FernUniversität in Hagen
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachbereich Mathematik

Über die Existenz von Strong Port Maps zwischen Matroiden

Diplomarbeit

von

Alexander Hölzle

geboren am 25. Januar 1980 in Kempten (Allgäu)

betreut von

Prof. Dr. Winfried Hochstättler

Bonn, den 10. Juli 2009

Inhaltsverzeichnis

I Einleitung **1**

II Mathematische Grundlagen **2**
1 Mengen, Relationen und Abbildungen 2
2 Ordnungen 4
3 Verbände 9
3.1 Definition und Eigenschaften 9
3.2 Vollständige Verbände und Hüllensysteme 14
3.3 Distributive, modulare und semimodulare Verbände 19
3.4 Geometrische Verbände 23
4 Kategorien und Morphismen 26

III Matroide **30**
1 Grundbegriffe 30
1.1 Matroide, Unabhängigkeit und Basis 30
1.2 Abhängigkeit, Rang und Kreis 34
1.3 Unterraumverbände 39
1.4 Matroide und Geometrie 41
1.5 Kryptomorphe Charakterisierung 45
1.6 Orthogonalität 49
2 Konstruktion von Matroiden 53
2.1 Reduktion, Kontraktion und Minor 53
2.2 Erweiterung und Quotient 57
2.3 Direkte und parallele Summe 60
2.4 Zerlegung von Matroiden 65

IV Morphismen zwischen Matroiden **69**
1 Weak und Strong Maps 69
1.1 Grundlegendes 69
1.2 Faktorisierungssatz, Reduktion und Kontraktion 75
2 Strong Port Maps und die Hom-Ordnung 78
2.1 Matroid Ports mit MaxFlow-MinCut-Eigenschaft 78
2.2 Projektive Matroide 81
2.3 Antikette der Hom-Ordnung 84
2.4 Parallele Summe und Pushout 89

V Schlusswort und Ausblick **92**

I. Einleitung

Ein Graph-Homomorphismus ist eine Abbildung $f : V(G) \to V(H)$ zwischen den Knotenmengen der Graphen G und H, falls diese die Adjazenz der Knotenpaare respektiert ([HN04]). Insbesondere J. Nesetril studierte die durch die Graph-Homomorphismen induzierte Homomorphismen-Ordnung und zeigte gemeinsam mit C. Tardif in [NT99], dass die Homomorphismen-Ordnung dicht ist, d.h dass für je zwei Graphen $\{G, H\} \neq \{K_1, K_2\}$ mit $G \to H$ und $H \not\to G$ stets ein weiterer Graph X existiert, so dass $G \to X \to H$ und $H \not\to X \not\to G$.

In dieser Arbeit befassen wir uns mit der Homomorphismen-Ordnung der Strong Port Maps zwischen Matroiden. Wir wenden uns daher, nach der Festsetzung grundlegender Notationen im zweiten Kapitel, der Ordnungs- und Verbandstheorie zu und studieren unter anderem die Zusammenhänge zwischen Verbänden und Matroiden. Im dritten Kapitel geben wir einen Überblick über die Matroidtheorie und befassen uns insbesondere mit kyrptomorphen Charakterisierungen aber auch mit diversen Konstruktionsprinzipien. Letztere werden wir daraufhin untersuchen, ob sie die Existenz einer Strong (Port) Map respektieren oder verwerfen.

Den Ausgangspunkt unserer Untersuchungen bildet die Arbeit [HN00], in der W. Hochstättler und J. Nesetril zeigen, dass die Homomorphismen-Ordnung der Strong Port Maps auf den regulären Matroiden eine nicht-triviale Kette ist. Davon ausgehend werden wir in Kapitel IV der Frage nach der Existenz von Strong Port Maps zwischen projektiven Räumen nachgehen und unter anderem nachweisen, dass es keine Strong Port Map von $\mathrm{PG}(n+1, q)$ nach $\mathrm{PG}(n, q)$ gibt, wobei n die Dimension des projektiven Raumes über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ ist. Im selben Abschnitt wird zudem gezeigt, dass für $n \geq 2$ und $k \geq 3$ keine Strong Port Map von $\mathrm{PG}(n, q)$ in den Kreis C_k existiert. Neben den projektiven werden die uniformen Matroide eine bedeutende Rolle einnehmen, weshalb wir im Rahmen dieser Arbeit Sätze bereitstellen werden, die schließlich in der Konstruktion einer unendlichen Antikette der Homomorphismen-Ordnung münden. Schließlich wird mit Hilfe von uniformen Matroiden nachgewiesen, dass es zu vorgegebenem nicht-trivialen Matroid Port M stets ein unvergleichbares Gegenstück M' gibt, so dass $M \not\to M'$ und $M' \not\to M$.

Neben den grundlegenden Arbeiten [Hig68] und [Cra67] führen [Kun86] sowie [Cra70] in die Theorie der Strong Maps ein. Mit dem Thema Strong Port Maps befassen sich abgesehen von [HN00] die Arbeiten [AHM03] und [AH04].

II. Mathematische Grundlagen

1. Mengen, Relationen und Abbildungen

Dieser Abschnitt verfolgt verschiedene Ziele. In erster Linie wird die Notation für die notwendigen mathematischen Begrifflichkeiten bereitgestellt, respektive auf entsprechende Literatur verwiesen. Zugleich werden wir Relationen und Abbildungen einführen und wichtige Eigenschaften aufzeigen. Dabei stützen wir uns auf [Ern82] und [Aig76] beschränken uns jedoch auf das für die Arbeit Wesentliche.

Der axiomatisch fundierte Begriff der Menge bildet den Ausgangspunkt für die Mathematik und somit auch für diese Arbeit. Wir setzen deshalb die axiomatische Mengenlehre von Zermelo und Fraenkel (kurz ZFC) voraus, die z.B. in [Dei04] studiert wird. Sind X und Y zwei Mengen, so werden wir die *Differenzmenge* von X und Y durch $X \setminus Y$ notieren. Sind X und Y darüber hinaus disjunkt, so halten wir durch $X + Y$ die *disjunkte Vereinigung* beider Mengen fest. Eine *echte Teilmenge* A von X werden wir durch $A \subsetneq X$ oder $A \subset X$ ausdrücken. Eine Menge von Mengen nennen wir *Mengensystem* oder *Mengenfamilie* und die *Potenzmenge von* X, also die Menge aller Teilmengen von X, notieren wir durch 2^X. Durch $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ seien die natürlichen Zahlen bezeichnet und entsprechend sei $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} + 0$. Für die ersten n natürlichen Zahlen reservieren wir das Symbol $\mathbb{N}_n := \{1, \ldots, n\}$. Ansonsten verwenden wir die üblichen Symbole für die diversen Mengenoperationen bzw. verweisen auf [Dei04].

Teilmengen des kartesischen Produktes $X \times Y$ zweier beliebiger Mengen X und Y ermöglichen es uns, Beziehungen zwischen einzelnen Elementen dieser Mengen zu formulieren.

II.1.1 Definition: Unter einer (binären) *Relation von X nach Y* verstehen wir eine Teilmenge $R \subseteq X \times Y$. Anstelle von $(x, y) \in R$ notieren wir eine Relation für gewöhnlich in der Infixschreibweise $x\ R\ y$. Das Paar $\langle X; R\rangle$ nennen wir *Relativ*, falls $R \subseteq X \times X$.

Besteht keine Beziehung zwischen den Elementen $x \in X$ und $y \in Y$ bezüglich der Relation $R \subseteq (X \times Y)$, so notieren wir dies durch $x \not R\ y$. Für eine binäre Relation $R \subseteq (X \times Y)$ heißt

$$R^{-1} := \{(y, x) |\ (x, y) \in R\}$$

die zu R *inverse* oder *duale Relation*. Seien $\langle X; R\rangle$ ein Relativ und $A \subseteq X$, dann bezeichnen wir die Relation $(A \times A) \cap R$ als die *Einschränkung von R auf A* und schreiben $\langle A; R_{|A}\rangle$.

Zwei Elemente x, y heißen *vergleichbar* bezüglich einer Relation $R \subseteq (X \times Y)$, falls mindestens eine der Beziehungen $x\ R\ y$ oder $y\ R\ x$ gilt. Ist hingegen keine der beiden Beziehungen erfüllt, so sprechen wir von *unvergleichbaren* Elementen bezüglich der Relation. Die Menge

$$\mathrm{dom}(R) := \{x \in X |\ \exists y \in Y \text{ mit } x\ R\ y\}$$

heißt *Definitionsbereich*, während

$$\mathrm{ran}(R) := \{y \in Y |\ \exists x \in X \text{ mit } x\ R\ y\}$$

den *Wertebereich* der Relation bezeichnet.

Eine Relation $\sigma \subseteq (X \times Y)$ heißt *Abbildung* oder *Funktion* von X nach Y, falls für alle $x \in X$ und $y_1, y_2 \in Y$ aus $x\ \sigma\ y_1$ und $x\ \sigma\ y_2$ stets $y_1 = y_2$ folgt und es zudem für jedes $x \in X$ ein Element $y \in Y$ gibt mit $x\ \sigma\ y$. Ferner notieren wir eine Abbildung $\sigma \subseteq (X \times Y)$ durch $\sigma : X \to Y$ und sagen X geht unter σ *nach* Y. Anstelle von $x\ \sigma\ y$ schreiben wir $y = \sigma(x)$ und meinen damit das Element $y \in Y$. Die Menge

$$\mathrm{Bild}(A) := \{\sigma(x) |\ x \in A\} \ \subseteq\ \mathrm{ran}(\sigma)$$

heißt das *Bild* von $A \subseteq X$ unter σ und

$$\overset{-1}{\sigma}(B) := \{x |\ \sigma(x) \in B\} \ \subseteq\ \mathrm{dom}(\sigma)$$

das *Urbild* von $B \subseteq Y$. Das Urbild eines Elements $y \in Y$ heißt *Faser* von y unter σ. Im Falle $A = X$ schreiben wir anstatt $\mathrm{Bild}(A)$ auch $\mathrm{Bild}(\sigma) = \mathrm{ran}(\sigma)$.

Eine Abbildung $\sigma : X \to Y$ nennen wir einerseits *injektiv*, wenn aus $\sigma(x_1) = y = \sigma(x_2)$ stets $x_1 = x_2$ folgt. Andererseits nennen wir eine Abbildung $\sigma : X \to Y$ *surjektiv* oder eine Abbildung von X *auf* Y, falls für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert, so dass $y = \sigma(x)$ gilt. *Bijektive* Abbildungen $\sigma : X \to Y$ sind sowohl injektiv als auch surjektiv. Eine Umkehrabbildung bezeichnen wir durch $\sigma^{-1} : Y \to X$ und verweisen ansonsten auf [SS94]. Neben elementaren Algebra-Kenntnissen setzen wir die Lineare Algebra sowie die analytische Geometrie als bekannt voraus.

