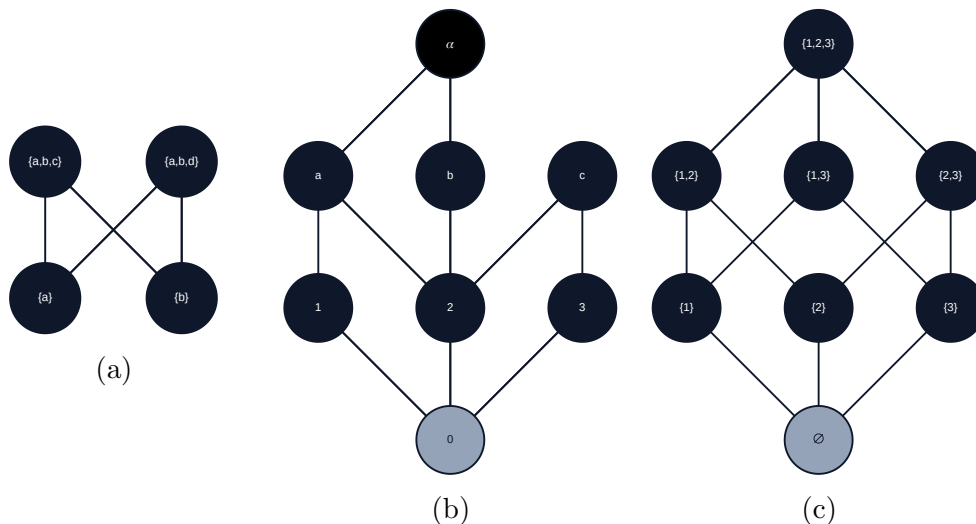


Abbildung 2.1: Hasse-Diagramme verschiedener Halbordnungen.

Beispiel 2.22 (Hasse-Diagramme)

In Abbildung 2.1a sehen wir das Hasse-Diagramm der Halbordnung aus Proposition 2.7 mit $\mathcal{M} = \{\{a\}, \{b\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}\}$. Die Knoten des Diagramms entsprechen den Mengen in \mathcal{M} , und es gibt eine gerichtete Kante von x nach y genau dann, wenn $x < y$ gilt, also wenn y direkt über x liegt.

Mit Hilfe der Abbildung 2.1b können wir sehen, dass die dort dargestellte Halbordnung (\mathcal{H}, \leq) für alle $N \subseteq \mathcal{H}$ ein Infimum besitzt. Außerdem finden wir schnell das Nullelement $0 = 0$ und sehen auch, dass es kein Einselement gibt, da α und c beide maximale Elemente sind. Wir erkennen auch, dass kein Supremum für die Menge $N = \{b, c\}$ existiert, da die Menge der oberen Schranken von N leer ist.

Schließlich sehen wir in Abbildung 2.1c das Hasse-Diagramm der “besonders regelmäßigen” Halbordnung B_3 , die $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ mit der Teilmengenrelation \subseteq entspricht. Wir bezeichnen diese Halbordnung als den Booleschen Verband B_3 .

Die Halbordnung B_3 aus Abbildung 2.1c besitzt bestimmte Eigenschaften, die für uns von besonderem Interesse sind, so existieren beispielsweise für jede Teilmenge $N \subseteq B_3$ sowohl Infimum als auch Supremum, und jedes Element $x \in B_3$ ist Supremum einer Teilmenge von Atomen. Diesen und weiteren Eigenschaften wenden wir uns in den folgenden Abschnitten zu.

2.2 Verbände

Wie bereits erwähnt, wollen wir den Begriff des Verbandes als den einer Halbordnung mit bestimmten Eigenschaften verstehen, und zwar als eine Halbordnung, in der jedes Paar von Elementen sowohl ein Infimum als auch ein Supremum besitzt. Im Folgenden werden wir uns ausschließlich mit endlichen Verbänden beschäftigen, sodass alle betrachteten Strukturen endlich sind:

Definition 2.23 (Verband)

Ein Verband ist eine Halbordnung (L, \leq) , in der für alle $x, y \in L$ sowohl das Infimum $\inf\{x, y\}$, das wir mit $x \wedge y$ bezeichnen, sowie das Supremum $\sup\{x, y\}$, das wir mit $x \vee y$ bezeichnen, existieren.

Blicken wir zurück auf die Beispiele in Abbildung 2.1 der Hasse-Diagramme, sehen wir, dass nur die Halbordnung in Abbildung 2.1c ein Verband ist, da nur dort für jedes Paar von Elementen sowohl Infimum als auch Supremum existieren.

Wir verifizieren kurz einige Eigenschaften der Verknüpfungen \wedge und \vee in Verbänden, die wir später benötigen werden:

Lemma 2.24

Sei (L, \leq) ein Verband, dann gilt für alle $x, y, z \in L$:

1. $x \wedge y = y \wedge x$ und $x \vee y = y \vee x$ (Kommutativität)
2. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ und $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (Assoziativität)
3. $x \wedge (x \vee y) = x$ und $x \vee (x \wedge y) = x$ (Absorptionsgesetze)

Beweis.

1. Kommutativität: Das sieht man sofort aus der Definition: $a \wedge b = \inf\{a, b\} = \inf\{b, a\} = b \wedge a$ und $a \vee b = \sup\{a, b\} = \sup\{b, a\} = b \vee a$.
2. Assoziativität: Das sieht man ähnlich: $a \wedge (b \wedge c) = \inf\{a, \inf\{b, c\}\} = \inf\{a, b, c\} = \inf\{\inf\{a, b\}, c\} = (a \wedge b) \wedge c$ und $a \vee (b \vee c) = \sup\{a, \sup\{b, c\}\} = \sup\{a, b, c\} = \sup\{\sup\{a, b\}, c\} = (a \vee b) \vee c$.
3. Absorptionsgesetze: Es ist $a \vee b \geq a$, also ist a untere Schranke von $\{a, a \vee b\}$, da a automatisch die größte untere Schranke ist, gilt $a \wedge (a \vee b) = a$. Analog ist $a \wedge b \leq a$, also ist a obere Schranke von $\{a, a \wedge b\}$, da a automatisch die kleinste obere Schranke ist, gilt $a \vee (a \wedge b) = a$.

□

Notation 2.25

Sei (L, \leq) ein endlicher Verband und $S \subseteq L$, dann bezeichnen wir mit $\vee S$ das Supremum der Menge S und mit $\wedge S$ das Infimum der Menge S , also

$$\vee S := \sup S \quad \text{und} \quad \wedge S := \inf S.$$

Da \vee nach Lemma 2.24 assoziativ ist, existiert $\vee S$ für jede nichtleere endliche Menge S durch iterierte Anwendung der paarweisen Supremumbildung. Für $S = \emptyset$ setzen wir $\vee \emptyset := \mathbf{0}$ und $\wedge \emptyset := \mathbf{1}$.

Die Abbildung A , die jedem Element seine Atommenge zuordnet, überträgt das Infimum eines Verbands auf den Mengenschnitt:

Satz 2.26 (Atome unter einem Infimum)

Sei (L, \leq) ein Verband. Für $d, e \in L$ gilt:

$$A(d \wedge e) = A(d) \cap A(e). \quad (2.7)$$

Beweis. $A(d \wedge e) = \{a \in A \mid a \leq d \wedge e\} = \{a \in A \mid a \leq d \text{ und } a \leq e\} = A(d) \cap A(e) \quad \square$

Ziel der Arbeit ist es zu untersuchen, ob sich Verbände, die bereits bestimmte Eigenschaften erfüllen, durch gewisse Erweiterungen zu Verbänden mit stärkeren Eigenschaften vervollständigen lassen. Definieren wir daher zunächst die Eigenschaften, an denen wir interessiert sind:

Definition 2.27 (Atomarer Verband)

Ein Verband (L, \leq) mit Minimum $\mathbf{0}$ heißt atomar, wenn jedes Element von L das Supremum der Atome unter ihm ist, also

$$\forall x \in L : \quad x = \vee A(x). \quad (2.8)$$

Ist ein Verband atomar, so ist die Abbildung A nicht nur ordnungserhaltend (Proposition 2.20), sondern sogar eine Ordnungseinbettung:

Satz 2.28 (A ist Ordnungseinbettung für atomare Verbände)

Ist L atomar, so gilt für $d, e \in L$:

$$d \leq e \iff A(d) \subseteq A(e). \quad (2.9)$$

Beweis. \Rightarrow : Folgt aus Proposition 2.20.

\Leftarrow : Da L atomar ist, gilt $d = \vee A(d)$ und $e = \vee A(e)$. Wir erhalten

$$e = \vee A(e) = \vee A(d) \vee \vee A(e) \setminus A(d) = d \vee \vee A(e) \setminus A(d) \geq d. \quad (2.10)$$

\square

Korollar 2.29

Sei (L, \leq) ein atomarer Verband, dann gilt für alle $x, y \in L$:

$$A(x) = A(y) \iff x = y \quad (2.11)$$

Atomare Verbände lassen sich damit gut als Mengensysteme auffassen. Die folgende Proposition zeigt, dass die \cap -Abgeschlossenheit eines Mengensystems bereits hinreichend für die Struktur eines atomaren Verbands ist. Dieses Kriterium werden wir in Kapitel 4 nutzen, um zu zeigen, dass konstruierte Mengensysteme atomare Verbände sind.

Proposition 2.30 (Äquivalenz von \cap -Abgeschlossenheit und atomarem Verband)

Sei X eine endliche Menge und $\mathcal{S} \subseteq 2^X$ ein Mengensystem mit

1. $\emptyset, X \in \mathcal{S}$,
2. $\{x\} \in \mathcal{S}$ für alle $x \in X$.

Dann sind äquivalent:

- (a) \mathcal{S} ist unter \cap abgeschlossen, d.h. für alle $D, E \in \mathcal{S}$ gilt $D \cap E \in \mathcal{S}$.
- (b) (\mathcal{S}, \subseteq) ist ein atomarer Verband mit Atomen $\{\{x\} \mid x \in X\}$.

In diesem Fall ist das Infimum $D \wedge E = D \cap E$ und das Supremum ist

$$D \vee E = \bigcap \{F \in \mathcal{S} \mid D \cup E \subseteq F\}. \quad (2.12)$$

Beweis.

(a) \Rightarrow (b):

Verbandsstruktur: Da \mathcal{S} unter \cap abgeschlossen ist, ist $D \cap E \in \mathcal{S}$ für alle $D, E \in \mathcal{S}$. In 2^X ist $D \cap E$ das größte Element mit $D \cap E \subseteq D$ und $D \cap E \subseteq E$, also auch in $\mathcal{S} \subseteq 2^X$. Damit ist $D \cap E$ das Infimum von D und E in (\mathcal{S}, \subseteq) .

Für das Supremum sei $\mathcal{F} := \{F \in \mathcal{S} \mid D \cup E \subseteq F\}$. Da $X \in \mathcal{S}$ und $D \cup E \subseteq X$, ist $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Sei $s := \bigcap \mathcal{F}$. Da \mathcal{F} endlich ist und \mathcal{S} unter \cap abgeschlossen, gilt $s \in \mathcal{S}$. Es gilt $D \subseteq s$ und $E \subseteq s$. Ist $G \in \mathcal{S}$ mit $D \subseteq G$ und $E \subseteq G$, so ist $G \in \mathcal{F}$, also $s \subseteq G$. Damit ist s das Supremum von D und E .

Atome: Für $x \in X$ ist $\{x\} \in \mathcal{S}$ und es gibt in 2^X kein Element zwischen \emptyset und $\{x\}$, also auch nicht in \mathcal{S} . Damit ist $\{x\}$ ein Atom in (\mathcal{S}, \subseteq) . Sei umgekehrt $D \in \mathcal{S}$ ein Atom. Dann ist $D \neq \emptyset$, also existiert ein $x \in D$ und $\{x\} \in \mathcal{S}$ mit $\emptyset \subsetneq \{x\} \subseteq D$. Da D ein Atom ist, folgt $D = \{x\}$.

Atomarität: Für $D \in \mathcal{S}$ ist $\bigvee \{\{x\} \mid x \in D\} = \bigcap \{F \in \mathcal{S} \mid D \subseteq F\} = D$, da D selbst in der Schnittmenge liegt und damit die kleinste solche Obermenge ist.

(b) \Rightarrow (a): Seien $D, E \in \mathcal{S}$ und $F := D \wedge E$ das Infimum in (\mathcal{S}, \subseteq) . Aus $F \leq D$ und $F \leq E$ folgt $F \subseteq D \cap E$. Für jedes $x \in D \cap E$ gilt $\{x\} \subseteq D$ und $\{x\} \subseteq E$, also $\{x\} \leq D$ und $\{x\} \leq E$ in \mathcal{S} , also $\{x\} \leq F$ und damit $x \in F$. Also $D \cap E \subseteq F$ und insgesamt $D \cap E = F \in \mathcal{S}$. \square

Eine weitere Aussage über die Struktur eines Verbandes erhalten wir, wenn wir die folgende Eigenschaft betrachten:

Definition 2.31 (Submodularer Verband)

Ein Verband (L, \leq) heißt submodular, wenn für alle $x, y \in L$ gilt:

$$x \wedge y \leq x \implies y \leq x \vee y. \quad (2.13)$$

Die Eigenschaft der Submodularität und die der Atomarität sind voneinander unabhängig, sodass es sowohl atomare Verbände gibt, die nicht submodular sind, als auch submodulare Verbände, die nicht atomar sind. In den meisten Fällen, in denen wir submodulare Verbände betrachten werden, handelt es sich jedoch um atomare Verbände. In diesem Fall können wir die Submodularität auch durch die Atome charakterisieren:

Proposition 2.32

Sei (L, \leq) ein atomarer Verband, dann ist (L, \leq) genau dann submodular, wenn für alle $x \in L$ und $a \in A_L \setminus A_L(x)$ gilt:

$$x \leq a \vee x. \quad (2.14)$$

Beweis.

(\Rightarrow) Sei L submodular, $x \in L$ und $a \in A_L \setminus A_L(x)$. Wegen $a \not\leq x$ und $x \wedge a \leq a$ kann $x \wedge a$ nicht gleich a sein. Da zwischen $\mathbf{0}$ und a kein weiteres Element liegt, folgt $x \wedge a = \mathbf{0}$. Damit gilt $x \wedge a = \mathbf{0} \leq a$, und die Submodularität liefert $x \leq a \vee x$.

(\Leftarrow) Gelte $x \leq a \vee x$ für alle $x \in L$ und $a \in A_L \setminus A_L(x)$. Seien $u, v \in L$ mit $u \wedge v \leq u$; wir zeigen $v \leq u \vee v$. Da L atomar ist und $A(u \wedge v) \subsetneq A(u)$ gilt, existiert ein Atom a mit $a \leq u$ und $a \not\leq u \wedge v$. Aus $a \leq u$ und $a \not\leq u \wedge v$ folgt $a \not\leq v$, also $a \in A_L \setminus A_L(v)$. Weiter ist $(u \wedge v) \vee a \leq u$, und wegen $a \not\leq u \wedge v$ gilt $(u \wedge v) \vee a > u \wedge v$. Da $u \wedge v \leq u$, folgt $(u \wedge v) \vee a = u$, also $u \vee v = ((u \wedge v) \vee a) \vee v = a \vee v$. Die Voraussetzung liefert $v \leq a \vee v = u \vee v$. \square

Sind Verbände atomar und submodular, so sind sie im Sinne dieser Arbeit “vollständig”, wir fassen diese Eigenschaften in einem einzigen Begriff zusammen:

Definition 2.33 (Geometrischer Verband)

Ein Verband (L, \leq) heißt geometrisch, wenn er atomar, submodular und endlich ist.

In geometrischen Verbänden spielen diejenigen Atommengen eine besondere Rolle, die unter Supremumbildung und Rückprojektion auf Atome stabil sind. Wir geben solchen Mengen einen Namen und definieren den zugehörigen Abschlussoperator:

Definition 2.34 (Flat und Abschluss)

Sei (L, \leq) ein atomarer Verband. Eine Menge $F \subseteq A_L$ heißt Flat in L , wenn

$$A(\vee F) = F. \quad (2.15)$$

Der Abschluss einer Menge $S \subseteq A_L$ ist $\text{cl}(S) := A(\vee S)$.

Die Flats in L sind also genau die Mengen der Form $A(x)$ für $x \in L$. Der Abschluss $\text{cl}(S)$ ist das kleinste Flat, das S enthält. Der Schnitt zweier Flats ist wieder ein Flat, denn mit Satz 2.26 gilt $A(x) \cap A(y) = A(x \wedge y)$.

Die globale Struktur geometrischer Verbände spiegelt sich auch lokal wider, denn Intervalle geometrischer Verbände erben die geometrischen Eigenschaften:

Proposition 2.35 (Intervalle geometrischer Verbände)

Sei (L, \leq) ein geometrischer Verband und $a, b \in L$ mit $a \leq b$. Dann ist $([a, b], \leq)$ ein geometrischer Verband.

Beweis. Siehe Aigner 1975, Satz (II.3.15). \square

Ebenso wird die geometrische Eigenschaft durch das direkte Produkt von Verbänden erhalten. Wir definieren das direkte Produkt:

Definition 2.36 (Direktes Produkt von Verbänden)

Seien (L_1, \leq_1) und (L_2, \leq_2) zwei Verbände. Das direkte Produkt $L_1 \times L_2$ ist die Menge $\{(x, y) \mid x \in L_1, y \in L_2\}$ mit der komponentenweisen Ordnung

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \iff x_1 \leq_1 x_2 \text{ und } y_1 \leq_2 y_2.$$

Das direkte Produkt zweier Verbände ist selbst wieder ein Verband, und wenn die Faktoren geometrisch sind, so ist auch das direkte Produkt geometrisch:

Lemma 2.37

Das direkte Produkt zweier Verbände ist ein Verband. Infimum und Supremum werden komponentenweise gebildet:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) &= (x_1 \wedge_1 x_2, y_1 \wedge_2 y_2), \\ (x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) &= (x_1 \vee_1 x_2, y_1 \vee_2 y_2). \end{aligned}$$

Beweis. Seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in L_1 \times L_2$. Ein Element (u, v) ist genau dann untere Schranke von $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$, wenn $u \leq_1 x_1$, $u \leq_1 x_2$, $v \leq_2 y_1$ und $v \leq_2 y_2$ gelten, also wenn u untere Schranke von $\{x_1, x_2\}$ in L_1 und v untere Schranke von $\{y_1, y_2\}$ in L_2 ist. Die größte solche untere Schranke ist $(x_1 \wedge_1 x_2, y_1 \wedge_2 y_2)$. Analog ergibt sich auch das Supremum. \square

Proposition 2.38 (Direktes Produkt geometrischer Verbände)

Das direkte Produkt zweier geometrischer Verbände ist geometrisch.

Beweis. Siehe Aigner 1975, Satz (II.3.15). \square

Im Fall von geometrischen Verbänden steht uns eine weitere wichtige Eigenschaft zur Verfügung, nämlich die Existenz einer Rangfunktion, die uns eine Möglichkeit gibt, die Elemente eines Verbands in "Ebenen" einzuteilen:

Definition 2.39 (Rangfunktion)

Sei (L, \leq) ein Verband mit Minimum $\mathbf{0}$, dann heißt eine Funktion $\text{rg} : L \rightarrow \mathbb{N}$ Rangfunktion, wenn $\text{rg}(\mathbf{0}) = 0$ gilt und

$$\forall x, y \in L : x \lessdot y \implies \text{rg}(y) = \text{rg}(x) + 1. \quad (2.16)$$

Besitzt ein Verband eine Rangfunktion, so haben alle maximalen Ketten von $\mathbf{0}$ zu einem festen Element x die gleiche Länge $\text{rg}(x)$, da jede Bedeckung den Rang um genau 1 erhöht. Insbesondere haben alle maximalen Ketten von $\mathbf{0}$ nach $\mathbf{1}$ die Länge $\text{rg}(\mathbf{1})$. Damit kann ein Verband, in dem maximale Ketten unterschiedlicher Länge existieren, keine Rangfunktion haben.

Wie wir in Beispiel 2.45 sehen werden, besitzt nicht jeder Verband eine Rangfunktion, sodass die Existenz einer Rangfunktion eine Eigenschaft des Verbands darstellt.

Interpretiert man den Rang eines Elements als seine Dimensionalität, so liegen die folgenden Benennungen nahe:

Notation 2.40 (Geometrische Terminologie)

Elemente vom Rang 1, also Atome, heißen auch Punkte und Elemente vom Rang 2 heißen Geraden. Elemente vom Rang $\text{rg}(\mathbf{1}) - 1$, also Coatome, nennen wir auch Hyperebenen.

Anschaulich erfordert jede zusätzliche Dimension mindestens einen neuen Punkt. Das entspricht der Atomarität eines Verbands. Es können jedoch auch mehr als zwei Punkte auf einer Geraden liegen. Solche Geraden nennen wir *nicht-trivial*.

