

FernUniversität in Hagen  
Fakultät für Mathematik und Informatik

Bachelorarbeit

# Über den Core nicht-bipartiter Matchingspiele

von

Isabel Beckenbach

betreut von

Professor Dr. Winfried Hochstättler

Neckargemünd, 25. Februar 2010

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1	Lineare Optimierung . . . . .	3
2.2	Graphentheorie . . . . .	6
2.2.1	Ungerichtete Graphen . . . . .	6
2.2.2	Digraphen und Flüsse . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Nicht-bipartite Matchingspiele</b>	<b>13</b>
3.1	Der Core ungewichteter Matchingspiele . . . . .	14
3.2	Eigenschaften der stabilen Auszahlungen . . . . .	16
3.2.1	Stabile Auszahlungen als Erweiterung einfacher Auszahlungen . . .	16
3.2.2	Der Core als Lineare Optimierungsaufgabe . . . . .	19
3.3	Der Core gewichteter Matchingspiele . . . . .	22
3.3.1	Konstruktion für $K_n$ mit geradem $n$ . . . . .	27
3.3.2	Zusammenhang zu balancierten Flüssen . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>38</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Graph mit einem leeren Core . . . . .	2
2.1	Schiefsymmetrisches Netzwerk zu $K_3$ . . . . .	11
3.1	Beispiel 1 . . . . .	15
3.2	Beispiel 2 . . . . .	15
3.3	Beispiel . . . . .	23
3.4	$K_6$ mit Gewichten $w_1$ . . . . .	25
3.5	$K_6$ mit Gewichten $w_2$ . . . . .	25
3.6	$K_4$ und zugehöriger Hilfsgraph $K_{4,4}$ . . . . .	33

# Kapitel 1

## Einleitung

Der Core taucht in verschiedenen Varianten in der Spieltheorie auf. In der hier behandelten Version hat man eine Menge  $N = \{1, \dots, n\}$  gegeben, die Menge der Spieler oder Personen, und eine reelle Funktion  $v$ , die jeder beliebigen Teilmenge der Spieler („Koalition“) einen Wert zuordnet. Eine Verteilung  $x \in \mathbb{R}^N$  liegt genau dann im *Core* des Spiels  $(N, v)$ , wenn:

$$\sum_{i=1}^n x_i = v(N) \tag{1.1}$$

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \forall S \subset N \tag{1.2}$$

Die erste Gleichung bedeutet, dass der gesamte Wert der „großen Koalition“ verteilt werden muss. Ungleichung (1.2) stellt sicher, dass keine Teilkoalition  $S$  einen Anreiz hat die „große Koalition“ zu verlassen, denn für  $\sum_{i \in S} x_i < v(S)$  wäre es für die Spieler in  $S$  vorteilhafter den Wert  $v(S)$  in ihrer kleineren Koalition zu verteilen. Unter der Annahme, dass jeder Spieler nur auf seinen eigenen Vorteil aus ist, jedoch mit den anderen Spielern kooperieren muss, ist eine Verteilung im *Core* stabil.

Doch gibt es überhaupt eine solche Verteilung? Das hängt davon ab, welches Spiel man betrachtet, d.h. wie die charakteristische Funktion  $v$  definiert ist. Eine Möglichkeit sind sogenannte Matchingspiele. Man hat einen Graphen  $G = (N, E)$  gegeben, dessen Knoten die einzelnen Spieler darstellen und dessen Kanten für mögliche Kooperationen zwischen zwei Spielern stehen. Damit Kooperationen einen unterschiedlichen Wert besitzen können, definiert man eine Gewichtsfunktion  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Ist diese konstant, spricht man von einem ungewichteten Matchingspiel; alle möglichen Kooperationen besitzen den gleichen Wert. Für eine Teilmenge  $S \subseteq N$  entspricht  $v(S)$  dem Wert des gewichtsmaximalen Matchings in demjenigen Untegraphen, der von den Knoten aus  $S$  induziert wird. Insbesondere gilt  $v(\{i\}) = v(\emptyset) = 0$  für einen einzelnen Spieler  $i$  und die leere Menge. Ist der Graph bipartit, so ist das Matchingspiel auch unter „Assignment Game“, also Zuordnungsspiel, bekannt. Dieses Spiel ist besonders interessant, weil es in den Wirtschaftswissenschaften Anwendung findet, zum Beispiel bei der Modellierung des Arbeitsmarktes<sup>1</sup>. Damit erhält man einen neuen, nicht so verbreiteten Blick auf Märkte. In dem Artikel „The Assignment Game I: The Core“ [19] stellen Shapley und Shubik dieses Konzept mit Beispielen sowie Vor- und Nachteilen vor. Eine ausgewogene Darstellung von Theorie und Praxis gelingt Roth und Sotomayor in [15]. Zuordnungsspiele haben immer einen nicht leeren Core. Hochstättler, Nickel

---

<sup>1</sup>vgl. Hochstättler, Nickel, Schiess (2008)

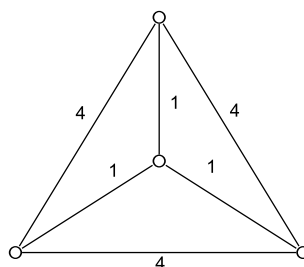


Abbildung 1.1: Graph mit einem leeren Core

und Schiess geben in [10] einen Algorithmus (für eine Verallgemeinerung des Zuordnungsspiels) an, der eine Laufzeit von  $\mathcal{O}(n^4)$  besitzt.

Als Mathematiker/in interessiert es einen natürlich (unabhängig von Anwendungen in der Wirtschaft), ob das Ergebnis auch im nicht-bipartiten Fall gilt. Leider ist das nicht so. Wie folgendes Beispiel zeigt, können ungerade Kreise der Grund dafür sein.

*Beispiel.* In Abbildung 1.1 ist der Graph  $K_4$  dargestellt und die Zahlen an den Kanten geben deren Gewichte an. Die Spieler 1, 2 und 3 sind die Knoten des äußeren Dreiecks und Spieler 4 ist der innere Knoten. Es ist  $v(N) = 5$  und  $v(S) = 4$ , wenn  $S$  eine Koalition aus zwei der ersten drei Spieler ist. Damit müsste eine Verteilung  $x \in \mathbb{R}^4$ , die im Core liegt, unter anderem folgende Ungleichungen erfüllen:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \tag{1.3}$$

$$x_1 + x_2 \geq 4 \tag{1.4}$$

$$x_2 + x_3 \geq 4 \tag{1.5}$$

$$x_1 + x_3 \geq 4 \tag{1.6}$$

Addiert man die letzten drei Ungleichungen (und dividiert durch 2) erhält man  $x_1 + x_2 + x_3 = 6 > 5 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ . Da  $x_i \geq 0 = v(\{i\})$ , kann es keinen Vektor  $x$  geben, der im Core dieses Matchingspiels liegt.

Jeder nichtbipartite Graph enthält einen ungeraden Kreis. Wählt man auf diesem die Gewichte ausreichend groß, ist der Core leer. Andererseits kann man die Gewichte der Matchingkanten solange erhöhen, bis wieder eine Verteilung im Core liegt. Es hängt daher von der Gewichtsfunktion ab, ob der Core leer ist oder nicht.

In dieser Arbeit wird, nach einer kurzen Wiederholung der notwendigen Definitionen und Sätze aus der Linearen Optimierung und Graphentheorie, zunächst das ungewichtete Matchingspiel behandelt. Es wird ein Zusammenhang zwischen der Struktur und dem Core eines Graphen hergestellt. Danach wird untersucht, für welche Gewichtsfunktionen der Core des gewichteten Matchingspiels nicht leer ist.

# Kapitel 2

## Grundlagen

Wie üblich bezeichnet  $\mathbb{N}$  die Menge der natürlichen Zahlen (mit Null),  $\mathbb{Z}$  die Menge der ganzen Zahlen,  $\mathbb{Q}$  die Menge der rationalen Zahlen und  $\mathbb{R}$  die Menge der reellen Zahlen. Zusätzlich wird die Menge aller nicht negativen reellen Zahlen mit  $\mathbb{R}_+$  abgekürzt. Neben der Vereinigung  $\cup$ , dem Durchschnitt  $\cap$  und der Differenz  $\setminus$  von Mengen, wird die symmetrische Differenz  $\triangle$  benutzt. Für zwei Mengen  $A$  und  $B$  ist dabei  $A\triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  die Menge aller Elemente, die entweder in  $A$  oder in  $B$  enthalten sind.  $\mathcal{P}(X)$  bezeichne die Menge aller Teilmengen von  $X$ . Der Inzidenzvektor  $\chi^U$  einer Teilmenge  $U \subseteq N$  ist ein Vektor in  $\mathbb{R}^N$ , der definiert ist durch

$$\chi_s^U := \begin{cases} 1 & \text{falls } s \in U \\ 0 & \text{falls } s \notin U \end{cases}$$

Die folgenden zwei Abschnitte stellen nur eine kurze Wiederholung dar, insbesondere wird die Notation vorgestellt. Für eine Einführung in Lineare Optimierung und Graphentheorie wird auf entsprechende Literatur verwiesen.

### 2.1 Lineare Optimierung

In der linearen Optimierung versucht man eine *lineare* Zielfunktion zu maximieren bzw. zu minimieren, wobei gewisse Nebenbedingungen erfüllt sein müssen, die durch lineare Ungleichungen (oder Gleichungen) gegeben sind.

**Definition 2.1.1** (Lineare Optimierungsaufgabe). Es sei eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ) gegeben und  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$  seien zwei reelle Vektoren. Es wird das Maximum der linearen Zielfunktion  $x \rightarrow c^T x$  unter der Nebenbedingung  $Ax \leq b$  gesucht:

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{unter} \quad & Ax \leq b \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ein  $x \in \mathbb{R}^n$  heißt *zulässige Lösung* der Linearen Optimierungsaufgabe (2.1), falls  $Ax \leq b$ . Die Menge aller zulässigen Lösungen  $P_{A,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$  nennt man den *Zulässigkeitsbereich*. Eine *optimale Lösung* ist eine zulässige Lösung  $x^*$ , sodass  $c^T x^* \geq c^T x$  für alle zulässigen Lösungen  $x \in P_{A,b}$ .

Der Zulässigkeitsbereich einer Linearen Optimierungsaufgabe ist ein Polyeder.

**Definition 2.1.2.** Eine Teilmenge  $P$  des  $\mathbb{R}^n$  heißt *Polyeder*, falls eine  $m \times n$  Matrix  $A$  und einen Vektor  $b \in \mathbb{R}^m$  existieren, sodass  $P = \{x | Ax \leq b\}$  gilt.

Ist  $b$  der 0 Vektor, so hat das Polyeder eine besondere Struktur:

$$\alpha x \in P \quad \forall x \in P, \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad (2.2)$$

$$x + y \in P \quad \forall x, y \in P \quad (2.3)$$

Allgemein heißt jede nicht leere Menge  $C \subseteq \mathbb{R}^n$ , die (2.2) und (2.3) erfüllt, *Kegel*. Ein Kegel muss nicht unbedingt ein Polyeder sein. Gibt es aber eine Matrix  $A$ , sodass  $C = \{x | Ax \leq 0\}$  so nennt man  $C$  einen *polyedrischen Kegel*. Ist dies nicht der Fall, kann man zumindest eine Menge  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  finden, die  $C$  erzeugt.

**Definition 2.1.3.** Die konische Hülle der Menge  $X$  ist der Durchschnitt aller Kegel, die  $X$  enthalten, also der kleinste  $X$  enthaltende Kegel. Er wird mit  $\text{Cone}X$  bezeichnet.  $X$  erzeugt einen Kegel  $C$  genau dann, wenn  $C = \text{Cone}X$ .

Für jeden Kegel gibt es ein solches Erzeugendensystem, denn es gilt immer  $\text{Cone}C = C$ .

**Satz 2.1.4.** <sup>1</sup> Es sei  $X \subseteq \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ , dann gilt

$$\text{Cone}X = \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k | k \geq 0, \lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0, x_1, \dots, x_k \in X\}$$

Gibt es eine endliche Menge  $X$ , die den Kegel  $C$  erzeugt, so heißt  $C$  *endlich erzeugt*. Es gilt sogar für jeden Kegel  $C$ :

**Satz 2.1.5.** <sup>2</sup>  $C$  ist ein polyedrischer Kegel  $\iff C$  ist endlich erzeugt

Für die Richtung „ $\implies$ “ wird der folgende Kegel benötigt, der auch in dieser Arbeit ein wichtige Rolle spielen wird:

**Definition 2.1.6.** Sei  $C$  ein Kegel. Mit  $C^* = \{y | x^T y \leq 0\}$  wird der zu  $C$  polare Kegel bezeichnet.

**Satz 2.1.7.** Ist  $C = \{Ax \leq 0\}$  ein polyedrischer Kegel, so wird der polare Kegel  $C^*$  von den transponierten Zeilenvektoren von  $A$  erzeugt.

Für jede Menge  $X$  definiert man analog zu  $\text{Cone}X$  die Menge  $\text{Conv}X$ .

**Definition 2.1.8.** Eine Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  heißt *konvex*, wenn  $\lambda a + (1 - \lambda)b \in D \quad \forall 0 \leq \lambda \leq 1$  für zwei beliebige Vektoren  $a, b \in D$ . D.h. die Verbindungsstrecke zweier Punkte der Menge liegt selbst ganz in dieser Menge. Sei  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Die konvexe Hülle  $\text{Conv}X$  von  $X$  ist der Durchschnitt aller konvexen Mengen  $K \subset \mathbb{R}^n$ , die  $X$  enthalten. Die konvexe Hülle  $P = \text{Conv}X$  einer endlichen Menge nennt man *Polytop*.

<sup>1</sup>vgl. Petersson, KE 2

<sup>2</sup>vgl. Petersson, KE 2

Die Lösungsmenge eines (inhomogenen) Linearen Gleichungssystems  $Ax = b$  lässt sich in der Form  $\text{Kern}(A) + z$  schreiben, mit einer speziellen Lösung  $z$  des Gleichungssystems. Bei Lösungen Linearer Ungleichungssysteme, also Polyedern, gilt eine entsprechende Zerlegung:

**Satz 2.1.9.** <sup>3</sup> Eine Menge  $P \subset \mathbb{R}^n$  ist ein Polyeder  $\iff P = Q + C$  mit einem (im Allgemeinen nicht eindeutigem) Polytop  $Q$  und einem eindeutigen Kegel  $C$ .

**Definition 2.1.10.** Den Kegel  $C$  in Satz 2.1.9 nennt man *charakteristischen Kegel* und es ist  $C = \text{char}P = \{x | Ax \leq 0\}$ . Damit definiert man den Linearitätsraum  $\text{Lir}P$  eines Polyeders durch  $\text{Lir}P = (\text{char}P) \cap (-\text{char}P)$  für  $P = \{x | Ax \leq b\}$ . Es gilt  $\text{Lir}P = \text{Kern}(A)$  und im Fall  $\text{Lir}P = \{0\}$  nennt man das Polyeder *punktiert*.

Bei der Entscheidung, ob ein Lineares Ungleichungssystem eine Lösung besitzt oder nicht, hilft oft das Lemma von Farkas', das es in unzähligen Varianten gibt. Eine davon ist:

**Satz 2.1.11.** <sup>4</sup> Seien  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $b \in \mathbb{R}^m$ .  $Ax \leq b$  besitzt eine Lösung  $x \in \mathbb{R}_+^n \iff y^T b \geq 0$  für alle  $y \in \mathbb{R}_+^m$  mit  $y^T A \geq 0^T$ .

Zu jeder Linearen Optimierungsaufgabe existiert eine entsprechende *duale* Lineare Optimierungsaufgabe, deren Zielfunktion den gleichen optimalen Wert annimmt, falls die Lineare Optimierungsaufgabe eine optimale Lösung besitzt.

**Definition 2.1.12.**

$$\begin{aligned} \min y^T b & & (2.4) \\ \text{unter } y \geq 0, y^T A &= c^T \end{aligned}$$

mit  $y \in \mathbb{R}^m$  ist die zu (2.1) duale Lineare Optimierungsaufgabe.