Weiter nennen wir eine Relation $R \subseteq X \times X$

- *reflexiv*, falls für alle $x \in X : x\ R\ x$ gilt;
- *transitiv*, falls aus $x\ R\ y$ und $y\ R\ z$ auch $x\ R\ z$ folgt;
- *antisymmetrisch*, falls aus $x\ R\ y$ und $y\ R\ x$ die Gleichheit $x = y$ resultiert;
- *total*, falls für alle $x, y \in X$ gilt, dass $x\ R\ y$ oder $y\ R\ x$ ist.

II.1.2 Definition: Seien $\langle X; R\rangle$ und $\langle X'; R'\rangle$ zwei Relative. Eine bijektive Abbildung $\phi : X \to X'$ heißt *Isomorphismus*, falls $x\ R\ y$ stets $\phi(x)\ R'\ \phi(y)$ zur Folge hat und umgekehrt. Die Relative nennen wir dann *isomorph*, in Zeichen $\langle X; R\rangle \cong \langle X'; R'\rangle$.

Sind die Relative $\langle X; R\rangle$ und $\langle X; R^{-1}\rangle$ isomorph, so bezeichnen wir $\langle X; R\rangle$ als *selbstdual*. Die vier oben aufgezählten Eigenschaften eines Relativs sind vermöge der Identität $id : X \to X$ selbstdual.

2. Ordnungen

Partialordnungen, Ketten und Antiketten

In diesem Teilabschnitt werden wir Mengen mit speziellen Relationen untersuchen, wobei wir zunächst die zentralen Begriffe klären.

II.2.1 Definition: Eine *Präpartialordnung* auf einer Menge X ist eine reflexive und transitive Relation R von X nach X. Ist R zudem symmetrisch, so sprechen wir von einer *Äquivalenzrelation*. Unter einer *Partialordnung* auf X verstehen wir hingegen eine antisymmetrische Präpartialordnung und verwenden für diese das Symbol „$\leq$“. Das Relativ $\langle X; \leq \rangle$ nennen wir *partiell geordnete Menge*, oder kurz *Poset*, und setzen $x < y$, falls $x \leq y$ *und* $x \neq y$ gilt.

Beschränken wir die Partialordnung der Poset $\langle X; \leq \rangle$ auf eine Teilmenge $A \subseteq X$, so ist auch diese reflexiv, transitiv und antisymmetrisch.

II.2.2 Definition: Sei $P := \langle X; \leq \rangle$ eine Poset. Eine *Teil-Partialordnung* oder *Teilordnung* $\langle A; \leq_{|A} \rangle$ *von* P ist eine Teilmenge $A \subseteq X$ ausgestattet mit der Einschränkung der Relation „$\leq$“ auf $A \times A$.

Die drei geforderten Eigenschaften einer Partialordnung sind anschauliche Bedingungen für Größenvergleiche, allerdings wird in der Definition nicht gefordert, dass je zwei Elemente überhaupt vergleichbar sein müssen.

II.2.3 Definition: Sei $P := \langle X; \leq \rangle$ eine Poset.

1. Wir nennen P *Kette*, falls je zwei Elemente aus X vergleichbar sind.
2. Eine Teilordnung $\langle C; \leq_{|C} \rangle$ von P mit $C \subseteq X$ heißt eine *Kette in* P, falls je zwei Elemente aus C vergleichbar sind.
3. Eine Kette C in P mit kleinstem Element x und größtem Element y nennen wir *Kette von* x *nach* y.
4. Die *Länge* $l(C)$ einer Kette C ist definiert als $l(C) := |C| - 1$.
5. Eine Kette in P mit maximaler Länge heißt *maximale Kette*.
6. Die Poset P heißt hingegen *Antikette*, falls je zwei verschiedene Elemente aus X unvergleichbar sind;
7. Eine Teilordnung $\langle A; \leq_{|A} \rangle$ von P mit $A \subseteq X$ heißt *Antikette in* P, falls je zwei verschiedene Elemente aus A unvergleichbar sind;

Wir sagen, dass eine Poset P die *Jordan-Dedekindsche Kettenbedingung* (JDCC) erfüllt, wenn alle maximalen Ketten in P dieselbe endliche Länge besitzen.

II.2.4 Definition: Seien $P := \langle X; \leq \rangle$ eine Poset und $s, t \in X$ mit $s \leq t$. Wir definieren *das Intervall von s bis t* durch

$$[s,t] := \{x \in X |\ s \leq x \leq t\}.$$

Eine Teilordnung $P_{|A} := \langle A, \leq_{|A} \rangle$ von P heißt *Ideal*, falls aus $s \in A, x \in X$ und $x \leq s$ stets $x \in A$ folgt. $P_{|A}$ heißt *Filter*, falls aus $s \in A, x \in X$ und $s \leq x$ stets $x \in A$ resultiert. Wir nennen

$$(s] = \{x \in X |\ x \leq s\}$$

Hauptideal von s und dual dazu

$$[s) = \{x \in X |\ s \leq x\}$$

Hauptfilter von s.

II.2.5 Beispiel: Sei X eine Menge.

a) Die Potenzmenge 2^X, gepaart mit der Inklusion „$\subseteq$“ als Relation, ist eine wichtige Poset jedoch im Allgemeinen keine Kette. Für $X := \{1,2,3\}$ ist

$$[\{2\}) = \{\ \{2\}; \{2,3\}; \{1,2\}; \{1,2,3\}\ \}$$

der von $\{2\}$ erzeugte Hauptfilter und

$$(\{1,2\}] = \{\ \varnothing; \{1\}; \{2\}; \{1,2\}\ \}$$

das von $\{1,2\}$ erzeugte Hauptideal. Eine beliebige Partition der Menge X, z.B. die einelementigen Mengen von X, bildet eine Antikette von $\langle 2^X; \subseteq \rangle$.

b) Seien $a, b \in \mathbb{N}$ und

$$a|b \ :\Leftrightarrow\ \exists x \in \mathbb{N} \text{ mit } ax = b.$$

Dann bildet das Relativ $\langle \mathbb{N}; | \rangle$ eine Poset jedoch keine Kette. Die Menge aller Primzahlen $\mathbb{P}$ ist eine Antikette mit $|\mathbb{P}| = \aleph_0$.

c) Betrachten wir die Relation „$\leq$“ auf der Menge $\mathbb{Z}$ defniert durch

$$x \ \leq y \quad :\Leftrightarrow \quad y - x \in \mathbb{N}_0,$$

dann ist $\langle \mathbb{Z}; \leq \rangle$ eine Kette.

d) Das Paar $\langle \mathbb{R}; \leq \rangle$ mit der gewöhnlichen „kleiner-gleich“-Relation auf der Menge der reellen Zahlen stellt eine Kette dar.

II.2.6 Definition: Seien $P_i := \langle X_i; \leq_i \rangle$ Posets mit $i = 1, 2$, dann heißt eine Abbildung $\phi : X_1 \to X_2$ *Ordnungshomomorphismus*, falls aus $x \leq_1 y$ stets $\phi(x) \leq_2 \phi(y)$ für alle $x, y \in X_1$ folgt. Ein bijektiver Ordnungshomomorphismus ϕ heißt *Ordnungsisomorphismus*, falls auch die Umkehrabbildung ϕ^{-1} ein Ordnungshomomorphismus ist.

Dualitätsprinzip für Partialordnungen

Unter einer *ordnungstheoretischen Aussage* verstehen wir ein sprachliches Gebilde, in dem neben rein logischen Bestandteilen und Variablen nur Ordnungsrelationen (wie „$\leq$“) oder von diesen abgeleitete Begrifflichkeiten (wie z.B. sup oder inf) auftreten ([Ern82]). Ersetzen wir in einer solchen Aussage $\mathcal{A}$ alle vorkommenden Ordnungsrelationen durch die dazu inversen, so entsteht die zu $\mathcal{A}$ *duale Aussage* $\mathcal{A}^*$, welche eindeutig ist und bei der zudem $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$ gilt.

II.2.7 Satz (Dualitätsprinzip für Partialordnungen): Die duale Aussage eines Satzes der Theorie der Partialordnungen ist ebenfalls ein Satz dieser Theorie.

Beweis. Sei $\mathcal{A}$ eine gültige Aussage in der Poset $\langle X; \leq \rangle$. Da die definierenden Eigenschaften einer Partialordnung selbstdual sind, existiert ein Isomorphismus $\phi : X \to X$ zwischen den Relativen $\langle X; \leq \rangle$ und $\langle X; \geq \rangle$. Ist $x, y \in X$, dann gilt die Äquivalenz $x \leq y \Leftrightarrow \phi(x) \geq \phi(y)$, womit die Gültigkeit der dualen Aussage in $\langle X; \geq \rangle$ augenscheinlich erfüllt ist. □

In den folgenden Abschnitten wird rasch deutlich, dass das *Dualitätsprinzip für Partialordnungen* überaus nützlich ist und darüber hinaus auch für Verbände und spezielle Verbandsklassen seine Gültigkeit nicht verliert.

II.2.8 Beispiel: Sei $\langle 2^X, \subseteq \rangle$ eine Poset und betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} &\phi : X \to X && \text{definiert durch} \\ &X \supseteq A \mapsto \phi(A) = X \setminus A, \end{aligned}$$

welche einen Isomorphismus zwischen den Posets $\langle 2^X; \subseteq \rangle$ und $\langle 2^X; \supseteq \rangle$ ist. Ist $\mathcal{A}$ eine wahre Aussage in $\langle 2^X; \subseteq \rangle$, so ist die duale Aussage $\mathcal{A}^*$ in $\langle 2^X; \supseteq \rangle$ ebenfalls wahr.

Maximum, Minimum, Supremum und Infimum

Die Definitionen der folgenden Begrifflichkeiten lassen sich durch eine ordnungstheoretische Aussage formulieren, was bedeutet, dass wir jeder dieser Definitionen eine eindeutig bestimmte duale Aussage bzw. Definition zuordnen können.

II.2.9 Definition: Seien $\langle X, \leq \rangle$ eine Poset und $A \subseteq X$, dann heißt $x \in X$ *untere Schranke von* A, falls $x \leq a$ für jedes $a \in A$. Eine untere Schranke x von A, die bereits zu A gehört, nennen wir *kleinstes Element* von A. Eine untere Schranke x von $A \subseteq X$ nennen wir *Infimum* von A und schreiben dafür $\inf(A) := x$, falls $s \leq x$ für alle unteren Schranken s von A gilt. Ein Element $x \in A$ ist *minimal* in Y, falls es kein $a \in A$ gibt mit $a < x$.

Dual zu den soeben eingeführten Begriffen „untere Schranke“, „kleinstes Element“ und „Infimum“ seien die Begriffe *obere Schranke*, *größtes Element* und *Supremum* definiert. Existiert ein kleinstes bzw. größtes Element in einer Poset, so ist dieses minimal bzw. maximal. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, wie folgendes Beispiel zeigt.

II.2.10 Beispiel: Sei $\langle \mathbb{N}_{10}; | \rangle$ die Einschränkung der aus Beispiel II.2.5 b) erklärten Partialordnung auf die Menge $\mathbb{N}_{10}$. Diese Ordnung besitzt insgesamt fünf verschiedene maximale Elemente, jedoch kein größtes Element.