2.3 Fast-geometrische Verbände

Als Ausgangspunkt für die Erweiterung von Verbänden zu geometrischen Verbänden betrachten wir Verbände, die bereits eine schwächere Eigenschaft als die geometrischen Verbände besitzen:

Definition 2.41 (Fast-geometrischer Verband L)

Ein Verband (L, \leq) heißt fast-geometrisch, wenn er

1. *Null- und Einselemente $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ besitzt,*
2. *für alle $c \in C_L$ ist $\langle c \rangle$ ein geometrischer Verband, und*
3. *L eine Rangfunktion besitzt.*

Zwischen den Begriffen geometrisch und fast-geometrisch besteht ein enger Zusammenhang: Geometrische Verbände sind stets auch fast-geometrisch. Für Verbände mit besonders kleinem Rang gilt sogar die Umkehrung:

Proposition 2.42 (Zusammenhang zwischen geometrisch und fast-geometrisch)

Es gilt:

1. *Jeder geometrische Verband ist fast-geometrisch.*
2. *Ist L ein fast-geometrischer Verband mit $\text{rg}(L) < 2$, so ist L geometrisch.*

Beweis.

(1) Sei L geometrisch. Dann besitzt L als endlicher Verband ein Null- und Einselement, eine Rangfunktion, und für jedes Coatom c ist $\langle c \rangle$ nach Proposition 2.35 als Intervall eines geometrischen Verbandes selbst geometrisch.

(2) Für $\text{rg}(L) = 0$ ist $L = \{\mathbf{0}\}$ und für $\text{rg}(L) = 1$ ist $L \cong C(1)$. In beiden Fällen ist L geometrisch. □

Korollar 2.43

Sei (L, \leq) ein endlicher Verband mit Maximum $\mathbf{1}$. Dann liegt jedes Element $q < \mathbf{1}$ unter mindestens einem Coatom, es gilt also $L \setminus \{\mathbf{1}\} = \bigcup_{c \in C_L} \langle c \rangle$.

Beweis. Sei $q < \mathbf{1}$. Dann enthält jede maximale Kette von q nach $\mathbf{1}$ ein Element c mit $c \lessdot \mathbf{1}$, also ein Coatom mit $q \leq c$. □

Korollar 2.44

Sei L ein fast-geometrischer Verband, der nicht geometrisch ist. Dann liegt jedes Atom von L unter mindestens einem Coatom.

Beweis. Nach Proposition 2.42 ist $\text{rg}(L) \geq 2$. Sei a ein Atom von L . Dann ist $\text{rg}(a) = 1 < \text{rg}(L)$, also $a < 1$. Die Aussage folgt aus Korollar 2.43. \square

Betrachten wir einige Beispiele von Verbänden, um die Definitionen zu veranschaulichen:

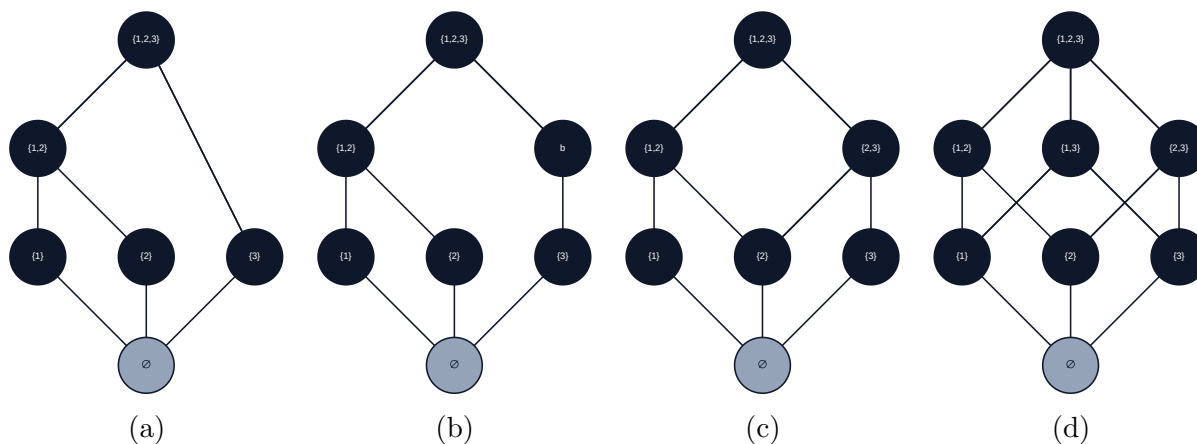


Abbildung 2.2: Vier Beispiele von Verbänden.

Eigenschaft	(a)	(b)	(c)	(d)
Atomar	✓	×	✓	✓
Submodular	×	×	×	✓
Rangfunktion	×	✓	✓	✓
Fast-geometrisch	×	×	✓	✓
Geometrisch	×	×	×	✓

Beispiel 2.45 (Beispiele von Verbänden)

In Abbildung 2.2a sehen wir einen Verband, der atomar, aber nicht submodular ist, denn $\{3\} \wedge \{2\} = \emptyset < \{3\}$, aber $\{2\} \not\leq \{2\} \vee \{3\} = \{1, 2, 3\}$ gilt. Dieser Verband besitzt auch keine Rangfunktion, da aus der Kette $\emptyset < \{1\} < \{1, 2\} < \{1, 2, 3\}$ folgt, dass $\text{rg}(\{1, 2, 3\}) = 3$, aber die Kette $\emptyset < \{3\} < \{1, 2, 3\}$ $\text{rg}(\{1, 2, 3\}) = 2$ fordert, was ein Widerspruch ist.

In Abbildung 2.2b ist leicht zu erkennen, dass der Verband nicht atomar ist, da b nicht das Supremum der Atome unter ihm ist, sondern $\vee A(b) = \vee \{3\} = \{3\} \neq b$.

In Abbildung 2.2c sehen wir einen fast-geometrischen Verband: Die von den Coatomen $\{1, 2\}$ und $\{2, 3\}$ erzeugten Hauptideale $\langle \{1, 2\} \rangle$ und $\langle \{2, 3\} \rangle$ sind beide geometrische Verbände. Jedoch ist der Verband nicht submodular, da $\{1\} \vee \{3\} = \{1, 2, 3\}$ ist und weder $\{1, 2, 3\} \geq \{1\}$ noch $\{1, 2, 3\} \geq \{3\}$ gilt.

Der Verband in Abbildung 2.2d ist geometrisch und entsteht aus dem Verband in Abbildung 2.2c durch Hinzufügen eines neuen Coatoms $\{1, 3\}$, das über $\{1\}$ und $\{3\}$ und unter $\{1, 2, 3\}$ liegt.

Die in diesem Beispiel beobachtete Beziehung zwischen den Verbänden in Abbildung 2.2c und Abbildung 2.2d ist genau die Beziehung, die wir in dieser Arbeit untersuchen wollen: Wir wollen herausfinden, wie, bzw. unter welchen Bedingungen es möglich ist, einen fast-geometrischen Verband durch Hinzufügen von Elementen zu einem geometrischen Verband zu erweitern.

Um diese Beziehung zu formalisieren, definieren wir zunächst Einbettungsbegriffe, die beschreiben, wie ein Verband in einem anderen “wiedergefunden” werden kann:

Definition 2.46 (Ideal-Einbettung)

Seien (L, \leq) und (L', \leq') endliche Halbordnungen mit Null- und Einselement. Eine Abbildung $\varphi : L \rightarrow L'$ heißt Ideal-Einbettung, wenn

1. φ ist eine Ordnungseinbettung. (Einbettung)
2. $\varphi(\mathbf{1}_L) = \mathbf{1}_{L'}$. (Eins-Erhaltung)
3. $\langle \varphi(c) \rangle_{L'} \subseteq \varphi(L)$ für alle $c \in C_L$. (Ideal-Erhaltung)

Korollar 2.47 (Ideale unter Bildern)

Ist $\varphi : L \rightarrow L'$ eine Ideal-Einbettung, so gilt für alle $q \in L \setminus \{\mathbf{1}\}$:

$$\langle \varphi(q) \rangle_{L'} = \varphi(\langle q \rangle_L).$$

Beweis. “ \supseteq ”: Für $l \leq q$ gilt $\varphi(l) \leq' \varphi(q)$, also $\varphi(l) \in \langle \varphi(q) \rangle_{L'}$.

“ \subseteq ”: Sei $x \in \langle \varphi(q) \rangle_{L'}$. Nach Korollar 2.43 existiert ein Coatom $c \in C_L$ mit $q \leq c$. Damit $\langle \varphi(q) \rangle_{L'} \subseteq \langle \varphi(c) \rangle_{L'}$, und die Ideal-Erhaltung 3 liefert $x = \varphi(l)$ für ein $l \in L$. Aus $\varphi(l) \leq' \varphi(q)$ und der Ordnungseinbettung 1 folgt $l \leq q$. \square

Eine Ideal-Einbettung bewahrt die Ordnungsstruktur, identifiziert die Einselemente und garantiert, dass unterhalb der Coatom-Bilder keine neuen Elemente hinzukommen. Neue Elemente in L' können also nur oberhalb der Coatom-Bilder $\varphi(c)$ liegen. Fordern wir zusätzlich, dass die Coatom-Bilder auch in L' Coatome sind, so erhalten wir:

Definition 2.48 (Coatom-Einbettung)

Seien (L, \leq) und (L', \leq') endliche Halbordnungen mit Null- und Einselement. Eine Ideal-Einbettung $\varphi : L \rightarrow L'$ heißt Coatom-Einbettung, wenn zusätzlich

4. $\varphi(c) \in C_{L'}$ für alle $c \in C_L$. (Coatom-Treue)

Eine Coatom-Einbettung ist also eine Ideal-Einbettung, bei der die Coatome von L auf Coatome von L' abgebildet werden. Existiert eine Coatom-Einbettung von L nach L' , so können wir L in L' “wiederfinden”. Wir nennen L' dann eine Erweiterung von L :

Definition 2.49 (Erweiterung)

Seien (L, \leq) und (L', \leq') endliche Verbände mit Null- und Einselement. Existiert eine Coatom-Einbettung $\varphi : L \rightarrow L'$, so heißt (L', \leq') eine Erweiterung von (L, \leq) .

Eine Erweiterung verlangt keine besonderen Eigenschaften von L' über die Verbandstruktur hinaus. Fordern wir zusätzlich, dass L' geometrisch ist, so erhalten wir den Begriff der Vervollständigung:

Definition 2.50 (Vervollständigung fast-geometrischer Verbände)

Seien (L, \leq) ein fast-geometrischer Verband und (L', \leq') ein geometrischer Verband, dann heißt (L', \leq') eine Vervollständigung von (L, \leq) , wenn es in L' eine Menge $H \subseteq C_{L'}$ von Coatomen gibt, so dass

$$\tilde{L} = \{\mathbf{1}_{L'}\} \cup \bigcup_{c \in H} \langle c \rangle \tag{2.17}$$

ordnungsisomorph zu L ist.

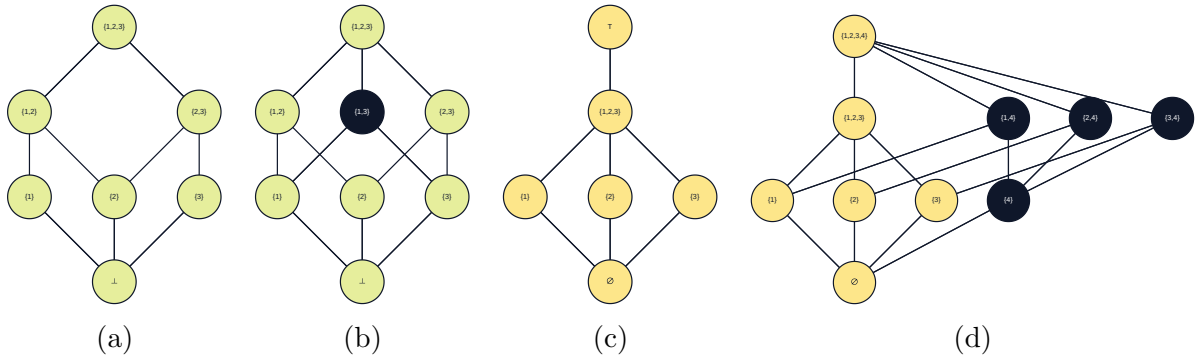


Abbildung 2.3: Beispiele fast-geometrischer Verbände und ihrer Vervollständigungen.

Beispiel 2.51 (Vervollständigung von fast-geometrischen Verbänden)

Wir verifizieren direkt, dass der Verband in Abbildung 2.3b eine Vervollständigung des Verbandes in Abbildung 2.3a in diesem Sinne ist: In Beispiel 2.45 haben wir bereits festgestellt, dass der Verband in Abbildung 2.3a fast-geometrisch und der Verband in Abbildung 2.3b geometrisch ist. Wählen wir die Menge H in (2.17) als $H = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\} \subseteq C_L$, so ist

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= \{\mathbf{1}_{2.3b}\} \cup \langle \{1, 2\} \rangle \cup \langle \{2, 3\} \rangle \\ &= \{\{1, 2, 3\}\} \cup \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} \cup \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\} \\ &= L. \end{aligned}$$

Dies ist offensichtlich ordnungsisomorph zu L , da es sich um die gleiche Menge mit der gleichen Ordnungsrelation handelt.

Wir erkennen, dass der Verband in Abbildung 2.3c alle Anforderungen an einen fast-geometrischen Verband erfüllt. Er ist jedoch nicht geometrisch, da $\mathbf{1}_{2.3c} \neq \{1, 2, 3\} = \vee\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} = \vee A(\mathbf{1}_{2.3c})$, womit er nicht atomar ist. Der Verband in Abbildung 2.3d ist geometrisch und wir können überprüfen, dass er eine Vervollständigung von dem Verband in Abbildung 2.3c ist, indem wir die Menge H in (2.17) als $H = \{\{1, 2, 3\}\} \subseteq C_L$ wählen. Konstruieren wir \tilde{L} gemäß (2.17), so erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= \{\mathbf{1}_{2.3d}\} \cup \langle \{1, 2, 3\} \rangle \\ &= \{\{1, 2, 3, 4\}\} \cup \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\}. \end{aligned}$$

Wir definieren die Abbildung $f : \tilde{L} \rightarrow L$ durch

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\} \\ \top & \text{für } x = \{1, 2, 3, 4\} \end{cases}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass f bijektiv ist, und für alle $x, y \in \tilde{L}$ gilt $x \leq' y \iff f(x) \leq f(y)$, da die Ordnungsrelationen in beiden auf den Unterverbänden $[\emptyset, \{1, 2, 3\}]_L$ und $[\emptyset, \{1, 2, 3\}]_{\tilde{L}}$ gleich sind und f das maximale Element von \tilde{L} auf das maximale Element von L abbildet.

In beiden Beispielen sieht man, dass keine neuen Elemente unter den Coatomen in L hinzugefügt werden. Das spiegelt sich in den Eigenschaften von f wider: Es muss $f(\langle c \rangle) \subseteq f(L)$ für alle $c \in C_L$ gelten, da f sonst Elemente in $\langle c \rangle$ auf Elemente außerhalb von $f(L)$ abbildet, wir dürfen also nur Elemente “oberhalb” existierender Elemente von L einfügen.

Außerdem werden keine Ordnungsbeziehungen zwischen den Elementen von L hinzugefügt oder entfernt, das ist ebenso notwendig und spiegelt sich in den Eigenschaften von f als Ordnungseinbettung wider.

Diese Beobachtungen entsprechen genau den Bedingungen einer Coatom-Einbettung, L' ist also eine Erweiterung von L . Da L' zudem geometrisch ist, ist L' eine Vervollständigung von L . Tatsächlich ist jede geometrische Erweiterung eine Vervollständigung:

Proposition 2.52 (Geometrische Erweiterung ist Vervollständigung)

Sei L ein fast-geometrischer Verband und L' eine geometrische Erweiterung von L mit Coatom-Einbettung $\varphi : L \rightarrow L'$. Dann ist L' eine Vervollständigung von L mit $H = \varphi(C_L)$.

Beweis. Sei \tilde{L} wie in (2.17) mit $H = \varphi(C_L) \subseteq C_{L'}$. Nach Korollar 2.43 gilt $L \setminus \{\mathbf{1}_L\} = \bigcup_{c \in C_L} \langle c \rangle_L$. Da φ ordnungserhaltend ist, gilt $\varphi(q) \leq' \varphi(c)$ für alle $q \in \langle c \rangle_L$, also $\varphi(L \setminus \{\mathbf{1}_L\}) \subseteq \bigcup_{c \in H} \langle c \rangle_{L'}$ und mit Bedingung 2 damit $\varphi(L) \subseteq \tilde{L}$. Umgekehrt ist $\langle \varphi(c) \rangle_{L'} \subseteq \varphi(L)$ nach Bedingung 3 für alle $c \in C_L$, also $\tilde{L} \subseteq \varphi(L)$. Da φ nach Bedingung 1 ein Ordnungsisomorphismus auf sein Bild $\varphi(L) = \tilde{L}$ ist, ist L' eine Vervollständigung von L . \square

Bis jetzt haben wir uns nur dem Prüfen der Kriterien für die Vervollständigung von fast-geometrischen Verbänden zu geometrischen Verbänden gewidmet. Die systematische Konstruktion von Vervollständigungen wird in Kapitel 4 genauer untersucht, die Vervollständigungen in Beispiel 2.51 wurden mit den dort entwickelten Methoden konstruiert.

2.4 Bouquets geometrischer Verbände

Wir haben bisher fast-geometrische Verbände als abgeschwächte Form geometrischer Verbände kennengelernt und den Begriff der Vervollständigung eingeführt. Wir wollen nun eine allgemeinere Struktur betrachten, die sich ergibt, wenn wir die Forderung nach der Existenz eines Supremums für jedes Paar von Elementen aufgeben.

Definition 2.53 (Inf-Halbverband)

Eine Halbordnung (P, \leq) heißt Inf-Halbverband, wenn für alle $x, y \in P$ das Infimum $x \wedge y$ existiert.

Ein Inf-Halbverband verlangt also nur die Existenz der Infima, nicht der Suprema. Jeder Verband ist insbesondere ein Inf-Halbverband. Auf dieser Grundlage können wir nun den zentralen Begriff dieses Abschnitts definieren:

Definition 2.54 (Bouquet geometrischer Verbände)

Eine Halbordnung (P, \leq) heißt Bouquet geometrischer Verbände, wenn

1. (P, \leq) ein Inf-Halbverband ist, und
2. für alle $x, y \in P$ mit $x \leq y$ das Intervall $[x, y]$ ein geometrischer Verband ist.

Wir betrachten im Folgenden stets endliche Bouquets geometrischer Verbände und sprechen kurz von *Bouquets*. Ein endlicher Inf-Halbverband besitzt stets ein Nullelement $\mathbf{0}$, da das Infimum über alle Elemente existiert.

Da jedes Intervall in einem Bouquet ein geometrischer Verband ist, existiert auf ihm eine Rangfunktion. Diese lokalen Rangfunktionen lassen sich zu einer globalen Rangfunktion zusammensetzen:

Proposition 2.55 (Bouquets besitzen eine Rangfunktion)

Sei (P, \leq) ein Bouquet geometrischer Verbände mit Minimum \mathbb{O} . Dann besitzt P eine Rangfunktion $\text{rg}: P \rightarrow \mathbb{N}$, die durch $\text{rg}(x) = \text{rg}([\mathbb{O}, x])$ gegeben ist.

Beweis. Da $[\mathbb{O}, x]$ für jedes $x \in P$ ein geometrischer Verband ist, besitzt $[\mathbb{O}, x]$ eine Rangfunktion rg_x . Wir setzen $\text{rg}(x) := \text{rg}_x(x)$. Es gilt $\text{rg}(\mathbb{O}) = 0$, da $[\mathbb{O}, \mathbb{O}] = \{\mathbb{O}\}$. Gilt $x < y$, so ist $[\mathbb{O}, y]$ ein geometrischer Verband, in dem $x < y$ gilt. Da $[\mathbb{O}, x]$ ein Teilintervall von $[\mathbb{O}, y]$ ist, stimmen die Bedeckungsrelationen nach Proposition 2.35 überein, also ist der Rang von x in $[\mathbb{O}, y]$ gleich $\text{rg}(x)$. Damit liefert die Rangfunktion von $[\mathbb{O}, y]$ $\text{rg}(y) = \text{rg}(x) + 1$. \square

Bouquets geometrischer Verbände verallgemeinern also geometrische Verbände, indem sie die Forderung nach der globalen Existenz von Suprema aufgeben, dabei aber die geometrische Struktur in jedem Intervall bewahren. Wir betrachten ein Beispiel:

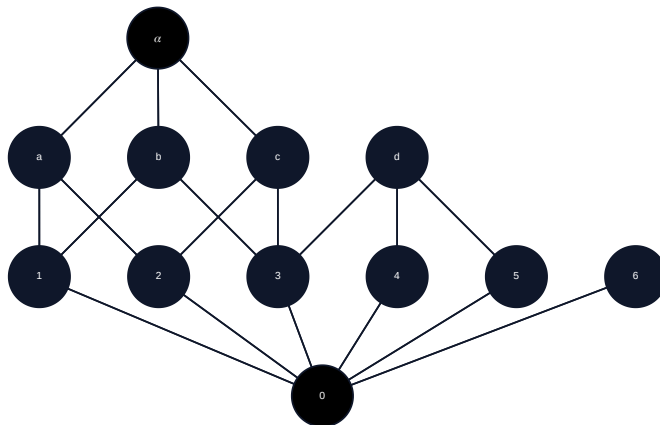


Abbildung 2.4: Ein Bouquet geometrischer Verbände mit drei maximalen Elementen.