**Satz 2.1.13.** Ist (2.1) oder (2.4) beschränkt, so existiert eine optimale Lösung  $x^* \in \mathbb{R}^n$  von (2.1) und eine optimale Lösung  $y^* \in \mathbb{R}^m$  von (2.4), sodass:

$$c^T x^* = (y^*)^T b$$

*Bemerkung.* Die Ungleichung „ $\leq$ “ (Schwache Dualität) ist einfach zu zeigen:

$$c^T x^* = (y^*)^T A x^* \leq (y^*)^T b$$

Findet man zulässige Lösungen  $x$  und  $y$  von (2.1) bzw. (2.4) mit  $c^T x = y^T b$ , so sind diese beiden Lösungen schon optimal. Die Menge der optimalen Lösungen ist eine *Seite* des Polyeders.

**Definition 2.1.14.** Sei  $P \subset \mathbb{R}^n$  ein Polyeder.  $F \subset \mathbb{R}^n$  ist eine Seite des Polyeders, falls es ein  $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$  gibt, sodass  $F = \{x \in P | \bar{c}^T x = \delta\}$  und  $\delta = \max(\{\bar{c}^T x | x \in P\})$ . Eine Seite  $F$  heißt *minimal*, falls es keine andere Seite  $F'$  gibt mit  $F' \subset F$ .

Die Lösungen einer Linearen Optimierungsaufgabe werden immer (auch) an einer minimalen Seite angenommen. Ist ein Polyeder punktiert, so sind die minimalen Seiten genau die Ecken, d.h. Seiten der Form  $F = \{x_0\}$ . Sind alle Ecken ganzzahlig, dann gibt es eine ganzzahlige optimale Lösung.

<sup>3</sup>vgl. Petersson, KE 2

<sup>4</sup>vgl. Schrijver (2003), S. 61 f.



## 2.2 Graphentheorie

Zuerst werden ungerichtete Graphen behandelt, wobei sich die Notation an Schrijver (2003) orientiert. Dabei wird besonders auf den Zusammenhang zwischen (gewichteten) Matchings und linearer Optimierung eingegangen.

Der zweite Abschnitt behandelt Digraphen und Netzwerke sowie deren Bedeutung für Matchings.

### 2.2.1 Ungerichtete Graphen

**Definition 2.2.1.** Ein *ungerichteter Graph* ist ein Paar  $G = (V, E)$  mit Knotenmenge  $V$  und Kantenmenge  $E$ , wobei  $E$  aus ungeordneten Paaren  $\{i, j\}$  besteht mit  $i, j \in V$ , abkürzend wird  $ij$  geschrieben. Kommt eine Kante doppelt vor, so sind  $k_1 = ij, k_2 = ij$  *parallele* Kanten. Kanten der Form  $ii \in E$  heißen *Schleifen*. Ein Graph ohne Schleifen und parallele Kanten heißt *schlicht*. Gibt es eine Partition  $U \dot{\cup} W$  der Knotenmenge  $V$ , sodass  $V = U \dot{\cup} W$  und für jede Kante  $k = ij$  ein Randknoten in  $U$  und der andere in  $W$  liegt, so heißt  $G$  *bipartit*.

Zwei Knoten  $i, j \in V$  heißen *adjazent*, falls sie durch eine Kante  $ij \in E$  verbunden sind. Eine Kante  $k = ij$  heißt *inzident* zu den Knoten  $i$  und  $j$ . Eine endliche Folge  $i_0, k_1, i_1, \dots, k_n, i_n$  mit Kanten  $k_j = i_{j-1}i_j$  heißt *Kantenfolge* der Länge  $n$ . Sind Anfangs- und Endknoten identisch, so ist die Kantenfolge geschlossen. Sind alle Knoten und Kanten untereinander verschieden (außer Anfangs- und Endknoten bei einer geschlossenen Folge), dann nennt man eine Kantenfolge *Kantenweg*. Ein geschlossener Kantenweg ist ein *Kreis*. Durchläuft dieser alle Knoten aus  $V$ , dann nennt man den Kreis einen *Hamiltonkreis* und den Graphen  $G$  *hamiltonsch*. Knoten, die durch einen Kantenweg verbunden sind, gehören zu einer *Zusammenhangskomponente*. Ein *zusammenhängender* Graph ist ein Graph mit genau einer Zusammenhangskomponente.

Mit Hilfe von Kreisen lassen sich bipartite Graphen charakterisieren:

**Satz 2.2.2.** <sup>5</sup>  $G = (V, E)$  ist bipartit  $\iff$  Es gibt keinen Kreis ungerader Länge in  $G$

*Beweis.* Man kann von einem zusammenhängenden Graphen  $G$  ausgehen (wenn nicht betrachtet man jede Zusammenhangskomponente einzeln).

„ $\Rightarrow$ “ Sei  $G$  ein bipartiter Graph und  $K : i_0, k_1, i_1, \dots, k_n, i_n = i_0$  ein beliebiger Kreis in  $G$ . Sei  $U \dot{\cup} W$  die bipartite Knotenzerlegung von  $G$ . Man kann annehmen, dass  $i_0 \in U$ . Dann gilt  $i_1 \in W, i_2 \in U, \dots$ ; alle geraden Knoten der Folge liegen in  $U$  und die ungeraden in  $W$ . Wegen  $i_n = i_0 \in U$ , ist  $n$  gerade.

„ $\Leftarrow$ “ Sei  $G$  ein Graph, in dem jeder Kreis gerade Länge hat, und  $i^*$  ein fester Knoten von  $G$ . Ist der kürzeste Kantenweg von  $i^*$  zu einem Knoten  $j$  ungerade, so setze  $j \in W$ , die restlichen Knoten bilden die Menge  $U$ . Dadurch erhält man eine Partition der Knotenmenge  $V$  in zwei Mengen  $U$  und  $W$ . Angenommen es existiere eine Kante  $k = i'j'$  mit  $i', j' \in U$  oder  $i', j' \in W$ . Sei  $W_1$  der kürzeste Weg von  $i'$  nach  $i^*$  bzw.  $W_2$  der kürzeste Weg von  $j'$  nach  $i^*$  und  $v$  sei der erste gemeinsame Knoten dieser Wege. Dann bilden die Teilwege

<sup>5</sup>vgl. Seip (2002), KE 7

von  $W_1$  und  $W_2$  nach  $v$  zusammen mit der Kante  $k$  einen Kreis. Die Wege  $W_1$  und  $W_2$  sind beide entweder ungerade oder gerade und die Differenz der Länge von  $W_1$  bzw.  $W_2$  und dem entsprechenden Teilweg ist gleich groß (sie entspricht der Länge des kürzesten Weges von  $v$  nach  $i^*$ ). Die Länge des Kreises  $K$  entspricht der Summe aus der Länge der beiden Teilwege (die gerade ist) plus 1 für die Kante  $k$ . Der Kreis  $K$  müsste daher ungerade sein, im Widerspruch zur Annahme. D.h. es kann keine solche Kante  $k$  geben  $\iff$   $G$  ist bipartit.  $\square$

**Definition 2.2.3.** Die Menge aller zu einem Knoten inzidenten Kanten wird mit  $\delta_G(v) := \delta(v) := \{e \in E \mid e \text{ ist inzident zu } v\}$  bezeichnet. Der Grad  $\deg_G(v) = \deg(v)$  eines Knotens entspricht  $|\delta_G(v)|$ . Entsprechend bezeichnet  $N_G(v) = N(v)$  die Menge aller zu  $v$  adjazenten Knoten. Für eine Menge  $U \subseteq N$  sei  $\delta(U) := \{e \in E \mid e \text{ ist inzident zu genau einem } v \in U\}$ .

Haben alle Knoten den gleichen Grad  $k$  so heißt der Graph  $G$   $k$ -regulär. Ein schlichter Graph mit  $n$  Knoten kann höchstens  $n - 1$ -regulär sein, d.h. jeder Knoten ist zu allen  $n - 1$  anderen Knoten adjazent, in diesem Fall nennt man  $G$  *vollständig* und schreibt  $K_n$  für den vollständigen Graphen mit genau  $n$  Knoten. Der schlichte,  $n$ -reguläre, bipartite Graph  $G = (U \dot{\cup} W, E)$  mit jeweils  $n$  Knoten in  $U, W$  heißt *vollständig bipartit* und wird mit  $K_{n,n}$  abgekürzt.

**Definition 2.2.4.** Ein Graph  $G' = (V', E')$  heißt *Untergraph* von  $G = (V, E)$ , falls  $V' \subseteq V, E' \subseteq E$ .  $G'$  ist ein echter Untergraph von  $G$ , wenn  $V' \neq V$  oder  $E' \neq E$ . Enthält  $G'$  alle Kanten  $ij \in E$  mit  $i, j \in V'$ , so heißt  $G'$  *induzierter Untergraph* und man schreibt  $G' = G[V']$  und für die induzierte Kantenmenge  $E' = E[V']$ . Für eine Menge  $S \subseteq E$  sei  $V[S]$  die Menge aller Knoten, die zu mindestens einer Kante  $e \in S$  inzident sind.

Ein Matching  $M$  ist eine Teilmenge der Kanten, sodass jeder Knoten im Graphen zu höchstens einer Matchingkante inzident ist. Mit dem Begriff des Untergraphen, lässt sich ein Matching folgendermaßen definieren:

**Definition 2.2.5.** Eine Teilmenge  $M \subseteq E$  eines Graphen  $G = (V, E)$  heißt *Matching*, falls im Untergraph  $G' = (V, M)$  jeder Knoten höchstens den Grad 1 besitzt, also  $\deg_{G'}(v) \leq 1$ . Ein Knoten mit  $\deg_{G'}(v) = 1$  wird von  $M$  getroffen oder bedeckt. Ein größtes Matching ist ein Matching mit maximaler Anzahl an Kanten. Gilt für ein Matching  $M$   $\deg_{G'}(v) = 1 \forall v \in V$ , dann nennt man  $M$  ein *perfektes Matching*. Ein *fast perfektes Matching* ist ein Matching  $M$ , das genau einen Knoten nicht bedeckt.

**Definition 2.2.6.** Es seien ein Graph  $G = (V, E)$  und eine Funktion  $b : V \rightarrow \mathbb{N}$  gegeben. Ein  $b$ -*Matching* ist eine Funktion  $\alpha : E \rightarrow \mathbb{N}$  mit

$$\sum_{e \in \delta(v)} \alpha(e) \leq b(v) \quad \forall v \in V$$

Ein 2-Matching ist ein  $b$ -Matching mit  $b(v) = 2 \forall v \in V$ .

Der Struktursatz von Gallai und Edmonds liefert eine interessante Zerlegung eines Graphen, die wichtig für die Untersuchung ungewichteter Matchingspiele ist. Dazu teilt man die

Knotenmenge  $V$  eines Graphen  $G = (V, E)$  in die drei disjunkten Mengen  $D$ ,  $A$  und  $C$  auf.  $D$  enthält alle Knoten, die von mindestens einem größten Matching nicht getroffen werden. In  $A$  liegen alle zu  $D$  benachbarten Knoten aus  $V \setminus D$ . Schließlich setzt man  $V \setminus (D \cup A)$  für die Menge  $C$ . Damit gilt:

**Satz 2.2.7** (Gallai-Edmonds<sup>6</sup>). *Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und die Mengen  $D, A, C$  wie oben definiert. Dann folgt*

1. *Die Komponenten des induzierten Untergraphen  $G[D]$  sind faktorkritisch, d.h. entfernt man einen beliebigen Knoten  $i$  aus einer dieser Komponente  $K_D$ , so gibt es ein perfektes Matching in  $K_D \setminus \{i\}$ .*
2.  *$G[C]$  besitzt ein perfektes Matching.*
3. *Ist  $M$  ein größtes Matching in  $G$ , so enthält  $M$  ein perfektes Matching jeder Komponente von  $G[C]$ , ein fast perfektes Matching jeder Komponente von  $G[D]$  und matched jeden Knoten aus  $A$  zu einer verschiedenen Komponenten von  $G[D]$ .*

Der Beweis ist relativ umfangreich, siehe Lovasz/Plummer (1986), Kapitel 3, oder für einen konstruktiven Beweis Korte/Vygen (2008).

Bei vielen Anwendungen ist es sinnvoll, dass die Kanten eines Graphen ein unterschiedliches Gewicht besitzen können, dazu definiert man eine Gewichtsfunktion  $w$ .

**Definition 2.2.8.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, dann nennt man  $w$  eine Gewichtsfunktion des Graphen  $G$ . Der Wert  $w(e)$  heißt Gewicht der Kante  $e$ . Die Gewichtsfunktion lässt sich auch als Vektor in  $\mathbb{R}^E$  betrachten und für die Gewichte einer Kante  $e$  gilt damit  $w(e) = w_e$ . Das Gewicht eines Matchings  $M$  ist durch  $w(M) := w^T \chi^M = \sum_{e \in M} w_e$  und das eines  $b$ -Matchings  $\alpha$  durch  $w(\alpha) := \sum_{e \in E} \alpha(e) w_e$  definiert.

*Bemerkung.* In dieser Arbeit werden nur nicht negative Gewichte betrachtet. Das heißt es gilt immer  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

Hat man einen Graphen  $G$  gegeben, der nicht vollständig ist, so kann man Kanten mit Gewicht 0 einfügen, wodurch sich das Gewicht eines gewichtsmaximalen/-minimalen Matchings nicht ändert. Ist die Knotenzahl ungerade, fügt man einen Dummyknoten ein, der mit allen anderen Knoten durch Kanten mit Gewicht 0 verbunden wird. Dadurch kann man jedes gewichtsmaximale/-minimale Matching mit Hilfe von Kanten des Gewichts 0 zu einem perfekten Matching vervollständigen, ohne das Gewicht zu ändern. Man kann daher immer von  $G = K_n$  mit  $n$  gerade ausgehen und einem gewichtsmaximalen Matching  $M$ , das gleichzeitig perfekt ist. Nicht negative Gewichte sind keine Einschränkung, denn Addition von  $\delta = \min_{e \in E} w_e$  zur Gewichtsfunktion  $w$  erhöht das Gewicht jedes perfekten Matchings um den gleichen Wert  $\frac{n}{2}\delta$ .

Das Problem ein gewichtsmaximales Matching zu finden lässt sich auch mit Hilfe linearer Optimierung beschreiben. Dazu interpretiert man die Vektoren  $x \in \mathbb{R}^m$  als (Kanten-)

<sup>6</sup>vgl. Lovász/Plummer (1986), S. 94 f.

Inzidenzvektoren eines Graphen  $G = (V, E)$  mit  $m = |E|$ . Damit müssen auf Grund der Definition eines Matchings zumindest folgende beiden Ungleichungen gelten:

$$x(\delta(v)) := \sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1 \quad \forall v \in V \quad (2.5)$$

$$x_e \geq 0 \quad \forall e \in E \quad (2.6)$$

Es sei  $P$  das Polyeder, das durch diese beiden Ungleichungen definiert ist, dann ist  $P$  sogar ein Polytop (da  $P$  beschränkt ist). Man kann zeigen, dass die Ecken dieses Polytops im bipartiten Fall (und nur dann) immer ganzzahlig sind (siehe [11] oder [17]). Damit gibt es immer eine ganzzahlige Lösung der Linearen Optimierungsaufgabe:

$$\begin{aligned} \max w^T x & \\ \text{unter } x \in P & \end{aligned} \quad (2.7)$$

Diese Lösung ist der Inzidenzvektor eines gewichtsmaximalen Matchings in  $G$ .

Für nicht-bipartite Graphen fehlen noch die „Blossom-constraints“<sup>7</sup>:

$$x(E[U]) = \sum_{e \in E[U]} x_e \leq \lfloor \frac{1}{2} |U| \rfloor \quad (2.8)$$

für alle Mengen  $U \subseteq V$  mit ungerader Anzahl an Knoten und der Gauß'schen Klammer  $\lfloor x \rfloor$ , die einer reellen Zahl  $x$  die größte ganze Zahl  $a \in \mathbb{Z}$  mit  $a \leq x$  zuordnet.

*Beispiel.* Sei  $K_3 = (N, E)$  und  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  mit  $w(e) = 1 \quad \forall e \in E$  gegeben. Dann erfüllt der nicht ganzzahlige Vektor  $x = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$  die Ungleichungen (2.5) und (2.6) und es ist  $w^T x = \frac{3}{2}$ , das Gewicht jedes Matchings ist jedoch höchstens 1. Hier sind zusätzlich die „Blossom-constraints“ nötig, die für  $U = N$  verletzt werden

$$x(E[N]) = \frac{3}{2} > 1 = \lfloor \frac{3}{2} \rfloor.$$

Im Fall eines ungewichteten Graphen liefert die Lineare Optimierungsaufgabe (2.9) mit konstanter Gewichtsfunktion  $w = 1$  ein größtes Matching.