Im Gegensatz zu einer Poset ist in einer Totalordnung jedes minimale bzw. maximale zugleich ein kleinstes bzw. größtes Element.

II.2.11 Proposition: Sei $P := \langle X; \leq \rangle$ eine nichtleere Partialordnung.

(i) X besitzt *höchstens* ein Infimum und ein Supremum;

(ii) Ist die Grundmenge X endlich, so besitzt X mindestens ein minimales und ein maximales Element.

Beweis. (i) Existiert überhaupt ein Infimum, so folgt die Behauptung unmittelbar aus der Definition und der Antisymmetrie. Aufgrund des Dualitätsprinzips ergibt sich die Behauptung.

(ii) Seien $X := \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $m_1 := x_1$. Ist m_1 bereits maximal, so sind wir fertig, anderenfalls existiert ein $k \in \{2, \ldots, n\}$ mit $x_k > m_1$. Wir setzen demnach $m_2 := x_k$ und verifizieren, ob m_2 maximal ist und iterieren ggf. das Verfahren. Nach endlich vielen Schritten erhalten wir somit ein maximales Element von X. Ein duales Argument beweist die Existenz eines minimalen Elements in A.

□

Beispiel II.2.5 c) zeigt, dass die Aussage (ii) der letzten Proposition für unendliche Grundmengen einer Poset $\langle X; \leq \rangle$ im Allgemeinen nicht korrekt ist.

II.2.12 Definition: Besitzt eine Poset $\langle X, \leq \rangle$ ein kleinstes Element, so nennen wir dieses *Nullelement* und bezeichnen es mit $\mathfrak{o}$. Ein existierendes größtes Element von X nennen wir *Einselement* und notieren dies durch $\mathfrak{1}$.

Bedeckungsrelation und Dichte einer Poset

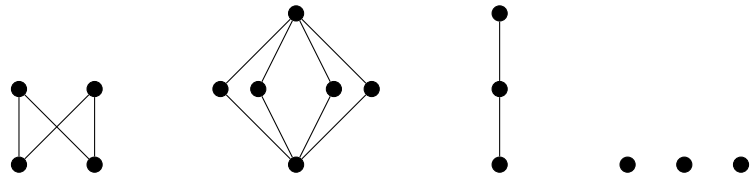
Ein außerordentlicher Vorteil von Ordnungsstrukturen liegt in ihrer guten graphischen Darstellbarkeit, wofür eine spezielle Relation definiert wird.

II.2.13 Definition: Ein Element $y \in X$ *bedeckt* $x \in X$, falls $x < y$ und es kein $a \in X$ mit $x < a < y$ gibt. Für diese Situation reservieren wir das Symbol $x \lessdot y$ und sagen, dass x *unterer Nachbar von* y und y *oberer Nachbar von* x ist. Die dadurch erklärte Relation nennen wir *Bedeckungsrelation*. Bedeckt y ein Element x oder ist mit diesem identisch, dann schreiben wir kurz $y \leqslant x$.

Jede nicht leere endliche Poset $\langle X, \leq \rangle$ lässt sich – mit Hilfe der Bedeckungsrelation – durch ein so genanntes *Hasse-Diagramm* darstellen. Die Elemente von X werden durch Punkte wiedergegeben, d.h. sind $x, y \in X$ und $x \lessdot y$, so wird der y entsprechende Punkt

P_y oberhalb des x entsprechenden Punktes P_x aufgetragen und beide Punkte durch eine Strecke miteinander verbunden.

Diese Vorschrift ist immer durchführbar. Ist X eine einelementige Menge, dann wird dessen Hasse-Diagramm durch einen einzigen Punkt dargestellt. Seien nun $n \in \mathbb{N}$ und $|X| = (n+1) > 1$. Jede endliche Poset besitzt gemäß Proposition II.2.11 (ii) mindestens ein maximales Element x, durch dessen Wegnahme $A := X \setminus \{x\}$ wird eine Partialordnung $\langle A; \leq_A \rangle$ induziert, die gemäß Induktionsvoraussetzung durch ein Diagramm repräsentiert werden kann. In Abbildung II.1 sind vier unterschiedliche Posets durch ihre Hasse-Diagramme dargestellt.



a) b) c) d)

Abb. II.1.: *Vier Hasse-Diagramme zur Veranschaulichung von Posets*

Die Bedeckungsrelation der Poset aus Beispiel II.2.5 d) ist die leere Menge – derartige Posets nennen wir (ordnungs-)dicht.

II.2.14 Definition: Eine Poset $\langle X, \leq \rangle$ heißt *dicht*, wenn für je ein Paar $x, z \in X$ mit $x < z$ ein Element $y \in X$ existiert, so dass $x < y < z$ gilt.

3. Verbände

Die Wurzeln der Verbandstheorie reichen bis zur Formulierung der Aussagenlogik durch G. Boole und dem ersten axiomatischen Ansatz von R. Dedekind zurück. Nachdem die Theorie mehrere Jahrzehnte unbeachtet blieb, wurde sie erneut von G. Birkhoff in den 1930er Jahren wieder entdeckt und sodann von vielen Mathematikern weiterentwickelt. Standardwerke der Verbandstheorie sind [Bir67], [Her67] und [Grä91].

3.1. Definition und Eigenschaften

Ein „Verband“ kann als algebraische Struktur oder als spezielle Poset definiert werden. Für unsere Zwecke ist die ordnungstheoretische Definition eines Verbandes nahe liegend.

II.3.1 Definition: Eine Poset $\mathcal{L} := \langle L; \leq \rangle$ heißt *Verband*, falls für je zwei Elemente aus L sowohl Infimum als auch Supremum in L existieren.

Aufgrund der geforderten Existenz von Supremum und Infimum und deren Eindeutigkeit sind

$$\begin{aligned} \wedge &: L \times L \to L & (a,b) &\mapsto a \wedge b := \inf\{a,b\} \\ \vee &: L \times L \to L & (a,b) &\mapsto a \vee b := \sup\{a,b\} \end{aligned}$$

wohldefinierte Abbildungen. Erstere heißt *Schnitt* und letztere *Verbindung*. Beide Abbildungen zusammen nennen wir *Verbandsoperationen* und L die *Grundmenge* von $\mathcal{L}$.

Nicht jede Poset ist ein Verband, wie die dargestellten Posets a) und d) aus Abbildung II.1 zeigen; die Posets b) und c) aus derselben Abbildung stellen jedoch Verbände dar. Weiter folgt aus Definition II.3.1, dass jede endliche nichtleere Teilmenge eines Verbandes ein Infimum und Supremum besitzt. Das bereits im Abschnitt über Ordnungen behandelte *Dualitätsprinzip* gilt aus Symmetriegründen in analoger Form für Verbände.

II.3.2 Satz (Dualitätsprinzip für Verbände): Die duale Aussage eines Satzes der Theorie der Verbände ist ebenfalls ein Satz dieser Theorie.

II.3.3 Proposition: Seien $\mathcal{L} = \langle L; \leq \rangle$ ein Verband und $a, b, c \in L$, dann erfüllen der Schnitt und die Verbindung von $\mathcal{L}$ die folgenden Bedingungen:

$(K_\wedge)$	$a \wedge b = b \wedge a$	$(K_\vee)$	$a \vee b = b \vee a$	[Kommutativität]
$(A_\wedge)$	$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$	$(A_\vee)$	$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$	[Assoziativität]
$(V_\wedge)$	$a \wedge (a \vee b) = a$	$(V_\vee)$	$a \vee (a \wedge b) = a$	[Verschmelzung]
$(I_\wedge)$	$a \wedge a = a$	$(I_\vee)$	$a \vee a = a$	[Idempotenz]

Beweis. Seien $a, b, c \in L$, dann ist $a \wedge b = \inf\{a,b\} = b \wedge a$ womit die Gültigkeit von $(K_\wedge)$ folgt. Auch die zweite Bedingung $(A_\wedge)$ ergibt sich unmittelbar aus der Definition, da $a \wedge (b \wedge c) = \inf\{a, \inf\{b,c\}\} = \inf\{a,b,c\} = \inf\{\inf\{a,b\}, c\} = (a \wedge b) \wedge c$ gilt. Die Bedingung $(V_\wedge)$ folgt ebenso einfach durch $a \wedge (a \vee b) = \inf\{a, \sup\{a,b\}\} = a$. Aus $(V_\wedge)$ ergibt sich

$a \wedge (a \vee a) = a \wedge a = a$ und damit ($I_\wedge$). Da das Supremum dual zum Infimum definiert wurde und das Dualitätsprinzip für $\mathcal{L}$ gilt, folgen ($K_\vee$), ($A_\vee$), ($V_\vee$) und ($I_\vee$) aus dem Gezeigten. □

Die folgende Proposition drückt aus, dass der Schnitt und die Verbindung zweier Elemente des Verbandes eindeutig durch eine der beiden Verbandsoperationen bestimmt ist.

II.3.4 Proposition: Seien $\mathcal{L} = \langle L; \leq \rangle$ ein Verband und $a, b \in L$, dann gelten die Äquivalenzen

$$a \wedge b = a \quad \Leftrightarrow \quad a \vee b = b \quad \Leftrightarrow \quad a \leq b,$$

und jede der Verbandsoperationen sowie die Partialordnung beschreiben isomorphe Verbände.

Beweis. Unter der Voraussetzung $a \wedge b = a$ folgt wegen ($V_\vee$), ($K_\wedge$) und ($K_\vee$)

$$b \;=\; b \vee (b \wedge a) \;=\; b \vee (a \wedge b) \;=\; b \vee a \;=\; a \vee b, \tag{II.1}$$

womit $a \wedge b = a \Rightarrow a \vee b = b$ für alle $a, b \in L$ gezeigt wurde. Durch Inversion von a und b in (II.1) erhalten wir

$$a \;=\; a \vee (a \wedge b) \;=\; a \vee (b \wedge a) \;=\; a \vee b \;=\; b \vee a,$$

was die Gültigkeit von $a \wedge b = b \Rightarrow a \vee b = a$ zeigt. Zu dieser Aussage ist

$$a \vee b \;=\; b \quad \Rightarrow \quad a \wedge b \;=\; a$$

dual und dies die bislang fehlende Umkehrung der eben gezeigten Implikation. Für den Rest verweisen wir auf §3, [Her67]. □

Wie zu Beginn erwähnt, kann ein Verband äquivalent als algebraische Struktur definiert werden, wobei jede der beiden Verbandsoperationen die gleichberechtigte Rolle einer algebraischen Verknüpfung einnimmt und die ersten drei aufgelisteten Axiome der letzten Proposition erfüllt sein müssen ([Lau04], Abschnitt 15.1). Die alternative Beschreibung eines Verbandes $\langle L; \leq \rangle$ durch die Grundmenge L und eine der beiden Verbandsoperationen notieren wir durch die Gleichung

$$\mathcal{L} \;=\; \langle L; \leq \rangle \;=\; (L, \wedge, \vee)$$

und drücken damit zugleich aus, dass „$\wedge$“ der Schnitt und „$\vee$“ die Verbindung von $\mathcal{L}$ sind.