Beispiel 2.56 (Bouquet geometrischer Verbände)

Abbildung 2.4 zeigt ein Bouquet geometrischer Verbände P mit dem Minimum $\mathbb{O} = 0$ und den Atomen $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. P besitzt drei maximale Elemente: α , d und 6 . Diese haben jeweils unterschiedlichen Rang: $\text{rg}(\alpha) = 3$, $\text{rg}(d) = 2$ und $\text{rg}(6) = 1$. Die maximalen Elemente eines Bouquets müssen also nicht von gleichem Rang sein.

P ist kein Verband, da zum Beispiel α und d keine gemeinsame obere Schranke in P besitzen, sodass ihr Supremum nicht existiert. Jedoch ist jedes Intervall $[x, y]$ für $x \leq y$ in P ein geometrischer Verband: Die Intervalle $[\mathbb{O}, \alpha]$, $[\mathbb{O}, d]$ und $[\mathbb{O}, 6]$ sind geometrische Verbände, und jedes weitere Intervall ist nach Proposition 2.35 als Teilintervall eines dieser drei selbst geometrisch. Außerdem existiert für je zwei Elemente $x, y \in P$ das Infimum $x \wedge y$.

Beispiel 2.57 (Kein Bouquet geometrischer Verbände)

Die Halbordnung in Abbildung 2.5 ist kein Bouquet geometrischer Verbände, da sie kein Inf-Halbverband ist. Die Elemente d und e besitzen zwei gemeinsame untere Schranken 4 und 5 , die jedoch unvergleichbar sind, sodass keine größte untere Schranke existiert und $d \wedge e$ nicht definiert ist.

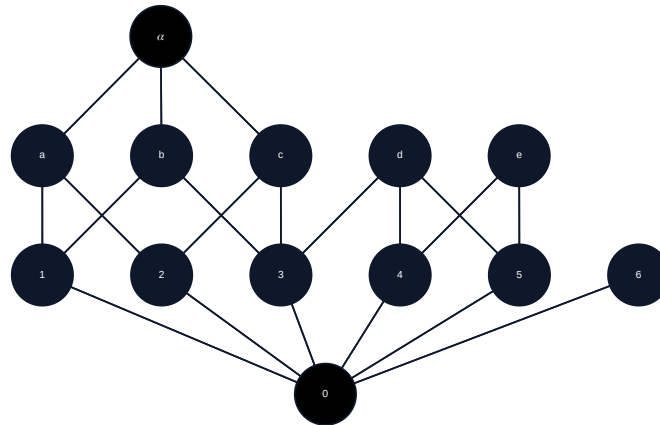


Abbildung 2.5: Eine Halbordnung, die kein Bouquet geometrischer Verbände ist.

Anschaulich lässt sich ein Bouquet als Bündel geometrischer Verbände verstehen, die am gemeinsamen Minimum 0 zusammengefügt sind. Jedes maximale Element m steht an der Spitze eines geometrischen Verbandes $[0, m]$. Diese Verbände können sich in den unteren Rängen überlappen, gehen aber in den oberen Rängen auseinander, ähnlich den Blüten eines Blumenstraußes, die am Stiel zusammengebunden sind.

Den Zusammenhang zu den fast-geometrischen Verbänden sehen wir so: Entfernt man aus einem fast-geometrischen Verband das Einselement, so erhält man ein Bouquet geometrischer Verbände.

Proposition 2.58 (Zusammenhang Bouquets und fast-geometrische Verbände)

Sei (L, \leq) ein fast-geometrischer Verband mit $\text{rg}(L) \geq 2$. Dann ist $P := L \setminus \{1\}$ ein Bouquet geometrischer Verbände.

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass P ein Inf-Halbverband ist. Seien $x, y \in P$, dann gilt $x \wedge y \leq x < 1$, also ist $x \wedge y \in P$. Da das Infimum in L existiert und in P liegt, ist P ein Inf-Halbverband.

Seien $x \leq y$ in P . Dann ist $y < 1$, also liegt y nach Korollar 2.43 unter einem Coatom $c \in C_L$. Da $x \leq y \leq c$ gilt, ist $[x, y] \subseteq \langle c \rangle$. Nach Definition 2.41 ist $\langle c \rangle$ ein geometrischer Verband, und damit ist $[x, y]$ nach Proposition 2.35 selbst geometrisch. \square

In einem Bouquet darf also das Supremum zweier Elemente fehlen. In einer allgemeinen Halbordnung kann dies auf zwei Arten geschehen: Entweder besitzen die beiden Elemente gar keine gemeinsame obere Schranke, oder die Menge der gemeinsamen oberen Schranken ist nichtleer, besitzt aber kein Minimum. In einem Bouquet kann nur der erste Fall eintreten. Besitzen x, y nämlich gemeinsame obere Schranken, so hat die Menge dieser Schranken auch ein Minimum: Wären z und z' zwei verschiedene minimale obere Schranken, so existiert im Inf-Halbverband das Infimum $z \wedge z'$. Da $x, y \leq z$ und $x, y \leq z'$ gilt $x, y \leq z \wedge z'$, also ist $z \wedge z'$ eine obere Schranke mit $z \wedge z' \leq z$ und $z \wedge z' \leq z'$. Das widerspricht der Minimalität von z und z' . Die nichtleere Menge der oberen Schranken hat also höchstens ein minimales Element, und damit ein Minimum. In Beispiel 2.57 besitzen 4 und 5 mehrere minimale obere Schranken, nämlich d und e . Das zeigt, dass diese Halbordnung kein Bouquet sein kann.

Wir werden zeigen, dass sich jedes Bouquet zu einem fast-geometrischen Verband ergänzen

lässt.

3 Ergänzung von Bouquets

Wir wenden uns in diesem Kapitel der Frage zu, wie sich jedes endliche Bouquet zu einem fast-geometrischen Verband ergänzen lässt. Dazu gehen wir in zwei Schritten vor: Zunächst zeigen wir, dass sich die maximalen Elemente eines Bouquets durch sukzessives ‐Hochziehen‐ auf den gleichen Rang bringen lassen. Anschließend zeigen wir, dass ein Bouquet mit gleichrangigen maximalen Elementen durch Hinzufügen eines Einselements zu einem fast-geometrischen Verband wird.

3.1 Ranganhebung in Bouquets

Haben nicht alle maximalen Elemente eines Bouquets den gleichen Rang, so können wir ein maximales Element mit zu kleinem Rang ‐hochziehen‐. Die Idee ist, das direkte Produkt des Hauptideals dieses maximalen Elements mit der zweielementigen Kette $C(1)$ zu bilden und so eine Kopie des Hauptideals auf einer um eins höheren Rangstufe zu erhalten.

Proposition 3.1 (Ranganhebung in Bouquets)

Sei (P, \leq) ein endliches Bouquet geometrischer Verbände mit Nullelement $\mathbb{0}$ und sei m ein maximales Element in P . Dann existiert ein Bouquet (P', \leq') mit Nullelement $\mathbb{0}$, so dass

1. für alle $x \in P$ gilt $\langle x \rangle_{P'} = \langle x \rangle_P$,
2. jedes maximale Element von P außer m auch maximal in P' ist,
3. P' genau ein maximales Element $m' \notin P$ besitzt mit $\text{rg}(m') = \text{rg}(m) + 1$.

Beweis. Wir setzen $P' := P \cup \{(x, \mathbb{1}) \mid x \in \langle m \rangle\}$ und definieren die Ordnung \leq' als Erweiterung von \leq durch

$$\begin{aligned} p \leq' (x, \mathbb{1}) &\iff p \leq x \quad \text{für } p \in P, \\ (x, \mathbb{1}) \leq' (y, \mathbb{1}) &\iff x \leq y, \end{aligned}$$

wobei $(x, \mathbb{1}) \not\leq' p$ für alle $p \in P$ gelte. Wir setzen $m' := (m, \mathbb{1})$.

P' ist ein Inf-Halbverband: Für $p, q \in P$ ist $p \wedge' q = p \wedge q$ wie in P . Für $p \in P$ und $(x, \mathbb{1})$ ist $p \wedge' (x, \mathbb{1}) = p \wedge x$, da die unteren Schranken von $\{p, (x, \mathbb{1})\}$ genau die unteren Schranken von $\{p, x\}$ in P sind. Für $(x, \mathbb{1})$ und $(y, \mathbb{1})$ ist $(x, \mathbb{1}) \wedge' (y, \mathbb{1}) = (x \wedge y, \mathbb{1})$: Da $x \wedge y \leq m$, ist $(x \wedge y, \mathbb{1}) \in P'$ eine untere Schranke. Jede untere Schranke $p \in P$ erfüllt $p \leq x$ und $p \leq y$, also $p \leq x \wedge y \leq' (x \wedge y, \mathbb{1})$. Jede untere Schranke $(z, \mathbb{1})$ erfüllt $z \leq x \wedge y$, also $(z, \mathbb{1}) \leq' (x \wedge y, \mathbb{1})$.

Jedes Intervall ist geometrisch: Für $p, q \in P$ mit $p \leq' q$ ist $[p, q]_{P'} = [p, q]_P$, da kein neues Element $(x, \mathbb{1})$ unter einem Element von P liegt. Für $p \in P$ mit $p \leq' (y, \mathbb{1})$ ist $[p, (y, \mathbb{1})]_{P'} = \{q \in P \mid p \leq q \leq y\} \cup \{(x, \mathbb{1}) \mid p \leq x \leq y\}$, was ordnungsisomorph zu $[p, y]_P \times C(1)$ ist. Da $[p, y]_P$ nach Proposition 2.35 als Intervall des geometrischen Verbandes $[\mathbb{O}, m]_P$ geometrisch ist, ist auch $[p, y]_P \times C(1)$ nach Proposition 2.38 als direktes Produkt geometrischer Verbände geometrisch. Für $(x, \mathbb{1}) \leq' (y, \mathbb{1})$ ist $[(x, \mathbb{1}), (y, \mathbb{1})]_{P'}$ ordnungsisomorph zu $[x, y]_P$, also geometrisch.

Eigenschaften (1), (2) und (3): Für Eigenschaft (1) sei $x \in P$. Da $(z, \mathbb{1}) \not\leq' p$ für alle $p \in P$ gilt, liegt kein neues Element unter x , also $\langle x \rangle_{P'} = \langle x \rangle_P$. Für Eigenschaft (2) sei $m'' \neq m$ ein maximales Element von P . Dann ist $m'' \not\leq m$ und damit $m'' \not\leq' (x, \mathbb{1})$ für alle $x \in \langle m \rangle$, also ist m'' auch maximal in P' . Eigenschaft (3): m selbst ist nicht mehr maximal, da $m <' m'$. Das einzige neue maximale Element ist $m' = (m, \mathbb{1})$ mit $\text{rg}(m') = \text{rg}(m) + 1$. \square

Wenn nicht alle maximalen Elemente eines Bouquets den gleichen Rang haben, so wählen wir ein maximales Element m mit Rang kleiner als der maximale Rang und erhalten mit Proposition 3.1 ein Bouquet, in dem m durch ein neues maximales Element von Rang $\text{rg}(m) + 1$ ersetzt wurde, während alle übrigen maximalen Elemente erhalten bleiben. Die Summe der Rangdifferenzen zum maximalen Rang vermindert sich dabei, sodass nach endlich vielen Schritten alle maximalen Elemente den gleichen Rang besitzen.

3.2 Ergänzung durch ein Einselement

Hat ein Bouquet nur gleichrangige maximale Elemente, so lässt sich durch Hinzufügen eines Einselements ein fast-geometrischer Verband konstruieren:

Proposition 3.2 (Ergänzung von Bouquets zu fast-geometrischen Verbänden)

Sei (P, \leq) ein endliches Bouquet geometrischer Verbände mit Minimum \mathbb{O} , in dem alle maximalen Elemente den gleichen Rang n haben. Dann ist $L := P \cup \{\mathbb{1}\}$ mit $\mathbb{1} \notin P$ und $x \leq \mathbb{1}$ für alle $x \in P$ ein fast-geometrischer Verband.

Beweis.

L ist ein Verband: Da P ein Inf-Halbverband ist und $\mathbb{1} \wedge x = x$ für alle $x \in L$ gilt, besitzt jedes Paar in L ein Infimum. Seien $x, y \in L$. Ist $x = \mathbb{1}$ oder $y = \mathbb{1}$, so ist $x \vee y = \mathbb{1}$. Seien also $x, y \in P$. Existiert eine gemeinsame obere Schranke $z \in P$ von x und y , so ist $[x \wedge y, z]$ ein geometrischer Verband und das Supremum $s := x \vee y$ existiert in diesem Intervall. Für jede weitere obere Schranke u von $\{x, y\}$ in P ist $u \wedge z$ wohldefiniert (da P ein Inf-Halbverband ist), und aus $x \leq u$, $x \leq z$ folgt $x \leq u \wedge z$, ebenso $y \leq u \wedge z$. Damit ist $u \wedge z$ eine obere Schranke von $\{x, y\}$ in $[x \wedge y, z]$, also $s \leq u \wedge z \leq u$. Also ist s das Supremum von $\{x, y\}$ in L . Existiert keine gemeinsame obere Schranke in P von x und y , so ist $\mathbb{1}$ die einzige obere Schranke in L , also $x \vee y = \mathbb{1}$. Damit ist L ein Verband.

Null- und Einselement: \mathbb{O} ist das Minimum und $\mathbb{1}$ das Maximum von L .

Coatom-Ideale sind geometrisch: Die Coatome von L sind genau die maximalen Elemente von P . Für jedes maximale Element $m \in P$ ist $\langle m \rangle_L = [\mathbb{O}, m]_L = [\mathbb{O}, m]_P$ ein geometrischer Verband, da P ein Bouquet geometrischer Verbände ist.

Rangfunktion: Mit Proposition 2.55 besitzt P eine Rangfunktion rg_P . Wir setzen $\text{rg}(\mathbf{1}) := n + 1$. Da alle maximalen Elemente den Rang n haben und $\mathbf{1}$ genau diese bedeckt, ist rg eine Rangfunktion auf L . \square

Zusammen mit Proposition 2.58 zeigt dies, dass im Fall gleichrangiger maximaler Elemente die Begriffe Bouquet und fast-geometrischer Verband sich nur in der Existenz des Einselements $\mathbf{1}$ unterscheiden: Ein solches Bouquet wird durch Hinzufügen von $\mathbf{1}$ zu einem fast-geometrischen Verband, und umgekehrt entsteht durch Entfernen von $\mathbf{1}$ aus einem fast-geometrischen Verband mit $\text{rg}(L) \geq 2$ ein Bouquet geometrischer Verbände.

Wir können nun die beiden Konstruktionen aus Proposition 3.1 und Proposition 3.2 zusammenführen, um das Hauptresultat dieses Kapitels zu erhalten:

Satz 3.3 (Ergänzung von Bouquets zu fast-geometrischen Verbänden)

Sei (P, \leq) ein endliches Bouquet geometrischer Verbände mit Minimum $\mathbf{0}$. Dann existiert ein fast-geometrischer Verband L mit $P \subseteq L$, so dass für alle $x \in P$ gilt:

$$\langle x \rangle_L = \langle x \rangle_P. \quad (3.1)$$

Außerdem ist $\text{rg}(L) = \max \{\text{rg}_P(x) \mid x \in P\} + 1$.

Beweis. Sei $n := \max \{\text{rg}(m) \mid m \text{ maximales Element von } P\}$. Durch wiederholte Anwendung von Proposition 3.1 erhalten wir ein Bouquet P' mit $P \subseteq P'$, in dem alle maximalen Elemente den Rang n haben. Nach Proposition 3.2 ist $L := P' \cup \{\mathbf{1}\}$ ein fast-geometrischer Verband.

Sei $x \in P$. Jeder Ranganhebungsschritt erhält nach Proposition 3.1 (1) die Ideale der Elemente von P , also $\langle x \rangle_{P'} = \langle x \rangle_P$. Da $\mathbf{1} \not\leq x$ gilt, folgt $\langle x \rangle_L = \langle x \rangle_{P'} = \langle x \rangle_P$.

Die Ranganhebungen verändern den maximalen Rang in P nicht und es ist weiterhin $\max \{\text{rg}_{P'}(x) \mid x \in P'\} = n$. Da $\mathbf{1}$ genau die maximalen Elemente von P' bedeckt, folgt $\text{rg}_L(\mathbf{1}) = n + 1$. \square

Beispiel 3.4 (Ergänzung eines Bouquets zu einem fast-geometrischen Verband)

Wir wenden das Verfahren aus Satz 3.3 auf das Bouquet P aus Beispiel 2.56 an. Die maximalen Elemente α , d und 6 haben die Ränge 3, 2 und 1, der maximale Rang ist also $n = 3$.

Im ersten Schritt wenden wir Proposition 3.1 auf d mit Rang 2 an. Es entsteht ein neues maximales Element $(d, \mathbf{1}_1)$ vom Rang 3, zusammen mit den Elementen $(x, \mathbf{1}_1)$ für alle $x \in \langle d \rangle$ (orange).

Im zweiten Schritt heben wir 6 mit Rang 1 an. Es entsteht das neue maximale Element $(6, \mathbf{1}_2)$ vom Rang 2, zusammen mit $(0, \mathbf{1}_2)$ (lila).

Im dritten Schritt heben wir $(6, \mathbf{1}_2)$ mit Rang 2 an, ein Element, das im vorherigen Schritt entstanden ist. Es entsteht das neue maximale Element $((6, \mathbf{1}_2), \mathbf{1}_3)$ vom Rang 3, zusammen mit den Elementen $(x, \mathbf{1}_3)$ für alle $x \in \langle (6, \mathbf{1}_2) \rangle$ (türkis).

Nun haben alle drei maximalen Elemente α , $(d, \mathbf{1}_1)$ und $((6, \mathbf{1}_2), \mathbf{1}_3)$ den Rang 3. Nach Proposition 3.2 ergibt das Hinzufügen des Einselements $\mathbf{1}$ (gelb) den fast-geometrischen Verband L .

4 Vervollständigung

Nachdem wir im letzten Kapitel die Ergänzung von Bouquets geometrischer Verbände zu fast-geometrischen Verbänden betrachtet haben, wenden wir uns nun der eigentlichen Vervollständigung von fast-geometrischen Verbänden zu. Ein Verband ist geometrisch, wenn er atomar und submodular ist. Ist ein Verband nur fast-geometrisch, so fehlt mindestens eine dieser Eigenschaften. Wir werden zunächst zeigen, dass der Fall, in dem keine der beiden Eigenschaften erfüllt ist, ein besonders “einfacher” Fall ist.

4.1 Nicht-atomare Verbände

Fast-geometrische Verbände, die nicht atomar sind, lassen sich wie folgt charakterisieren:

Proposition 4.1 (Charakterisierung nicht-atomarer fast-geometrischer Verbände)

Sei L ein fast-geometrischer Verband, der nicht geometrisch ist. Dann ist L genau dann nicht atomar, wenn L nur ein Coatom hat, also wenn $|C_L| = 1$.

Beweis.

“ \Rightarrow ”: Sei L nicht-atomar. Da jedes echte Hauptideal geometrisch ist, gilt für alle $q \in L$ mit $q \neq \mathbf{1}$, dass $q = \vee A(q)$. Das einzige Element, das die Atomarität verletzen könnte, ist also $\mathbf{1}$, weswegen $\vee A(\mathbf{1}) \neq \mathbf{1}$ folgt. Außerdem liegen alle Atome von L nach Definition des Einselements unter $\mathbf{1}$, also gilt $\vee A(\mathbf{1}) \leq \mathbf{1}$ und damit $\vee A(\mathbf{1}) < \mathbf{1}$. Setzen wir $\alpha = \vee A(\mathbf{1})$ und gäbe es ein x mit $\alpha < x < \mathbf{1}$, so wäre $\langle x \rangle$ geometrisch und damit $x = \vee A(x) \leq \vee A(\mathbf{1}) = \alpha$, ein Widerspruch. Also ist α ein Coatom. Sei β ein weiteres Coatom. Da $\alpha = \vee A(\mathbf{1})$, liegt jedes Atom unter α , also $A(\beta) \subseteq A(\mathbf{1}) \subseteq A(\alpha)$. Da $\langle \beta \rangle$ geometrisch ist, gilt $\beta = \vee A(\beta)$, und da alle Atome in $A(\beta)$ unter α liegen, folgt $\beta = \vee A(\beta) \leq \alpha$. Da $\beta < \mathbf{1}$, folgt $\beta \not\leq \alpha$ und damit $\beta = \alpha$.

“ \Leftarrow ”: Sei $C_L = \{c\}$. Nach Korollar 2.44 liegt jedes Atom unter einem Coatom, also unter c , und damit ist $A(\mathbf{1}) = A(c)$. Da $\langle c \rangle$ geometrisch ist, ist $c = \vee A(c) = \vee A(\mathbf{1})$ und damit $\mathbf{1} \neq \vee A(\mathbf{1})$ und L nicht-atomar. \square

Anschaulich ist das klar: Ein Verband mit $\text{rg}(L) \geq 2$ und Einselement, mit nur einem Coatom, kann nicht atomar sein, da das Coatom bereits alle Atome enthält. Umgekehrt ist ein fast-geometrischer Verband, der mehr als ein Coatom hat, atomar, da jedes Element unter den Coatomen Supremum seiner Atome ist und nur die $\mathbf{1}$ als Supremum aller Atome in Frage kommt.