### 2.2.2 Digraphen und Flüsse

Bei den folgenden Definitionen orientiere ich mich an Korte und Vygen (2008).

**Definition 2.2.9.** Ein Digraph  $D = (V, A)$  besteht aus einer Knotenmenge  $V$  und einer Pfeilmenge  $A$ . Im Unterschied zu Graphen haben die Pfeile  $p = (i, j) \in A$  eine Richtung, d.h.  $(i, j)$  und  $(j, i)$  sind verschiedene Pfeile und heißen antiparallel.

**Definition 2.2.10.** Gegeben sei ein Digraph  $D$  mit Kapazitäten  $u : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Ein zulässiger Fluss ist eine Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}_+$  mit  $f(p) \leq u(p)$  für alle  $p \in A$ .

<sup>7</sup>vgl. Schrijver (2003), S. 438 ff.

**Definition 2.2.11.** Der Überschuss eines Flusses in einem Knoten  $v \in V$  ist:

$$ex_f := \sum_{p \in \delta^-(v)} f(p) - \sum_{p \in \delta^+(v)} f(p)$$

wobei  $\delta^-(v)$  die Menge der Pfeile mit Endknoten  $v$  ist und entsprechend  $\delta^+(v)$  die Menge der Pfeile, die  $v$  verlässt.  $f$  erfüllt die *Flusserhaltungsregel* im Knoten  $v$ , wenn  $ex_f(v) = 0$  gilt.  $f$  ist eine *Zirkulation*, falls  $f$  in jedem Knoten die Flusserhaltungsregel erfüllt.

Weist man zusätzlich in einem Digraphen zwei Knoten  $s, t$  als Quelle/Senke aus, dann erhält man ein Netzwerk. In diesem Netzwerk sucht man einen Fluss, der die meisten „Einheiten“ von der Quelle  $s$  zur Senke  $t$  transportiert.

**Definition 2.2.12.** Sei nun ein Netzwerk  $(D, u, s, t)$  gegeben. Ein  $s$ - $t$ -Fluss ist ein zulässiger Fluss  $f$  mit  $(-ex_f(t) =) ex_f(s) \leq 0$  und  $ex_f(v) = 0 \forall v \in V \setminus \{s, t\}$ . Der Wert eines  $s$ - $t$ -Flusses ist  $value(f) = -ex_f(s) = ex_f(t)$ .

Flüsse und Matchings hängen eng miteinander zusammen. Für bipartite Graphen wird das durch folgende Konstruktion sichtbar:<sup>8</sup>

Mit  $G = (V_1 \dot{\cup} V_2, E)$  sei ein bipartiter Graph gegeben, aus dem das Netzwerk  $(D, u, s, t)$  konstruiert wird mit  $D = ((V_1 \cup \{t\}) \dot{\cup} (V_2 \cup \{s\}), A)$ , zwei neuen Knoten  $s, t$  und Pfeilmenge  $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ :

$$A_1 := \{(s, v) | v \in V_1\}$$

$$A_2 := \{(v_1, v_2) | v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, v_1 v_2 \in E\}$$

$$A_3 := \{(v, t) | v \in V_2\}$$

Die Kapazitäten sind:

$$u(p) := \begin{cases} 1 & , \text{ falls } p \in A_1 \cup A_3 \\ \infty & , \text{ falls } p \in A_2 \end{cases}$$

Durch die Konstruktion der Kapazitätsfunktion kann jeder zulässige  $s - t$ -Fluss maximal eine Einheit über einen Knoten aus  $V_1$  oder  $V_2$  transportieren. Ein größtes Matching im bipartiten Graphen entspricht einem maximalen  $s - t$ -Fluss mit ganzzahligen Werten und umgekehrt:

**Satz 2.2.13.** <sup>9</sup> Sei  $f : A \rightarrow \mathbb{Z}$  ein maximaler ganzzahliger  $s - t$ -Fluss im obigen Netzwerk  $(D, u, s, t)$ . Die Menge der Kanten aus  $G$ , die denjenigen Pfeilen in  $A_2$  entsprechen, deren Fluss nicht Null ist, sei  $M$ . Dann ist  $M$  ein größtes Matching. Hat man umgekehrt ein größtes Matching  $M$  gegeben, so ist

$$f(p) := \begin{cases} deg_{G'}(v) & , \text{ falls } p = (s, v) \text{ oder } p = (v, t) \\ 1 & , \text{ falls } p = (v_1, v_2) \text{ und } v_1 v_2 \in M \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

mit  $G' = (V, M)$  ein maximaler ganzzahliger Fluss.

<sup>8</sup>vgl. Hochstättler/Schliep (2010), S. 111 ff. oder Bang-Jensen/Gutin (2007), S. 137 ff.

<sup>9</sup>vgl. Hochstättler/Schliep (2010), S. 113

*Beweis nach Hochstättler/Schliep (2010).* Sei  $f$  ein maximaler ganzzahliger Fluss und die Menge  $M$  wie im Satz definiert. Wegen der Flusserhaltungsregel gelten die Ungleichungen  $\deg_{G'}(v_1) \leq 1 \forall v_1 \in V_1$  und  $\deg_{G'}(v_2) \leq 1 \forall v_2 \in V_2$ , deswegen ist  $M$  ein Matching in  $G$  mit  $|M| = \text{value}(f)$ . Damit besitzt ein maximales Matching in  $G$  mindestens  $\text{value}(f)$  Kanten.

Sei andererseits  $M$  ein größtes Matching und  $f$  der oben definierte  $s-t$ -Fluss. Dieser ist zulässig, erfüllt die Flusserhaltungsregel für alle Knoten ungleich der Quelle  $s$  oder der Senke  $t$  und sein Wert stimmt mit der Kardinalität des Matchings überein. Der Wert eines maximalen Flusses ist daher mindestens  $|M|$ .

Insgesamt folgt  $\text{value}(f) = |M|$  für einen maximalen ganzzahligen Fluss  $f$  und ein größtes Matching  $M$  und damit die Behauptung.  $\square$

Hat man einen nicht-bipartiten Graphen gegeben, ist der Zusammenhang zwischen Matchings und Flüssen schwieriger herzustellen, insbesondere benötigt man dafür die Begriffe des schiefsymmetrischen Digraphen/Netzwerks und des balancierten Flusses.<sup>10</sup>

**Definition 2.2.14.** Es sei  $D = (V \dot{\cup} V', A)$  ein Digraph mit einer Knotenmenge  $V$  und einer Kopie  $V'$ , sodass  $i \in V \iff i' \in V'$ , sowie  $(i')' = i$  gilt.  $D$  heißt schiefsymmetrisch, falls aus  $(i, j') \in A$  folgt, dass  $(j, i') \in A$ , bzw. aus  $(j', i) \in A$  folgt  $(i', j) \in A$ ; diese beiden Kanten nennt man komplementär. Ist  $(D, u, s, t)$  ein Netzwerk mit schiefsymmetrischem Digraphen  $D$  und  $s' = t$ , so heißt das Netzwerk balanciert, wenn die Kapazitäten jeweils auf komplementären Kanten übereinstimmen.

**Definition 2.2.15.** Es sei  $f$  ein Fluss auf einem Digraphen  $D$  oder ein  $s-t$ -Fluss auf einem Netzwerk.  $f$  heißt balanciert, falls  $f$  ganzzahlig ist,  $f((i, j')) = f((j, i'))$ , bzw.  $f((j', i)) = f((i', j))$  für alle Pfeile gilt und für Schleifen, also Pfeile der Form  $p = (i, i')$ ,  $f(p)$  gerade ist.

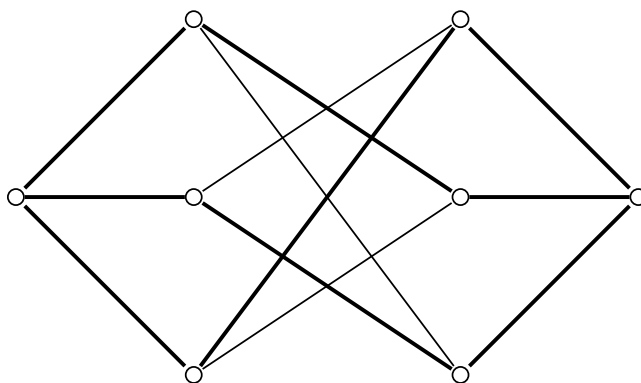


Abbildung 2.1: Schiefsymmetrisches Netzwerk zu  $K_3$

Zu jedem Graphen  $G = (V, E)$  gehört ein schiefsymmetrischer Digraph  $D = (V \dot{\cup} V', A)$ . Dabei wird jeder Knoten „verdoppelt“ und aus jeder Kante  $(i, j)$  wird ein Paar komplementärer Pfeile  $(i, j')$ ,  $(j, i')$ . Fügt man wie im bipartiten Fall zusätzlich eine Quelle  $s$  und

<sup>10</sup>vgl. Soller (2007)

eine Senke  $t$  ein (mit  $s' = t$ ), sowie Pfeile  $(s, i), (i', t)$  und eine Kapazitätsfunktion  $u = 1$ , so entspricht ein größtes Matching im nicht-bipartiten Graphen  $G$  einem maximalen balancierten  $s - t$ -Fluss  $f$  im zugehörigen Netzwerk.

Im Gegensatz zum bipartiten Fall muss  $f$  kein maximaler ganzzahliger Fluss auf dem Netzwerk sein, denn dieser muss nicht balanciert sein.  $K_3$  ist ein einfaches Beispiel für diesen Fall. Die Abbildung 2.1 zeigt das schiefssymmetrische Netzwerk, das zu  $K_3$  gehört. Dabei stellen die Linien die Pfeile dar. Ein maximaler ganzzahliger Fluss ist zum Beispiel die Funktion  $\bar{f}$  mit  $\bar{f}(p) = 1$  für die dickeren Linien und  $\bar{f}(p) = 0$  für alle anderen Pfeile. Es gilt  $value(\bar{f}) = 3$ , jeder balancierte Fluss kann jedoch höchstens den Wert 2 besitzen.

# Kapitel 3

## Nicht-bipartite Matchingspiele

In diesem Kapitel wird untersucht, wann der Core eines Matchingspiels nicht leer ist, wenn der zugrunde liegende Graph nicht bipartit ist. Für das ungewichtete Matchingspiel lässt sich dies über die Struktur des Graphen charakterisieren. Im gewichteten Fall hängt es von der Gewichtsfunktion des Graphen ab. Es wird immer angenommen, dass die Graphen schlicht sind. Zunächst wird der Core definiert.

**Definition 3.0.16.** Sei  $N = \{1, \dots, n\}$  mit  $n \in \mathbb{N}$ . Eine Funktion  $v : \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathbb{R}$  heißt charakteristische Funktion des Spiels.

**Definition 3.0.17.** Sei  $G = (N, E)$  ein Graph mit  $N = \{1, \dots, n\}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) und Gewichtsfunktion  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Das durch  $G$  und  $w$  definierte Matchingspiel sei ein Spiel mit Normalform  $(N, v)$ , wobei  $v(S) := \max(\{\sum_{e \in M} w_e \mid M \text{ ist ein Matching in } G[S]\})$  für eine nicht leere Teilmenge  $S$  von  $N$  sowie  $v(\emptyset) = 0$ . Ist die Gewichtsfunktion  $w$  konstant, spricht man von einem ungewichteten Matchingspiel und man kann (durch Skalierung) von  $w = 1$  ausgehen.

*Bemerkung.* Es gilt für das so definierte  $v$

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) \quad \forall S, T \subset N, S \cap T = \emptyset \quad (3.1)$$

Sei  $M_S$  ein gewichtsmaximales Matching in  $G[S]$  und entsprechend  $M_T$  ein gewichtsmaximales Matching in  $G[T]$ . Da  $S \cap T = \emptyset$ , ist  $M_S \cup M_T$  ein Matching in  $G[S \cup T]$ . Der Wert des gewichtsmaximalen Matchings in  $G[S \cup T]$  muss daher mindestens so groß sein wie die Summe der Gewichte von  $M_S$  und  $M_T$ .

Aufgrund der Ungleichung (3.1) ist es sinnvoll nach einer „stabilen“ Verteilung der „großen“ Koalition  $N$  zu suchen:

**Definition 3.0.18.** Sei  $(N, v)$  ein Spiel.  $Core(N, v)$  ist die Menge aller Vektoren  $y \in \mathbb{R}^n$  die

$$\sum_{i=1}^n y_i = v(N) \quad (3.2)$$

$$\sum_{i \in S} y_i \geq v(S) \quad \forall S \subset N \quad (3.3)$$

erfüllen. Einen Vektor  $y \in Core(N, v)$  nennt man eine stabile Auszahlung. Um die Abhängigkeit von der Gewichtsfunktion auszudrücken, wird bei einem Matchingspiel auch  $Core(G, w)$  geschrieben.



### 3.1 Der Core ungewichteter Matchingspiele

Der Core eines ungewichteten Matchingspiels lässt sich gut mit der Struktur eines Graphen charakterisieren.

**Satz 3.1.1.** *Der Core eines ungewichteten Matchingspiels auf  $G = (N, E)$  ist genau dann nicht leer, wenn eine der beiden Alternativen gilt:*

(i)  $G$  besitzt ein perfektes Matching

(ii) *Es gibt eine Partition der Knotenmenge  $N = A \dot{\cup} D \dot{\cup} C$ , sodass  $D$  eine stabile Menge<sup>1</sup> in  $G$  ist, mit  $|A| < |D|$ , es ein Matching in  $G[A \cup D]$  gibt, das alle Knoten von  $A$  nach  $D$  matched und  $G[C]$  ein perfektes Matching hat.*

*Beweis.* Hat der Graph ein perfektes Matching so ist der Vektor konstant  $\frac{1}{2}$  im Core. Gibt es eine Partition wie angegeben, so liegt

$$x_i := \begin{cases} 1 & \text{falls } i \in A \\ 0 & \text{falls } i \in D \\ \frac{1}{2} & \text{falls } i \in C \end{cases}$$

im Core. Andernfalls gilt für die Gallai-Edmonds-Zerlegung

$$|A| < \text{odd}(G \setminus A),$$

wobei  $\text{odd}(H)$  die Anzahl der ungeraden Komponenten eines Graphen  $H$  bezeichne. Nach Annahme gibt es hierin eine ungerade Komponente  $D_i$  mit mindestens drei Knoten und diese ist faktorkritisch (Satz 2.2.6 (1.)). Also müsste für einen Vektor  $x$  im Core für jeden Knoten  $v \in D_i$  gelten:

$$x(D_i \setminus \{v\}) = \sum_{j \in D_i \setminus \{v\}} x_j \geq \frac{|D_i| - 1}{2}.$$

Diese Ungleichungen summieren sich zu

$$(|D_i| - 1)x(D_i) \geq \frac{|D_i|(|D_i| - 1)}{2} \iff x(D_i) \geq \frac{|D_i|}{2}.$$

Nun sei  $M$  ein größtes Matching, das ein  $v \in D_i$  ungematched lässt (gibt es auf Grund der Definition von  $D$ ), so folgt

$$\sum_{j \in N} x_j \geq |M \setminus D_i| + \frac{|D_i|}{2} > |M|,$$

also ist der Core leer. □

<sup>1</sup>Eine stabile Menge ist eine Menge von Knoten, die paarweise nicht adjazent sind.

Um zu überprüfen, ob der Core eines Graphen  $G = (N, E)$  nicht leer ist, kann man zunächst die Gallai-Edmonds-Zerlegung berechnen. Dies ist mit dem Kardinalitäts-Matching-Algorithmus von Edmonds in  $O(n^3)$  möglich,<sup>2</sup> wenn der Graph  $n = |N|$  Knoten besitzt. Der Core ist nach Satz 3.1.1. genau dann nicht leer, falls eine der folgenden Alternativen gilt:

- $D = \emptyset$  (dann ist  $A = \emptyset$  und  $C = N$ )
- $D \neq \emptyset$  und  $G[D]$  hat genau  $|D|$  verschiedene Komponenten (dann bildet  $D$  eine stabile Menge in  $G$  und  $|A| < |D|$  folgt aus dem Satz von Gallai-Edmonds)

*Beispiel.* Die beiden Abbildungen stellen zwei zusammenhängende, ungewichtete Graphen dar. Die Menge  $A$  besteht in beiden Fällen aus einem einzelnen Knoten, der schwarz markiert wurde, rechts davon liegen die Knoten der Menge  $D$  und links die Knoten der Menge  $C$ . Das erste Bild zeigt einen Graphen, für den der Core des zugehörigen ungewichteten Matchingspiels nicht leer ist, denn  $D$  ist stabil,  $1 = |A| < |D| = 3$  und  $G[C]$  besitzt ein perfektes Matching.