II.3.5 Proposition: Seien $\langle L;\leq\rangle = (L,\wedge,\vee)$ ein beliebiger Verband und $a,b,c \in L$, dann gelten:

(i) $b \leq c \;\Rightarrow\; (a\wedge b) \leq (a\wedge c)$; [Schnitt ist ordnungserhaltend]

(ii) $a\wedge(b\vee c) \;\geq\; (a\wedge b)\vee(a\wedge c)$; [Distributivitäts-Ungleichung]

(iii) $a \leq c \;\Rightarrow\; a\vee(b\wedge c) \leq (a\vee b)\wedge c$. [Modularitäts-Ungleichung]

Beweis. (i) Sei $b \leq c$, dann ist $a\wedge b = (a\wedge a)\wedge(b\wedge c) = (a\wedge b)\wedge(a\wedge c)$ aufgrund von $(\mathrm{I}_\wedge)$, $(\mathrm{K}_\wedge)$, $(\mathrm{A}_\wedge)$ und der Voraussetzung. Mit Proposition II.3.4 folgt schließlich $a\wedge b \leq a\wedge c$.

(ii) Aufgrund der Definition der Verbandsoperationen sind $a\wedge b \leq a$, $(a\wedge b) \leq b \leq (b\vee c)$ und somit $(a\wedge b) \leq a\wedge(b\vee c)$. Analog folgt aus $(a\wedge c) \leq b$ und $(a\wedge c) \leq c \leq (b\vee c)$ schließlich $(a\wedge c) \leq a\wedge(b\vee c)$. Somit ist $a\wedge(b\vee c)$ eine obere Schranke für $(a\wedge b)$ und $(a\wedge c)$, woraus die Behauptung folgt.

(iii) Es ist $a \leq (a\vee b)$ und es sei $a \leq c$, dann ist $a \leq (a\vee b)\wedge c$. Analog ergibt sich $(b\wedge c) \leq (a\vee b)\wedge c$ aus $(b\wedge c) \leq b \leq (a\vee b)$ und $(b\vee c) \leq c$. Insgesamt folgt $a\vee(b\wedge c) \leq (a\vee b)\wedge c$.

□

Die dualen Aussagen der letzten Proposition gelten entsprechend dem Dualitätsprinzip.

II.3.6 Definition: Sei $\mathcal{L} = \langle L;\leq\rangle = (L,\wedge,\vee)$ ein Verband, dann nennen wir $\mathcal{L}^* := \langle L;\geq\rangle = (L,\wedge_*,\vee^*)$ den zu $\mathcal{L}$ *dualen Verband*.

Aufgrund der Symmetrie der Verbandsaxiome aus Proposition II.3.3 ist $\mathcal{L}^* = \langle L;\geq\rangle$ der zu $\mathcal{L} = \langle L;\leq\rangle = (L,\wedge,\vee)$ wohldefinierte duale Verband, wobei der Schnitt $\wedge_* : L\times L \to L$ und die Verbindung $\vee^* : L\times L \to L$ bestimmt sind durch

$$(a,b) \mapsto a\wedge_* b := a\vee b,$$
$$(a,b) \mapsto a\vee^* b := a\wedge b.$$

II.3.7 Beispiel: Sei X eine endliche Menge, dann ist das Relativ $\langle 2^X;\subseteq\rangle$ eine Poset gemäß Beispiel II.2.5 und sogar ein Verband. Die Verbandsoperationen sind durch den mengentheoretischen Durchschnitt und die Vereinigung gegeben, d.h. $\langle 2^X;\subseteq\rangle = (2^X,\cap,\cup)$. Verbände dieser Art heißen *Boolesche Verbände* und der zu $\langle 2^X;\subseteq\rangle$ duale Verband ist $\langle 2^X,\supseteq\rangle = (2^X,\cup,\cap)$.

II.3.8 Definition: Sei $\mathcal{L} = \langle L,\leq\rangle = (L,\wedge,\vee)$ ein Verband, dann nennen wir eine Teilordnung $\langle L';\leq'\rangle$ mit $L' \subseteq L$ einen *Teilverband* von $\mathcal{L}$, falls für alle $a,b \in L'$ die Bedingungen

$$a\wedge b \;\in\; L' \qquad \text{und} \qquad a\vee b \;\in\; L'$$

erfüllt sind.

Ist L ein Verband, dann ist jede einelementige Teilmenge von L, jedes Intervall oder jede Kette von L ein Teilverband.

II.3.9 Beispiel: Die Poset $\langle X; \subseteq \rangle = (X, \wedge, \vee)$ mit $X := \{1, 2, 3\}$ ist gemäß Beispiel II.3.7 ein Verband mit acht Elementen und in Abbildung II.2 dargestellt.

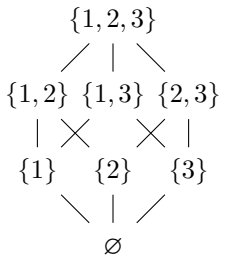


Abb. II.2.: *Boolescher Verband mit acht Elementen*

Der Verband $\langle X'; \subseteq_{|X'} \rangle$ mit $X' := \{ \varnothing; \{1\}; \{2\}; \{1, 2, 3\} \}$ ist kein Teilverband von $\mathcal{L}$, da $\{1\} \vee \{2\} = \{1, 2\} \notin X'$.

II.3.10 Definition: Seien $\mathcal{L}_i := (L_i, \wedge_i, \vee_i)$ mit $i \in \mathbb{N}_n, i \geq 2$ Verbände.

1. Eine Abbildung $\phi : L_1 \to L_2$ heißt *Verbandshomomorphismus*, wenn für alle $x, y \in L_1$ die Gleichungen
$$\phi(x \wedge_1 y) = \phi(x) \wedge_2 \phi(y) \qquad \text{und} \qquad \phi(x \vee_1 y) = \phi(x) \vee_2 \phi(y)$$
erfüllt sind.
2. Ein bijektiver Verbandshomomorphismus $\phi : L_1 \to L_2$ heißt *Verbandsisomorphismus*. In dieser Situation schreiben wir $\mathcal{L}_1 \cong \mathcal{L}_2$ und sagen $\mathcal{L}_1$ ist isomorph zu $\mathcal{L}_2$.
3. Der Verband $\mathcal{L} := (L, \wedge, \vee)$ mit $L := \bigtimes_{i=1}^{n} L_i$ und den Verbandsoperationen
$$(x_1, \ldots, x_n) \wedge (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 \wedge_1 y_1, \ldots, x_n \wedge_n y_n)$$
$$(x_1, \ldots, x_n) \vee (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 \vee_1 y_1, \ldots, x_n \vee_n y_n)$$
heißt *direktes Produkt* von $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$.

Dass das direkte Produkt $\mathcal{L}$ tatsächlich ein Verband ist, ergibt sich aus der komponentenweise Definition der Verbandsoperatoren.

II.3.11 Beispiel: Seien $\mathcal{L}_i := (L_i, \cap, \cup)$, $i = 1, 2$ Boolesche Verbände mit $L_1 := 2^{\{1,2,3\}}$ bzw. $L_2 := 2^{\{4,5\}}$ als Grundmengen. Das direkte Produkt $\mathcal{L} := (L, \cap, \cup)$ mit Grundmenge $L := L_1 \times L_2$ besteht somit aus insgesamt $2^5 = 2^2 \cdot 2^3$ geordneten Paaren.

In Tabelle II.1 sind die Elemente von L in verkürzter Notation aufgelistet, z.B. soll $(123, 45)$ das Element $(\{1, 2, 3\}, \{4, 5\})$ darstellen. Der Verband $\mathcal{L}$ ist vermöge der Abbildung $(x_1, x_2) \mapsto x_1 \cup x_2$ isomorph zum Booleschen Verband $(2^{\mathbb{N}_5}, \cap, \cup)$.

	45	4	5	∅
123	$(123, 45)$	$(123, 4)$	$(123, 5)$	$(123, \varnothing)$
12	$(12, 45)$	$(12, 4)$	$(12, 5)$	$(12, \varnothing)$
13	$(13, 45)$	$(13, 4)$	$(13, 5)$	$(13, \varnothing)$
23	$(23, 45)$	$(23, 4)$	$(23, 5)$	$(23, \varnothing)$
1	$(1, 45)$	$(1, 4)$	$(1, 5)$	$(1, \varnothing)$
2	$(2, 45)$	$(2, 4)$	$(2, 5)$	$(2, \varnothing)$
3	$(3, 45)$	$(3, 4)$	$(3, 5)$	$(3, \varnothing)$
∅	$(\varnothing, 45)$	$(\varnothing, 4)$	$(\varnothing, 5)$	$(\varnothing, \varnothing)$

Tab. II.1.: *Elemente des Verbandes* $\mathcal{L}$

II.3.12 Proposition: Seien $\mathcal{L}_i := (L_i, \wedge_i, \vee_i)$ mit $i = 1, 2$ Verbände, dann ist ein Ordnungsisomorphismus $\phi : L_1 \to L_2$ bereits ein Verbandsisomorphismus.

Beweis. Seien $x_1, x_2 \in L_1$, dann ist $\phi(x_1), \phi(x_2) \leq \phi(x_1 \vee x_2)$ wegen $x_1, x_2 \leq x_1 \vee x_2$ und der Voraussetzung. Außerdem gilt für $y \in L_2$

$$\begin{aligned} \phi(x_1) \vee \phi(x_2) \leq y &\Rightarrow \phi(x_1) \leq y \text{ und } \phi(x_2) \leq y \\ &\Rightarrow x_1 \leq \phi^{-1}(y) \text{ und } x_2 \leq \phi^{-1}(y) \\ &\Rightarrow x_1 \vee x_2 \leq \phi^{-1}(y) \\ &\Rightarrow \phi(x_1 \vee x_2) \leq y. \end{aligned}$$

Folglich ist $\phi(a \vee b) = \phi(a) \vee \phi(b)$. Dual hierzu schließen wir auf $\phi(a \wedge b) = \phi(a) \wedge \phi(b)$. □

Verbände sind gegen Supremums- und Infimumsbildung abgeschlossen, entsprechend erhalten Verbandshomomorphismen sowohl das Supremum als auch das Infimum.

II.3.13 Definition: Seien $\mathcal{L}_i := (L_i, \wedge_i, \vee_i)$ mit $i \in \mathbb{N}_n, i \geq 2$ Verbände.

1. Eine Abbildung $\phi : L_1 \to L_2$ heißt $\vee$-*Homomorphismus*, wenn für alle $x, y \in L_1$ die Gleichung

   $$\phi(x \vee_1 y) = \phi(x) \vee_2 \phi(y)$$

   erfüllt ist.

2. Analog heißt eine Abbildung $\phi : L_1 \to L_2$ $\wedge$-*Homomorphismus*, wenn für alle $x, y \in L_1$ die Gleichung

   $$\phi(x \wedge_1 y) = \phi(x) \wedge_2 \phi(y)$$

   gilt.

3. Einen bijektiver $\vee$- bzw. $\wedge$-Homomorphismus von L_1 nach L_2 nennen wir $\vee$- bzw. $\wedge$-*Isomorphismus*.