Wir können also den Fall betrachten, in dem $|C_L| = 1$ gilt, um die Vervollständigung von nicht-atomaren fast-geometrischen Verbänden durchzuführen. Wir nutzen das direkte Produkt, um diesen Fall zu behandeln: $L' := \langle c \rangle \times C(1)$, wobei $C(1)$ die zweielementige

Kette ist, soll die Vervollständigung von L sein. Dazu identifizieren wir das Einselement von L mit dem Einselement von L' und zeigen, dass c einem Coatom in L' entspricht.

Satz 4.2 (Vervollständigung von nicht-atomaren fast-geometrischen Verbänden)

Sei L ein nicht-geometrischer fast-geometrischer Verband mit $C_L = \{c\}$. Dann ist $L' := \langle c \rangle \times C(1)$ eine Vervollständigung von L .

Beweis. Da L fast-geometrisch ist, ist $\langle c \rangle$ geometrisch. Außerdem ist die zweielementige Kette $C(1)$ geometrisch. Nach Proposition 2.38 ist damit L' geometrisch. Wir definieren $\varphi: L \rightarrow L'$ durch

$$\varphi(q) = \begin{cases} (q, \mathbf{0}) & \text{falls } q \leq c, \\ (c, \mathbf{1}) & \text{falls } q = \mathbf{1}_L. \end{cases}$$

Da $L \setminus \{\mathbf{1}_L\} = \langle c \rangle$, ist φ wohldefiniert. Wir zeigen, dass φ eine Coatom-Einbettung ist:

Zu 1 (Einbettung): Wir zeigen $q \leq q' \iff \varphi(q) \leq \varphi(q')$ für alle $q, q' \in L$. Für $q, q' \in \langle c \rangle$ gilt $(q, \mathbf{0}) \leq (q', \mathbf{0})$ genau dann, wenn $q \leq q'$. Für $q \in \langle c \rangle$ und $q' = \mathbf{1}_L$ sind beide Seiten stets erfüllt, da $q \leq \mathbf{1}_L$ und $(q, \mathbf{0}) \leq (c, \mathbf{1})$. Für $q = \mathbf{1}_L$ und $q' \in \langle c \rangle$ sind beide Seiten stets verletzt, da $\mathbf{1}_L \not\leq q'$ und $(c, \mathbf{1}) \not\leq (q', \mathbf{0})$. Also ist φ eine Ordnungseinbettung.

Zu 2 (Eins-Erhaltung): $\varphi(\mathbf{1}_L) = (c, \mathbf{1}) = \mathbf{1}_{L'}$.

Zu 3 (Ideal-Erhaltung): $\langle (c, \mathbf{0}) \rangle_{L'} = \{(x, \mathbf{0}) \mid x \in \langle c \rangle\} = \varphi(\langle c \rangle_L) \subseteq \varphi(L)$.

Zu 4 (Coatom-Treue): $\varphi(c) = (c, \mathbf{0})$. Da $\mathbf{0} < \mathbf{1}$ in $C(1)$ gilt, folgt $(c, \mathbf{0}) < (c, \mathbf{1}) = \mathbf{1}_{L'}$, also $\varphi(c) \in C_{L'}$.

Nach Proposition 2.52 ist L' eine Vervollständigung von L . □

Betrachten wir diese Vervollständigung anschaulich an zwei Beispielen:

Beispiel 4.3 (Vervollständigung von nicht-atomaren fast-geometrischen Verbänden)

In Abbildung 4.1a sehen wir einen nicht-atomaren fast-geometrischen Verband L mit einem einzigen Coatom c , den wir aus Beispiel 2.51 bereits als fast-geometrisch kennen. Rechts daneben (Abbildung 4.1b) sehen wir die Vervollständigung $L' = \langle c \rangle \times C(1)$ von L , wobei $\mathbf{1}_{C(1)} = a$ und $\mathbf{0}_{C(1)} = 0$ gilt.

Das zweite Beispiel (Abbildung 4.1c) zeigt einen weiteren nicht-atomaren fast-geometrischen Verband L mit einem einzigen Coatom c . Den Verband $\langle c \rangle$ kennen wir bereits aus Beispiel 2.45 (Abbildung 2.2d) als geometrisch. Rechts daneben (Abbildung 4.1d) sehen wir die Vervollständigung $L' = \langle c \rangle \times C(1)$ von L .

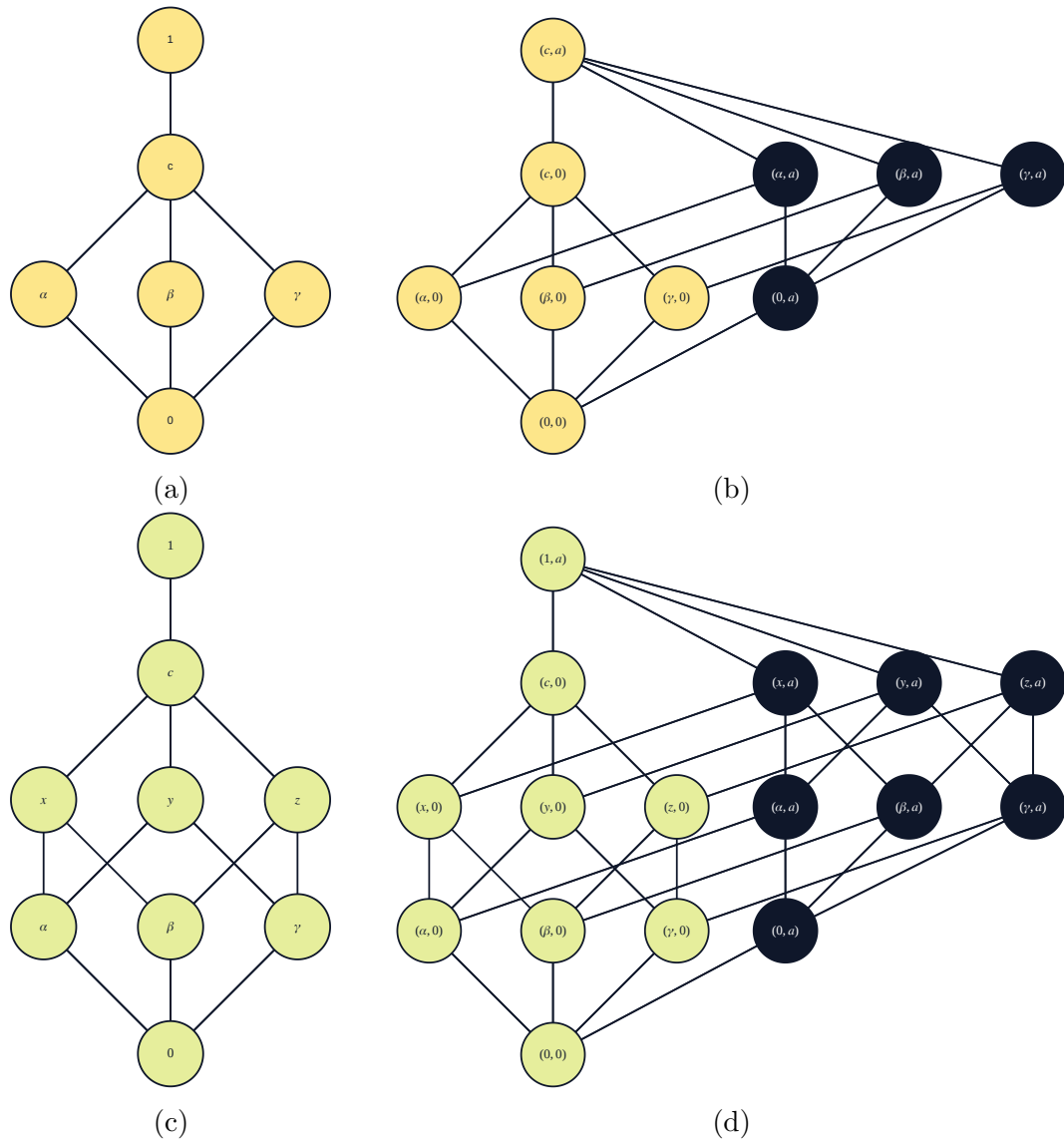


Abbildung 4.1: Zwei Beispiele für die Vervollständigung nicht-atomarer fast-geometrischer Verbände. Links jeweils der fast-geometrische Verband L , rechts seine Vervollständigung $L' = \langle c \rangle \times C(1)$. Das Einselement in $C(1)$ ist jeweils a . Das Bild der Coatom-Einbettung φ aus Theorem 4.2 ist rechts jeweils in der gleichen Farbe dargestellt wie die Elemente von L links. Die schwarzen Elemente rechts sind die Elemente von $L' \setminus \varphi(L)$, also die Elemente, die zur Vervollständigung hinzugefügt wurden.

4.2 Nicht-submodulare Verbände

Da sich nicht-atomare fast-geometrische Verbände nach Satz 4.2 vervollständigen lassen, können wir uns im Folgenden auf den Fall konzentrieren, in dem L bereits atomar ist, aber nicht submodular. Nehmen wir L als nicht geometrisch an, so hat L nach Proposition 4.1 mindestens zwei Coatome und nach Proposition 2.42 gilt $\text{rg}(L) \geq 2$. Es gilt sogar:

Lemma 4.4

Sei L ein fast-geometrischer atomarer Verband mit $\text{rg}(\mathbf{1}_L) = 2$. Dann ist L geometrisch.

Beweis. Sei $a \in A_L$ und $x \in L$ mit $a \notin A(x)$. Ist $x = \mathbf{0}$, so gilt $a \vee x = a$ und $\mathbf{0} \leq a$. Ist $\text{rg}(x) = 1$, so ist x ein Atom mit $x \neq a$. Dann gilt $a \vee x > x$, also $\text{rg}(a \vee x) \geq 2 = \text{rg}(\mathbf{1})$ und damit $a \vee x = \mathbf{1}$. Da $\text{rg}(x) = 1 = \text{rg}(\mathbf{1}) - 1$, folgt $x \leq \mathbf{1} = a \vee x$. In beiden Fällen gilt $x \leq a \vee x$, also ist L submodular nach Proposition 2.32 und damit geometrisch. \square

Wir nehmen im Folgenden daher $\text{rg}(L) \geq 3$ an.

Der Fall der Nicht-Submodularität ist, wie bereits angedeutet, der schwierigere. Wir werden verschiedene konstruktive Ansätze zur Vervollständigung verfolgen, die systematisch die Schwierigkeiten und Anforderungen herausarbeiten, jedoch keine vollständige Lösung finden.

4.2.1 Behebende Elemente L'

In Proposition 2.32 haben wir gesehen, dass die Submodularität eines atomaren Verbands genau dann verletzt ist, wenn es ein Paar $(a, x) \in A_L \times L$ gibt, mit $a \notin A(x)$ und $x \not\leq a \vee x$. Wir geben solchen Elementen einen Namen:

Definition 4.5 (Problematisches Element)

Sei L ein fast-geometrischer Verband und $a \in A_L$ und $x \in L$ mit $a \notin A(x)$. Ist $x \not\leq a \vee x$, dann heißt x ein problematisches Element zu a , oder einfach problematisch zu a . Wir bezeichnen die Menge aller problematischen Elemente zu a mit

$$P(a) := \{x \in L \mid x \not\leq a \vee x \text{ und } a \notin A(x)\}. \quad (4.1)$$

Und die Menge aller problematischen Elemente mit

$$P := \bigcup_{a \in A_L} P(a). \quad (4.2)$$

Mit dem einleitenden Kommentar zu dieser Definition erhalten wir die folgende Charakterisierung der Submodularität eines atomaren Verbandes:

Korollar 4.6

Sei L ein atomarer Verband. Dann ist L genau dann geometrisch, wenn $P(a) = \emptyset$ für alle $a \in A_L$ gilt.

Beweis. Nach Proposition 2.32 ist L genau dann submodular, wenn $x \leq a \vee x$ für alle $x \in L$ und $a \in A_L \setminus A_L(x)$ gilt. Das ist gleichbedeutend damit, dass kein $x \in L$ problematisch zu irgendeinem Atom ist, also $P(a) = \emptyset$ für alle $a \in A_L$. \square

Unser Konzept für unseren ersten Ansatz zur Vervollständigung von fast-geometrischen Verbänden ist nun, die problematischen Elemente zu beseitigen, indem wir für jedes problematische Element x zu einem Atom a ein neues Element y hinzufügen, das direkt über x liegt und dafür sorgt, dass $x \leq a \vee x$ in der Erweiterung gilt. Wir führen die folgenden Funktionen ein, die uns als Hilfsmittel für die Konstruktion der Erweiterung dienen werden:

Notation 4.7

Für ein Coatom $c \in C_L$ und $B \subseteq A_L$ schreiben wir $\vee^c B := \vee(B \cap A(c))$.

Mit dem Abschlussoperator aus Definition 2.34 gilt dann $\text{cl}_c(B) = A(\vee^c B)$ für $B \subseteq A_L$.

Wir führen außerdem eine Kurzschreibweise für eine Menge bestehend aus den Atomen unter einem Element und einem Atom ein, die wir häufig benötigen werden:

Notation 4.8

Für $a \in A_L$ und $d \in L$ schreiben wir $A_a(d) := A(d) \cup \{a\}$.

Wir definieren nun eine Funktion M , die jedem Paar $(a, x) \in A_L \times L$ eine Teilmenge von A_L zuordnet. Die Werte von M werden die Elemente unseres ersten Erweiterungsansatzes L' bilden.

Definition 4.9 (Behebendes Element)

Sei L ein fast-geometrischer atomarer Verband und $a \in A_L$ und $x \in L$. Dann definieren wir das behebende Element zu (a, x) als

$$M : A_L \times L \rightarrow \mathcal{P}(A_L),$$

$$M(a, x) := \bigcup_{c \in C_L} \text{cl}_c(A_a(x)).$$

Lemma 4.10 (Alternative Darstellung von M)

Für $a \in A_L$ und $x \in L$ gilt:

$$M(a, x) = A(x) \cup \bigcup_{c \in C(a)} A((x \wedge c) \vee a). \quad (4.3)$$

Beweis. Wir unterscheiden die Summanden in $M(a, x) = \bigcup_{c \in C_L} \text{cl}_c(A_a(x))$ nach $a \in A(c)$ und $a \notin A(c)$.

Fall $a \in A(c)$, d.h. $c \in C(a)$: Es gilt $A_a(x) \cap A(c) = (A(x) \cup \{a\}) \cap A(c) = (A(x) \cap A(c)) \cup \{a\}$. Mit Satz 2.26 ist $A(x) \cap A(c) = A(x \wedge c)$, also $A_a(x) \cap A(c) = A(x \wedge c) \cup \{a\}$. Da $x \wedge c, a \in \langle c \rangle$ und $\langle c \rangle$ atomar ist, folgt $\vee^c A_a(x) = \vee(A(x \wedge c) \cup \{a\}) = (x \wedge c) \vee a$. Damit ist $\text{cl}_c(A_a(x)) = A((x \wedge c) \vee a)$.

Fall $a \notin A(c)$: Es gilt $A_a(x) \cap A(c) = A(x) \cap A(c) = A(x \wedge c)$. Da $\langle c \rangle$ atomar ist, folgt $\vee^c A_a(x) = \vee A(x \wedge c) = x \wedge c$. Damit ist $\text{cl}_c(A_a(x)) = A(x \wedge c) \subseteq A(x)$.

Insgesamt ergibt die Vereinigung über alle $c \in C_L$:

$$M(a, x) = \bigcup_{c \in C(a)} A((x \wedge c) \vee a) \cup \bigcup_{c \notin C(a)} A(x \wedge c).$$

Die zweite Vereinigung ist in $A(x)$ enthalten. Umgekehrt ist $A(x) \subseteq M(a, x)$, da für jedes $b \in A(x)$ ein Coatom c mit $b \leq c$ existiert und dann $b \in A(x \wedge c) \subseteq \text{cl}_c(A_a(x))$. \square

Liegen a und x gemeinsam unter einem Coatom, so vereinfacht sich $M(a, x)$:

Lemma 4.11 (M für Elemente unter einem gemeinsamen Coatom)

Sei $a \in A_L$ und $x \in L$ mit $a \vee x < \mathbf{1}$. Dann gilt $M(a, x) = A(a \vee x)$.

Beweis.

“ \subseteq ”: Für jedes $c \in C_L$ gilt $A_a(x) \cap A(c) \subseteq A_a(x)$, also $\vee^c A_a(x) \leq \vee A_a(x) = a \vee x$. Mit Proposition 2.20 folgt $\text{cl}_c(A_a(x)) \subseteq A(a \vee x)$ für jedes c , also $M(a, x) = \bigcup_{c \in C_L} \text{cl}_c(A_a(x)) \subseteq A(a \vee x)$.

“ \supseteq ”: Da $a \vee x < \mathbf{1}$, existiert ein Coatom $c \in C_L$ mit $a \vee x \leq c$. Insbesondere gilt $a \leq c$ und $x \leq c$, also $c \in C(a)$ und $x \wedge c = x$. Mit Lemma 4.10 folgt $A((x \wedge c) \vee a) = A(x \vee a) \subseteq M(a, x)$. \square

Lemma 4.12 (M unter einem Element)

Sei $a \in A_L$, $x \in L$ und $q \in L$ mit $q < \mathbf{1}$. Ist $M(a, x) \subseteq A(q)$, so gilt $a \vee x \leq q$ und $M(a, x) = A(a \vee x)$.

Beweis. Aus Lemma 4.10 folgt $A(x) \subseteq M(a, x) \subseteq A(q)$, also $x \leq q$ nach Satz 2.28. Ebenso ist $a \in M(a, x) \subseteq A(q)$, also $a \leq q$. Damit $a \vee x \leq q < \mathbf{1}$, und Lemma 4.11 liefert $M(a, x) = A(a \vee x)$. \square

Insbesondere gilt $M(a, x) = A(x)$ falls $a \in A(x)$, da dann $a \vee x = x < \mathbf{1}$ (für $x = \mathbf{1}$ folgt $M(a, \mathbf{1}) = A_L$ direkt aus der Definition). Ist $x \notin P(a)$ und x kein Coatom mit $a \notin A(x)$, so ist $a \vee x < \mathbf{1}$ automatisch erfüllt, da $x < a \vee x$ und $\text{rg}(x) < \text{rg}(\mathbf{1}) - 1$.

Wir sehen also, dass $M(a, x) = A(a \vee x)$ gilt, solange x nicht problematisch zu a ist. In diesem Fall liefert M das bereits in L vorhandene Element $a \vee x$ in seiner Atomdarstellung. Ist x hingegen problematisch zu a , so erzeugt $M(a, x)$ ein neues Element, das direkt über $A(x)$ liegt und bewirkt, dass $A(x)$ in der Erweiterung nicht mehr problematisch zu $\{a\}$ ist.

Die Idee ist nun, aus den Werten von M ein Mengensystem L' zu konstruieren, das insbesondere $\{A(x) \mid x \in L\}$ enthält. Wir werden später A als Ideal-Einbettung von L in L' auffassen.

Wir definieren L' als die Menge aller $M(a, x)$, wobei wir Coatome als Indexelemente x ausschließen. Die zu L gehörigen Elemente unterhalb eines Coatoms c werden in L' bereits durch $M(a, x)$ für Atome $a \leq c$ und Elemente $x < c$, also $\text{rg}(x) < \text{rg}(\mathbf{1}) - 1$, erzeugt. Ist hingegen c ein Coatom mit $a \notin A(c)$, so soll das behebende Element $M(a, c)$ dem Einselement A_L in L' entsprechen, das wir explizit hinzufügen. Wir schließen daher die Coatome aus der Indexmenge aus und erhalten

$$L' := \{\emptyset, A_L\} \cup \{M(a, x) \mid a \in A_L, x \in L, \text{rg}(x) < \text{rg}(\mathbf{1}) - 1\}. \quad (4.4)$$

Die Ordnung auf L' ist die Inklusionsordnung, also $M(a, x) \leq M(a', x')$ genau dann, wenn $M(a, x) \subseteq M(a', x')$ gilt.

Um L' als Kandidaten für eine Vervollständigung zu betrachten, müssen wir L in L' wiederfinden können. Wir zeigen:

Proposition 4.13 (A ist eine Ideal-Einbettung von L in L')

Die Abbildung $A : L \rightarrow L'$, $l \mapsto A(l)$ ist eine Ideal-Einbettung.

Beweis.