Im zweiten Beispiel enthält die Menge  $D$  eine Komponente mit 3 Knoten, der Core ist in diesem Fall leer.

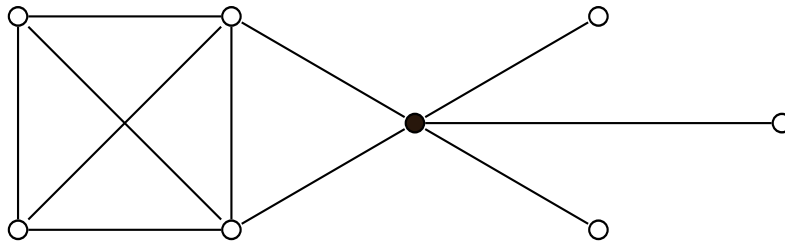


Abbildung 3.1: Beispiel 1

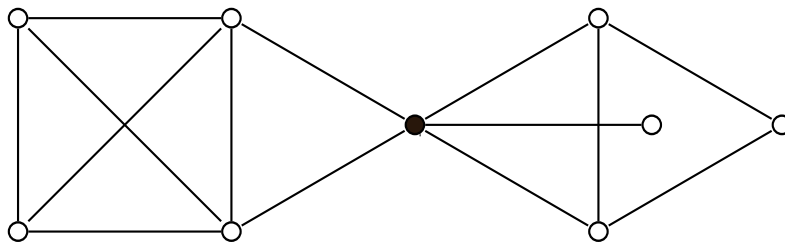


Abbildung 3.2: Beispiel 2

<sup>2</sup>vgl. Korte/Vygen (2008), S. 272-274

## 3.2 Eigenschaften der stabilen Auszahlungen

### 3.2.1 Stabile Auszahlungen als Erweiterung einfacher Auszahlungen

In Anlehnung an den Artikel „The Core of the one-sided Assignment Game“ von M. Sotomayor werden zunächst Eigenschaften der stabilen Auszahlung, also der Elemente des Cores betrachtet.

**Satz 3.2.1.** Sei  $y \in \mathbb{R}_+^N$  und  $G = (N, E)$  ein Graph mit  $N = \{1, \dots, n\}$  und Gewichtsfunktion  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i)  $y \in \text{Core}(G, w)$

(ii) Es gibt ein gewichtsmaximales Matching  $M$  in  $(G, w)$ , sodass  $y$

$$y_i + y_j \geq w_{ij} \forall ij \in E \quad (3.4)$$

$$y_r + y_s = w_{rs} \forall rs \in M \quad (3.5)$$

$$y_i = 0 \text{ falls } i \text{ ungematched ist} \quad (3.6)$$

erfüllt.

(iii) Für alle gewichtsmaximalen Matchings  $M$  in  $(G, w)$  erfüllt  $y$  die Bedingungen (3.4)-(3.6).

*Beweis.* „(i) $\Rightarrow$ (ii)“ Es sei  $y \in \text{Core}(G, w)$ . Die Ungleichung (3.4) gilt wegen (3.3) (betrachte  $S = \{i, j\} \forall ij \in E$ ). Mit dem gewichtsmaximalen Matching  $M$  gilt

$$v(N) = \sum_{i \in N} y_i \geq \sum_{i \in N[M]} y_i \geq \sum_{rs \in M} w_{rs} = v(N) \quad (3.7)$$

Es muss also überall Gleichheit gelten. Daraus folgt erst (3.6) und dann (3.5).

„(ii) $\Rightarrow$ (iii)“ Sei  $y \in \mathbb{R}_+^n$  und  $M$  ein gewichtsmaximales Matching in  $G$ , sodass (ii) erfüllt ist. Gibt es nur ein gewichtsmaximales Matching, folgt sofort (iii). Sonst gibt es ein weiteres gewichtsmaximales Matching  $M' \neq M$  in  $(G, w)$ . (3.4) gilt natürlich weiterhin. Außerdem ist

$$\sum_{i \in N} y_i = w(M) = w(M')$$

und aus (3.4) sowie  $y \geq 0$  folgt

$$w(M') = \sum_{i \in N} y_i \geq \sum_{i \in N[M']} y_i \geq \sum_{rs \in M'} w_{rs} = w(M')$$

daher gilt (3.5) und (3.6).

„(iii) $\Rightarrow$ (i)“ Sei  $y \in \mathbb{R}_+^n$ , sodass (iii) gilt, und  $S \subseteq N$ , dann gilt

$$v(S) = \sum_{ij \in M_S} w_{ij} \leq \sum_{ij \in M_S} (y_i + y_j) \leq \sum_{i \in S} y_i$$

für ein gewichtsmaximales Matching  $M_S$  in  $G[S]$ . Wegen (3.5) und (3.6) ist

$$\sum_{i \in N} y_i = \sum_{i \in N[M]} y_i = \sum_{rs \in M} (y_r + y_s) = \sum_{rs \in M} w_{rs} = v(N)$$

mit einem gewichtsmaximalen Matching  $M$ . Damit ist  $y \in \text{Core}(G, w)$ .  $\square$

*Bemerkung.* Wird ein Knoten  $i \in N$  von einem gewichtsmaximalen Matching nicht getroffen, dann muss  $y_i = 0$  für alle  $y \in \text{Core}(G, w)$  gelten. Es sei  $D_w$  die Menge der Knoten, die in mindestens einem gewichtsmaximalen Matching in  $(G, w)$  ungematched sind. Aus Bedingung (3.6) folgt, dass keine Kante mit positivem Gewicht zwei Knoten aus  $D_w$  verbinden darf, wenn der Core nicht leer ist. Damit wird noch einmal klar, warum die Menge  $D$  in Satz 3.1.1 stabil sein muss.

Einen Vektor  $y$ , der die Bedingungen (3.5) und (3.6) für ein Matching  $M$  (nicht unbedingt gewichtsmaximal) erfüllt heißt *zulässige* Auszahlung. Ein *blockierendes* Paar  $i, j$  ist ein Paar mit  $y_i + y_j < w_{ij}$ . Eine *zulässige* Auszahlung  $u$  mit zugehörigen Matching  $M$  heißt *einfach*, wenn kein Knoten aus der Menge  $N[M]$  der von  $M$  bedeckten Knoten Teil eines blockierenden Paares ist. Das heißt alle Knoten blockierender Paare werden von  $M$  nicht getroffen. Es gibt immer eine einfache Auszahlung und zwar  $u = 0$  mit zugehörigem Matching  $\bar{M} = \emptyset$ , das alle Knoten ungematched lässt.

**Definition 3.2.2.** Eine zulässige Auszahlung  $(u^*, M^*)$  erweitert die einfache Auszahlung  $(u, M)$ , falls

$$u_i^* = u_i \text{ für alle } i \in N[M] \quad (3.8)$$

$$u_j^* > u_j \text{ für ein } j \notin N[M] \quad (3.9)$$

Ist  $(u^*, M^*)$  einfach/stabil, so heißt  $(u^*, M^*)$  einfache/stabile Erweiterung von  $(u, M)$ .

Von jeder einfachen Auszahlung kann man durch Erweiterung zu einer stabilen kommen, falls der Core nicht leer ist, daher nennt M. Sotomayor diesen Ansatz ein „dynamisches Spiel“.

**Satz 3.2.3.** <sup>3</sup> Ist  $\text{Core}(G, w) \neq \emptyset$ , dann existiert zu jeder einfachen, nicht stabilen Auszahlung  $(u, M)$  eine stabile Erweiterung  $(u^*, M^*)$ .

*Beweis.* Sei  $y \in \text{Core}(G, w)$ . Setze  $u_i^* := \begin{cases} u_i & \text{für } i \in N[M] \\ y_i & \text{sonst} \end{cases}$ .

Dann gilt  $u_i^* = u_i$  für alle bedeckten Knoten  $i$  und es gibt ein unbedecktes  $j$  mit  $u_j^* > u_j = 0$ , da  $u$  nicht stabil ist.  $u^*$  ist stabil, da:

$$u_i^* + u_j^* = u_i + u_j \geq w_{ij} \quad \forall ij \in E, i, j \in N[M]$$

$$u_i^* + u_j^* \geq u_i + u_j \geq w_{ij} \quad \forall ij \in \delta(N[M])$$

$$u_i^* + u_j^* = y_i + y_j \geq w_{ij} \quad \forall ij \in E, i, j \notin N[M]$$

<sup>3</sup>vgl. Sotomayor (2005)

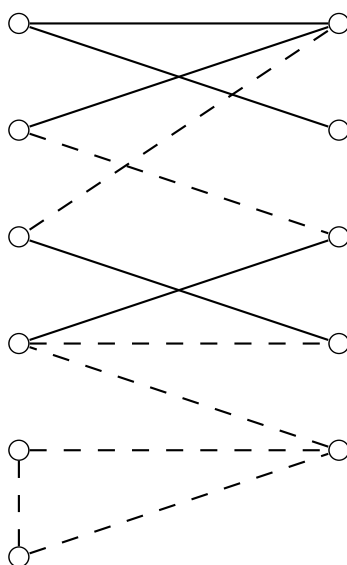
Außerdem gilt

$$\sum_{i \in N} u_i^* = \sum_{i \in N[M]} u_i + \sum_{i \in N \setminus N[M]} y_i$$

Da  $y$  stabil ist und  $u$  zulässig in  $G[M]$ , muss  $\sum_{i \in N[M]} u_i = v(N[M]) = \sum_{i \in N[M]} y_i$  gelten, daraus folgt  $\sum_{i \in N} u_i^* = \sum_{i \in N} y_i = v(N)$ . Also ist  $u^*$  eine stabile Erweiterung von  $u$ .  $\square$

Damit ist der Core genau dann nicht leer, wenn es zu jeder einfachen, nicht stabilen Auszahlung eine einfache Erweiterung gibt. Ist der Core leer, so entspricht die einfache Auszahlung  $(u, \bar{M})$ , die keine Erweiterung besitzt, einer Teilkoalition der Spieler aus  $N[\bar{M}]$ , die zu Stande kommen kann, obwohl keine Verteilung der „großen Koalition“ stabil ist. Die „Instabilität“ tritt nur zwischen den nicht von  $\bar{M}$  bedeckten Knoten auf, innerhalb von  $N[\bar{M}]$  gibt es eine stabile Auszahlung, die nicht durch die restlichen Spieler gestört wird und die Pareto Optimal ist. Jede Auszahlung, in der ein Spieler mehr bekommt als in dieser einfachen Auszahlung, stellt gleichzeitig einen anderen Spieler schlechter.

*Beispiel.* Haben im abgebildeten Graphen alle durchgezogenen Kanten Gewicht 2 und die gestrichelten das Gewicht  $\frac{1}{2}$ , dann ist der Core leer. Eine einfache Auszahlung, die keine einfache Erweiterung besitzt, ist  $u_i = 1$  für die ersten 8 Knoten und  $u_i = 0$  für die Knoten des Dreiecks.



Das Beispiel zeigt, dass eine kleine Gruppe von 3 Spielern das Matchingspiel so stören kann, dass keine stabile Auszahlung mehr existiert, egal wie viele Spieler es insgesamt gibt. In solchen Fällen liefert die Vorgehensweise von Sotomayor gute Ergebnisse. Doch es kann vorkommen, dass  $u = 0, M = \emptyset$  die einzige einfache Auszahlung ist, dann muss man auf andere Konzepte ausweichen.

### 3.2.2 Der Core als Lineare Optimierungsaufgabe

Das zu Beginn erwähnte „Assignment Game“ lässt sich als „Linear Programming Game“ formulieren. Das sind Spiele, die durch Lineare Optimierungsaufgaben definiert sind. Ökonomisch betrachtet besitzt jeder Spieler eine Menge an Ressourcen mit denen Güter unter linearen Nebenbedingungen produziert werden können. Der Wert  $v(S)$  einer Koalition  $S$  entspricht dem maximalen Wert der Güter, die mit den Ressourcen aus  $S$  hergestellt werden können.<sup>4</sup>

Im Fall eines Matchingspiels ist es nach Satz 3.2.1. hinreichend die Bedingung  $\sum_{i \in S} y_i \geq v(S)$  für die ein- und zweielementigen Teilmengen  $S$  von  $N$  zu zeigen:

$$\begin{aligned} y_i &\geq 0 && \forall i \in N \\ y_i + y_j &\geq w_{ij} && \forall ij \in E \end{aligned}$$

für einen Graphen  $G = (N, E)$  mit Gewichtsfunktion  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Ist  $M$  ein gewichtsmaximales Matching in  $(G, w)$  so gilt

$$\sum_{i \in N} y_i \geq \sum_{i \in N[M]} y_i = \sum_{rs \in M} (y_r + y_s) \geq \sum_{rs \in M} w_{rs} = v(N)$$

Damit ist  $Core(G, w) \neq \emptyset$  genau dann, wenn der optimale Wert der Linearen Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} \min \sum_{i \in N} y_i & && (3.10) \\ \text{unter } y &\geq 0 \\ y_i + y_j &\geq w_{ij} && \forall ij \in E \end{aligned}$$

den Wert  $v(N)$  annimmt.

Im bipartiten Fall wurde in Kapitel 2.2 erwähnt, dass man ein gewichtsmaximales Matching (oder genauer: den Inzidenzvektor eines gewichtsmaximalen Matchings) durch die Lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} \max w^T x & && (3.11) \\ \text{unter } x(\delta(v)) &\leq 1 && \forall v \in V \\ x_e &\geq 0 && \forall e \in E \end{aligned}$$

bestimmen kann. (3.10) ist die duale Lineare Optimierungsaufgabe zu (3.11). Mit einer optimalen Lösung  $y^* \in \mathbb{R}^n$  von (3.10) und einer optimalen (ganzzahligen) Lösung  $x^* \in \mathbb{R}^m$ , die Inzidenzvektor eines gewichtsmaximalen Matching  $M^*$  ist, gilt daher:

$$\sum_{i \in N} y_i^* = w^T x^* = w^T \chi^{M^*} = v(N)$$

---

<sup>4</sup>vgl. Samet/Zemel (1984)

also  $y^* \in \text{Core}(G, w)$ . Im bipartiten Fall wurde damit die Existenz einer stabilen Auszahlung gezeigt. Es gilt sogar  $D = \text{Core}(G, w)$ , wenn  $D$  die Menge der optimalen Lösungen von (3.10) ist.

Ist der Graph nicht bipartit, so nennt man das durch (3.11) definierte Polytop  $P_{FM} \subseteq \mathbb{R}^m$  das gebrochene Matchingpolytop. Fügt man noch die „Blossom-constraints“ hinzu, erhält man das Matchingpolytop  $P_M = \text{conv}\{\chi_M \mid M \text{ ist ein Matching}\}$ .<sup>5</sup> Damit ist

$$\begin{aligned} \max w^T x & & (3.12) \\ x(\delta(v)) &\leq 1 & \forall v \in V \\ x_e &\geq 0 & \forall e \in E \\ x(E[U]) &\leq \lfloor \frac{1}{2}|U| \rfloor & \forall U \subseteq N, |U| \text{ ungerade} \end{aligned}$$

die Lineare Optimierungsaufgabe zur Bestimmung eines gewichtsmaximalen Matchings. Das duale Programm ist<sup>6</sup>

$$\min \sum_{i \in N} y_i + \sum_{U \in P_{\text{odd}}} z_U \lfloor \frac{1}{2}|U| \rfloor \quad (3.13)$$

mit der Menge  $P_{\text{odd}}$  aller ungeraden Teilmengen von  $N$  und  $y \in \mathbb{R}_+^N, z \in \mathbb{R}^{P_{\text{odd}}}$ , die folgende Nebenbedingung erfüllen:

$$\sum_{i \in N} y_i \chi^{\delta(i)} + \sum_{U \in P_{\text{odd}}} z_U \chi^{E[U]} \geq w \quad (3.14)$$

Ist  $y \in \text{Core}(G, w)$ , so erfüllt  $y$  mit  $z = 0$  die Nebenbedingung. Da  $\sum_{i \in N} y_i = w^T x^*$  für eine optimale Lösung  $x^*$  des primalen Programms, liefert die schwache Dualität, dass  $(y, 0)$  optimal für das duale Programm ist.  $\text{Core}(G, w)$  liegt also in einer Seite des Polyeders, das durch die Ungleichungen (3.14) und  $y \geq 0$  definiert ist.