3.2. Vollständige Verbände und Hüllensysteme

In diesem Teilabschnitt werden „Hüllensysteme“ thematisiert und diese als Verbände, die für sämtliche Teilmengen ein Supremum und Infimum aufweisen, identifiziert. Neben [Lau04] stützen wir uns dabei auf [Ern82].

II.3.14 Definition: Ein Verband $\langle L; \leq \rangle$ heißt *vollständig*, falls $\inf(A)$ und $\sup(A)$ für alle Teilmengen $A \subseteq L$ existieren.

Jeder Verband mit endlicher Grundmenge und jedes Intervall eines vollständigen Verbandes ist vollständig. Zudem besitzen vollständige Verbände $\langle L; \leq \rangle$ stets ein Null- und Einselement, da $\inf L = \mathfrak{o}$ und $\sup L = \mathfrak{1}$. Das *Dualitätsprinzip* gilt insbesondere in vollständigen Verbänden, da die Forderung nach der Existenz des Infimums dual zur Forderung der Existenz des Supremums ist. Wie die nächste Proposition aufzeigen wird, ist ein Verband $(L, \wedge, \vee)$ bereits vollständig, wenn für jede Teilmenge der Grundmenge entweder das Supremum oder das Infimum existiert.

II.3.15 Proposition: Sei $\mathcal{L} = \langle L; \leq \rangle$ ein Verband mit $L \neq \varnothing$, dann sind äquivalent:

(i) $\mathcal{L}$ ist ein vollständiger Verband;

(ii) Jede Teilmenge von L besitzt ein Supremum in L;

(iii) Jede Teilmenge von L besitzt ein Infimum in L.

Beweis. Die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) ist trivial, weshalb wir (ii) $\Rightarrow$ (iii) nachweisen: Dazu seien $A \subseteq L$ und $A_{\downarrow} \subseteq L$ die evtl. leere Menge der unteren Schranken von A. Gemäß Voraussetzungen existiert $\sup A_{\downarrow} \in L$, was offensichtlich die größte untere Schranke, also das Infimum von A, ist. Durch Dualisieren des eben erbrachten Beweises folgt die noch ausstehende Implikation (iii) $\Rightarrow$ (i). □

Unmittelbar verknüpft mit vollständigen Verbänden sind so genannte „Hüllensysteme“ (vgl. [Ern82], Proposition 6.3).

II.3.16 Definition: Seien X eine Menge und $\mathcal{H} \subseteq 2^X$ ein Mengensystem, welches wir *Hüllensystem auf* X nennen, falls gilt:

(HS1) $X \in \mathcal{H}$ [Extensität]

(HS2) $(\bigcap_{H \in \mathcal{A}} H) \in \mathcal{H}$ für jede nichtleere Teilmenge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{H}$ [$\bigcap$-Stabilität]

Die Elemente $H \in \mathcal{H}$ werden *Hüllen* oder *Abschlüsse* genannt.

Als nächstes werden wir nachweisen, dass jedes Hüllensystem einen vollständigen Verband induziert. Zu diesem Zweck betrachten wir Abbildungen, die eng mit Hüllensystemen verwandt sind und zugleich geeignet diese zu beschreiben.

II.3.17 Definition: Seien X eine Menge und $h : 2^X \to 2^X$ eine Abbildung, die wir als *Hüllenoperator* auf X bezeichnen, insofern für alle Teilmengen $A, B \subseteq X$ gilt:

(HO1) $A \subseteq h(A)$ [Extensität]

(HO2) $A \subseteq B \Rightarrow h(A) \subseteq h(B)$ [Monotonie]

(HO3) $h(h(A)) = h(A)$ [Idempotenz]

Mengen der Form $h(A)$ heißen *abgeschlossen* bezüglich h, die nicht abgeschlossenen Teilmengen von X nennen wir offen und $h(A) \in 2^X$ die von A *erzeugte Menge*.

Die Menge auf der ein Hüllenoperator bzw. ein Hüllensystem erklärt ist, nennen wir auch *Grundmenge*. Aus (HO1) zusammen mit $X \subseteq h(X) \subseteq X$ folgt $h(X) = X$, d.h. die Grundmenge X ist abgeschlossen und somit Hülle ihrer selbst.

II.3.18 Proposition: Seien X eine Menge und $h : 2^X \to 2^X$ eine Abbildung. Es ist h genau dann ein Hüllenoperator auf X, falls für alle Teilmengen $A, B \subseteq X$ gilt:

$$A \subseteq h(B) \quad \Leftrightarrow \quad h(A) \subseteq h(B) \tag{II.2}$$

Beweis. „⇒“: Seien $A, B \subseteq X$ und $A \subseteq h(B)$, dann folgt aufgrund der Monotonie und der Idempotenz von h die Inklusion $h(A) \subseteq h(h(B)) = h(B)$. Die Rückrichtung von (II.2) ergibt sich unmittelbar aus der Extensität des Hüllenoperators.

„⇐“: Aufgrund der Voraussetzung impliziert $h(A) \subseteq h(A)$ unmittelbar die Extensität $A \subseteq h(A)$. Sei nun $A \subseteq B$, dann ist $A \subseteq h(B)$ und mit (II.2) folgt die Monotonie $h(A) \subseteq h(B)$. Die Idempotenz zeigen wir durch beidseitige Inklusion: Gemäß (HO1) ist $A \subseteq h(A)$ und damit $h(A) \subseteq h(h(A))$. Umgekehrt folgt aus $h(A) \subseteq h(A)$ direkt $h(h(A)) \subseteq h(A)$. □

II.3.19 Proposition: Für einen Hüllenoperator h auf X und alle Teilmengen $A, B \subseteq X$ gelten:

(i) $h(A \cap B) \subseteq h(A) \cap h(B)$;

(ii) $h(h(A) \cap h(B)) = h(A) \cap h(B)$;

(iii) $h(A \cup B) = h(A) \Leftrightarrow B \subseteq h(A)$.

Beweis. (i) Aus $A \cap B \subseteq A$ und der Monotonie folgt $h(A \cap B) \subseteq h(A)$ und analog hierzu $h(A \cap B) \subseteq h(B)$. Insgesamt erhalten wir also

$$h(A \cap B) \subseteq h(A) \cap h(B).$$

(ii) Mit Hilfe von (i) folgt unmittelbar

$$h(A) \cap h(B) \subseteq h(h(A) \cap h(B)) \subseteq h(h(A)) \cap h(h(B)) = h(A) \cap h(B).$$

(iii) „⇒“: Es ist $B \subseteq (A \cup B)$ und mit der Monotonie des Hüllenoperators und der Voraussetzung folgt $h(B) \subseteq h(A \cup B) = h(A)$. Mit der Extensität ergibt sich schließlich $B \subseteq h(B) \subseteq h(A)$.
„⇐“: Sei nun $B \subseteq h(A)$, dann ist $h(A) \cup B = h(A)$. Aufgrund der Extensität ist $(A \cup B) \subseteq h(A) \cup B$ und wegen (HO2) und (HO3) folgt $h(A \cup B) \subseteq h(h(A) \cup B) = h(h(A)) = h(A)$. Umgekehrt gilt $A \subseteq (A \cup B) \Rightarrow h(A) \subseteq h(A \cup B)$ dank der Monotonie und das impliziert schließlich $h(A \cup B) = h(A)$.

□

Insbesondere gilt also für einen Hüllenoperator h auf X und alle abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subseteq X$ die Identität

$$h(A \cap B) = A \cap B.$$

II.3.20 Definition: Seien $\mathcal{H}$ ein Hüllensystem und h ein Hüllenoperator auf X. Für alle $A \subseteq X$ sei $h_{\mathcal{H}} : 2^X \to 2^X$ erklärt durch

$$A \mapsto h_{\mathcal{H}}(A) := \bigcap \{H \in \mathcal{H} |\ A \subseteq H\}.$$

Die Abbildung $h_{\mathcal{H}}$ ordnet jeder Menge $A \subseteq X$ die kleinste Hülle aus $\mathcal{H}$ zu, die A enthält. Weiter definieren wir ein Mengensystem

$$\mathcal{H}_h := \{h(A) |\ A \subseteq X\},$$

welches gerade die Hüllen der Abbildung $h : 2^X \to 2^X$ enthält.

Beide eben erklärten Definitionen stehen in einer eineindeutigen Beziehung, wie folgender Satz aufzeigt.

II.3.21 Satz (Hauptsatz über Hüllensysteme und -operatoren):

(i) Die Abbildung $h_{\mathcal{H}}$ ist ein Hüllenoperator auf X und besitzt als abgeschlossene Mengen genau die Hüllen von $\mathcal{H}$.

(ii) Das Mengensystem $\mathcal{H}_h$ ist ein Hüllensystem auf X und die Hüllen von $\mathcal{H}_h$ sind genau die abgeschlossenen Mengen von h.

(iii) Für jedes Hüllensystem $\mathcal{H}$ auf X gilt $\mathcal{H}_{h_{\mathcal{H}}} = \mathcal{H}$ und für jeden Hüllenoperator h auf X gilt $h_{\mathcal{H}_h} = h$. Die Abbildungen

$$\mathcal{H} \mapsto h_{\mathcal{H}} \qquad \text{und} \qquad h \mapsto \mathcal{H}_h$$

sind somit Bijektionen zwischen der Menge der Hüllensysteme auf X und der Menge der Hüllenoperatoren auf X.

Wir nennen $h_{\mathcal{H}}$ den *zu $\mathcal{H}$ korrespondierenden Hüllenoperator* und $\mathcal{H}_h$ das *zu h korrespondierende Hüllensystem.*

Beweis.

(i) Die Extensität $A \subseteq h_{\mathcal{H}}(A) = \bigcap \{H \in \mathcal{H} |\ A \subseteq H\}$ ergibt sich aus der Definition. Aus $A \subseteq B \subseteq X$ folgt $\{H \in \mathcal{H} |\ B \subseteq H\} \subseteq \{H \in \mathcal{H} |\ A \subseteq H\}$ und somit die Monotonie $\bigcap \{H \in \mathcal{H} |\ A \subseteq H\} \subseteq \bigcap \{H \in \mathcal{H} |\ B \subseteq H\}$. Für alle $A \subseteq X$ ist die Implikation

$$A \subseteq \bigcap \{H \in \mathcal{H} |\ B \subseteq H\} \ \Rightarrow\ \bigcap \{H \in \mathcal{H} |\ A \subseteq H\} \subseteq \bigcap \{H \in \mathcal{H} |\ B \subseteq H\} \qquad \text{(II.3)}$$

gültig. Setzen wir $A := h_{\mathcal{H}}(B)$, so folgt $h_{\mathcal{H}}(h_{\mathcal{H}}(B)) \subseteq h_{\mathcal{H}}(B)$ wegen (II.3). Beachten wir zudem die Extensität von $h_{\mathcal{H}}$, so ergibt sich schließlich $h_{\mathcal{H}}(h_{\mathcal{H}}(B)) = h_{\mathcal{H}}(B)$. Die noch ausstehende Äquivalenz $A \in \mathcal{H} \Leftrightarrow h_{\mathcal{H}}(A) = A$ folgt aus der Definition des Hüllenoperators.