Wir zeigen zunächst $A(x) \in L'$ für alle $x \in L$: Für $x = \mathbf{0}$ gilt $A(\mathbf{0}) = \emptyset \in L'$ und für $x = \mathbf{1}$ gilt $A(\mathbf{1}) = A_L \in L'$ nach (4.4). Für $\mathbf{0} < x < \mathbf{1}$ existiert ein Atom $a \in A(x)$ und es gilt $a \vee x = x < \mathbf{1}$. Mit Lemma 4.11 folgt $M(a, x) = A(a \vee x) = A(x)$. Ist $\text{rg}(x) < \text{rg}(\mathbf{1}) - 1$, so ist $A(x) = M(a, x) \in L'$ nach (4.4). Ist x ein Coatom, so sei y ein Coatom von $\langle x \rangle$ (existiert, da $\text{rg}(x) \geq 2$). Da $\langle x \rangle$ atomar ist, gilt $A(y) \subsetneq A(x)$ (sonst $y = \vee A(y) = \vee A(x) = x$). Wähle $a \in A(x) \setminus A(y)$. Dann $a \not\leq y$ und $y < x$, also $a \vee y = x$, und $\text{rg}(y) = \text{rg}(x) - 1 < \text{rg}(\mathbf{1}) - 1$. Damit $M(a, y) = A(a \vee y) = A(x) \in L'$.

Zu 1 (Einbettung): Da L atomar ist, folgt $l \leq l' \iff A(l) \subseteq A(l')$ nach Satz 2.28.

Zu 2 (Eins-Erhaltung): $A(\mathbf{1}_L) = A_L = \mathbf{1}_{L'}$.

Zu 3 (Ideal-Erhaltung): Sei $f \in L'$ mit $f \subseteq A(c)$ für ein Coatom c . Falls $f = \emptyset$, so ist $f = A(\mathbf{0}) \in A(L)$. Andernfalls ist $f = M(a', x)$ mit $M(a', x) \subseteq A(c)$. Da $c < \mathbf{1}$, folgt mit Lemma 4.12, dass $a' \vee x \leq c$ und $M(a', x) = A(a' \vee x)$. Damit $\langle A(c) \rangle_{L'} \subseteq A(L)$. \square

Die Menge L' adressiert explizit alle problematischen Elemente in L . Was L' nicht adressiert, sind die problematischen Elemente, die durch die neuen Elemente in L' entstehen können. Es könnte also sein, dass Element $M(a, x)$ in L' problematisch zu einem Atom $a' \in A_L$ ist, wenn x in L problematisch zu a war. Der Ansatz, den wir verfolgen würden, ist die Konstruktion von L' wiederholt anzuwenden, wobei jede Iteration einen atomaren fast-geometrischen Verband erzeugen soll, der als Ausgangsverband für die nächste Iteration dient. Man würde den Fortschritt wie folgt messen: Sei $p_L \leq \text{rg}(x)$ für alle $x \in P_L$ eine untere Schranke des Rangs der problematischen Elemente in L . Da mögliche problematische Elemente in L' über den problematischen Elementen in L liegen müssen, ist $p_{L'} = p_L + 1$ eine untere Schranke des Rangs der problematischen Elemente in L' . Zudem halten wir $\text{rg}(L) = \text{rg}(L')$, damit können wir schrittweise die untere Schranke der Ränge problematischer Elemente bis über den Rang des Verbandes erhöhen, woraus folgt, dass es eine Erweiterung gibt, in der keine problematischen Elemente mehr existieren und damit eine Vervollständigung von L ist.

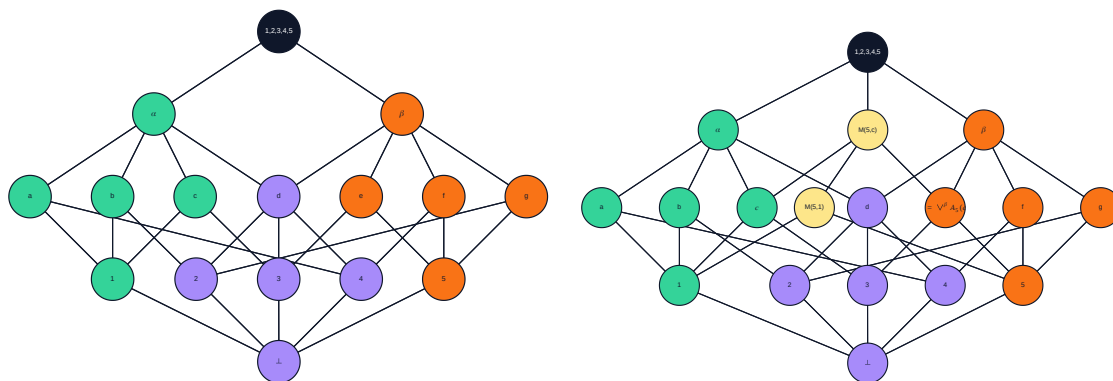
Wir werden später sehen, dass dieser Ansatz zur Konstruktion von L' nicht immer funktioniert. Wir werden daher dieses iterierte Vervollständigen mit L' nicht weiter ausführen.

Auch wenn dieser Ansatz, wie bereits angekündigt, nicht immer funktioniert, so ist er doch für eine ganze Menge von fast-geometrischen Verbänden erfolgreich, so geht zum Beispiel die Erweiterung in Abbildung 2.3b aus 2.3a nach dieser Konstruktion hervor. Wir zeigen noch weitere Beispiele:

Beispiel 4.14 (Erfolgreiche Vervollständigung mit L')

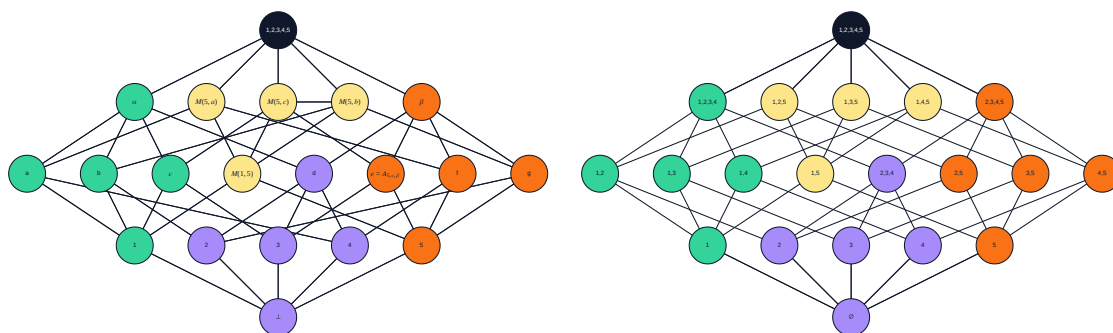
Sei L der fast-geometrische Verband mit $A_L = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\text{rg}(\mathbf{1}) = 4$ und den zwei Coatomen α mit $A(\alpha) = \{1, 2, 3, 4\}$ und β mit $A(\beta) = \{2, 3, 4, 5\}$ (Abbildung 4.2a). In beiden Coatom-Idealen bilden die Atome 2, 3, 4 die nicht-triviale Gerade d . Die Elemente von L sind:

Rang	Elemente
0	$\mathbf{0}$
1	1, 2, 3, 4, 5
2	$a = \{1, 4\}$, $b = \{1, 2\}$, $c = \{1, 3\}$, $d = \{2, 3, 4\}$, $e = \{2, 5\}$, $f = \{4, 5\}$, $g = \{3, 5\}$
3	$\alpha = \{1, 2, 3, 4\}$, $\beta = \{2, 3, 4, 5\}$
4	$\mathbf{1}$



(a) Der zu vervollständigende fast-geometrische Verband L . (b) Einfügung von $M(5, c)$ und $M(5, 1)$ (gelb).

Abbildung 4.2: Der Verband L und zwei behebende Elemente. Grüne Knoten liegen unter α , orange unter β , lila unter beiden.



(a) L' mit den behebenden Elementen. (b) L' in der Mengendarstellung.

Abbildung 4.3: Die Erweiterung L' des Verbands aus Abbildung 4.2a.

Atom 5 liegt nur unter β und Atom 1 nur unter α , daher ist $C(1) \cap C(5) = \emptyset$ und $1 \vee 5 = \mathbb{1}$. Die problematischen Elemente zu Atom 5 sind $P(5) = \{1, a, b, c\}$, denn für diese gilt $5 \notin A(x)$ und $x \not\leq 5 \vee x = \mathbb{1}$. Analog ist $P(1) = \{5, e, f, g\}$. Die Atome 2, 3, 4 und das Element d liegen unter beiden Coatomen, daher ist $P(2) = P(3) = P(4) = \emptyset$ und $d \notin P(a)$ für alle $a \in A_L$.

Die neuen behebenden Elemente für Atom 5 ergeben sich wie folgt. Für $M(5, c)$ ist $A_5(c) = A(c) \cup \{5\} = \{1, 3, 5\}$ und damit

$$M(5, c) = \text{cl}_\alpha(\{1, 3, 5\}) \cup \text{cl}_\beta(\{1, 3, 5\}) = A(\vee\{1, 3\}) \cup A(\vee\{3, 5\}) = A(c) \cup A(g) = \{1, 3, 5\}.$$

Analog berechnet man die übrigen neuen Elemente:

$$M(5, 1) = \{1, 5\}, \quad M(5, a) = \{1, 4, 5\}, \quad M(5, b) = \{1, 2, 5\}.$$

Die behebenden Elemente für Atom 1 stimmen mit diesen überein: $M(1, 5) = \{1, 5\}$, $M(1, f) = \{1, 4, 5\}$, $M(1, e) = \{1, 2, 5\}$ und $M(1, g) = \{1, 3, 5\}$. Alle übrigen Werte von M liefern nach Lemma 4.11 bereits existierende Elemente von L , was eine Stärke der Verwendung von $M(a, x)$ anstelle von $A_a(x)$ ist. Würden wir z.B. das Element $A_2(3) = \{2, 3\}$ hinzufügen, würde sich dieses zwischen $\{2\}$ und $A(d)$ schieben, was von der ursprünglichen Struktur von L abweichen würde.

Dass L' ein geometrischer Verband ist und eine Vervollständigung von L , lässt sich direkt verifizieren.

Im vorangehenden Beispiel ist $M(a, x) = A_a(x)$ für alle problematischen Paare (a, x) , dass dies nicht immer so sein muss, zeigt das folgende Beispiel und demonstriert eine weitere Stärke der Verwendung von $M(a, x)$ anstelle von $A_a(x)$.

Beispiel 4.15 (Cross-Coatom-Abschluss in L')

Sei L der fast-geometrische Verband mit $A_L = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\text{rg}(\mathbb{1}) = 4$ und den zwei Coatomen α mit $A(\alpha) = \{1, 2, 3\}$ ($\langle \alpha \rangle \cong B_3$) und β mit $A(\beta) = \{2, 3, 4, 5\}$, wobei $\langle \beta \rangle$ die nicht-triviale Gerade $d = \{2, 4, 5\}$ besitzt.

Atom 1 liegt nur unter α und die Atome 4, 5 nur unter β . Für Atom 5 ist $P(5) = \{1, a, b\}$ mit $a = \{1, 2\}$ und $b = \{1, 3\}$.

Wir berechnen $M(5, a)$ mit $A_5(a) = \{1, 2, 5\}$:

$$\begin{aligned} \vee^\alpha \{1, 2, 5\} &= \vee(\{1, 2, 5\} \cap \{1, 2, 3\}) = \vee\{1, 2\} = a, \\ \vee^\beta \{1, 2, 5\} &= \vee(\{1, 2, 5\} \cap \{2, 3, 4, 5\}) = \vee\{2, 5\} = d. \end{aligned}$$

Der Abschluss in $\langle \beta \rangle$ erweitert $\{2, 5\}$ zur Geraden $d = \{2, 4, 5\}$ und zieht damit Atom 4 hinzu:

$$M(5, a) = A(a) \cup A(d) = \{1, 2\} \cup \{2, 4, 5\} = \{1, 2, 4, 5\} \supsetneq \{1, 2, 5\} = A_5(a).$$

Im Gegensatz zum vorangehenden Beispiel ist $M(5, a)$ hier echt größer als $A_5(a)$.

Man verifiziert, dass L' eine Vervollständigung von L ist.

Weitere Beispiele für erfolgreiche Vervollständigungen mit L' finden sich im Anhang (Abbildungen A.1, A.2 und A.3).

Die Elemente von L' sind Teilmengen von A_L , die Atome in L' sind die einelementigen Mengen $\{a\}$ für $a \in A_L$, und die Ordnung ist die Inklusion. Damit ist nach Proposition 2.30 die \cap -Abgeschlossenheit eine notwendige Bedingung dafür, dass (L', \subseteq) ein (atomarer) Verband ist. Das folgende Beispiel zeigt, dass L' diese Bedingung im Allgemeinen nicht erfüllt, also nicht immer ein (fast-geometrischer) Verband ist, L' also nicht immer als Grundlage für eine weitere Anwendung des Vervollständigungsprozesses dienen kann.

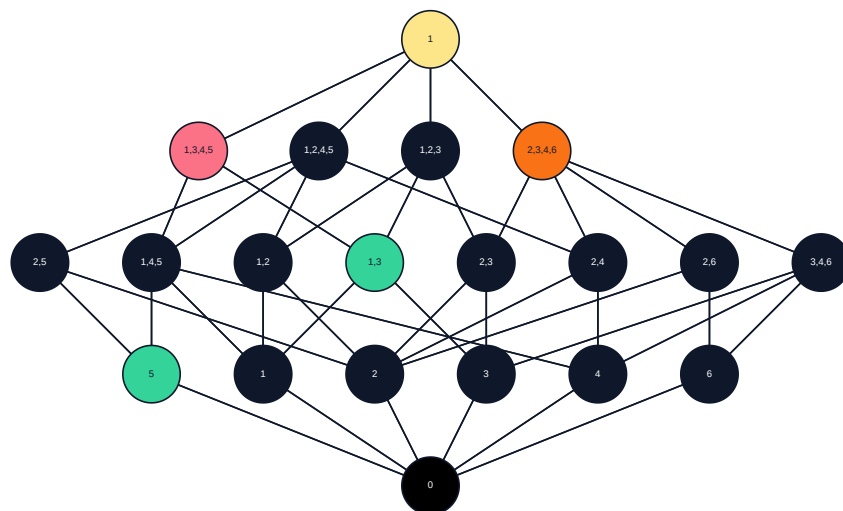


Abbildung 4.4: Gegenbeispiel zur Abgeschlossenheit von L' unter \cap .

Beispiel 4.16 (L' ist im Allgemeinen nicht unter \cap abgeschlossen (L_\times))

Sei L_\times der Verband mit den sechs Atomen $A_{L_\times} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und den drei Coatomen

$$c_1 = \{1, 2, 3\}, \quad c_2 = \{1, 2, 4, 5\}, \quad c_3 = \{2, 3, 4, 6\}.$$

Dabei ist $\langle c_1 \rangle \cong B_3$ der Boolesche Verband auf $\{1, 2, 3\}$, während $\langle c_2 \rangle$ die nicht-triviale Gerade $\{1, 4, 5\}$ und $\langle c_3 \rangle$ die nicht-triviale Gerade $\{3, 4, 6\}$ besitzen. In $\langle c_2 \rangle$ und $\langle c_3 \rangle$ haben die Geraden Rang 2 und die Paare auf der Geraden sind keine Flats, z.B. ist $\text{cl}_{c_2}(\{1, 4\}) = \{1, 4, 5\}$ und $\text{cl}_{c_3}(\{3, 4\}) = \{3, 4, 6\}$. Alle Coatom-Ideale sind geometrische Verbände vom Rang 3, also ist L_\times fast-geometrisch mit $\text{rg}(\mathbb{1}) = 4$.

Die Elemente von L_\times sind:

Rang	Elemente
0	\emptyset
1	$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$
2	$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{1, 4, 5\}, \{3, 4, 6\}$
3	$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 6\}$
4	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Wir berechnen zwei Elemente von L' : Für $M(5, \{1, 3\})$ mit $A_5(\{1, 3\}) = \{1, 3, 5\}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{cl}_{c_1}(A(c_1) \cap A_5(\{1, 3\})) &= \text{cl}_{c_1}(\{1, 3\}) = \{1, 3\}, \\ \text{cl}_{c_2}(A(c_2) \cap A_5(\{1, 3\})) &= \text{cl}_{c_2}(\{1, 5\}) = \{1, 4, 5\} \quad (\text{die Gerade in } \langle c_2 \rangle), \\ \text{cl}_{c_3}(A(c_3) \cap A_5(\{1, 3\})) &= \text{cl}_{c_3}(\{3\}) = \{3\}, \end{aligned}$$

also $M(5, \{1, 3\}) = \{1, 3\} \cup \{1, 4, 5\} \cup \{3\} = \{1, 3, 4, 5\} \in L'$. Da $\text{rg}(\{1, 3\}) = 2 < 3$ ist das Element zulässig nach Definition von L' . Außerdem ist $A(c_3) = \{2, 3, 4, 6\} \in L'$ nach Proposition 4.13.

Der Schnitt ergibt

$$\{2, 3, 4, 6\} \cap \{1, 3, 4, 5\} = \{3, 4\}.$$

Wir zeigen $\{3, 4\} \notin L'$: Aus $A_a(x) \subseteq M(a, x) = \{3, 4\}$ folgt $a \in \{3, 4\}$ und $A(x) \subseteq \{3, 4\}$. Da $\{3, 4\}$ kein Element von L_\times ist, kommen nur $x \in \{\mathbf{0}, \{3\}, \{4\}\}$ in Frage. Ist $A_a(x) = \{3, 4\}$ (d.h. $a = 3, x = \{4\}$ oder $a = 4, x = \{3\}$), so enthält $A_a(x) \cap A(c_3) = \{3, 4\}$ zwei Atome der Geraden $\{3, 4, 6\}$ und der Abschluss in c_3 zieht Atom 6 hinzu:

$$M(3, \{4\}) = M(4, \{3\}) = \{3, 4, 6\} \neq \{3, 4\}.$$

In den verbleibenden Fällen ($a \in \{3, 4\}, x \in \{\mathbf{0}, \{a\}\}$) ist $a \in A(x)$ oder $x = \mathbf{0}$, sodass $M(a, x) = A(a \vee x) = \{a\} \neq \{3, 4\}$. Also ist $\{3, 4\} \notin L'$.

L_\times ist jedoch vervollständigbar (Beispiel A.4 im Anhang).

4.2.2 Fixpunktmenge \tilde{L}

L' ist also kein atomarer Verband, da die \cap -Abgeschlossenheit verletzt ist. Die Ursache ist, dass L' Elemente T enthält, für die $T \cap A(c)$ in einem Coatom-Ideal kein Flat ist. Im obigen Beispiel ist $M(5, \{1, 3\}) = \{1, 3, 4, 5\}$ mit $\{1, 3, 4, 5\} \cap A(c_3) = \{3, 4\}$, was kein Flat in $\langle c_3 \rangle$ ist, da der Abschluss in $\langle c_3 \rangle$ die Gerade $\{3, 4, 6\}$ ergibt. Die Schnittbildung mit $A(c_3) = \{2, 3, 4, 6\}$ trifft genau dieses Nicht-Flat und erzeugt $\{3, 4\} \notin L'$. Wir verallgemeinern zunächst die Funktion M aus dem vorherigen Abschnitt:

Definition 4.17 (Coatomweise Erweiterung)

Sei L ein fast-geometrischer atomarer Verband. Für $T \subseteq A_L$ heißt

$$\tilde{M}(T) := \bigcup_{c \in C_L} \text{cl}_c(T) \quad (4.5)$$

die coatomweise Erweiterung von T .

Lemma 4.18 (Fixpunktcharakterisierung von \tilde{M})

$\tilde{M}(T) = T$ genau dann, wenn $T \cap A(c)$ für jedes $c \in C_L$ ein Flat in $\langle c \rangle$ ist.

Beweis.

“ \Leftarrow ”: Ist $T \cap A(c)$ ein Flat in $\langle c \rangle$ für jedes c , so gilt $\text{cl}_c(T) = T \cap A(c)$ und damit $\tilde{M}(T) = \bigcup_c \text{cl}_c(T) = \bigcup_c (T \cap A(c)) = T$.

“ \Rightarrow ”: Sei $\tilde{M}(T) = T$. Für jedes Coatom c gilt $\text{cl}_c(T) \subseteq \tilde{M}(T) = T$ und $\text{cl}_c(T) \subseteq A(c)$, also $\text{cl}_c(T) \subseteq T \cap A(c)$. Da stets $T \cap A(c) \subseteq \text{cl}_c(T)$ gilt, folgt $\text{cl}_c(T) = T \cap A(c)$, also ist $T \cap A(c)$ ein Flat in $\langle c \rangle$. \square

Aus der Definition von M in Definition 4.9 folgt, dass $M(a, x) = \tilde{M}(A_a(x))$ für alle $a \in A_L$ und $x \in L$ gilt. Die Werte von M in L' sind im Allgemeinen keine Fixpunkte von \tilde{M} , was die fehlende \cap -Abgeschlossenheit erklärt.

Wir definieren daher die Fixpunktmenge \tilde{L} , die nur Mengen enthält, deren Einschränkung auf jedes Coatom-Ideal ein Flat ist:

$$\tilde{L} = \left\{ T \subseteq A_L \mid \tilde{M}(T) = T \right\} \quad (4.6)$$

Die entscheidende Eigenschaft der Fixpunktmenge ist die \cap -Abgeschlossenheit, die L' fehlte:

Lemma 4.19 (\tilde{L} ist unter \cap abgeschlossen)

Für alle $S, T \in \tilde{L}$ gilt $S \cap T \in \tilde{L}$.