Gibt es andererseits eine optimale Lösung  $y^*, z^*$  von (3.14) mit  $z^* = 0$ , dann ist  $y^*$  eine stabile Auszahlung. Der Core eines Matchingspiels ist damit genau dann nicht leer, wenn es eine Lösung des dualen Programms gibt, sodass  $z$  der 0 Vektor ist und dies ist wiederum äquivalent dazu, dass  $\max\{w^T x \mid x \in P_{FM}\} = v(N)$ . Das gebrochene Matchingpolytop darf keine Ecke  $x$  besitzen mit  $w^T x > v(N)$ .

Betrachtet man nur ganzzahlige, nicht negative Gewichtsfunktionen  $w : E \rightarrow \mathbb{N}$ , dann hat jede Ecke des gebrochenen Matchingpolytops die Form  $\frac{\alpha}{2}$  mit einem 2-Matching  $\alpha$ .<sup>7</sup> Hat man einen Graphen  $G$  gegeben, für den die Kardinalität eines größten Matchings mit der minimalen Größe einer Knotenmenge übereinstimmt, die jede Kante bedeckt,<sup>8</sup> dann erhält man ein hinreichendes Kriterium für die Existenz einer stabilen Auszahlung.

<sup>5</sup>vgl. Schrijver (2003), S. 438 ff.

<sup>6</sup>vgl. Schrijver(2003), S.440 ff.

<sup>7</sup>vgl. Lovász/Plummer (1986), S. 291 f.

<sup>8</sup>Gilt immer in bipartiten Graphen (Satz von König). In [13], Kapitel 6.3, charakterisieren Lovász und Plummer alle Graphen, die den Satz von König erfüllen.

**Satz 3.2.4.** *Es sei  $G = (N, E)$  ein Graph, der den Satz von König erfüllt, und  $w : E \rightarrow \mathbb{N}$  eine ganzzahlige nicht negative Gewichtsfunktion. Ist ein Kardinalitätsmaximales 2-Matching  $\alpha$  auch gewichtsmaximal bezüglich  $w$ , so gilt  $\text{Core}(G, w) \neq \emptyset$ .*

*Beweis.* Ist  $G$  ein Graph, der den Satz von König erfüllt, und  $\alpha$  ein Kardinalitätsmaximales 2-Matching, so formen die Kanten  $e$  mit  $\alpha(e) > 0$  keinen Kreis ungerader Länge in  $G$ ,<sup>9</sup> eventuell aber gerade Kreise. Setze  $M_d = \{e \mid \alpha(e) = 2\}$ . Falls es einen geraden Kreis  $K$  gibt, der aus Kanten mit  $\alpha(e) = 1$  besteht, so nummeriere man die Kanten dieses Kreises bei einer beliebigen beginnend.  $K_u$  enthalte die ungeraden und  $K_g$  die geraden Kanten. Damit lassen sich zwei Matchings definieren:

$$M_u = M_d \cup \bigcup_K K_u$$

$$M_g = M_d \cup \bigcup_K K_g$$

wobei die Vereinigung über alle Kreise  $K$  mit  $\alpha(e) = 1 \forall e \in K$  läuft. Dann gilt

$$\begin{aligned} w(\alpha) &= 2 \sum_{e \in M_d} w_e + \sum_{e \in E, \alpha(e)=1} w_e \\ &= \sum_{e \in M_d} w_e + \sum_{e \in K_u} w_e + \sum_{e \in M_d} w_e + \sum_{e \in K_d} w_e \\ &= \sum_{e \in M_u} w_e + \sum_{e \in M_g} w_e \end{aligned}$$

und  $w(M_u) = w(M_g)$ , sonst könnte man ein 2-Matching mit einem größeren Gewicht als das von  $\alpha$  konstruieren. Daraus folgt  $w(M_u) = w(M_g) = \frac{w(\alpha)}{2}$  und  $\text{Core}(G, w) \neq \emptyset$ , da das gebrochene Matchingpolytop keine Ecke  $x$  mit  $w^T x > v(N)$  besitzen kann.  $\square$

<sup>9</sup>vgl. Lovász/Plummer (1986), S. 223 f.



### 3.3 Der Core gewichteter Matchingspiele

Nun hängt es von der Gewichtsfunktion ab, ob eine stabile Auszahlung existiert oder nicht. Es wird versucht die Gewichte zu charakterisieren, für die  $\text{Core}(G, w) \neq \emptyset$  gilt.

Zunächst wird gezeigt, dass man nur Graphen untersuchen muss, deren Kanten mit Gewicht ungleich Null einen zusammenhängenden Untergraphen bilden, dieser wird mit  $\text{supp}(G)$  („Supportgraph“) abgekürzt.

**Satz 3.3.1.** *Es seien  $G = (N, E)$  ein Graph,  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine Gewichtsfunktion und  $\text{supp}(G) = (N, E')$  mit  $E' = \{e \in E \mid w_e \neq 0\}$  gegeben.  $G_1, \dots, G_k$  mit  $k \in \mathbb{N}$  seien die Zusammenhangskomponenten von  $\text{supp}(G)$  und  $w_s$  sei die Einschränkung der Gewichtsfunktion  $w$  auf die Kantenmenge der Komponente  $G_s$  ( $1 \leq s \leq k$ ). Dann gilt*

$$\text{Core}(G, w) \neq \emptyset \iff \text{Core}(G_s, w_s) \neq \emptyset \quad \forall 1 \leq s \leq k$$

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Sei  $y \in \text{Core}(G, w)$  und  $M$  ein gewichtsmaximales Matching in  $G$ . Für jede Komponente  $G_s$  des Supportgraphen sei  $y^s$  der Vektor, der entsteht, wenn man  $y$  auf die Komponenten einschränkt, die den Knoten in  $G_s$  entsprechen. Ein gewichtsmaximales Matching  $M_s$  in  $G_s$  kann kein größeres Gewicht haben als  $M \cap E_s$ , sonst wäre  $M' = M \setminus E_s \cup M_s$  ein Matching in  $G$  mit einem größeren Gewicht als  $M$ . Daher ist  $y^s \in \text{Core}(G_s, w_s)$ .

„ $\Leftarrow$ “ Nun seien Vektoren  $y^s \in \text{Core}(G_s, w_s)$ ,  $1 \leq s \leq k$ , und gewichtsmaximale Matchings  $M_s$  in  $G_s$  gegeben. Die  $k$  Zusammenhangskomponenten haben keine Kanten oder Knoten gemeinsam, also ist die Vereinigung aller Matchings  $M_s$  ein Matching  $M$  in  $G$ .  $M$  ist sogar gewichtsmaximal, denn sonst könnte man ein Matching einer Zusammenhangskomponente  $G_s$  konstruieren, das ein größeres Gewicht als  $M_s$  besitzt. Definiert man  $y \in \mathbb{R}^N$  durch  $y_i := y_i^s$  falls der Knoten  $i$  in  $G_s$  liegt, dann gilt  $y \in \text{Core}(G, w)$ .  $\square$

Wie das Eingangsbeispiel zeigt, können ungerade Kreise der Grund dafür sein, dass der Core leer ist.

**Satz 3.3.2.** *Es seien ein Graph  $G = (N, E)$ ,  $N = \{1, \dots, n\}$  und eine Gewichtsfunktion  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  gegeben. Gibt es in  $G$  einen Kreis  $K$  mit*

$$\sum_{e \in K} w_e = w(K) > 2v(N),$$

*dann ist  $\text{Core}(G, w) = \emptyset$ .*

*Beweis.* Nummeriere die Knoten des Kreises mit 1 bis  $k = |K|$  in der Reihenfolge, in der sie durchlaufen werden, beginnend bei einem beliebigen Knoten. Angenommen es gäbe ein  $x \in \text{Core}(G, w)$ , dann müsste  $x$  folgende Ungleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq w_{12} \\ x_2 + x_3 &\geq w_{23} \\ &\vdots \\ x_{k-1} + x_k &\geq w_{(k-1)k} \\ x_1 + x_k &\geq w_{1k} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^k x_i \geq \frac{1}{2}w(K) > v(N)$  im Widerspruch zu  $x \in \text{Core}(G, w)$ , also ist der Core leer.  $\square$

*Bemerkung.* Mit diesem Satz ist klar, dass es für jeden nicht-bipartiten Graphen  $G = (N, E)$  eine Gewichtsfunktion gibt, für die der Core leer ist. Wähle einen beliebigen ungeraden Kreis  $K$  in  $G$ . Definiere  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  durch

$$w(e) = \begin{cases} 1 & \text{falls } e \in K \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

dann ist  $w(K) = k > 2 \frac{k-1}{2} = 2v(N)$ , wenn  $k$  die Länge des Kreises  $K$  ist. Hat man eine beliebige Gewichtsfunktion gegeben, so kann man die Gewichte auf einem ungeraden Kreis  $K$  so lange erhöhen bis  $w(K) > 2v(N)$  (das ist möglich, da höchstens  $\frac{k-1}{2}$  Kanten des Kreises in einem gewichtsmaximalen Matching liegen können, für gerade Kreise funktioniert dies nicht).

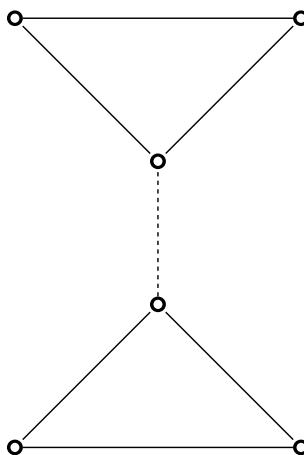


Abbildung 3.3: Beispiel

Satz 3.3.2. ist notwendig, aber nicht hinreichend. Ein Beispiel dafür ist der abgebildete Graph mit 6 Knoten. Die durchgezogenen Kanten haben Gewicht 1 und die gestrichelte Kante das Gewicht  $\frac{1}{2}$ . Für die beiden Dreiecke müsste jeweils  $2x(D_i) \geq 3, i = 1, 2$  gelten. Daraus folgt  $\sum_{j=1}^6 x_j = x(D_1) + x(D_2) \geq \frac{3+3}{2} > 2 \frac{1}{2} = v(N)$ , der Core ist also leer, obwohl  $w(D_1) = w(D_2) = 3 \leq 5 = 2v(N)$ . An diesem Beispiel sieht man, dass man Satz 3.3.2. etwas verschärfen kann:

**Satz 3.3.3.** *Es sei  $G = (N, E)$  ein Graph und  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Gibt es knotendisjunkte Kreise  $D_1, \dots, D_t$  mit*

$$w(D_1) + \dots + w(D_t) > 2v(N),$$

*dann ist  $\text{Core}(G, w) = \emptyset$ .*

*Beweis.* Wie bei Satz 3.3.2.  $\square$

Hat man einen hamiltonschen Graphen gegeben, so ist ein Hamiltonkreis nicht unbedingt gewichtsmaximal, man kann jedoch ein Kriterium angeben, wann dies der Fall ist.<sup>10</sup> Im Zusammenhang zum Core erhält man:

**Satz 3.3.4.** *Sei  $G = (N, E)$  ein hamiltonscher Graph mit Gewichtsfunktion  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  und  $EM = \{e | e \in E \cap M, M \text{ ist ein gewichtsmaximales Matching}\}$ . Gilt  $EM = E$  und  $Core(G, w) \neq \emptyset$ , dann gibt es einen Kreis maximalen Gewichts, der hamiltonsch ist.*

*Beweis.* Sei  $y \in Core(G, w)$ . Da jede Kante in einem gewichtsmaximalen Matching liegt gilt  $w_{ij} = y_i + y_j \forall ij \in E$ . Damit hat ein Kreis  $K$  das Gewicht

$$w(K) = \sum_{e \in K} w_e = 2 \sum_{v \in N[K]} y_v.$$

Aufgrund von  $y \geq 0$  folgt die Behauptung. □

Wählt man die Gewichtsfunktion  $w$  so, dass für jede Matchingkante  $m = rs$  eines festen Matchings  $M$  gilt  $w_m \geq w_{ri} + w_{sj} \forall i, j \in N \setminus \{r, s\}, i \neq j$ , dann ist der  $Core(G, w)$  offensichtlich nicht leer. Deswegen gibt es für jeden Graphen  $G$  unendlich viele Gewichtsfunktionen, für die der Core nicht leer ist. Diese Gewichtsfunktionen haben sogar eine besondere Struktur.

**Satz 3.3.5.** *Es sei  $G = (N, E)$  ein Graph. Die Vektoren der Gewichtsfunktionen  $w$ , für die  $Core(G, w) \neq \emptyset$  gilt und die ein gemeinsames gewichtsmaximales Matching  $M$  besitzen, bilden einen Kegel.*

*Beweis.* Sei  $a \in \mathbb{R}_+$  und seien  $w_1, w_2$  zwei Gewichtsfunktionen, sodass  $Core(G, w_1), Core(G, w_2) \neq \emptyset$  und es ein gemeinsames gewichtsmaximales Matching  $M$  gibt. Sei zunächst  $w_a := aw_1$ . Dann ist mit  $y \in Core(G, w_1)$  auch  $ay \in Core(G, w_a)$ .

Sei nun  $w := w_1 + w_2$  und  $y^{(i)} \in Core(G, w_i)$  für  $i = 1, 2$ . Angenommen  $M$  wäre nicht bezüglich der Gewichtsfunktion  $w$  gewichtsmaximal, d.h. es gibt ein Matching  $M'$ , dass ein größeres Gewicht hat:

$$w^T \chi^M < w^T \chi^{M'} \Leftrightarrow w_1^T \chi^M + w_2^T \chi^M < w_1^T \chi^{M'} + w_2^T \chi^{M'}$$

Dann müsste für mindestens ein  $i = 1, 2$   $w_i^T \chi^M < w_i^T \chi^{M'}$  sein. Im Widerspruch zur Maximalität von  $M$  für die Gewichtsfunktionen  $w_i$ . Daraus folgt, dass  $M$  in  $(G, w)$  gewichtsmaximal ist. Setze  $y := y^{(1)} + y^{(2)} \in \mathbb{R}_+^n$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} y_i + y_j &= y_i^{(1)} + y_j^{(1)} + y_i^{(2)} + y_j^{(2)} \geq w_1(ij) + w_2(ij) = w(ij) \\ \sum_{i=1}^n y_i &= \sum_{i=1}^n (y_i^{(1)} + y_i^{(2)}) = w_1^T \chi^M + w_2^T \chi^M = w^T \chi^M \\ &\Rightarrow y \in Core(G, w) \end{aligned}$$

□

---

<sup>10</sup>vgl. Bondy et al. (1992)

*Bemerkung.* Sind  $w_1, w_2$  Gewichtsfunktionen in  $G$ , so dass für beide der *Core* nicht leer ist, es aber kein gemeinsames gewichtsmaximales Matching gibt, dann kann für  $w := w_1 + w_2$  der *Core* leer sein. Im Allgemeinen gilt  $w^T \chi^M \leq w_1^T \chi^{M_1} + w_2^T \chi^{M_2}$ , wenn  $M$  gewichtsmaximal für  $w$  ist und  $M_i$  gewichtsmaximal für  $w_i$  ( $i = 1, 2$ ). Nur bei Gleichheit funktioniert das letzte Argument des Beweises, dann ist aber  $w_1^T \chi^M + w_2^T \chi^M = w_1^T \chi^{M_1} + w_2^T \chi^{M_2}$  und wegen  $w_i^T \chi^{M_i} \geq w^T \chi^M$ , ( $i = 1, 2$ ) ist  $M$  gewichtsmaximal für  $w_1$  und  $w_2$ , im Widerspruch zur Annahme.