(ii) Da X die Grundmenge von h ist, gilt $h(X) = X$ und somit $X \in \mathcal{H}_h$. Die $\bigcap$-Stabilität von $\mathcal{H}_h$ ergibt sich aus Proposition II.3.19 (ii). Die Gültigkeit der Äquivalenz $A \in \mathcal{H}_h \Leftrightarrow h(A) = A$ folgt aus den Definitionen.

(iii) Aus (i) und (ii) ergibt sich die Äquivalenzkette $A \in \mathcal{H}_{h_{\mathcal{H}}} \Leftrightarrow h_{\mathcal{H}}(A) = A \Leftrightarrow A \in \mathcal{H}$, was $\mathcal{H}_{h_{\mathcal{H}}} = \mathcal{H}$ impliziert, es bleibt also noch $h_{\mathcal{H}_h} = h$ zu zeigen. Sei dazu $A \subseteq X$, dann ist

$$\begin{aligned} h_{\mathcal{H}_h}(A) &= \bigcap \{H \subseteq X |\ H \in \mathcal{H}_h,\ A \subseteq H\} \\ &= \bigcap \{H \subseteq X |\ h(H) = H,\ A \subseteq h(H)\} \ =\ h(A). \end{aligned}$$

Es ist $h(A)$ demnach die kleinste Hülle, die A enthält. Anderenfalls gibt es ein $C \subseteq A$ mit $A \subseteq h(C) \subseteq h(A)$, dann würde $h(C) = h(A)$ folgen. Es ist also $h_{\mathcal{H}_h} = h$.

□

Gemäß Konvention sei die leere Summe gleich 0.

II.3.22 Beispiel: Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $X \subseteq V$.

a) Die Unterräume von V bilden ein Hüllensystem $\mathcal{H}[V]$ mit der linearen Hülle

$$X \mapsto \langle X \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i |\ n \geq 1,\ x_i \in X \text{ und } \lambda_i \in K \right\}$$

als dazu korrespondierendem Hüllenoperator.

b) Die affinen Unterräume von V, d.h. die Nebenklassen $v + U = U + v$ mit $v \in V$ und U als Untervektorraum von V, bilden ein Hüllensystem das wir mit $\mathcal{H}[\mathrm{AG}(V)]$ bezeichnen. Der dazu korrespondierende Hüllenoperator ist gegeben durch die affine Hülle

$$X \mapsto \langle X \rangle_{\mathrm{aff}} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i |\ n \geq 1,\ x_i \in X,\ \lambda_i \in K \text{ und } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Der nächste Satz ist eine Folgerung aus Proposition II.3.15.

II.3.23 Satz: Seien h ein Hüllenoperator auf X und $\mathcal{H}_h$ das zugeordnete Hüllensystem, dann ist $\mathcal{L} := (\mathcal{H}_h, \wedge, \vee)$ ein vollständiger Verband mit

$$\bigwedge_{i\in I} h(A_i) = \bigcap_{i\in I} h(A_i) \qquad \text{und} \qquad \bigvee_{i\in I} h(A_i) = h\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \qquad (A_i \in \mathcal{H}_h)$$

als Schnitt bzw. Verbindung von $\mathcal{L}$.

Die Hüllensysteme $\mathcal{H}[V]$ und $\mathcal{H}[\mathrm{AG}(V)]$ aus Beispiel II.3.22 sind demnach vollständige Verbände. Mit $\mathcal{L}[V]$ bzw. $\mathcal{L}[\mathrm{AG}(V)]$ notieren wir den vollständigen Verband der Untervektorräume bzw. der affinen Unterräume von V geordnet nach Inklusion.

II.3.24 Definition: Wir nennen $\mathcal{L}[V]$ den *linearen* und $\mathcal{L}[\mathrm{AG}(V)]$ den *affinen Verband* über dem K-Vektorraum V.

Sind V und W zwei Vektorräume derselben endlichen Dimension, dann sind $\mathcal{L}[V] \cong \mathcal{L}[W]$ und $\mathcal{L}[\mathrm{AG}(V)] \cong \mathcal{L}[A(W)]$. Nachdem wir Hüllensysteme und Hüllenoperatoren charakterisiert und deren Zusammenhänge aufgezeigt haben, beschäftigen wir uns in der nächsten Proposition mit Konstruktionen von Hüllenoperatoren.

II.3.25 Proposition: Seien $\mathcal{H}$ ein Mengensystem mit Grundmenge Y, $h : 2^Y \to 2^Y$ ein Hüllenoperator auf $\mathcal{H}$ und $X \subseteq Y$. Dann sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} h_{Y\setminus X} &: 2^{Y\setminus X} \to 2^{Y\setminus X} \quad \text{mit} \quad A \mapsto h(A) \cap (Y \setminus X) \quad \text{und} \\ h_{Y/X} &: 2^{Y\setminus X} \to 2^{Y\setminus X} \quad \text{mit} \quad A \mapsto h(A \cup X) \setminus X \end{aligned}$$

Hüllenoperatoren auf $Y \setminus X$ und heißen *Reduktion* bzw. *Kontraktion* auf $Y \setminus X$.

Beweis. Beide Abbildungen sind wohldefiniert, wir müssen also jeweils (HO1) bis (HO3) nachweisen. Dazu seien $Y' := Y \setminus X$ und $A, B \in 2^{Y'}$ mit $A \subseteq B$. Wegen der Extensität von h ist $A \subseteq h(A)$ und somit $A \subseteq h_{Y\setminus X}(A) = h(A) \cap Y'$. Analog überträgt sich die Monotonie von h auf $h_{Y\setminus X}$, da $h(A) \cap Y' \subseteq h(B) \cap Y'$ mit Hilfe der Mengenlehre aus $h(A) \subseteq h(B)$ folgt. Bleibt also noch

$$h_{Y\setminus X}(h_{Y\setminus X}(A)) \;=\; h_{Y\setminus X}(A) \;\Leftrightarrow\; h(h(A) \cap Y') \cap Y' \;=\; h(A) \cap Y'$$

zu zeigen. Die Inklusion $h_{Y\setminus X}(h_{Y\setminus X}(A)) \supseteq h_{Y\setminus X}(A)$ ist wegen der Extensität evident. Mit Proposition II.3.19 (i) folgt $h(h(A) \cap Y') \subseteq h(h(A)) \cap h(Y') = h(A) \cap h(Y')$ und zusammen mit $Y' \subseteq h(Y')$ ergibt sich $h(h(A) \cap Y') \cap Y' \subseteq h(A) \cap h(Y') \cap Y' = h(A) \cap Y'$, womit die Behauptung folgt.

Betrachten wir nun die Kontraktion $h_{X/Y}$: Die Eigenschaften (HO1) und (HO2) übertragen sich mit Hilfe der Mengenlehre von h auf $h_{Y/X}$. Ebenso einfach folgt

$$\begin{aligned} h_{Y/X}(\; h_{Y/X}(A)\;) &= h_{Y/X}(h(A \cup X) \setminus X) = h(h(A \cup X) \setminus X \cup X) \setminus X \\ &= h(h(A \cup X)) \setminus X = h(A \cup X) \setminus X \end{aligned}$$

die Idempotenz der Kontraktion. □

In Kapitel III werden wir im Rahmen der Matroidtheorie spezielle Hüllenoperatoren einführen, die zwei weitere Axiome erfüllen. Dadurch wird es uns möglich sein so genannte „Basen“ für diese Klasse der Hüllensysteme zu erklären. Analog gehen C. Faure und A. Frölicher im dritten Kapitel ihres Buches [FF00] vor. Für alles Weiterführende zum Thema Hüllensysteme bzw. Hüllenoperatoren sei auf das Buch [MP96] verwiesen.

3.3. Distributive, modulare und semimodulare Verbände

In vielen Verbänden gelten außer den im vorletzten Teilabschnitt beschriebenen Eigenschaften allgemeiner Verbände weitere spezielle Beziehungen, von denen die wichtigsten die distributiven Gesetze und das modulare Gesetz als Abschwächung der distributiven Gesetze sind.

II.3.26 Definition: Ein Verband $\mathcal{L} := (L, \wedge, \vee)$ heißt *distributiv*, falls für alle $a, b, c \in L$ die Gleichungen

$(\mathrm{D}_\vee)$ $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

$(\mathrm{D}_\wedge)$ $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

erfüllt sind.

Ein Verband ist bereits dann distributiv, falls nur eines der beiden Gesetze $(\mathrm{D}_\wedge)$ oder $(\mathrm{D}_\vee)$ gilt. Es genügt zu zeigen, dass $(\mathrm{D}_\vee)$ aus $(\mathrm{D}_\wedge)$ folgt, da die Umkehrung hierzu dual ist. Wenden wir unter Beachtung von Proposition II.3.3 zweimal $(\mathrm{D}_\wedge)$ an, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}(a \vee b) \wedge (a \vee c) &= [(a \vee b) \wedge a] \vee [(a \vee b) \wedge c] \\ &= a \vee [(a \vee b) \wedge c] \\ &= a \vee [(a \wedge c) \vee (b \wedge c)] \\ &= [a \vee (a \wedge c)] \vee (b \wedge c) \\ &= a \vee (b \wedge c).\end{aligned}$$

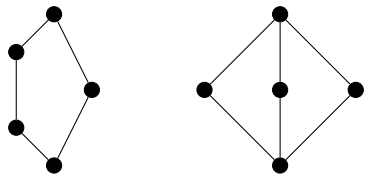
Die Gesetze $(\mathrm{D}_\vee)$ und $(\mathrm{D}_\wedge)$ sind, ebenso wie die assoziierten Gesetze für allgemeine Verbände (vgl. Proposition II.3.3), dual zueinander. Mit derselben Begründung wie bei allgemeinen Verbänden oder bei Partialordnungen folgt hieraus, dass für die distributiven Verbände das *Dualitätsprinzip* gilt. Ferner ist der zu einem distributiven Verband duale Verband wieder distributiv.

II.3.27 Beispiel:

a) Der Boolesche Verband $\langle 2^X; \subseteq \rangle$ aller Teilmengen einer festgehaltenen Menge X ist distributiv, da die distributiven Gesetze für die mengentheoretische Vereinigung und den Durchschnitt gelten ([SS94], § 1).

b) Jede Kette ist ein distributiver Verband.

c) Betrachten wir die Verbände D_5 und P_5, dargestellt in Abbildung II.3. Beide Verbände sind nicht distributiv, D_5 ist sogar der kleinste nicht distributive Verband überhaupt ([Her67], §8).



P_5 D_5

Abb. II.3.: *Verbände P_5 und D_5*

Allerdings erfüllt D_5 unter der Prämisse $a \leq c$ das Axiom ($D_\vee$), da sodann $(a \vee c) = c$. Dual hierzu gilt in D_5 das Axiom ($D_\wedge$) für alle $c \leq a$.

II.3.28 Satz: Ein Verband ist genau dann distributiv, wenn er die Verbände D_5 oder P_5 nicht als Teilverband enthält.