Beweis. Für jedes Coatom c gilt $(S \cap T) \cap A(c) = (S \cap A(c)) \cap (T \cap A(c))$. Da S und T Fixpunkte von \tilde{M} sind, sind $S \cap A(c)$ und $T \cap A(c)$ Flats in $\langle c \rangle$. Der Schnitt zweier Flats ist ein Flat (Satz 2.26), also ist $S \cap T$ ein Fixpunkt von \tilde{M} und damit in \tilde{L} . \square

Mit der \cap -Abgeschlossenheit der Fixpunkte von \tilde{M} können wir zeigen, dass \tilde{L} ein atomarer Verband ist:

Korollar 4.20 (\tilde{L} ist ein atomarer Verband)

(\tilde{L}, \subseteq) ist ein atomarer Verband mit Atomen $\{\{a\} \mid a \in A_L\}$.

Beweis. \emptyset und A_L sind Fixpunkte von \tilde{M} . Für jedes $a \in A_L$ ist $\{a\}$ ein Fixpunkt, da $\{a\} \cap A(c)$ für jedes Coatom c ein Flat ist. Mit Lemma 4.19 folgt die Behauptung aus Proposition 2.30. \square

Wir wollen auch in diesem Fall A als Ideal-Einbettung von L in \tilde{L} erkennen, um L in \tilde{L} wiederzufinden. Dazu führen wir das folgende Hilfslemma ein:

Lemma 4.21 ($A(l)$ ist \tilde{M} -Fixpunkt)

Für alle $l \in L$ ist $A(l)$ ein \tilde{M} -Fixpunkt.

Beweis. Für jedes Coatom $c \in C_L$ gilt $A(l) \cap A(c) = A(l \wedge c)$ nach Satz 2.26. Da $l \wedge c \in \langle c \rangle$ und $\langle c \rangle$ geometrisch ist, ist $A(l \wedge c)$ ein Flat in $\langle c \rangle$. \square

Proposition 4.22 (A ist eine Ideal-Einbettung von L in \tilde{L})

Die Abbildung $A : L \rightarrow \tilde{L}$, $l \mapsto A(l)$ ist eine Ideal-Einbettung.

Beweis.

Zu 1 (Einbettung): Da L atomar ist, folgt $l \leq l' \iff A(l) \subseteq A(l')$ nach Satz 2.28.

Zu 2 (Eins-Erhaltung): $A(\mathbf{1}_L) = A_L = \mathbf{1}_{\tilde{L}}$.

Zu 3 (Ideal-Erhaltung): Sei $T \in \tilde{L}$ mit $T \subseteq A(c)$ für ein Coatom c . Dann ist $T \cap A(c) = T$ ein Flat in $\langle c \rangle$, also $T = A(\vee T)$ mit $\vee T \in \langle c \rangle \subseteq L$. Damit $\langle A(c) \rangle_{\tilde{L}} \subseteq A(L)$. \square

Mit der Existenz einer Ideal-Einbettung und der Eigenschaft ein atomarer Verband zu sein, ist \tilde{L} ein stärkerer Kandidat für eine Vervollständigung von L als L' . Das folgende Beispiel zeigt jedoch, dass \tilde{L} im Allgemeinen keine Rangfunktion besitzt:

Beispiel 4.23 (\tilde{L} hat im Allgemeinen keine Rangfunktion (L_Δ))

Sei L_Δ der fast-geometrische Verband vom Rang 3 mit sechs Atomen 1, 2, 3, 4, 5, 6 und drei Coatomen

$$c_1 = \{1, 2, 3\}, \quad c_2 = \{3, 4, 5\}, \quad c_3 = \{1, 5, 6\},$$

wobei in jedem Coatom-Ideal $\langle c_i \rangle$ je zwei der drei Atome bereits c_i erzeugen. Die Coatome teilen sich paarweise genau ein Atom: $A(c_1) \cap A(c_2) = \{3\}$, $A(c_1) \cap A(c_3) = \{1\}$ und $A(c_2) \cap A(c_3) = \{5\}$. Damit ergibt sich eine dreiecksartige Struktur von L_Δ .

Die Elemente von L_Δ sind:

Rang	Elemente
0	\emptyset
1	$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$
2	$\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 5, 6\}$
3	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Eine Menge $T \subseteq A_{L_\Delta}$ ist genau dann ein Fixpunkt von \tilde{M} , wenn $|T \cap A(c_i)| \neq 2$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ gilt, da in jedem $\langle c_i \rangle$ die zweielementigen Teilmengen keine Flats sind.

Wir prüfen $\{2, 4, 6\}$ explizit: Es gilt $\{2, 4, 6\} \cap A(c_1) = \{2\}$, $\{2, 4, 6\} \cap A(c_2) = \{4\}$ und $\{2, 4, 6\} \cap A(c_3) = \{6\}$. Jeder dieser Schnitte ist einelementig und damit ein Flat in dem jeweiligen $\langle c_i \rangle$, also ist $\{2, 4, 6\}$ ein Fixpunkt.

In (\tilde{L}, \subseteq) existiert die maximale Kette

$$\emptyset \subsetneq \{2\} \subsetneq \{2, 4\} \subsetneq \{2, 4, 6\} \subsetneq A_{L_\Delta}$$

der Länge 4, aber auch die maximale Kette

$$\emptyset \subsetneq \{1\} \subsetneq \{1, 2, 3\} \subsetneq A_{L_\Delta}$$

der Länge 3. Da nicht alle maximalen Ketten die gleiche Länge haben, besitzt \tilde{L} keine Rangfunktion und ist insbesondere kein geometrischer Verband.

\tilde{L} löst das \cap -Problem von L' , enthält aber zu viele Elemente. Würden wir im letzten Beispiel entweder das Element $\{2, 4, 6\}$ oder die Elemente $\{2, 4\}$, $\{4, 6\}$ und $\{2, 6\}$ entfernen, so wäre die verbleibende Menge der Fixpunkte von \tilde{M} ein geometrischer Verband, der L als Ideal-Einbettung enthält. Die Frage ist daher, wie man aus \tilde{L} die "richtigen" Fixpunkte auswählt.

4.2.3 Behebende Fixpunkte L^*

Ein naheliegender Ansatz zur Auswahl der "richtigen" Fixpunkte aus \tilde{L} ergibt sich aus einer Beobachtung in L_Δ im letzten Beispiel 4.23: Um die Rangfunktion zu beheben, können wir den Fixpunkt $\{2, 4, 6\}$ entfernen. Dieses Element ist zwar stabil unter \tilde{M} , steht aber in keiner sinnvollen Rangstruktur zu den übrigen Elementen. Zugleich ist $\{2, 4, 6\}$ auch nicht notwendig, um die Atome paarweise unproblematisch zu machen, wir könnten es also entfernen, und die Atome würden weiterhin unproblematisch in der neuen Struktur sein. Die Idee ist daher, \tilde{L} auf diejenigen Fixpunkte einzuschränken, die notwendig sind, um alle problematischen Paare (a, x) zu beheben.

Definition 4.24 (Coatomweiser Abschluss \hat{M})

Sei L ein fast-geometrischer atomarer Verband und $T \subseteq A_L$. Der coatomweise Abschluss von T ist der kleinste \tilde{M} -Fixpunkt, der T enthält:

$$\hat{M}(T) := \bigcap \left\{ S \subseteq A_L \mid T \subseteq S \text{ und } \tilde{M}(S) = S \right\}. \quad (4.7)$$

Konkret können wir \hat{M} durch wiederholte Anwendung von \tilde{M} auf die Startmengen T erreichen:

Proposition 4.25 (Berechnung von \hat{M})

Für $T \subseteq A_L$ lässt sich $\hat{M}(T)$ durch iterierte Anwendung von \tilde{M} berechnen: Die Kette $T \subseteq \tilde{M}(T) \subseteq \tilde{M}^2(T) \subseteq \dots$ wird stationär und ihr Grenzwert ist $\hat{M}(T)$.

Beweis.

Stationarität: Für jedes $a \in T$ existiert ein Coatom c mit $a \leq c$, also $a \in \text{cl}_c(T) \subseteq \tilde{M}(T)$, d.h. $T \subseteq \tilde{M}(T)$. Per Induktion ist die Kette $\tilde{M}^n(T)$ aufsteigend und in A_L beschränkt, also stationär.

Grenzwert ist $\hat{M}(T)$: Das folgt mit der Stationarität und der Monotonie von \tilde{M} . Dass \tilde{M} monoton ist, sieht man so: Aus $T \subseteq S$ folgt $T \cap A(c) \subseteq S \cap A(c)$ für jedes Coatom c , damit $\vee^c T \leq \vee^c S$ und mit Proposition 2.20 auch $\text{cl}_c(T) \subseteq \text{cl}_c(S)$, also $\tilde{M}(T) \subseteq \tilde{M}(S)$. Sei nun F ein beliebiger Fixpunkt mit $T \subseteq F$. Per Induktion folgt $\tilde{M}^n(T) \subseteq F$ für alle n , da aus $\tilde{M}^n(T) \subseteq F$ mit der Monotonie $\tilde{M}^{n+1}(T) \subseteq \tilde{M}(F) = F$ folgt. Der stationäre Grenzwert ist also in jedem Fixpunkt über T enthalten und damit der kleinste. \square

Definition 4.26 (Behebender Fixpunkt M^* und L^*)

Sei L ein fast-geometrischer atomarer Verband. Der behebende Fixpunkt zu $(a, x) \in A_L \times L$ ist

$$M^*(a, x) := \hat{M}(A_a(x)). \quad (4.8)$$

Die Menge der behebenden Fixpunkte ist

$$L^* := \{\emptyset, A_L\} \cup \{M^*(a, x) \mid a \in A_L, x \in L, \text{rg}(x) < \text{rg}(\mathbf{1}) - 1\}. \quad (4.9)$$

L^* unterscheidet sich von L' also durch die Verwendung von M^* anstelle von M .

Lemma 4.27 ($L^* \subseteq \tilde{L}$)

Es gilt $L^* \subseteq \tilde{L}$.

Beweis. Jedes Element von L^* ist \emptyset , A_L oder von der Form $\hat{M}(T)$, und $\hat{M}(T)$ ist per Definition ein \tilde{M} -Fixpunkt und damit in \tilde{L} . \square

Lemma 4.28 ($L' \not\subseteq L^*$ und $L' \not\subseteq \tilde{L}$ im Allgemeinen)

Die Inklusionen $L' \subseteq L^*$ und $L' \subseteq \tilde{L}$ gelten im Allgemeinen nicht.

Beweis. In L_\times ist $M(5, \{1, 3\}) = \{1, 3, 4, 5\} \in L'$ (Beispiel 4.16), aber $\{1, 3, 4, 5\}$ ist kein Fixpunkt von \tilde{M} , da $\tilde{M}(\{1, 3, 4, 5\}) = \{1, 3, 4, 5, 6\} \neq \{1, 3, 4, 5\}$. Daher ist $\{1, 3, 4, 5\} \notin \tilde{L}$ und mit Lemma 4.27 auch $\{1, 3, 4, 5\} \notin L^*$. \square

Lemma 4.29 (\hat{M} für Elemente unter einem gemeinsamen Coatom)

Sei $x \in L$ und $a \in A_L$ mit $x \vee a < \mathbf{1}$. Dann gilt $\hat{M}(A(x) \cup \{a\}) = A(x \vee a)$.

Beweis. Nach Definition von \tilde{M} gilt $\tilde{M}(A(x) \cup \{a\}) = M(a, x)$. Da $x \vee a < \mathbf{1}$, liefert Lemma 4.11: $\tilde{M}(A(x) \cup \{a\}) = A(x \vee a)$. Nach Lemma 4.21 ist $A(x \vee a)$ ein \tilde{M} -Fixpunkt und es folgt $\hat{M}(A(x) \cup \{a\}) = \tilde{M}(A(x) \cup \{a\}) = A(x \vee a)$. \square

Lemma 4.30 (\hat{M} unter einem Element)

Sei $T \subseteq A_L$ und $q \in L$ mit $q < \mathbf{1}$. Ist $\hat{M}(T) \subseteq A(q)$, so gilt $\vee T \leq q$ und $\hat{M}(T) = A(\vee T)$.

Beweis. Aus $T \subseteq \hat{M}(T) \subseteq A(q)$ folgt $\vee T \leq q < \mathbf{1}$. Da $A(\vee T)$ nach Lemma 4.21 ein \tilde{M} -Fixpunkt ist und $T \subseteq A(\vee T)$, folgt $\hat{M}(T) \subseteq A(\vee T)$. Umgekehrt existiert ein Coatom $c \geq q$, und $\hat{M}(T) \cap A(c) = \hat{M}(T)$ ist ein Flat in $\langle c \rangle$, das T enthält. \square

Da $M^*(a, x) = \hat{M}(A_a(x))$ lassen sich diese Lemmata direkt auf M^* übertragen. Wir sehen, dass wir L auch in der reduzierten Menge $L^* \subseteq \tilde{L}$ wiederfinden:

Proposition 4.31 (A ist eine Ideal-Einbettung von L in L^*)

Die Abbildung $A : L \rightarrow L^*$, $l \mapsto A(l)$ ist eine Ideal-Einbettung.

Beweis. Für $a \vee x < \mathbb{1}$ gilt $M^*(a, x) = M(a, x)$ nach Lemma 4.29. Unter einem Coatom c stimmen L^* und L' daher überein, und die Aussage folgt aus Proposition 4.13. \square

Wir verifizieren, dass L^* die Probleme aus L_\times (Beispiel 4.16) und L_Δ (Beispiel 4.23) nicht aufweist:

Beispiel 4.32 (L^* für L_\times)

Wir betrachten den Verband L_\times aus Beispiel 4.16 mit $A_L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und den Coatomen $c_1 = \{1, 2, 3\}$, $c_2 = \{1, 2, 4, 5\}$, $c_3 = \{2, 3, 4, 6\}$.

Das Element $M(5, \{1, 3\}) = \{1, 3, 4, 5\}$ ist kein Fixpunkt von \tilde{M} , da $\{1, 3, 4, 5\} \cap A(c_3) = \{3, 4\}$ kein Flat in $\langle c_3 \rangle$ ist (die Gerade $\{3, 4, 6\}$ erzwingt Atom 6). Wir berechnen $M^*(5, \{1, 3\})$ durch wiederholtes Anwenden von \tilde{M} :

$$\begin{aligned}\tilde{M}^0 &= \{1, 3, 5\}, \\ \tilde{M}^1 &= \tilde{M}(\{1, 3, 5\}) = \{1, 3, 4, 5\},\end{aligned}$$

da $\text{cl}_{c_2}(\{1, 5\}) = \{1, 4, 5\}$ das Atom 4 hinzufügt. Nun ist $\{1, 3, 4, 5\} \cap A(c_3) = \{3, 4\}$ kein Flat, und damit $\{1, 3, 4, 5\}$ kein Fixpunkt und wir wenden \tilde{M} erneut an:

$$\tilde{M}^2 = \tilde{M}(\{1, 3, 4, 5\}) = \{1, 3, 4, 5, 6\},$$

da $\text{cl}_{c_3}(\{3, 4\}) = \{3, 4, 6\}$ das Atom 6 hinzufügt. Die Menge $\{1, 3, 4, 5, 6\}$ ist ein Fixpunkt, da die Schnitte mit den Coatomen $\{1, 3\}$, $\{1, 4, 5\}$ und $\{3, 4, 6\}$ jeweils Flats sind. Es ist also $M^*(5, \{1, 3\}) = \{1, 3, 4, 5, 6\}$.

Im Unterschied zu L' enthält L^* nicht das Element $\{1, 3, 4, 5\}$, sondern dessen Fixpunkt-Abschluss $\{1, 3, 4, 5, 6\}$. Damit entfällt der problematische Schnitt und es ist:

$$\{2, 3, 4, 6\} \cap \{1, 3, 4, 5, 6\} = \{3, 4, 6\} \in L.$$

In L' hingegen war $\{2, 3, 4, 6\} \cap \{1, 3, 4, 5\} = \{3, 4\} \notin L'$.

Eine vollständige Berechnung aller $M^*(a, x)$ ergibt, dass L^* mit dem geometrischen Verband \hat{L} aus Beispiel A.4 im Anhang übereinstimmt. Insbesondere ist L^* unter \cap abgeschlossen.

Beispiel 4.33 (L^* für L_Δ)

Wir betrachten den Verband L_Δ aus Beispiel 4.23 mit $A_L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und den drei Coatomen $c_1 = \{1, 2, 3\}$, $c_2 = \{3, 4, 5\}$, $c_3 = \{1, 5, 6\}$, wobei in jedem $\langle c_i \rangle$ je zwei der drei Atome bereits c_i erzeugen.

Das problematische Element $\{2, 4, 6\} \in \tilde{L}$ ist nicht in L^* enthalten. Um $\{2, 4, 6\}$ als $M^*(a, x)$ zu erhalten, müsste die Startmenge $A_a(x) = A(x) \cup \{a\}$ mindestens zwei Elemente aus $\{2, 4, 6\}$ enthalten. Die Atome 2, 4, 6 teilen sich jedoch paarweise kein Coatom. Für jedes $x \in L$ für L^* zulässige x mit $\text{rg}(x) < 2 = \text{rg}(\mathbb{1}) - 1$ enthält $A(x)$ höchstens ein Atom, also enthält $A_a(x)$ höchstens zwei Atome. Eine Startmenge wie $\{2, 4\}$ ist aber bereits ein Fixpunkt von \tilde{M} (da $|\{2, 4\} \cap A(c_i)| \leq 1$ für alle i), und die Iteration fügt kein weiteres Atom hinzu. Somit tritt $\{2, 4, 6\}$ als behobender Fixpunkt keines problematischen Paares auf und daher $\{2, 4, 6\} \notin L^*$.

Eine vollständige Berechnung zeigt, dass L^* ein geometrischer Verband ist.

Dass L^* das Problem von L' in L_\times (Beispiel 4.16) und das Problem von \tilde{L} in L_Δ (Beispiel 4.23) behebt, ist nicht überraschend, da seine Konstruktion genau durch sie motiviert wurde.

Leider zeigt sich, dass L^* das Rangproblem von \tilde{L} nicht vollständig behebt. Es ist möglich, dass die \tilde{M} -Iteration vom selben Ausgangspunkt $A(d)$ je nach hinzugefügtem Atom auf unterschiedlich große Fixpunkte stößt. Konkret kann es Atome a, α geben, für die $M^*(\alpha, d)$ echt in $M^*(a, d)$ enthalten ist und $A(d) \leq M^*(\alpha, d) \subsetneq M^*(a, d)$ gilt. Dann erzeugt die maximale Kette durch $M^*(\alpha, d)$ eine längere Kette als die durch ein Coatom-Ideal, und L^* besitzt keine Rangfunktion.

Beispiel 4.34 (Scheitern der Bedeckung in L^* (L_γ))

Wir betrachten den Verband L_γ , den wir aus L_\times (Beispiel 4.16) durch Hinzufügen eines Atoms 7 und eines vierten Coatoms erhalten. Sei L_γ der fast-geometrische Verband mit $A_{L_\gamma} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ und den vier Coatomen

$$c_1 = \{1, 2, 3\}, \quad c_2 = \{1, 2, 4, 5\}, \quad c_3 = \{2, 3, 4, 6\}, \quad c_4 = \{2, 5, 6, 7\},$$

wobei $\langle c_1 \rangle \cong B_3$ der Boolesche Verband auf $\{1, 2, 3\}$ ist und $\langle c_2 \rangle$ die nicht-triviale Gerade $\{1, 4, 5\}$, $\langle c_3 \rangle$ die nicht-triviale Gerade $\{3, 4, 6\}$ und $\langle c_4 \rangle$ die nicht-triviale Gerade $\{5, 6, 7\}$ besitzen.

Wir berechnen $M^*(5, \{1, 3\})$ iterativ:

$$\begin{aligned} \tilde{M}^0 &= \{1, 3, 5\}, & & \\ \tilde{M}^1 &= \{1, 3, 4, 5\}, & \text{da } \text{cl}_{c_2}(\{1, 5\}) &= \{1, 4, 5\}, \\ \tilde{M}^2 &= \{1, 3, 4, 5, 6\}, & \text{da } \text{cl}_{c_3}(\{3, 4\}) &= \{3, 4, 6\}, \\ \tilde{M}^3 &= \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}, & \text{da } \text{cl}_{c_4}(\{5, 6\}) &= \{5, 6, 7\}. \end{aligned}$$

Eine Überprüfung zeigt, dass $\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ein Fixpunkt ist.

Also $M^*(5, \{1, 3\}) = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Atom 5 löst hier eine Kettenreaktion über drei Coatome aus: c_2 erzwingt Atom 4, das über c_3 Atom 6 erzwingt, das über c_4 Atom 7 erzwingt.

Andererseits ist $\{1, 3, 7\}$ bereits ein Fixpunkt von \tilde{M} :

$$\begin{aligned} \{1, 3, 7\} \cap A(c_1) &= \{1, 3\} & (\text{Flat in } \langle c_1 \rangle, \text{ da } \langle c_1 \rangle \cong B_3), \\ \{1, 3, 7\} \cap A(c_2) &= \{1\} & (\text{Flat}), \\ \{1, 3, 7\} \cap A(c_3) &= \{3\} & (\text{Flat}), \\ \{1, 3, 7\} \cap A(c_4) &= \{7\} & (\text{Flat}). \end{aligned}$$

Mit $a' = 7$ und $x' = \{1, 3\}$ ergibt sich $M^*(7, \{1, 3\}) = \tilde{M}^\infty(\{1, 3, 7\}) = \{1, 3, 7\} \in L^*$.