Der *Core*( $G, w$ ) kann trotzdem nicht leer sein, wie folgendes Beispiel zeigt:

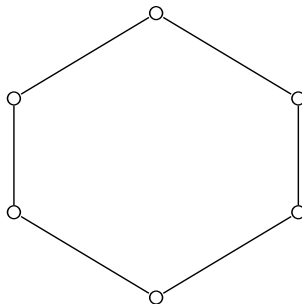


Abbildung 3.4:  $K_6$  mit Gewichten  $w_1$

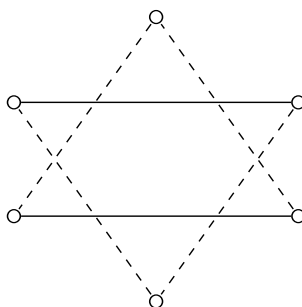


Abbildung 3.5:  $K_6$  mit Gewichten  $w_2$

*Beispiel.* Es sei der Graph  $K_6$  gegeben mit den beiden Gewichtsfunktionen  $w_1, w_2$ . Durchgezogene Kanten haben Gewicht 1, gestrichelte Gewicht  $\frac{1}{2}$ , Kanten mit Gewicht 0 wurden nicht eingezeichnet. Es gibt kein gemeinsames gewichtsmaximales Matching bzgl.  $w_1$  und  $w_2$ , doch es existiert eine stabile Auszahlung in  $K_6$  mit  $w = w_1 + w_2$  und zwar  $y_i = \frac{1}{2}$  für alle Knoten  $i$ . Würde man  $w_2$  etwas variieren, indem für eines der beiden Dreiecke in Abbildung 3.5 die Gewichte verdoppelt würden, wäre *Core*( $K_6, w$ ) leer. Daran sieht man, dass das Konzept des Cores sehr empfindlich auf Gewichtsänderungen reagiert.

**Satz 3.3.6.**  $Core(G, w) \neq \emptyset \iff$  es gibt ein (inklusions-) maximales Matching  $M$  in  $G$ , sodass:

$$w \in Cone(\{\chi^{\delta(v)} | v \in N[M]\} \cup \{-\chi^k | k \in E \setminus M\}) \cap \mathbb{R}_+^N \tag{3.15}$$

wobei  $N[M]$  die Menge der Knoten ist, die vom Matching  $M$  bedeckt werden.

*Beweis.* Sei  $y \in \text{Core}(G, w)$ . Setze  $\beta_k := y_i + y_j - w_{ij} \geq 0$  (da  $y_i + y_j \geq w_{ij}$ ) für jede Kante  $k = ij \in E \setminus M$  und  $\alpha_v = y_v \geq 0 \forall v \in N[M]$ . Dann gilt

$$w = \sum_{v \in N[M]} \alpha_v \chi^{\delta(v)} + \sum_{k \in E \setminus M} \beta_k (-\chi^k),$$

denn für  $rs \in M$  ist  $w_{rs} = \alpha_r + \alpha_s = y_r + y_s$  und für  $k = ij \in E \setminus M$  gilt  $\alpha_i + \alpha_j - \beta_k = y_i + y_j - (y_i + y_j - w_{ij}) = w_{ij}$ . Die Koeffizienten sind alle nicht negativ, daher ist

$$w \in \text{Cone}(\{\chi^{\delta(v)} | v \in N[M]\} \cup \{-\chi^k | k \in E \setminus M\}).$$

Sei nun  $w \in \text{Cone}(\{\chi^{\delta(v)} | v \in N[M]\} \cup \{-\chi^k | k \in E \setminus M\}) \cap \mathbb{R}_+^N$  mit

$$w = \sum_{v \in N[M]} \alpha_v \chi^{\delta(v)} + \sum_{k \in E \setminus M} \beta_k (-\chi^k)$$

$$\alpha_v, \beta_k \in \mathbb{R}_+$$

Für  $y \in \mathbb{R}_+$  mit  $y_i = \alpha_i \forall i \in N[M], y_i = 0 \forall i \in N \setminus N[M]$ , gilt

$$w_{ij} \leq \alpha_i + \alpha_j = y_i + y_j$$

und

$$\sum_{i \in N} y_i = \sum_{i \in N[M]} y_i = \sum_{i \in N[M]} \alpha_i = w(M),$$

also  $y \in \text{Core}(G, w)$ . □

*Beispiel.* Sei  $G = K_3$  und  $M = \{12\}$  gewichtsmaximal. Die Gewichtsfunktionen, für die der Core nicht leer ist, sind genau alle  $w \geq 0$  mit

$$w \in \text{Cone}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad (3.16)$$

und  $k_1 = 12, k_2 = 13, k_3 = 23$ .

$$\iff w_{12} \geq w_{13} + w_{23} \text{ und } \{12\} \text{ ist gewichtsmaximal.}$$

Die Menge der Gewichtsfunktionen  $w$  mit  $\text{Core}(G, w) \neq \emptyset$  lässt sich als Vereinigung endlich vieler polyedrischer Kegel schreiben. Bisher sind diese Kegel nur in der Form  $\text{Cone}(\dots)$  gegeben, aber noch nicht als Lösungsmenge eines homogenen linearen Ungleichungssystems, was möglich ist, da der Kegel aus (3.15) polyedrisch ist (siehe Satz 2.1.5). Für den Graphen  $K_3$  kann man sich dieses noch leicht überlegen, für größere  $n$  ist es nicht mehr so einfach. Im nächsten Abschnitt wird versucht dieses Ziel für alle vollständigen Graphen  $K_n$  zu erreichen.

### 3.3.1 Konstruktion für $K_n$ mit geradem $n$

In Kapitel 2.2 wurde schon darauf hingewiesen, dass man im Allgemeinen vom Graphen  $K_n$  mit einer geraden natürlichen Zahl  $n$  und einer nicht negativen Gewichtsfunktion  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  ausgehen kann (durch Einfügen von Dummy-Knoten sowie Kanten mit Gewicht 0 und Addition einer Konstanten zu  $w$ ). Daher wird in diesem Abschnitt nur mit diesem Graphen gearbeitet. Zunächst benötigt man eine Art schiefssymmetrischer Graph, der jedoch ungerichtet ist.

**Definition 3.3.7.** Der zu  $K_n$  gehörende bipartite Graph  $H = (N \cup N', E_H)$  sei isomorph zu  $K_{n,n}$  mit  $N = \{1, \dots, n\}$ ,  $N' = \{1', \dots, n'\}$  und  $(i')' = i$ . Die Gewichtsfunktion  $w_H : E_H \rightarrow \mathbb{R}_+$  von  $H$ , sei definiert durch

$$w_H(e) := \begin{cases} w_{ij} & \text{falls } e = ij' \text{ oder } e = ji' \\ 0 & \text{falls } e = ii' \end{cases}$$

Das zu  $H$  gehörende Matchingspiel sei  $(N_H, \tilde{v})$ .

Nun wird versucht eine Beziehung zwischen den stabilen Vektoren aus  $G$  und denen aus  $H$  herzustellen.

**Satz 3.3.8.**  $\tilde{y}$  sei im Core des Matchingspiels des Graphen  $H$  und der Gewichtsfunktion  $w_H$ . Gilt  $\tilde{v}(N_H) = 2v(N)$ , dann ist  $y \in \text{Core}(K_n, w)$  mit  $y_i := \frac{\tilde{y}_i + \tilde{y}_{i'}}{2}$ .

*Beweis.* Sei  $\{r, s\}$  eine beliebige Kante von  $G$ . Da  $\tilde{y} \geq 0$ , ist auch  $y \geq 0$ . Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} y_r + y_s &= \frac{1}{2}(\tilde{y}_r + \tilde{y}_s + \tilde{y}_{r'} + \tilde{y}_{s'}) \\ &= \frac{1}{2}(\tilde{y}_r + \tilde{y}_{s'}) + \frac{1}{2}(\tilde{y}_s + \tilde{y}_{r'}) \\ &\geq w_{rs} \\ \sum_{i=1}^n y_i &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i'}) = \frac{1}{2} v(N_H) = v(N) \end{aligned}$$

$\Rightarrow y \in \text{Core}(K_n, w)$  □

Falls der Core des ursprünglichen Matchingspiels nicht leer ist, gilt auch:

**Satz 3.3.9.** Sei  $y \in \text{Core}(K_n, w)$  und  $\tilde{y} \in \mathbb{R}_+^{E_H}$  mit  $\tilde{y}_i := \tilde{y}_{i'} := y_i$ . Dann gilt  $\tilde{y} \in \text{Core}(H, w_H)$ .

*Beweis.* Es gilt für beliebige  $e = \{r, s'\} \in E_H$ :

$$\tilde{y}_r + \tilde{y}_{s'} = y_r + y_s \geq w_{rs} \geq w(e)$$

Außerdem ist

$$\sum_{i=1}^n (\tilde{y}_i + \tilde{y}_{i'}) = \sum_{i=1}^n (y_i + y_i) = 2v(N) = 2w(M)$$

mit einem gewichtsmaximalen Matching  $M$  von  $G$ .

Ein gewichtsmaximales Matching  $M_H$  muss  $w_H(M_H) \leq \sum_{i=1}^n (y_{u_i} + y_{v_j}) = 2w(M)$  erfüllen (schwache Dualität).

$$\widetilde{M} = \{ij', j'i' | ij \in M\}$$

ist ein Matching in  $H$  mit  $w_H(\widetilde{M}) = 2w(M)$  und damit gewichtsmaximal. Also gilt  $\tilde{v}(N_H) = 2v(N)$  und  $\tilde{y} \in \text{Core}(H, w_H)$ .  $\square$

Der bipartite Hilfsgraph  $H$  hat immer einen nicht leeren Core. Damit ist

$$\text{Core}(K_n, w) \neq \emptyset \iff 2v(N) = \tilde{v}(N_H) \quad (3.17)$$

Nun gilt  $2v(N) = \tilde{v}(N_H)$  genau dann, wenn das im letzten Beweis definierte Matching  $\widetilde{M}$  gewichtsmaximal in  $H$  ist. Um dafür ein Kriterium zu bekommen, geht man ähnlich wie bei der Ungarischen Methode vor:

$M$  sei ein perfektes Matching in  $H$ . Orientiere jede Kante  $e$  aus  $M$  von  $N'$  nach  $N$  und ordne ihr die Länge  $l_e = w_H(e)$  zu. Alle Kanten  $e$ , die nicht in  $M$  liegen, werden von  $N$  nach  $N'$  orientiert mit der Länge  $l_e = -w_H(e)$ , dadurch erhält man den gerichteten Graphen  $D_M$ .

**Satz 3.3.10.** *Ein perfektes Matching  $M$  ist genau dann gewichtsmaximal in  $H$ , wenn es keinen Kreis negativer Länge in  $D_M$  gibt.*

*Beweis.* Zunächst sei  $M$  gewichtsmaximal. Angenommen es gäbe einen Kreis negativer Länge in  $D_M$  mit der Kantenmenge  $K$ . Dann wäre  $M \triangle K$  ein perfektes Matching mit einem größeren Gewicht. Daher kann es keinen solchen Kreis geben.

Sei  $M$  ein perfektes Matching, das nicht gewichtsmaximal ist, und  $M'$  ein perfektes Matching mit  $w(M') > w(M)$ . Der Graph  $D_M$  eingeschränkt auf die Kanten aus  $M \cup M'$  besteht aus Kreisen und einzelnen Kanten, die in beiden Matchings enthalten sind. Ist  $K$  die Kantenmenge eines Kreises mit  $l(K) \geq 0$ , dann ist  $w(M' \triangle K) \geq w(M')$ . Gibt es keinen Kreis mit negativer Länge, so liefert wiederholtes Anwenden auf alle Kreise  $K \in M' \triangle M$

$$w(M) \geq w(M')$$

ein Widerspruch zur Annahme. Es muss also mindestens einen Kreis negativer Länge in  $M \triangle M'$  geben.  $\square$

Eine Längenfunktion  $l$ , die keinen negativen Kreis zulässt, heißt konservativ. Um herauszufinden, ob das oben definierte  $l$  im Digraphen  $D_M$  konservativ ist, benutzt man den Kegel, der durch die Inzidenzvektoren der gerichteten Kreise in  $D_M$  erzeugt wird und nimmt dann den dazu polaren Kegel.

**Definition 3.3.11.** Es sei  $\mathcal{K}$  die Menge aller gerichteten Kreise im Digraphen  $D_M$  und  $\mathcal{C} := \text{Cone}(\{\chi^K | K \in \mathcal{K}\})$  der Kegel der gerichteten Kreise.

Für den Polaren Kegel  $C^*$  gilt

$$C^* = \{x \mid Zx \leq 0\}$$

mit der Matrix  $Z \in \mathbb{R}^{|\mathcal{K}| \times n^2}$ , deren Zeilen mit den Transponierten der Vektoren  $\chi^K$ ,  $K \in \mathcal{K}$  übereinstimmen (siehe Kapitel 2.1).

**Satz 3.3.12.**  $l$  ist konservativ in  $D_M \iff Zl \geq 0$

*Beweis.*  $l$  ist konservativ genau dann, wenn  $l^T \chi^K \geq 0$  für alle  $K \in \mathcal{K} \iff -l \in C^* \iff -Zl \leq 0 \iff Zl \geq 0$   $\square$

Sei  $KF$  eine geschlossene Kantenfolge im ungerichteten Graphen  $K_n$ .  $s_e \in \mathbb{N}$  gebe an, wie oft eine Kante  $e$  in der Kantenfolge durchlaufen wird ( $s_e = 0$ , wenn  $e$  nicht in  $KF$  vorkommt).

**Definition 3.3.13.** Für jede geschlossene Kantenfolge  $KF$  in  $G$  sei  $\xi^{KF} \in \mathbb{R}^m$  definiert durch

$$\xi_e^{KF} := \begin{cases} +s_e & \text{falls } e \in M \\ -s_e & \text{falls } e \in E \setminus M \end{cases}$$

Im Unterschied zu  $\chi^{KF}$  wird gezählt, wie oft eine Kante in der Kantenfolge vorkommt, und es wird berücksichtigt, ob es sich um eine Matchingkante handelt oder nicht. Damit lässt sich der Kegel (3.15) als Lösung eines Linearen Ungleichungssystems schreiben.

**Satz 3.3.14.** Es seien ein Graph  $K_n = (N, E)$  mit Gewichtsfunktion  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  und ein gewichtsmaximales Matching  $M$  gegeben. Dann gilt

$$\text{Cone}(\{\chi^{\delta(v)} \mid v \in N\} \cup \{-\chi^k \mid k \in E \setminus M\}) \cap \mathbb{R}_+ = \{w \mid \Xi \cdot w \geq 0, w \geq 0\}$$

mit der Matrix  $\Xi \in \mathbb{R}^{\mathcal{KF} \times E}$ , deren Zeilen den  $(\xi^{KF})^T$  ( $KF \in \mathcal{KF}$ ) entsprechen.

*Beweis.* Zuerst muss man die Kanten des Hilfsgraphen  $H$  nummerieren. Da es keine antiparallelen Pfeile in  $D_M$  gibt, wird vereinfacht  $i, j'$  für den Pfeil von  $i$  nach  $j'$  (wenn  $ij \notin M$ ) oder den Pfeil von  $j'$  nach  $i$  (wenn  $ij \in M$ ) geschrieben. Außerdem sei  $(i, j')' := j, i'$ . Mit

$$\begin{aligned} p_i &= i, i' \quad \forall i \in N \\ p_{n+1} &= 1, 2', p_{n+2} = 1, 3', \dots, p_{n+(n-1)} = 1, n' \\ p_{2n} &= 2, 3', \dots, p_{2n+(n-3)} = 2, n' \\ &\vdots \\ p_{n+\frac{n^2-n}{2}} &= n-1, n' \\ p_{\frac{n^2+n}{2}+i} &= (p_{n+i})' \quad \forall i = 1, \dots, \frac{n^2-n}{2} \end{aligned}$$



und dem gewichtsmaximalen Matching  $M$  gilt:

$$\text{Core}(K_n, w) \neq \emptyset \iff Zl \geq 0$$

$$\text{mit } l = \begin{pmatrix} 0 \\ w_M \\ w_M \end{pmatrix}, \quad w_M(e) = \begin{cases} w(e) & e \in M \\ -w(e) & \text{sonst} \end{cases}.$$

Schreibt man  $\chi^K$  mit  $a_K \in \mathbb{R}^n, b_K, c_K \in \mathbb{R}^m$  in der Form

$$\chi^K = \begin{pmatrix} a_K \\ b_K \\ c_K \end{pmatrix}$$

so ist  $Zl \geq 0 \iff (a_K, b_K, c_K) \begin{pmatrix} 0 \\ w_M \\ w_M \end{pmatrix} \geq 0 \iff (b_K + c_K)w_M \geq 0$  für alle Kreise  $K \in \mathcal{K}$ .