Beweis. [Grä91], Kapitel II, Satz 1. □

Viele wichtige Verbände sind zwar nicht-distributiv, erfüllen aber, wie der Verband D_5 aus Beispiel II.3.27 c), eine abgeschwächte Bedingung.

II.3.29 Definition: Ein Verband $\mathcal{L} := (L, \wedge, \vee)$ heißt *modular*, wenn für beliebige $a, b, c \in L$ die Implikation

(M) $a \leq c \quad \Rightarrow \quad a \vee (b \wedge c) \;=\; (a \vee b) \wedge c$ gilt.

Modulare Verbände bzw. davon abgeleitete Eigenschaften werden für unsere Zwecke an späterer Stelle eine bedeutende Rolle spielen. Die Bedingung (M) nennen wir *modulares Gesetz* und die Forderung, dass ($D_\wedge$) unter der Voraussetzung $c \leq a$ gelten soll, d.h. dass

(M*) $c \leq a \quad \Rightarrow \quad a \wedge (b \vee c) \;=\; (a \wedge b) \vee c,$

ist gleichbedeutend mit (M). In modularen Verbänden ist also das *Dualitätsprinzip* erfüllt, d.h. der duale Verband eines modularen Verbandes ist selbst modular. Aufgrund der Definition ist jeder distributive Verband modular, die Verbände aus Beispiel II.3.27 a) und b) sind demnach distributiv und modular.

II.3.30 Beispiel:

a) Der vollständige Verband aller Untervektorräume eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V, ausgestattet mit der Inklusion als Partialordnung, ist modular. Seien U_1, U_2 und W Untervektorräume von V. Es sind $U_1 \wedge U_2 := U_1 \cap U_2$ der Schnitt und $U_1 \vee U_2 := U_1 + U_2$ die Verbindung von Untervektorräumen. Ist $U_1 \subseteq U_2$, so gilt

$$U_1 + (W \cap U_2) = (U_1 + W) \cap U_2.$$

Die Inklusion „$\subseteq$“ ist evident. Seien umgekehrt $u_1 \in U_1, w \in W$ und angenommen $(u_1 + w) \in U_2$, dann liegt $w = (u_1 + w) - u_1$ in U_2 und somit auch in $W \cap U_2$. Es folgt $u_1 + w \in U_1 + (W \cap U_2)$.

b) Der Verband P_5 aus Abbildung II.3 ist nicht modular, dafür aber der Verband D_5 aus derselben Abbildung. Dieser ist der kleinste modulare, nicht-distributive Verband überhaupt.

Der Beweis aus a) des letzten Beispiels geht auf R. DEDEKIND zurück und gilt darüber hinaus auch für algebraische Moduln über Ringen. Die Namensgebung modularer Verbände wurde durch dieses Beispiel motiviert.

In einem beliebigen Verband ist die Modularitäts-Ungleichung erfüllt; es ist also hinreichend $a \leq c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) \geq (a \vee b) \wedge c$ nachzuweisen, um zu zeigen, dass ein Verband modular ist.

II.3.31 Satz: Ein Verband ist genau dann modular, wenn er den Verband P_5 nicht als Teilverband enthält.

Beweis. [Grä91], Kapitel II, Satz 2 (i). □

II.3.32 Definition: Sei $\mathcal{L} := (L, \wedge, \vee) = \langle L; \leq \rangle$ ein beliebiger Verband.

1. Ein Element $b \in L$ heißt *modulares Element* von L, falls

$$a \leq c \quad \Rightarrow \quad (a \vee b) \wedge c \;=\; a \vee (b \wedge c).$$

   für alle $a, c \in L$ erfüllt ist.

2. Ein *modularer Filter* $\mathcal{M}$ des Verbandes $\mathcal{L}$ ist ein Filter von $\langle L; \leq \rangle$, so dass $\forall a, b \in \mathcal{M}$ und $(a, b)M \;\Rightarrow\; a \wedge b \in \mathcal{M}$ gilt.

Ein Verband ist also genau dann modular, wenn jedes Element modular ist.

II.3.33 Satz: Seien $\mathcal{L} := (L, \wedge, \vee) = \langle L; \leq \rangle$ ein modularer Verband und $a, b \in L$ mit $a < b$. Dann ist die Abbildung $\phi_a : [a \wedge b, b] \to [a, a \vee b]$ definiert durch $x \mapsto x \vee a$ ein Verbandsisomorphismus mit inverser Abbildung $\psi_b : [a, a \vee b] \to [a \wedge b, b]$, $y \mapsto y \wedge b$.

Beweis. Mit (i) und der dazu dualen Aussage aus Proposition II.3.5 folgt, dass ϕ_a und ψ_b Ordnungshomomorphismen sind. Sei $x \in [a \wedge b, b]$, dann ist $a \wedge b \leq x \leq b$ und das impliziert $(a \wedge b) \vee a \leq \phi_a(x) = x \vee a \leq (b \vee a)$, d.h. Bild$(\phi_a) \subseteq [a, a \vee b]$. Weiter folgt dank der Modularität

$$(\psi_b \circ \phi_a)(x) = (x \vee a) \wedge b = x \vee (a \wedge b) = x \vee a = x.$$

Umgekehrt erhalten wir $(\phi_a \circ \psi_b)(y) = y$ für jedes $y \in [a, a \vee b]$, d.h. ϕ_a und ψ_b sind zueinander inverse Ordnungshomomorphismen. Mit Proposition II.3.12 ergibt sich die Behauptung. □

II.3.34 Folgerung: Seien $\mathcal{L} := (L, \wedge, \vee)$ ein modularer Verband und $a, b \in L$, dann gilt die Äquivalenz:

$$(a \wedge b) \lessdot b \quad \Leftrightarrow \quad a \lessdot (a \vee b).$$

Beweis. Folgt aus Satz II.3.33 unter Beachtung von $a \lessdot b \Leftrightarrow |[a, b]| = 2$. □

Als nächstes untersuchen wir eine abgeschwächte Form der Modularität.

II.3.35 Definition: Sei $\mathcal{L} := (L, \wedge, \vee)$ ein Verband, dann heißt $\mathcal{L}$ (*aufwärts*) *semimodular*, falls für alle $a, b \in L$

$$(a \wedge b) \lessdot b \quad \Rightarrow \quad a \lessdot (a \vee b) \qquad \text{gilt.}$$

Gemäß Folgerung II.3.34 ist jeder modulare Verband zugleich semimodular, die Umkehrung gilt jedoch nicht.

II.3.36 Definition: Sei L ein Verband mit Nullelement $\mathfrak{o}$, dann nennen wir $a \in L$ *Atom*, wenn a oberer Nachbar von $\mathfrak{o}$ ist, d.h. wenn $\mathfrak{o} \lessdot a$.

II.3.37 Proposition: Seien $\mathcal{L} := \langle L; \leq \rangle = (L, \wedge, \vee)$ ein semimodularer Verband, dann erfüllt $\mathcal{L}$ die Jordan-Dedekind-Kettenbedingung (JDCC).

Beweis. Wir führen den Beweis mit Induktion nach der Länge einer maximalen Kette von $x \in L$ nach $y \in L$. Ist $x \lessdot y$, dann gibt es nur eine Kette der Länge 1 von x nach y. Angenommen die maximalen Ketten der maximalen Länge $m-1$ genügen der JDCC. Betrachten wir sodann die beiden maximalen Ketten $\gamma : x = s_0 \lessdot s_1 \lessdot \ldots \lessdot s_m = y$ und $\gamma' : x = t_0 \lessdot t_1 \lessdot \ldots \lessdot t_n = y$. Ist $s_1 = t_1$, so folgt aus der Induktionsannahme, dass jede Kette von $s_1 = t_1$ nach y die Länge $m - 1 = n - 1$ besitzt und somit die Behauptung. Nehmen wir an, dass $s_1 \neq t_1$, dann ergibt sich die Gültigkeit von $s_1 \lessdot (s_1 \vee t_1)$ bzw. $t_1 \lessdot (s_1 \vee t_1)$ mit Hilfe der Semimodularität aus $(s_1 \wedge t_1) \lessdot t_1$ bzw. $(s_1 \wedge t_1) \lessdot s_1$. Gemäß Induktionsannahme ist die Länge einer jeden maximalen Kette von s_1 bzw. t_1 nach y identisch, weshalb die Länge einer jeden Kette von $s_1 \vee t_1$ nach y stets von der Länge $m - 2 = n - 2$ ist. Insgesamt folgt, dass die Ketten γ und γ' stets dieselbe Länge besitzen. □

Die letzte Proposition motiviert

II.3.38 Definition: Seien $\mathcal{L} = \langle L; \leq \rangle$ ein semimodularer Verband mit *Nullelement* und $x \in L$. Die Länge einer (und damit jeder) maximalen Kette von $\mathfrak{o}$ nach x nennen wir *ordnungstheoretischen Rang* von $x \in L$ und wir notieren diesen durch $\lambda(x)$. Die dadurch induzierte Abbildung

$$\lambda : L \to \mathbb{N}_0 \quad \text{mit} \quad x \mapsto \lambda(x)$$

heißt *ordnungstheoretische Rangfunktion* von $\mathcal{L}$.

II.3.39 Proposition: Seien $\mathcal{L} := \langle L; \leq \rangle = (L, \wedge, \vee)$ ein semimodularer Verband endlicher Länge mit λ als ordnungstheoretischer Rangfunktion, dann gilt für alle $x, y \in L$ die Ungleichung

$$\lambda(x) + \lambda(y) \;\geq\; \lambda(x \vee y) + \lambda(x \wedge y).$$

Beweis. [Cra70], Prop. 2.6. □

3.4. Geometrische Verbände

Geometrische Verbände wurden von G. BIRKHOFF in [Bir35] eingeführt und dienten u.a. der Axiomatisierung der Geometrie, insbesondere aber der verbandstheoretischen Beschreibung von „einfachen Matroiden". In der Literatur wird diese Verbandsart z.B. in [Bir67], [Cra70] oder [Aig75] thematisiert und oftmals auch Matroidverband genannt. Unsere Ausführungen lehnen sich überwiegend an die ersten beiden aufgelisteten Referenzen an.

II.3.40 Definition: Seien $\mathcal{L}(L)$ ein Verband mit Null- und Einselement sowie $S \subseteq L$ die Menge der Atome von L.

1. $\mathcal{L}$ heißt *Punktverband* oder *atomar*, falls jedes Element eine Verbindung von Atomen ist, d.h. falls $\forall x \in L: \quad x = \bigvee_{a \leq x} \{\mathfrak{o} \lessdot a |\ a \in S\}$.
2. $\mathcal{L}$ heißt *geometrisch*, wenn $\mathcal{L}$ semimodular, atomar und von endlicher Länge ist.

II.3.41 Proposition: Sei $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ ein Punktverband, dann sind äquivalent:

(i) L ist semimodular;

(ii) $\forall x \in L$ und alle Atome $a \in L$: $\quad a \wedge x = \mathfrak{o} \Rightarrow x \lessdot (a \vee x)$.

(iii) $\forall x \in L$ und alle Atome $a, b \in L$: $\quad a \wedge x = \mathfrak{o}$ und $a \leq (x \vee b) \Rightarrow b \leq (x \vee a)$.