Damit enthält L^* die Kette

$$\emptyset \subsetneq \{1\} \subsetneq \{1, 3\} \subsetneq \{1, 3, 7\} \subsetneq \{1, 3, 4, 5, 6, 7\} \subsetneq A_L$$

der Länge 5, während jede maximale Kette durch ein Coatom-Ideal die Länge 4 hat. Also besitzt L^* keine Rangfunktion.

L_γ unterscheidet sich strukturell von L_\times . In L_\times existiert ebenfalls eine Cross-Coatom-Kaskade ($5 \rightarrow 4$ über c_2 , dann $4 \rightarrow 6$ über c_3), aber sie hat nur Länge 2. Das Endatom 6 dieser Kaskade ist über die Gerade $\{3, 4, 6\}$ in c_3 noch mit dem Startatom 3 verbunden. Daher ist $\{1, 3, 6\}$ kein \tilde{M} -Fixpunkt: $\{3, 6\} \cap A(c_3) = \{3, 6\}$ schließt in $\langle c_3 \rangle$ zur Geraden $\{3, 4, 6\}$ ab. Es gibt keinen Fixpunkt echt zwischen $\{1, 3\}$ und dem Kaskadenresultat $\{1, 3, 4, 5, 6\}$. Das Endatom 7 teilt mit den Startatomen 1 und 3 kein Coatom, in dem eine nicht-triviale Gerade sie verbindet, daher ist $\{1, 3, 7\}$ ein \tilde{M} -Fixpunkt.

Der Verband L_γ ist allerdings vervollständigbar (Beispiel A.5 im Anhang).

Dass auch L^* im Allgemeinen keine Rangfunktion besitzt, motiviert die Suche nach einem Verfahren, das die Rangfunktion per Konstruktion kontrolliert. In Abschnitt 4.3 stellen wir notwendige Bedingungen für eine solche Vervollständigung auf, die wir in einem Konstruktionsvorschlag L^+ systematisch berücksichtigen.

4.3 Notwendige Bedingungen

Wir halten zunächst eine zentrale Anforderung an jede Vervollständigung fest, die keine neuen Atome einführt. Sei L° eine Vervollständigung von L mit $A_{L^\circ} = \varphi(A_L)$. Dann können wir wegen der Atomarität L° als Teilmenge von 2^{A_L} auffassen, mit Inklusion als Ordnung und \cap als Infimum. Die Einbettung von L in L° ist die Abbildung $A: L \rightarrow L^\circ$, $l \mapsto A(l)$. Alle Konstruktionen dieser Arbeit erfüllen diese Voraussetzung.

Satz 4.35 (Fixpunktbedingung für Vervollständigungen)

Sei L° eine Vervollständigung von (L, \leq) mit $A_{L^\circ} = A_L$. Dann gilt $L^\circ \subseteq \tilde{L}$.

Beweis. Sei $p \in L^\circ$ und $c \in C_L$. Nach Korollar 2.47 gilt $\langle A(c) \rangle_{L^\circ} = A(\langle c \rangle_L)$. Damit ist $p \cap A(c) = p \wedge_{L^\circ} A(c) = A(l)$ für ein $l \in \langle c \rangle_L$, also ein Flat in $\langle c \rangle_L$. Da dies für jedes $c \in C_L$ gilt, folgt $p \in \tilde{L}$ nach Lemma 4.18. \square

Korollar 4.36 (Behebende Fixpunkte als untere Schranke)

Sei L° eine Vervollständigung von (L, \leq) mit $A_{L^\circ} = A_L$ und $d \in P(a)$ für ein Atom $a \in A_L$. Sei $q := A(d) \vee_{L^\circ} \{a\}$. Dann gilt:

1. $M^*(a, d) \subseteq q$ und $\text{rg}_{L^\circ}(q) = \text{rg}(d) + 1$.
2. Es gibt kein $p \in L^\circ$ mit $A_a(d) \subseteq p \subsetneq M^*(a, d)$.

Beweis.

Zu (1): Da $a \notin A(d)$ und L° geometrisch ist, gilt $A(d) \triangleleft q$ und $\text{rg}_{L^\circ}(q) = \text{rg}(d) + 1$. Es gilt $A_a(d) \subseteq q \in \tilde{L}$ nach Satz 4.35. Da $M^*(a, d) = \hat{M}(A_a(d))$ der kleinste \hat{M} -Fixpunkt über $A_a(d)$ ist, folgt $M^*(a, d) \subseteq q$.

Zu (2): $p \in \tilde{L}$ nach Satz 4.35, also wäre p ein \hat{M} -Fixpunkt über $A_a(d)$, im Widerspruch zur Minimalität von $\hat{M}(A_a(d))$. \square

Wir möchten als Abschluss einen Konstruktionsvorschlag vorstellen, der die festgestellten Anforderungen systematisch berücksichtigt und auf allen Beispielen dieser Arbeit eine Vervollständigung liefert. Wir werden dessen Eigenschaften jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht vollständig analysieren.

Wir verfolgen einen stufenweisen Aufbau, der den Rang per Konstruktion kontrolliert. Sei L_k^+ die Elemente von Rang k in der gesuchten Erweiterung L^+ . Satz 4.35 und Korollar 4.36 liefern notwendige Bedingungen für eine jede solche Vervollständigung:

- (i) $L_k^+ \subseteq \tilde{L}$ (Satz 4.35).
- (ii) Für alle $a \in A_L$ und $d \in P(a)$ mit $\text{rg}(d) = k - 1$ enthält L_k^+ ein Element q mit $M^*(a, d) \subseteq q$ (Korollar 4.36).

Aus der Notwendigkeit einer Rangfunktion folgt:

- (iii) Für $p, q \in L_k^+$ mit $p \neq q$ gilt $p \cap q \in L_{<k}^+$.

Damit L in L^+ wiedergefunden werden kann, müssen alle Atome von L auf Rang 1 liegen und das Einselement erhalten bleiben:

- (iv) $L_0^+ = \{\emptyset\}$, $L_1^+ = \{\{a\} \mid a \in A_L\}$ und $L_{\text{rg}(1)}^+ = \{A_L\}$.

Wir definieren L^+ als die Vereinigung der Stufen $L_0^+, L_1^+, \dots, L_{\text{rg}(\mathbb{1})}^+$.

Aus diesen Punkten leiten wir eine mögliche Konstruktion von L^+ ab:

Definition 4.37 (Rang-gesteuerte Erweiterung L^+)

Sei L ein fast-geometrischer atomarer Verband mit $\text{rg}(\mathbb{1}) \geq 3$. Wir definieren induktiv

$$\begin{aligned} L_0^+ &:= \{\emptyset\}, \\ L_1^+ &:= \{\{a\} \mid a \in A_L\}, \end{aligned}$$

und für $1 \leq k \leq \text{rg}(\mathbb{1}) - 2$ die Kandidatenmenge

$$K_{k+1} := \left\{ \hat{M}(T \cup \{a\}) \mid T \in L_k^+, a \in A_L \setminus T \right\}. \quad (4.10)$$

Ist $K_{k+1} = \emptyset$, so bricht die Konstruktion ab. Andernfalls filtern wir K_{k+1} iterativ: Solange ein Paar $T_1, T_2 \in K_{k+1}$ mit $T_1 \cap T_2 \notin L_{\leq k}^+$ existiert, ersetze T_1 und T_2 durch ihren gemeinsamen Abschluss:

$$K_{k+1} \leftarrow (K_{k+1} \setminus \{T_1, T_2\}) \cup \{\hat{M}(T_1 \cup T_2)\}. \quad (4.11)$$

Die Stufe $k + 1$ ist die gefilterte Kandidatenmenge:

$$L_{k+1}^+ := K_{k+1}. \quad (4.12)$$

Die rang-gesteuerte Erweiterung ist

$$L^+ := L_{\leq \text{rg}(\mathbb{1})-1}^+ \cup \{A_L\}. \quad (4.13)$$

Der Filter in (4.11) behandelt zwei Fälle: Sind T_1 und T_2 vergleichbar ($T_1 \subsetneq T_2$), so ist $\hat{M}(T_1 \cup T_2) \in \{T_1, T_2\}$, und der Merge entfernt effektiv das kleinere Element. Sind T_1 und T_2 unvergleichbar mit $T_1 \cap T_2 \notin L_{\leq k}^+$, so ersetzt der Merge beide durch den gemeinsamen Abschluss $\hat{M}(T_1 \cup T_2) \supseteq T_1 \cup T_2$, und der problematische Schnitt $T_1 \cap T_2$ entfällt. Der Filterprozess terminiert, da $|K_{k+1}|$ in jedem Schritt um mindestens eins sinkt.

Die Konstruktion L^+ adressiert die notwendigen Bedingungen wie folgt: Die Kandidatenmenge (4.10) enthält zu Beginn und nach jedem Filterschritt nur \hat{M} -Fixpunkte und stellt sicher, dass jede Stufe die geforderten behebbenden Elemente oder eine Obermenge dieser enthält. Der \cap -Filter (4.11) erzwingt die \cap -Abgeschlossenheit innerhalb jeder Stufe sowie Inklusionsfreiheit.

Eine weitere potentielle Stärke von L^+ gegenüber den bisherigen Konstruktionen L' und L^* ist die direkte Adressierung von Submodularitätsverletzungen neuer Elemente. L' und L^* verwenden nur die Elemente von L als Ausgangspunkte und beheben damit nur die Submodularitätsverletzungen der ursprünglichen Elemente systematisch. Die neu hinzugefügten Elemente können ihrerseits neue Verletzungen erzeugen, die erst in einem weiteren Durchlauf behoben werden. Jeder Schritt hebt die untere Schranke des Rangs problematischer Elemente um eins an, sodass (falls die Verfahren nicht in Probleme laufen) unter Umständen erst nach mehreren Iterationen ein geometrischer Verband entsteht. L^+ hingegen verwendet seine eigenen Erzeugnisse als Ausgangspunkte (L_k^+ statt L_k) und adressiert Verletzungen auf jeder Stufe direkt. Die Konstruktion liefert (sofern auch sie nicht in Probleme läuft) in einem einzigen Schritt einen geometrischen Verband.

Mehrere Punkte bleiben offen, die wir im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter untersuchen:

1. *\cap -Abgeschlossenheit über Stufen hinweg.* Der \cap -Filter behandelt nur Paare innerhalb derselben Stufe. Die \cap -Abgeschlossenheit über verschiedene Stufen hinweg (d.h. $S \cap T \in L^+$ für $S \in L_j^+$ und $T \in L_k^+$ mit $j \neq k$) wird nicht explizit sichergestellt. Dies wäre bereits hinreichend für die Atomarität von L^+ . Dies kann möglicherweise behoben werden, indem im Filterkriterium T_2 aus allen Stufen $K_{k+1} \cup L_{\leq k}^+$ statt nur K_{k+1} gewählt wird. Man müsste jedoch das Terminieren des modifizierten Filters nachweisen, was vermutlich so zu sehen ist, dass entweder $|K_{k+1}|$ schrumpft oder T_1 durch ein echt größeres Element ersetzt wird, also näher an A_L rückt, sodass es nur endlich viele Schritte geben kann.
2. *Submodularität.* Für jedes $T \in L_k^+$ und $a \in A_L \setminus T$ muss $T \leq T \vee \{a\}$ in L^+ gelten. Die Kandidatenmenge K_{k+1} enthält zu Beginn für jedes solche Paar ein behebendes Element $\hat{M}(T \cup \{a\})$. Der Filter kann solche Elemente entfernen, fügt dabei aber stets ein Element $\hat{M}(T_1 \cup T_2) \supseteq \hat{M}(T \cup \{a\})$ hinzu. Damit bleibt nach jedem Filterschritt mindestens ein Element q in K_{k+1} erhalten, das $\hat{M}(T \cup \{a\})$ enthält. Ein Element zwischen T und q kann nur in L_k^+ oder L_{k+1}^+ liegen. Im ersten Fall wird es durch den \cap -Filter systematisch ausgeschlossen. Im zweiten Fall ist es selbst ein Element aus L_{k+1}^+ direkt über T . Ein formaler Beweis steht jedoch aus.
3. *Coatom-Einbettung von L .* Die Abbildung $A: L \rightarrow L^+$ muss eine Coatom-Einbettung sein. Bricht die Konstruktion auf einer Stufe $k+1 < \text{rg}(\mathbf{1}) - 1$ ab, so ist $L_k^+ = \{A_L\}$, d.h. A_L wurde auf einer zu niedrigen Stufe erreicht. In diesem Fall können die Coatom-Bilder $A(c)$ für $c \in C_L$ nicht auf Stufe $\text{rg}(\mathbf{1}) - 1$ liegen, und die Coatom-Einbettung scheitert. Ob dieser Fall eintreten kann, ist offen.
4. *Determinismus.* Die Reihenfolge der Merges im \cap -Filter ist nicht festgelegt. Ob das Ergebnis unabhängig von der Reihenfolge ist, ist nicht klar.

Sollten die Ansätze aus Punkten (1) und (2) funktionieren, so wäre L^+ schon geometrisch. In diesem Fall reduziert sich (3) auf die folgende Frage: Gilt $A(l) \in L_k^+$ für alle $l \in L$ mit $\text{rg}(l) = k$, kann dann der Filter ein Element $A(a \vee l) = M^*(a, l)$ mit $a \vee l < \mathbf{1}$ aus den Kandidaten K_{k+1} entfernen?

Auf allen Beispielen dieser Arbeit (einschließlich L_Δ , L_\times und L_γ) liefert L^+ einen geometrischen Verband, der eine Vervollständigung von L ist. Ein Gegenbeispiel ist dem Autor nicht bekannt.

5 Explorationswerkzeug

Zur Unterstützung bei der Anfertigung dieser Arbeit wurde eine interaktive Webanwendung entwickelt, die das Konstruieren, Visualisieren und Untersuchen von Verbänden und Halbordnungen erleichtert. Das Werkzeug dient dazu, Hypothesen zu testen und Beispiele zu erkunden sowie Grafiken zu generieren, die in die Arbeit aufgenommen werden. Der Quellcode ist unter <https://github.com/christopher-rossbach/lattice-ui> verfügbar, eine lauffähige Version der Anwendung unter <https://lattice-ui.crossbach.de>. Dieses Kapitel gibt einen kurzen Überblick über die Funktionsweise der Anwendung.

5.1 Überblick

Die Anwendung stellt eine grafische Oberfläche bereit, in der Hasse-Diagramme interaktiv bearbeitet werden können. Jeder Graph wird als Hasse-Diagramm dargestellt, dessen Knoten den Elementen und dessen Kanten den Bedeckungsrelationen entsprechen (vgl. Abschnitt 2.1.3). Die Knoten sind vertikal nach ihrem Rang angeordnet, so dass x unterhalb von y liegt, wenn $x < y$ gilt.

Obwohl die Anwendung auf Verbände ausgerichtet ist, können in ihr auch Hasse-Diagramme allgemeinerer endlicher Halbordnungen konstruiert werden, sofern sich deren Elemente auf feste Rangstufen verteilen lassen. Ob ein konstruiertes Diagramm tatsächlich einen Verband darstellt, lässt sich mit dem weiter unten beschriebenen Überprüfungssystem feststellen.

Die Oberfläche zeigt zwei solche Graphen nebeneinander an, einen primären und einen sekundären Verband, was den direkten Vergleich zweier Strukturen ermöglicht. Zum Beispiel der primäre Verband und das Ergebnis einer Nutzerfunktion, z.B. die Vervollständigung nach einem der vorgestellten Verfahren. Rechts neben den Graphen befindet sich ein Seitenbereich mit Überprüfungen, Nutzerfunktionen und benutzerdefinierten Hilfsfunktionen. Auf schmalen Bildschirmen wird dieser Bereich unterhalb der Graphen angezeigt oder unter Umständen stark gestaucht. In diesem Fall empfiehlt es sich, die Zoomstufe des Browsers zu verringern.

5.2 Bearbeitung von Verbänden

Die Struktur eines Verbands lässt sich in der Anwendung durch folgende Operationen verändern.

Elemente und Relationen

Neue Elemente werden durch Doppelklicken einem bestimmten Rang hinzugefügt. Umgekehrt können ausgewählte Elemente mit der Entfernen-Taste gelöscht werden, wobei Minimum und Maximum geschützt sind und nicht entfernt werden können.

Bedeckungsrelationen zwischen zwei Elementen werden durch Anklicken der zugehörigen Knoten hinzugefügt oder durch Anklicken einer bestehenden Kante gelöscht.

Knoten können horizontal verschoben werden, um die Übersichtlichkeit des Diagramms zu verbessern, ohne die Struktur des Verbands zu verändern. Darüber hinaus können Knoten mit individuellen Farben oder benutzerdefinierten Bezeichnungen versehen werden, wobei in $\$. . \$$ eingeschlossene mathematische Notation mittels L^AT_EX in den Beschriftungen unterstützt wird.

Ränge

Neben einzelnen Elementen können auch ganze Ränge hinzugefügt oder entfernt werden. Dabei wird stets der oberste Rang (direkt unter dem Maximum) eingefügt bzw. entfernt. Das Maximum wird entsprechend nach oben oder unten verschoben.

Auswahl von Elementen

Durch Klicken auf einen Knoten lässt sich dieser auswählen. Mit Modifikatortasten stehen drei erweiterte Auswahlmodi zur Verfügung:

- **Strg+Klick:** Schaltet die Auswahl des angeklickten Knotens um, d.h. fügt ihn zur bestehenden Auswahl hinzu oder entfernt ihn daraus.
- **Shift+Klick:** Wählt das Hauptideal $\langle x \rangle$ des angeklickten Knotens x aus, also x selbst sowie alle Elemente y mit $y \leq x$.
- **Alt+Klick:** Wählt den Aufwärtsabschluss (Filter) $\{y \in L \mid x \leq y\}$ des angeklickten Knotens x aus, also x selbst sowie alle Elemente y mit $x \leq y$.
- **Shift+Ziehen:** Spannt ein Auswahlrechteck auf, das alle darin liegenden Knoten auswählt.

Diese Auswahlmodi erleichtern es, strukturell zusammenhängende Teilmengen eines Verbands schnell zu markieren, etwa um sie anschließend einzufärben oder gemeinsam zu verschieben.

Knotenverschmelzung

Zwei Elemente desselben Rangs können miteinander verschmolzen werden. Dazu wird der erste Knoten per Rechtsklick markiert (er wird orange hervorgehoben) und anschließend der zweite Knoten angeklickt. Dabei werden alle Bedeckungsrelationen des ersten Knotens auf den zweiten übertragen, und der erste Knoten wird entfernt. Diese Operation ist nützlich, um aus einer Konstruktion, die zunächst aus mehreren Schritten besteht, einen kompakteren Verband zu gewinnen.

5.3 Überprüfungen und Nutzerfunktionen

Ein zentrales Merkmal der Anwendung ist ein erweiterbares System aus *Überprüfungen*, *Nutzerfunktionen* und *Hilfsfunktionen*. Alle drei werden in JavaScript formuliert und haben Zugriff auf dieselben eingebauten Hilfsfunktionen, unterscheiden sich jedoch in ihrer Ausführungsweise und ihrem Zweck. Die Anwendung wird mit einer Reihe vordefinierter Überprüfungen, Nutzerfunktionen und Hilfsfunktionen ausgeliefert, die die in dieser Arbeit vorgestellten Konstruktionen und Verbandsigenschaften abdecken.

Eingebaute Hilfsfunktionen

Für die Formulierung von Überprüfungen und Nutzerfunktionen stellt die Anwendung eine Reihe von eingebauten Hilfsfunktionen bereit, die die wichtigsten Verbandsoperationen abdecken:

- Strukturabfragen: `rank(x)`, `covers(x)`, `coveredBy(x)`, `nodes`, `selected`. Die Funktion `rank(x)` gibt die Stufe zurück, auf der das Element im Hasse-Diagramm angezeigt wird, auch wenn der Graph keine Rangfunktion im Sinne von Definition 2.39 besitzt.
- Ordnungsrelationen: `lt(x,y)`, `leq(x,y)`, `gt(x,y)`, `geq(x,y)` (berechnet über die transitive Hülle).
- Verbandsoperationen: `sup(...)` für \vee , `inf(...)` für \wedge .
- Ausgezeichnete Elemente: `zero (0)`, `one (1)`, `atoms(x) (A(x))`, `coAtoms(x)`, `ideal(x) (<x>)`, `filter(x)`.
- Mengenoperationen: `cup`, `cap`, `minus`, `isSubset`, `setEquals`, `subsets`.
- Konstruktion: `fromSetSystem(sets)`, `addNode`, `connect`, `disconnect`.
- Graphsteuerung: `pri`, `sec` (Hilfsfunktionen des jeweils anderen Graphen), `priView.show(...)`, `secView.show(...)` (Graph ersetzen).
- Farben: `color(x)`, `setColor(x, farbe)`, `colors`.