Projiziert man einen gerichteten Kreis aus  $D_M$  auf den Graphen  $K_n$ , so erhält man eine zugehörige Kantenfolge. Die Menge dieser Kantenfolgen wird im Folgenden mit  $\mathcal{KF}$  bezeichnet. Insbesondere gelten für einen gerichteten Kreis  $K$  und der zugehörigen Kantenfolge  $KF$  die Gleichungen  $b_K(e) + c_K(e) = \xi_e^{KF} \forall e \in M$  und  $b_K(e) + c_K(e) = -\xi_e^{KF}$  für alle restlichen Kanten  $e \in E \setminus M$ . Daraus folgt

$$(b_K + c_K)w_M \geq 0 \iff \xi^{KF} w \geq 0 \quad (3.18)$$

für alle Kantenfolgen  $KF \in \mathcal{KF}$ , also entspricht die Menge aus (3.15) für  $K_n$  den nicht negativen Lösungen von  $\Xi \cdot w \geq 0$ .  $\square$

*Bemerkung.* Aus der Konstruktion der Kantenfolgen  $KF \in \mathcal{KF}$  folgt

1.  $KF$  ist geschlossen.
2. Jede Kante  $e$  und jeder Knoten  $i$  kommt höchstens zweimal in  $KF$  vor, da  $i$  und  $i'$  höchstens einmal in jedem Kreis vorkommen können und ein Kreis höchstens einmal die beiden zu  $e$  komplementären Kanten besitzen kann.
3. Eine Matchingkante darf direkt zweimal hintereinander durchlaufen werden, sonst kommen Kanten aus  $M$  und  $E \setminus M$  in  $KF$  abwechselnd vor.

Dies motiviert folgende Definition.

**Definition 3.3.15.** Für ein gewichtsmaximales Matching in  $(K_n, w)$  sei  $\mathcal{R}(M) \subset \mathbb{R}^E$  die Menge aller Vektoren  $r$ , für die gilt:

$$r_m \in \{0, 1, 2\} \quad \forall m \in M \quad (3.19)$$

$$r_e \in \{-2, -1, 0\} \quad \forall e \in E \setminus M \quad (3.20)$$

$$\sum_{e \in \delta(i)} r_e \geq 0 \quad \forall i \in N \quad (3.21)$$

und für alle  $i \in N$  darf es höchstens drei verschiedene zu  $i$  adjazente Kanten geben mit  $r_e \neq 0$  (eine Matchingkante und zwei Nicht-Matchingkanten).

Aus (3.19) und (3.20) folgt, dass höchstens  $3^{|E|}$  Vektoren in  $\mathcal{R}(M)$  liegen, was natürlich nur eine grobe Abschätzung ist. Alle  $\xi^{KF}$  sind in der Menge enthalten, aber auch andere Vektoren.

**Satz 3.3.16.** *Sei  $K_n = (N, E)$  ein Graph mit Gewichtsfunktion  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  und  $M$  ein gewichtsmaximales Matching in  $(K_n, w)$ . Ein Vektor  $r \in \mathcal{R}(M)$  ist entweder konstant 0 oder lässt sich schreiben als*

$$r = \sum_{m \in M} a_m \chi^m + \sum_{j=1}^k \xi^{KF_j} \text{ mit } KF_j \in \mathcal{KF}, k \in \mathbb{N}, a_m \in \{0, 1, 2\} \forall m \in M$$

*Beweis.* Ist  $r$  der Nullvektor oder gibt es eine Kantenfolge  $KF \in \mathcal{KF}$  mit  $r = \xi^{KF}$ , dann ist nichts zu zeigen. Auch jeder Vektor  $r \geq 0$  lässt sich wie behauptet schreiben. Sonst verdopple jede Kante  $e \in E$  mit  $|r_e| = 2$  und betrachte den Graphen  $G' = (N, E')$  mit  $E' := \{e \in E \mid r_e \neq 0\}$  und doppelten Kanten. Der Satz wird mit Induktion nach der Anzahl der Kanten dieses Graphen bewiesen.

Für  $|E'| = 1$  besteht  $E'$  nur aus einer einzelnen Matchingkante und die Behauptung ist erfüllt. Nun sei die Behauptung für alle  $r$  mit  $|E'| < s$  erfüllt mit einem  $s \in \mathbb{N}$ ,  $s \geq 2$  und  $r'$  sei ein Vektor mit  $|E'| = s$ .

1.  $G'$  ist nicht zusammenhängend. Definieren für jede Zusammenhangskomponente des Graphen  $G'$  einen Vektor  $\tilde{r} \in \mathbb{R}^E$  durch

$$\tilde{r}_e = \begin{cases} 1, & \text{falls } e \in E' \text{ und keine parallele Kante zu } e \text{ existiert} \\ 2, & \text{falls } e \in E' \text{ und eine parallele Kante zu } e \text{ existiert} \\ 0, & \text{falls } e \notin E' \end{cases}$$

für alle Kanten  $e \in E$ .  $\tilde{r}$  muss in  $\mathcal{R}(M)$  liegen, sonst wäre  $r' \notin \mathcal{R}(M)$ . Außerdem hat der Graph  $\tilde{G}$  der durch  $\tilde{r}$  wie oben definiert ist weniger als  $s$  Kanten, d.h. für  $\tilde{r}$  ist der Satz erfüllt und  $r'$  lässt sich als Summe von Vektoren schreiben, die die Behauptung erfüllen.

2.  $G'$  ist zusammenhängend, dann muss es ein  $m \in M$  oder eine Kantenfolge  $KF \in \mathcal{KF}$  geben, sodass  $r' - \chi^m \in \mathcal{R}(M)$  oder  $r' - \xi^{KF} \in \mathcal{R}(M)$ . Trifft nicht der erste Fall ein, dann betrachte man den Untergraphen  $D' = (N \cup N', \bar{A})$  von  $D_M$ , der die beiden komplementären Pfeile enthält, die den Kanten aus  $G'$  entsprechen, und die Pfeile  $(i, i') \forall i \in N$ .  $D'$  enthält eine Kantenfolge  $\bar{K}F$ , die höchstens einen der beiden komplementären Pfeile enthält, wenn  $|r'_e| = 1$  für die zugehörige Kante  $e'$  gilt. Damit ist  $r' - \xi^{\bar{K}F} \in \mathcal{R}(M)$ .

□

Mit den Vektoren aus  $\mathcal{R}(M)$  kann man ein redundantes Ungleichungssystem für  $w$  erhalten. Dazu seien  $r^{(1)}, r^{(2)}, \dots, r^{(t)} \in \mathbb{R}^E$  alle Vektoren aus  $\mathcal{R}(M) \setminus \{0\}$ . Die Transponierten dieser Vektoren bilden die Zeilen der Matrix  $R \in \mathbb{R}^{t \times E}$ .

**Satz 3.3.17.** *Es sei  $K_n = (N, E)$  gegeben mit  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Es ist  $\text{Core}(K_n, w) \neq \emptyset \iff R w \geq 0$ , wobei  $R$  wie oben definiert ist für ein gewichtsmaximales Matching  $M$  in  $(K_n, w)$ .*

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “ Da alle  $(\xi^{KF})^T$  als Zeilen in der Matrix  $R$  enthalten sind, gilt insbesondere  $\Xi \cdot w \geq 0$ . Aus Satz 3.3.13 folgt, dass der Core nicht leer ist.

„ $\Rightarrow$ “ Nach Satz 3.3.13. gilt  $\Xi \cdot w \geq 0$  und  $(\chi^m)^T \cdot w \geq 0$  wegen  $w \geq 0$ . Da man alle Zeilen von  $R$  durch Addition von Zeilen der Matrix  $\Xi$  und transponierten Inzidenzvektoren der Matchingkanten erhalten kann muss auch  $R w \geq 0$  gelten.  $\square$

Für manche Kantenfolgen aus  $\mathcal{KF}$  folgt schon aus der Konstruktion, dass sie kein negatives Gewicht haben können:

**Satz 3.3.18.** *Es sei  $KF \in \mathcal{KF}$  eine Kantenfolge, für die es eine Gewichtsfunktion  $w$  gibt, so dass  $M$  gewichtsmaximal in  $(G, w)$  ist, und  $(\xi^{KF})^T w < 0$ . Dann gilt:*

(i)  *$KF$  ist kein Kreis im Graphen  $G$ , d.h. es gibt ein  $i \in N$  mit  $\sum_{e \in \delta(i)} \xi_e^{KF} > 0$ .*

(ii)  *$6 \leq |K| \leq 2n$  und  $|K|$  ist gerade, wobei  $K$  der zu  $KF$  gehörende Kreis in  $D_M$  ist.*

*Beweis.* (i) Ist  $KF$  ein Kreis in  $G$  und  $w_M(KF) < 0$ , so kann man durch  $M \triangle KF$  ein Matching mit größerem Gewicht erhalten, im Widerspruch zur Maximalität von  $M$ , d.h.  $KF$  kann kein Kreis sein.

(ii) Ein Kreis  $K$  in  $D_M$  besteht aus mindestens 4 Pfeilen und ist gerade, da  $D_M$  bipartit ist. Wie man an der Konstruktion von  $D_M$  erkennt, müssen Kreise mit  $|K| = 4$  entweder Kreise in  $G$  ergeben oder die Form  $(i, i'), (i', j), (j, j'), (j', i)$  haben ( $ij \in M$ ) mit Länge  $-0 + w_{ij} - 0 + w_{ij} = 2w_{ij} \geq 0$  für alle Gewichtsfunktionen  $w$ .

Gerichtete Kreise in  $D_M$  können höchstens die Länge  $2n$  besitzen, dabei wird jeder Pfeil, der zu einer Matchingkante gehört durchlaufen.  $\square$

Man kann alle Zeilen der Matrix  $R$  streichen, die nicht mindestens 3 Einträge ungleich Null besitzen oder die (3.21) immer mit Gleichheit erfüllen. Diese Zeilen stellen nur sicher, dass  $M$  ein gewichtsmaximales Matching in  $(K_n, w)$  ist, was aber sowieso vorausgesetzt wurde. Außerdem kann man alle Zeilen streichen, die keinen negativen Eintrag besitzen.

Bisher ist es noch offen, ob das Matchingpolytop im nicht-bipartiten Fall als Lösungsmenge eines Ungleichungssystems geschrieben werden kann, dessen Größe (Anzahl an Zeilen und Spalten) polynomiell mit der Anzahl der Knoten und Kanten wächst. Für  $K_n$  ist dies nicht möglich, wenn man zusätzlich verlangt, dass für jede Permutation der Knotenmenge die Variablen auch entsprechend permutiert werden können, also das Gleichungssystem invariant unter Permutationen der Knotenmenge ist.<sup>11</sup> Für planare Graphen hat Francisco Barahona gezeigt, dass es möglich ist.<sup>12</sup>

*Beispiel* (Der vollständige Graph  $K_4$ ). Für  $K_4$  kann man sich noch relativ einfach die benötigten Kantenfolgen überlegen. Der zugehörige Hilfsgraph entspricht dem vollständigen

<sup>11</sup>siehe Yannakakis (1991)

<sup>12</sup>siehe Barahona (1993)

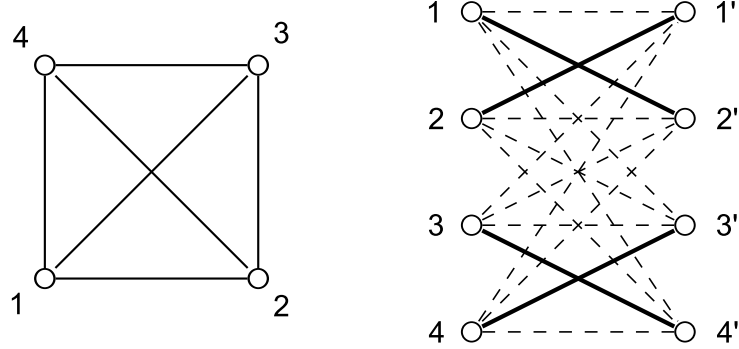


Abbildung 3.6:  $K_4$  und zugehöriger Hilfsgraph  $K_{4,4}$

bipartiten Graphen  $K_{4,4}$ . Ist  $N = \{1, 2, 3, 4\}$ , so erhält man für  $G$  den Graphen  $K_4$  und für  $H$  den bipartiten Graphen  $K_{4,4}$ . Es sei  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine Gewichtsfunktion und  $M$  ein gewichtsmaximales Matching; man kann annehmen, dass  $M = \{12, 34\}$  (eventuell muss man um nummerieren).

Der Digraph  $D_M$  enthält Kreise  $K$  mit  $|K| = 4, 6, 8$ , wobei nur die Kreise mit 6 Kanten eine negative Länge besitzen können. In einer zu einem Kreis mit 8 Kanten gehörenden Kantenfolge kommt jede Kante aus  $K_4$  vor, die beiden Matchingkanten genau zweimal, die restlichen Kanten nur einmal. Die Gewichtsfunktion  $w$  muss dann  $2w_{1,2} + 2w_{3,4} \geq \sum_{e \in E \setminus M} w_e$  erfüllen, was jedoch immer gilt, denn sonst hätte  $\{13, 24\}$  oder  $\{14, 23\}$  ein größeres Gewicht als  $M$ .

Ein Kreis  $K$  der Länge 6 besteht aus 3 Matchingkanten, einer Kante der Form  $\{i, i\}$  und 2 anderen Kanten.  $K$  durchläuft je einen Knoten von  $N$  und  $N'$  nicht. 8 solcher Kreise sind möglich, wobei je zwei die gleichen Kanten in  $G$  besitzen, denn sie bestehen aus komplementären Pfeilen. Zum Beispiel:  $K = \{(3, 4), (4, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1), (1, 3)\}$  und  $w(K) \geq 0$  liefert

$$\begin{aligned}
 & w_{34} - w_{14} + w_{12} - 0 + w_{12} - w_{13} \geq 0 \\
 \Leftrightarrow & w_{34} + 2w_{12} \geq w_{13} + w_{14} \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{2}(w_{13} + w_{14} - w_{34}) \leq w_{12} \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{2}(w(\delta(1)) - v(N)) \leq w_{12} \tag{3.22}
 \end{aligned}$$

Entsprechend erhält man

$$\frac{1}{2}(w(\delta(2)) - v(N)) \leq w_{12} \tag{3.23}$$

$$\frac{1}{2}(w(\delta(3)) - v(N)) \leq w_{34} \tag{3.24}$$

$$\frac{1}{2}(w(\delta(4)) - v(N)) \leq w_{34} \tag{3.25}$$

In Anschluss an Satz 3.3.18 konnten schon einige überflüssige Ungleichungen entfernt werden, doch die Matrix  $\bar{R}$ , die nach dem Streichen der entsprechenden Zeilen übrig bleibt, ist immer noch redundant.

### 3.3.2 Zusammenhang zu balancierten Flüssen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie die Frage, ob der *Core* nicht leer ist, mit schief-symmetrischen Netzwerken und balancierten Flüssen zusammenhängt. Zunächst wird auf einem  $b$ -*Fluss* eine Kostenfunktion eingeführt und der Residualgraph definiert, mit dessen Hilfe man überprüfen kann, ob ein gegebener Fluss minimale Kosten besitzt.

**Definition 3.3.19.** Gegeben sei ein Digraph  $D = (V, A)$  mit einer Kapazitätsfunktion  $u : A \rightarrow \mathbb{R}_+$  und eine Funktion  $b : V \rightarrow \mathbb{R}$ , die den *Knoten* eine reelle Zahl zuordnet. Ein  $b$ -*Fluss* ist ein zulässiger Fluss  $f : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ , der zusätzlich  $ex_f(v) = b(v)$  erfüllt. Definiert man eine Kostenfunktion  $c : A \rightarrow \mathbb{R}$ , so bezeichnet Min Cost Flow (MCF), das Problem einen  $b$ -*Fluss* mit minimalen Kosten  $c(f) = \sum_{p \in A} f(p)c(p)$  zu finden.

**Definition 3.3.20.** Es seien wie in der letzten Definition ein Digraph  $D$ , Kapazitäten  $u$ , eine Funktion  $b$  auf den Knoten, ein  $b$ -*Fluss*  $f$  und eine Kostenfunktion  $c$  gegeben. Für jeden Pfeil  $p = (v, w) \in A$  wird durch  $p' = (w, v)$  eine neue Kante definiert, die gegenläufige Kante zu  $p$ .  $D_R := (V, A \cup \{p' | p \in A\})$  mit Kosten  $c_R(p) = c(p)$ ,  $c_R(p') = -c(p) \forall p \in A$ . Die Residualkapazität  $u_f : A(D_R) \rightarrow \mathbb{R}_+$  wird durch  $u_f(p) := u(p) - f(p)$  und  $u_f(p') = f(p) \forall p \in A$  definiert. Der Residualgraph  $D_f$  ist nun der Digraph, der nur Pfeile mit positiver Residualkapazität enthält:

$$D_f = (V, \{p \in A(D_R) | u_f(p) > 0\})$$

Ein  $b$ -*Fluss* hat genau dann minimale Kosten, wenn es keinen Kreis mit negativen Kosten bezüglich  $c_R$  im Residualgraphen gibt. Die Kreise im Residualgraphen nennt man auch  $f$ -augmentierend.