Überprüfungen

Eine Überprüfung ist ein JavaScript-Fragment, das auf jedem der beiden Graphen separat ausgeführt wird und entweder besteht (Rückgabewert `null`) oder eine Fehlermeldung zurückgibt. Überprüfungen dienen dazu, Fehler im konstruierten Diagramm unmittelbar zu erkennen und Voraussetzungen von Sätzen automatisch zu prüfen. Typische Anwendungen sind:

- Prüfen, ob das Hasse-Diagramm überhaupt einem Verband entspricht, d.h. ob für je zwei Elemente Supremum und Infimum existieren.
- Prüfen, ob ein Verband *atomar* ist, d.h. ob jedes Element Supremum einer Menge von Atomen ist.
- Prüfen, ob ein Verband *submodular* ist, d.h. ob die Rangfunktion `rg` die Ungleichung $rg(x) + rg(y) \geq rg(x \wedge y) + rg(x \vee y)$ erfüllt.

- Prüfen, ob ein Verband *fast-geometrisch* oder *geometrisch* ist (atomar und submodular).

Überprüfungen können entweder bei jeder Änderung des Graphen automatisch ausgeführt werden (*Auto-run*) oder manuell per Klick gestartet werden. Bei sehr großen Graphen empfiehlt es sich, die automatische Auswertung zu deaktivieren und Überprüfungen manuell auszuführen. Die Ergebnisse aller Überprüfungen samt Laufzeit werden direkt in der Oberfläche angezeigt.

Die folgende Überprüfung testet beispielsweise, ob der konstruierte Graph atomar ist:

```
for (const x of nodes) {
  const join = sup(...atoms(x));
  if (join !== x)
    return `${x} != sup(atoms(${x})) = ${join}`;
}
return null;
```

Für jedes Element x wird geprüft, ob $x = \vee A(x)$ gilt. Falls nicht, gibt die Überprüfung eine Fehlermeldung mit dem betroffenen Element zurück.

Nutzerfunktionen

Nutzerfunktionen sind ebenfalls in JavaScript geschriebene Codeblöcke, die jedoch nicht für die automatische Ausführung bei Graphänderungen vorgesehen sind. Sie werden ausschließlich manuell per Klick gestartet und eignen sich für aufwändigere Berechnungen oder strukturverändernde Operationen. Typische Beispiele sind eine Funktion, die ausgewählte Elemente mit einer bestimmten Farbe einfärbt, oder eine Funktion, die den primären Graphen ausliest, daraus einen neuen Graphen konstruiert und diesen als sekundären Graphen darstellt.

Die folgende Nutzerfunktion berechnet beispielsweise die Fixpunktmenge \tilde{L} des primären Graphen und zeigt das Ergebnis als sekundären Graphen an:

```
const fixed = subsets(atoms(one()))
  .filter(T => setEquals(M_tilde(T), T));
const fixedGraph = fromSetSystem(fixed);
return secView.show(fixedGraph);
```

Die Funktion bestimmt alle Teilmengen der Atome, die Fixpunkte von \tilde{M} sind, erzeugt daraus mit `fromSetSystem` ein Mengensystem geordnet nach Inklusion und stellt es im sekundären Graphen dar. Die dabei verwendete Hilfsfunktion `M_tilde` ist eine benutzerdefinierte Hilfsfunktion, die \tilde{M} aus Definition 4.17 implementiert.

Die Anwendung wird mit Nutzerfunktionen für die Vervollständigungsverfahren L' , \tilde{L} , L^* und L^+ aus Kapitel 4 ausgeliefert. Diese Funktionen arbeiten jeweils auf dem selektierten Graphen (primär oder sekundär) und zeigen das Ergebnis im sekundären Graphen an. So lässt sich beispielsweise ein fast-geometrischer Verband im primären Graphen konstruieren, der primäre Graph selektieren und L' anwenden. Anschließend kann der sekundäre Graph selektiert und L' erneut angewendet werden, um die zweite Iteration von L' zu betrachten.

Benutzerdefinierte Hilfsfunktionen

Zusätzlich zu den eingebauten Hilfsfunktionen können eigene Hilfsfunktionen definiert werden. Diese werden in separaten Codeblöcken formuliert und stehen anschließend in allen Überprüfungen und Nutzerfunktionen unter ihrem Namen zur Verfügung. So lassen sich wiederkehrende Berechnungen auslagern und zentral pflegen. Die im vorangehenden Beispiel verwendete Funktion `M_tilde` ist eine solche benutzerdefinierte Hilfsfunktion. Ihre Implementierung setzt die Definition von \tilde{M} (Definition 4.17) direkt um:

```
const cl = (c, T) => {
  const supEl = sup(cap(T, atoms(c)));
  return supEl ? atoms(supEl) : [];
};

const M_tilde = (T) => {
  let result = [];
  coAtoms(one).forEach(c => {
    result = cup(result, cl(c, T));
  });
  return result;
};
```

Die Funktion `cl(c, T)` berechnet den Abschluss $cl_c(T) = A(\vee(T \cap A(c)))$ in einem Coatom-Ideal. `M_tilde(T)` bildet die Vereinigung dieser Abschlüsse über alle Coatome und entspricht damit $\tilde{M}(T) = \bigcup_{c \in C_L} cl_c(T)$.

5.4 Import

Neben der manuellen Bearbeitung können Hasse-Diagramme auch aus einer textuellen Beschreibung importiert werden. Das Eingabeformat beschreibt die Bedeckungsrelationen des Diagramms zeilenweise. Jede Zeile hat die Form

$$a < b$$

und bedeutet, dass b das Element a bedeckt, d.h. $a < b$. Das Zeichen `<` steht dabei für die Bedeckungsrelation, nicht für die strikte Ordnung. Leere Zeilen werden ignoriert. Text nach dem Zeichen `#` wird als Kommentar behandelt und ebenfalls ignoriert.

Als Beispiel erzeugt die folgende Eingabe einen diamantförmigen Verband mit drei Atomen:

```
# Diamantverband M_3
0<a
0<b
0<c
a<1
b<1
c<1
```

Die Ränge der Elemente werden dabei automatisch aus den Bedeckungsrelationen berechnet. Elemente, die nichts bedecken, erhalten den Rang 0. Von dort werden die Ränge aufsteigend entlang der Bedeckungsrelationen propagiert.

Der importierte Graph kann wahlweise als primärer oder als sekundärer Verband geladen werden.

5.5 Export

Der Export-Button über jedem Graphen sendet das erzeugte Hasse-Diagramm als SVG an eine lokale serverseitige Komponente, die es als PDF im Dateisystem ablegt. Die Exportfunktion setzt voraus, dass der mitgelieferte Server lokal gestartet wurde. In der unter <https://lattice-ui.crossbach.de> bereitgestellten Version der Anwendung steht der Export daher nicht zur Verfügung. Alle Hasse-Diagramme in dieser Arbeit wurden mit diesem Werkzeug erzeugt und exportiert.

5.6 Persistenz

Der Zustand der Anwendung wird automatisch im lokalen Speicher des Browsers gesichert. Primärer und sekundärer Verband sowie alle Überprüfungen und Hilfsfunktionen bleiben daher auch nach einem Neuladen der Seite erhalten. Ein manuelles Speichern ist nicht erforderlich. Um die Anwendung auf ihren Auslieferungszustand zurückzusetzen, können die zugehörigen Einträge im lokalen Speicher des Browsers gelöscht werden.

6 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit haben wir die Frage untersucht, ob und wie sich Bouquets geometrischer Verbände zu geometrischen Verbänden vervollständigen lassen. Wir haben dazu einen zweistufigen Ansatz verfolgt: Zunächst die Ergänzung von Bouquets zu fast-geometrischen Verbänden, dann die Vervollständigung fast-geometrischer Verbände zu geometrischen Verbänden.

Ergänzung

Der erste Schritt ist vollständig gelöst. Jedes endliche Bouquet geometrischer Verbände lässt sich zu einem fast-geometrischen Verband ergänzen (Satz 3.3). Die Ergänzung erfolgt durch Ranganhebung der maximalen Elemente auf gleiche Höhe und anschließendes Hinzufügen eines Einselements.

Vervollständigung

Für die Vervollständigung fast-geometrischer Verbände haben wir zwei Fälle unterschieden.

Ist ein fast-geometrischer Verband nicht atomar, so besitzt er genau ein Coatom, und das direkte Produkt seines Coatom-Ideals mit einer Kette der Länge 1 ist eine geometrische Vervollständigung (Satz 4.2). Ebenso ist jeder fast-geometrische Verband vom Rang höchstens 2 bereits geometrisch (Proposition 2.42). Diese Fälle sind damit abgeschlossen.

Für atomare, nicht-submodulare fast-geometrische Verbände vom Rang mindestens 3 haben wir eine Reihe von Konstruktionsansätzen entwickelt. Jeder Ansatz erzwingt bestimmte Eigenschaften einer Vervollständigung, scheitert aber an jeweils einer anderen. Wir haben dabei ausschließlich Ansätze betrachtet, die keine neuen Atome hinzufügen.

Die behehenden Elemente L' adressieren gezielt die Submodularitätsverletzungen, indem sie für jedes problematische Paar (a, x) ein neues Element einfügen. Dieses Mengensystem ist im Allgemeinen nicht unter Schnittbildung abgeschlossen und bildet daher keinen atomaren Verband.

Die Fixpunktmenge \tilde{L} beschränkt sich auf Fixpunkte des coatomweisen Abschlussoperators \tilde{M} und ist dadurch stets unter Schnittbildung abgeschlossen. \tilde{L} bildet stets einen atomaren Verband, besitzt aber im Allgemeinen keine Rangfunktion, da Fixpunkte existieren können, die in keine konsistente Rangzuordnung passen.

Die behehenden Fixpunkte L^* wählen aus \tilde{L} nur die minimalen Fixpunkte, die zur Behebung der problematischen Paare notwendig sind. Dieser Ansatz reduziert die Men-

ge der verwendeten Fixpunkte, löst das Rangproblem aber nicht vollständig, da Cross-Coatom-Kaskaden Fixpunkte unterschiedlicher Größe vom selben Ausgangspunkt erzeugen können.

Aus den Gegenbeispielen haben wir eine notwendige Bedingung für jede Vervollständigung abgeleitet, die keine neuen Atome einführt: Jede Vervollständigung muss in der Fixpunktmenge \tilde{L} enthalten sein (Satz 4.35). Daraus folgt insbesondere, dass die behandelnden Fixpunkte $M^*(a, d)$ untere Schranken für die Bilder problematischer Elemente bilden (Korollar 4.36).

Auf Grundlage dieser Bedingung haben wir den Konstruktionsvorschlag L^+ formuliert, der die Elemente stufenweise erzeugt und durch einen iterativen Filterprozess die Schnittabgeschlossenheit und die Rangkonsistenz auf jeder Stufe sicherstellt. L^+ liefert auf allen untersuchten Beispielen eine Vervollständigung.

Die folgende Tabelle fasst zusammen, welche Eigenschaft jede Konstruktion erzwingt und woran sie scheitert.

Konstruktion	Erzwungene Eigenschaft	Scheitert an	Gegenbeispiel
L'	Ideal-Einbettung	\cap -Abgeschlossenheit	L_\times
\tilde{L}	Ideal-Einbettung, atomar	Rangfunktion	L_Δ
L^*	Ideal-Einbettung, $\subseteq \tilde{L}$	Rangfunktion	L_γ
L^+	$\subseteq \tilde{L}$, Rangkonsistenz	offen	

Tabelle 6.1: Übersicht der Konstruktionsverfahren. Jede Konstruktion behebt das Problem der vorherigen, scheitert aber an einer neuen Eigenschaft. Alle Gegenbeispiel-Verbände sind vervollständigbar.

Ergebnisse

1. Jedes endliche Bouquet geometrischer Verbände lässt sich zu einem fast-geometrischen Verband ergänzen (Satz 3.3).
2. Nicht-atomare fast-geometrische Verbände lassen sich durch ein direktes Produkt vervollständigen (Satz 4.2).
3. Jede Vervollständigung ohne neue Atome ist in der Fixpunktmenge \tilde{L} enthalten (Satz 4.35). Damit beschränkt sich die Suche nach einer Vervollständigung auf die Suche nach einem geometrischen Verband L° mit $L \subseteq L^\circ \subseteq \tilde{L}$.
4. Der Konstruktionsvorschlag L^+ liefert auf allen untersuchten Beispielen eine Vervollständigung.

Offene Fragen

1. Lässt sich jeder fast-geometrische Verband zu einem geometrischen Verband vervollständigen? Falls nicht, welche zusätzlichen Bedingungen sind hinreichend für die Existenz einer Vervollständigung?
2. Liefert der Konstruktionsvorschlag L^+ stets eine Vervollständigung, sofern sie existiert?

3. Alle Konstruktionen dieser Arbeit fügen keine neuen Atome hinzu. Falls keine Vervollständigung ohne neue Atome existiert, existiert dann dennoch eine mit neuen Atomen? Lässt sich eine Vervollständigung mit neuen Atomen gegebenenfalls leichter finden?

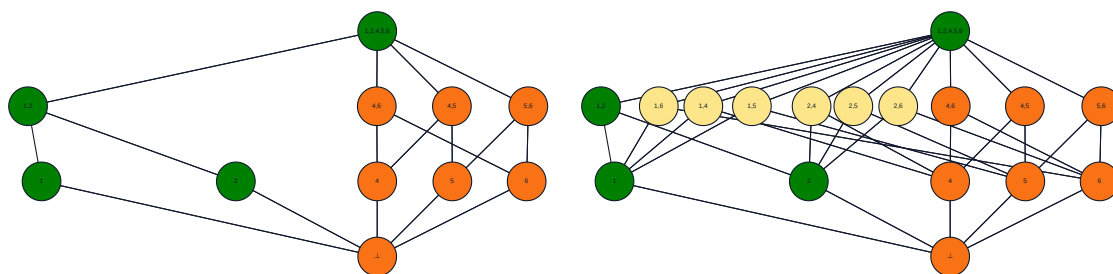
Literaturverzeichnis

- Aigner, Martin (1975). *Kombinatorik 1. Grundlagen und Zähltheorie*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag.
- Bandelt, Hans-Jürgen, Chepoi, Victor und Knauer, Kolja (2018). “COMs: Complexes of Oriented Matroids”. In: *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 156, S. 195–237.
- Birkhoff, Garrett (1967). *Lattice Theory*. 3. Aufl. Bd. 25. American Mathematical Society Colloquium Publications. Providence, RI: American Mathematical Society.
- Björner, Anders, Las Vergnas, Michel, Sturmfels, Bernd, White, Neil und Ziegler, Günter M. (1999). *Oriented Matroids*. 2. Aufl. Bd. 46. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge: Cambridge University Press.
- Hochstättler, Winfried und Keip, Sophia (2024). *The chain matrix of bouquets of geometric lattices and its determinant*. DOI: 10.48550/arXiv.2411.12529. arXiv: 2411.12529.
- Richter-Gebert, Jürgen und Ziegler, Günter M. (2017). “Oriented Matroids”. In: *Handbook of Discrete and Computational Geometry*. Chapman und Hall/CRC, S. 159–184. DOI: 10.1201/9781315119601.
- Whitney, Hassler (1935). “On the Abstract Properties of Linear Dependence”. In: *American Journal of Mathematics* 57.3, S. 509–533.

A Vervollständigungen

A.1 Weitere Vervollständigungen mit L'

Die folgenden Beispiele zeigen weitere fast-geometrische Verbände, die sich mit der Konstruktion L' aus Abschnitt 4.2.1 vervollständigen lassen.

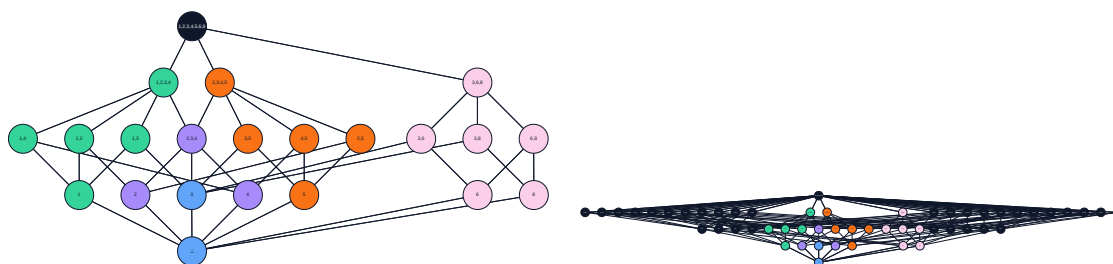


(a) Der fast-geometrische Verband L .

(b) Die Vervollständigung L' .

Abbildung A.1: Vervollständigung eines Rang-3-Verbands.

Beispiel A.1 (Vervollständigung eines Rang-3-Verbands mit vier Coatomen)



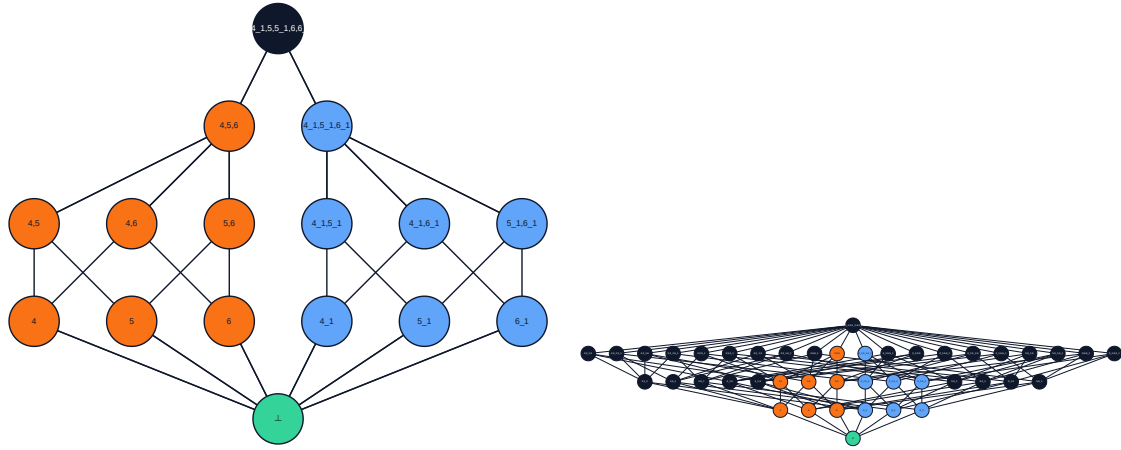
(a) Der fast-geometrische Verband L .

(b) Die Vervollständigung L' .

Abbildung A.2: Vervollständigung eines Verbands mit drei Coatomen.

Beispiel A.2 (Vervollständigung eines Verbands mit drei Coatomen und nicht-trivialer Gerade)

Beispiel A.3 (Vervollständigung eines Verbands mit disjunkten Coatom-Idealen)


 (a) Der fast-geometrische Verband L .

 (b) Die Vervollständigung L' .

Abbildung A.3: Vervollständigung eines Verbands mit disjunkten Coatom-Idealen (abgesehen vom Nullelement).

A.2 Vervollständigungen von Gegenbeispielen

Die folgenden Beispiele zeigen, dass die in den Gegenbeispielen der einzelnen Verfahren verwendeten Verbände trotz des Scheiterns der jeweiligen Konstruktion vervollständigbar sind.

Beispiel A.4 (Vervollständigung von L_\times)

L_\times (Beispiel 4.16) besitzt eine Vervollständigung. Der geometrische Verband \hat{L} vom Rang 4 auf $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit den nicht-trivialen Geraden $\{1, 4, 5\}$ und $\{3, 4, 6\}$ und den Hyperebenen:

$$\begin{aligned} h_1 &= \{1, 2, 3\}, & h_2 &= \{1, 2, 4, 5\}, & h_3 &= \{2, 3, 4, 6\}, \\ h_4 &= \{1, 3, 4, 5, 6\}, & h_5 &= \{1, 2, 6\}, & h_6 &= \{2, 3, 5\}, & h_7 &= \{2, 5, 6\}. \end{aligned}$$

Mit $H := \{h_1, h_2, h_3\}$ ist $\{\mathbf{1}_{\hat{L}}\} \cup \bigcup_{h \in H} \langle h \rangle_{\hat{L}}$ ordnungsisomorph zu L , und \hat{L} ist eine Vervollständigung von L .

Beispiel A.5 (Vervollständigung von L_γ)

L_γ (Beispiel 4.34) besitzt eine Vervollständigung. Der geometrische Verband \hat{L} vom Rang 4 auf $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ mit den nicht-trivialen Geraden $\{1, 4, 5\}$, $\{3, 4, 6\}$ und $\{5, 6, 7\}$ und den Hyperebenen:

$$\begin{aligned} h_1 &= \{1, 2, 3\}, & h_2 &= \{1, 2, 4, 5\}, & h_3 &= \{2, 3, 4, 6\}, \\ h_4 &= \{2, 5, 6, 7\}, & h_5 &= \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}, & h_6 &= \{1, 2, 6\}, \\ h_7 &= \{1, 2, 7\}, & h_8 &= \{2, 3, 5\}, & h_9 &= \{2, 3, 7\}, & h_{10} &= \{2, 4, 7\}. \end{aligned}$$

Mit $H := \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ ist $\{\mathbf{1}_{\hat{L}}\} \cup \bigcup_{h \in H} \langle h \rangle_{\hat{L}}$ ordnungsisomorph zu L , und \hat{L} ist eine Vervollständigung von L .