**Satz 3.3.21.** <sup>13</sup> Sei  $(D, u, b, c)$  eine Instanz des MCF. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. Ein  $b$ -*Fluss*  $f$  hat minimale Kosten.
2. Es gibt keinen  $f$ -augmentierenden Kreis mit negativen Kosten.
3. Es existiert eine Funktion  $pot : V \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass für alle Pfeile  $(i, j)$  des Residualgraphen die reduzierten Kosten

$$c_{ij}^{pot} := c_{ij} + pot(i) - pot(j)$$

nicht negativ sind.  $pot$  heißt in diesem Fall zulässiges Potential.

<sup>13</sup>vgl. Hochstättler/Schliep (2010), S. 90 ff.

Mit balancierten Flüssen kann man ein gewichtsmaximales Matching in dem vollständigen Graphen  $K_n = (N, E)$  mit geradem  $n$  berechnen. Dazu definiert man einen Digraphen  $D = (N \dot{\cup} N', A)$  (siehe Abschnitt 2.2.2) mit:

$$\begin{aligned} (i')' &= i \quad \forall i \in N \\ A &:= \{(i, j'), (j, i') \mid ij \in E\} \cup \{(i, i') \mid i \in N\} \\ u : A &\rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ mit } u(p) := 1 \quad p \in A \\ b : N \dot{\cup} N' &\rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ mit } b(i) := \begin{cases} -1 & \text{falls } i \in N \\ 1 & \text{falls } i \in N' \end{cases} \end{aligned}$$

und Kostenfunktion  $c : A \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $c((i, j')) = c((j, i')) = -w_{ij}$ .

**Satz 3.3.22.** *Sei  $f : A \rightarrow \mathbb{Z}$  ein balancierter  $b$ -Fluss in  $(D, u, b, c)$  (wie oben definiert) mit minimalen Kosten. Die Menge der Kanten aus  $K_n$ , die denjenigen (komplementären) Pfeilen aus  $A$  entsprechen, deren Fluss nicht Null ist, sei  $M$ . Dann ist  $M$  ein gewichtsmaximales Matching in  $(K_n, w)$ . Ist umgekehrt ein gewichtsmaximales Matching  $M$  gegeben, so ist:*

$$f(p) := \begin{cases} 1 & \text{falls } p = (i, j'), p = (j, i') \text{ und } ij \in M \\ 1 & \text{falls } p = (i, i') \text{ und } i \text{ ist ungematched} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

*ein balancierter  $b$ -Fluss mit minimalen Kosten.*

*Beweis.* Ist  $f : A \rightarrow \mathbb{Z}$  balancierter Fluss und die Menge  $M$  wie im Satz definiert, dann gilt  $\deg_{G'}(i) \leq 1$ , da  $b(i) = 1$ ,  $b(i') = -1$  und die Kapazitätsfunktion konstant 1 ist, wird jeder Knoten aus  $D$  von genau einem Pfeil  $p$  mit  $f(p) \neq 0$  bedeckt. Ist  $M$  ein Matching, so ist der Fluss  $f : A \rightarrow \mathbb{Z}$ , der wie oben definiert wird, zulässig und balanciert. Jeder balancierte  $b$ -Fluss entspricht einem Matching  $M$  und umgekehrt.

Auf Grund der Definition der Kostenfunktion  $c$  besitzt ein balancierter  $b$ -Fluss minimale Kosten, wenn das zugehörige Matching gewichtsmaximal in  $(K_n, w)$  ist. Ist andererseits  $M$  gewichtsmaximal, so muss der zugehörige balancierte  $b$ -Fluss  $f$  minimale Kosten unter allen balancierten  $b$ -Flüssen besitzen.  $\square$

$\text{Core}(K_n, w) \neq \emptyset$  gilt genau dann, wenn der *balancierte*  $b$ -Fluss  $f$ , der zu einem gewichtsmaximalen Matching  $M$  gehört, minimale Kosten unter *allen* ganzzahligen Flüssen hat. Dies ist der Fall, wenn im Residualgraphen kein Kreis negativer Kosten existiert. Der Graph  $D_f$  enthält alle gegenläufigen Kanten für Pfeile, die den Matchingkanten entsprechen, und alle Pfeile, die den Nicht-Matchingkanten entsprechen. Die Kosten der gegenläufigen Kanten sind dann die positiven Gewichte und die der übrigen Pfeile die negativen Gewichte der zugehörigen Kanten in  $K_n$ . An dieser Stelle schließt sich der Kreis zum Satz 3.3.10.

Wendet man das Kriterium der reduzierten Kosten an, erhält man folgende relativ triviale Aussage.

**Satz 3.3.23.**

$$\text{Core}(K_n, w) \neq \emptyset \iff \exists z \in \mathbb{R}_+^N : \begin{aligned} z_i + z_j &\geq w_{ij} \quad \forall ij \in E \setminus M \\ z_i + z_j &\leq w_{ij} \quad \forall ij \in M \end{aligned}$$

*Beweis.*  $M$  sei ein gewichtsmaximales Matching und  $f$  der zugehörige balancierte Fluss. Ist  $\text{pot}$  ein zulässiges Potential auf  $D_f$ , dann haben die reduzierten Kosten die Form

$$\begin{aligned} c_{ij'}^{\text{pot}} &= -w_{ij} + \text{pot}(i) - \text{pot}(j) \geq 0 \quad \forall (i, j') \in A(D_f) \\ c_{ii'}^{\text{pot}} &= \text{pot}(i) - \text{pot}(i') \geq 0 \quad \forall (i, i') \in A(D_f) \\ c_{i'j}^{\text{pot}} &= w_{ij} + \text{pot}(i') - \text{pot}(j) \geq 0 \quad \forall (i', j) \in A(D_f) \end{aligned}$$

Addiert man jeweils die Ungleichungen komplementärer Pfeile, so folgt daraus, dass  $z$  mit  $z_i := \frac{\text{pot}(i) - \text{pot}(i')}{2} \quad \forall i \in N$  die gewünschten Eigenschaften besitzt.

Ist andererseits  $z$  mit den obigen Eigenschaften gegeben, dann ist

$$\text{pot}(v) = \begin{cases} z_v & \text{falls } v \in N \\ -z_v & \text{falls } v \in N' \end{cases}$$

ein zulässiges Potential auf  $D_f$ . □

Mit dem Lemma von Farkas' erhält man

**Satz 3.3.24.**  $\text{Core}(K_n, w) \neq \emptyset \iff$  für ein gewichtsmaximales Matching  $M$  gilt

$$\sum_{e \in M} x_e w_e \geq \sum_{e \in E \setminus M} x_e w_e$$

für alle Vektoren  $x \in \mathbb{R}_+^N$  mit

$$\sum_{e \in \delta(v) \cap M} x_e \geq \sum_{e \in \delta(v) \setminus M} x_e \quad \forall v \in N.$$

*Beweis.* Es sei  $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{N \times E}$  definiert durch

$$\tilde{b}_{ij} := \begin{cases} b_{ij} & \text{falls } j \in M \\ -b_{ij} & \text{sonst} \end{cases}$$

mit der Inzidenzmatrix  $B$  des Graphen  $K_n$ . Der Core ist damit genau dann nicht leer, wenn das lineare Ungleichungssystem  $z^T \tilde{B} \leq (w_M)^T$  eine nicht negative Lösung  $z \in \mathbb{R}_+^N$  besitzt. Und das ist nach dem Lemma von Farkas' äquivalent dazu, dass  $x^T w_M \geq 0$  für alle nicht negativen Lösungen  $x \in \mathbb{R}_+^E$  von  $\tilde{B}x \geq 0$ , woraus die Behauptung folgt. □

*Bemerkung.* Definiert man für einen Vektor  $r$  aus  $\mathcal{R}(M)$  ein  $x \in \mathbb{R}_+^N$  durch  $x_i = |r_i|$  für  $i = 1, \dots, n$ , erhält man

$$0 \leq \sum_{e \in \delta(i)} r_e = \sum_{e \in \delta(v) \cap M} x_e - \sum_{e \in \delta(v) \setminus M} x_e$$

Die Resultate aus dem vorigen Abschnitt haben also gezeigt, dass man die Bedingung des letzten Satzes nicht für alle Vektoren  $x \in \mathbb{R}_+^N$  überprüfen muss.

Natürlich kann man anstatt  $b$ -Flüsse auch  $s-t$ -Flüsse betrachten, indem man zwei neue Knoten  $s$  und  $t$  einführt und so ein Netzwerk und nicht nur einen Digraphen erhält, dadurch lassen sich beliebige Graphen bearbeiten. Anhand von  $b$ -Flüssen sieht man die Analogie zur Vorgehensweise in Abschnitt 3.3.1, weswegen sie hier gewählt wurden. Mehr über Balancierte Netzwerke und Digraphen kann man in der Artikelreihe *Balanced Network Flows* von Fremuth-Paeger und Jungnickel erfahren.<sup>14</sup> Dort wird ein Algorithmus entwickelt, um das BMCF-Problem („Balanced Minimum Cost Flow“) zu lösen. Das ist sogar das bisher schnellste Verfahren, um ein nicht-bipartites gewichtsmaximales Matching zu berechnen.

---

<sup>14</sup>Für einen Überblick siehe [7], in [8] wird der Zusammenhang von gewichteten Matchings und BMCF genauer erläutert.



# Kapitel 4

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde die Frage, wann der *Core* eines nicht-bipartiten Matchingspiels nicht leer ist, im Zusammenhang zu Linearer Optimierung und Flüssen in schiefssymmetrischen Netzwerken beantwortet.

Für den ungewichteten Fall konnte gezeigt werden, dass es von der Struktur des Graphen abhängig ist, ob eine stabile Auszahlung existiert. Mit Hilfe der Gallai-Edmonds-Zerlegung erhält man eine Charakterisierung aller Graphen mit nicht leerem *Core*.

Im gewichteten Fall hängt es von der Gewichtsfunktion ab, ob der *Core* leer ist oder nicht. Für jeden Graphen  $G$  bilden die Gewichtsfunktionen mit  $\text{Core}(G, w) \neq \emptyset$  und einem festen gewichtsmaximalen Matching  $M$  einen polyedrischen Kegel. Für den vollständigen Graphen  $K_n$  wurde dieser Kegel als Lösung eines Linearen Ungleichungssystems geschrieben. Die Anzahl der Ungleichungen hängt jedoch exponentiell von der Anzahl der Knoten und Kanten ab. Fände man eine Darstellung des Matchingpolytops als Lineares Ungleichungssystem, dessen Größe polynomiell von der Größe des Graphen abhängt, dann könnte man daraus vielleicht auch ein Lineares Ungleichungssystem für die Gewichtsfunktionen mit  $\text{Core}(G, w) \neq \emptyset$  herleiten.

Ein Vorteil der Konstruktion für  $K_n$  ist, dass man die Algorithmen für das Assignment Game anwenden kann. Zum Beispiel berechnet eine Variante der Ungarischen Methode [9], ein stabile Auszahlung in  $\mathcal{O}(n^3)$ , falls der *Core* nicht leer ist. Gibt der Algorithmus ein Matching  $M$  im Hilfsgraphen aus, das aus Kanten der Form  $(i, j')$ ,  $(j, i')$  besteht, so ist sicher  $\text{Core}(K_n, w) \neq \emptyset$ . Hat  $M$  nicht diese Form, kann man keine Aussage treffen.

Anwendungen nicht-bipartiter Matchingspiele wurden nicht behandelt. Es wäre interessant, ob es wie im bipartiten Fall „realistische“ Anwendungen gibt. Falls ja, müsste man untersuchen, inwiefern das Konzept des Cores dazu geeignet ist, eine Verteilung zu berechnen. Wenn sehr selten stabile Auszahlungen existieren, könnte man erst untersuchen, ob es einfache Auszahlungen gibt, an der fast alle Spieler beteiligt sind. Die „Instabilität“ wäre dann unter Umständen (bei sehr vielen Spielern) vernachlässigbar. Falls auch dies nicht der Fall ist, könnte man andere Konzepte wie zum Beispiel das des Nukleons<sup>1</sup> anwenden.

---

<sup>1</sup>vgl. Faigle, Fekete, Hochstättler, Kern (1994)

# Literaturverzeichnis

- [1] Bang-Jensen, J., Gutin, G. (2007): *Digraphs - Theory, Algorithms and Application*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [2] Barahona, F. (1993): *On cuts and matchings in planar graphs*. In: *Mathematical Programming*, Heft 60, 1993, S. 53-68.
- [3] Barahona, F. (1993): *Reducing matchings to polynomial size linear programming*. In: *Siam J. Optimization*, Heft 3(4), 1993, S. 688-695.
- [4] Bondy, J. A., Broersma, H. J., van den Heuvel, J., Veldman, H. J. (1992): *Heavy cycles in weighted graphs*. <http://www.ecp6.jussieu.fr/pageperso/bondy/bondy.html>, Abruf am 2. Februar 2010.
- [5] Diestel, R. (2006): *Graphentheorie*. Springer-Verlag Heidelberg, Heidelberg 2006 (elektronische Ausgabe).
- [6] Faigle, U., Fekete, S., Hochstättler, W., Kern, W. (1994): *The Nukleon of Cooperative Games and an Algorithm for Matching Games*. Technical Report, University of Twente, Universität zu Köln, 1994.
- [7] Fremuth-Paeger, C. und Jungnickel, D. (1999): *Balanced Network Flows. I. a unifying framework for design and analysis of matching algorithms*. In: *Networks*, Heft 33(1), 1999, S. 1-28.
- [8] Fremuth-Paeger, C. und Jungnickel, D. (2001); *Balanced Network Flows. VI. Polyhedral Descriptions*. In: *Networks*, Heft 37(1), 2001, S. 210-218.
- [9] Hochstättler, W., Jin, H. und Nickel, R. (2005): *The Hungarian Method in a Mixed Matching Market*. Technical Report, FernUniversität in Hagen, November 2005.
- [10] Hochstättler, W., Nickel, R. und Schiess, D. (2008): *Mixed Matching Markets*. Technical Report, FernUniversität in Hagen, Januar 2008.
- [11] Hochstättler, W. und Schliep, A. (2010), *CATbox - An Interactive Course in Combinatorial Optimization*. Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2010.
- [12] Korte, B. und Vygen, J. (2008): *Kombinatorische Optimierung - Theorie und Algorithmen*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.
- [13] Lovász, L., Plummer, M. D. (1986): *Matching Theory*. Elsevier Science Ltd., Amsterdam 1986.

- [14] Petersson, H. P.: *Lineare Optimierung*. Kurstext, FernUniversität in Hagen, 2001.
- [15] Roth, A. E. und Sotomayor, M. (1991): *Two-sided Matching: A study in game-theoretic modeling and analysis*. Cambridge University Press, Cambridge 1991.
- [16] Samel, D und Zemel, E. (1984): *On the core and dual set of linear programming games*. In: Mathematics of Operations Research, Vol. 9 (2), 1984, S. 309-316.
- [17] Schrijver, A. (2003): *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2003, Volume A.
- [18] Seip, U. (2002): *Graphentheorie*. Kurstext, FernUniversität in Hagen, 2002.
- [19] Shapley, L. S. und Shubik, M. (1972): *The assignment game I: The core*. In: International Journal of Game Theory, Heft 1, 1972, S. 111-130.
- [20] Soller, H. (2007): *Min Cost Flow in balancierten Netzwerken mit konvexer Kostenfunktion*. Diplomarbeit, FernUniversität in Hagen, Sept. 2007.
- [21] Sotomayor, M. (2005): *On the Core of the one-sided Assignment Game*. Technical Report, Universidade de Sao Paulo, Juni 2005.
- [22] Yannakakis, M. (1991): *Expressing Combinatorial Optimization Problems by Linear Programs*. In: Journal of Computer and System Sciences, Heft 43, 1991, S. 441-466.

„Ich versichere, dass ich diese Bachelorarbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt und die den benutzten Quellen wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen.“

Neckargemünd, 25. Februar 2010

.....

(Isabel Beckenbach)