Beweis. (i) ⇒ (ii): Seien $a, x \in L$ und a ein Atom sowie $x \wedge a = \mathfrak{o}$, dann ergibt sich $x \wedge a = \mathfrak{o} \lessdot a \;\Rightarrow\; x \lessdot (x \vee a)$ mit Hilfe der Semimodularität.

(ii) ⇒ (iii): Seien nun $a, b, x \in L$ und a, b Atome in L mit $a \nleq x$ und $a \leq (x \vee b)$. Aus $b \leq x$ würde $x \vee b = x$ folgen, es ist also $(b \wedge x) = 0$ und mit (ii) ergibt sich $x \lessdot (b \vee x)$. Aus $x < (a \vee x) \leq (b \vee x)$ erhalten wir schließlich $a \vee x = b \vee x$.

(iii) ⇒ (ii): Seien $a \in L$ ein Atom mit $a \wedge x = 0$, dann ist $x < a \vee x$. Zum Nachweis, dass $x \lessdot a \vee x$ gilt, nehmen wir $x < y \leq a \vee x$ an. Da L ein Punktverband ist, existiert ein Atom b mit $x < b \vee x \leq y$, d.h. $b \wedge x = \mathfrak{o}$ und damit $b \vee x \leq y \leq a \vee x$. Wenden wir nun die Voraussetzung (iii) an, so folgt $b \vee x = y = a \vee x$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Seien $x, y \in L$ mit $(x \wedge y) \lessdot y$; da L atomar ist, existiert ein Atom $a \nleq (x \wedge y)$, so dass $(x \wedge y) < (x \wedge y) \vee a \leq y$ und mit der Voraussetzung folgt $(x \wedge y) \lessdot (x \wedge y) \vee a = y$. Zusammen mit Proposition II.3.3 erhalten wir $(x \vee y) = x \vee (x \wedge y) \vee a = x \vee a$ und deshalb $x \lessdot (x \vee y)$ mit (ii). □

Bedingung (ii) bzw. (iii) der letzten Proposition nennen wir auch *Bedeckungs-* bzw. *Austauscheigenschaft* semimodularer Punktverbände.

II.3.42 Proposition: Seien $\mathcal{L} := \langle L; \leq \rangle = (L, \wedge, \vee)$ ein semimodularer Punktverband, $S \subseteq L$ die Menge aller Atome von L und $x, y \in L$. Dann gilt die Äquivalenz:

$$x \lessdot y \quad \Leftrightarrow \quad \exists \text{ Atom } a \in S \text{ mit } a \notin x \text{ und } x \vee a = y.$$

Beweis. „⇒“: Sei $x \lessdot y$, dann betrachten wir x und y als Teilmengen von S und wählen ein Atom $a \in y \setminus x$. Es ist $x < (x \vee a) \leq y$ und mit der Voraussetzung folgt $(x \vee a) = y$.

„⇐“: Umgekehrt sei $a \in L$ ein Atom mit $a \nleq x$ und $x \vee a = y$. Seien weiter $z \in L$ mit $x < z \leq (x \vee a)$ und $b \in z \setminus x$ ein Atom. Dann ist $b \nleq x$ aber $b \leq (x \vee a)$. Wenden wir darauf die Austauscheigenschaft für semimodulare Punktverbände an, so erhalten wir $a \leq (x \vee b) \leq z$. Aus $x \leq z$ und $a \leq z$ folgt $(x \vee a) \leq z$ und mit der Antisymmetrie $(x \vee a) = z$. □

II.3.43 Folgerung: Seien $\mathcal{L} := \langle L; \leq \rangle = (L, \wedge, \vee)$ ein semimodularer Punktverband, $S \subseteq L$ die Menge aller Atome von L und $x, y, z \in L$, dann gilt:

$$x \leq y \quad \Rightarrow \quad (x \vee z) \leq (y \vee z).$$

Beweis. Im Falle der Identität ist die Behauptung trivial, es bedecke also y das Element x. Dann existiert gemäß letzter Proposition die Darstellung $y = x \vee a$, wobei $a \nleq x$ ein Atom ist. Schließlich erhalten wir $y \vee z = (x \vee a) \vee z = (x \vee z) \vee a$, aufgrund der Kommutativität und der Assoziativität der Verbandsoperationen. Gemäß Proposition II.3.42 bedeckt damit $y \vee z$ das Verbandselement $x \vee z$. □

II.3.44 Proposition: Seien $\mathcal{L} := \langle L; \leq \rangle = (L, \wedge, \vee)$ ein geometrischer Verband, $x, y \in L$ und $A \subseteq S$ eine Teilmenge der Atome S von L.

(i) Jedes Intervall $[x, y]$ von $\mathcal{L}$ ist geometrisch;

(ii) Die Menge $L' := \bigvee_{a \in A} \overline{a}$ zusammen mit der dadurch induzierten Partialordnung ist geometrisch.

Beweis. (i) Das Intervall $[x, y]$ von $\mathcal{L}$ ist offenbar von endlicher Länge und semimodular, wonach nur noch zu zeigen bleibt, dass $[x, y]$ ein Punktverband ist. Dazu seien $z \in [x, y]$ mit $x \nleq z$ und $a_1, \ldots, a_n$ Atome von L, so dass $z = a_1 \vee \ldots \vee a_n$. Aufgrund der Assoziativität und der Kommutativität der Verbindung können wir z darstellen durch $z = z \vee x = (a_1 \vee x) \vee \ldots \vee (a_n \vee x)$. Für diejenigen $i \in \mathbb{N}_n$ mit $(a_i \wedge x) = o \lessdot a_i$ ergibt sich mit Hilfe der Semimodularität $x \lessdot (a_i \vee x)$. Ist dagegen $(a_i \wedge x) = a_i$ und damit $a_i \leq x$, dann folgt $a_i \vee x = x$. Deshalb erhalten wir $z = \bigvee_{a_i \nleq x} (a_i \vee x)$ als Verbindung von Atomen aus $[x, y]$.

(ii) Dass L' ein Punktverband endlicher Länge ist, liegt auf der Hand. Zum Nachweis der Semimodularität seien $x, y \in L'$ mit $(x \wedge y) \lessdot y$, dann existiert nach Proposition II.3.42 ein Atom $a \in A$ mit $a \leq y$ und $a \nleq x$, so dass $(x \wedge y) \vee a = y$ erfüllt ist. Weiter folgt mit Hilfe von Proposition II.3.3 die Gleichung $(x \vee y) = x \vee [(x \wedge y) \vee a] = (x \vee a) \vee (x \wedge y) = (x \vee a)$, was bedeutet, dass $x \lessdot (x \vee y) = (x \vee a)$.

□

Da bei direkten Produkten von Verbänden die Verbandsoperationen komponentenweise durch die Verbandsoperationen der Faktoren des Produkts definiert sind, liegt die Beweisführung der nächsten Proposition auf der Hand.

II.3.45 Proposition: Sei $\mathcal{L}(L) := \mathcal{L}_1(L_1) \times \mathcal{L}_2(L_2)$ das direkte Produkt zweier Verbände, dann gilt die Äquivalenz:

$$\mathcal{L} \text{ ist geometrisch} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}_1 \text{ und } \mathcal{L}_2 \text{ sind geometrisch.}$$

II.3.46 Definition: Seien $\mathcal{L}(L)$ ein Verband mit Null- $\mathfrak{o}$ und Einselement $\mathfrak{1}$ sowie $x \in L$.

1. Ein *Komplement* von x ist ein Element $y \in L$, so dass $x \wedge y = \mathfrak{o}$ und $x \vee y = \mathfrak{1}$.
2. Ein *relatives Komplement* von $x \in [s,t]$ ist ein Element $y \in [s,t]$, so dass $x \wedge y = s$ und $x \vee y = t$.
3. $\mathcal{L}$ heißt *komplementiert*, falls es zu jedem $x \in L$ ein Komplement gibt.
4. $\mathcal{L}$ heißt *relativ komplementiert*, wenn jedes Intervall komplementiert ist.

Boolesche Verbände sind relativ komplementiert, wohingegen der Verband P_5 aus Beispiel II.3.27 komplementiert aber nicht relativ komplementiert ist.

II.3.47 Satz: Sei $\mathcal{L} := \langle L; \leq \rangle = (L, \wedge, \vee)$ ein semimodularer Verband endlicher Länge, dann gilt die Äquivalenz:

$$\mathcal{L} \text{ ist geometrisch} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L} \text{ ist relativ komplementiert.}$$

Beweis. „⇒“: Sei $\mathcal{L}$ geometrisch und $[s,t]$ ein Intervall mit $x, y_i \in [s,t]$, so dass $x \wedge y_i = s$. Ist $x \vee y_i = t$, so sind wir bereits fertig. Anderenfalls existiert ein Atom $q \in t \setminus (x \vee y_i)$ mit $q \leq t$ und $q \nleq (x \vee y_i)$, womit $(x \vee y_i) \lessdot x \vee (y_i \vee q) \leq t$ aufgrund von Proposition II.3.42 folgt. Wir setzen $y_{i+1} := (y_i \vee q)$ und nehmen zunächst an, dass $s = (x \wedge y_i) < (x \wedge y_{i+1})$. Sodann existiert ein Atom $p \in (x \wedge y_{i+1}) \setminus (x \wedge y_i)$ mit $p \leq x, p \nleq y_i$ und $p \leq y_{i+1} = (y_i \vee q)$ und mit der Austauscheigenschaft semimodularer Punktverbände folgt $y_i \vee p = y_i \vee q$ und daraus der Widerspruch $(x \vee y_{i+1}) = (x \vee y_i) \vee p = (x \vee y_i)$. Demnach sind $s = (x \wedge y_{i+1})$ und $(x \vee y_i) < (x \vee y_{i+1})$, weshalb wir nach $n \in \mathbb{N}$ Iterationen ein relatives Komplement y_{i+n} von x in $[s,t]$ erhalten.

„⇐“: Sei nun umgekehrt $\mathcal{L}$ relativ komplementiert. Wir müssen nur noch zeigen, dass $\mathcal{L}$ ein Punktverband ist. Dazu nehmen wir an, dass es ein $x \in L$ mit $y := \sup\{a |\ 0 \lessdot a \leq x\} < x$ gibt. Dann existiert zu y ein Komplement $y' > \mathfrak{o}$ in $[\mathfrak{o}, x]$, d.h. $y \wedge y' = \mathfrak{o}$ und $y \vee y' = x$. Dem folgend gibt es ein Atom b mit $b \leq y' \leq x$ und $b \nleq y$ – Widerspruch zur Definition von y. □

Abschließend charakterisieren wir die in Definition II.3.32 eingeführten modularen Elemente eines geometrische Verbandes.

II.3.48 Satz: Sei $\langle L; \leq \rangle = (L, \wedge, \vee)$ ein geometrischer Verband, dann sind äquivalent:

(i) x ist modular;

(ii) $\forall y \in L$ mit $x \cap y = \varnothing$: $\quad \lambda(x) + \lambda(y) = \lambda(x \vee y)$;

(iii) $\forall u \in L$ mit $u \leq x$ und $\forall y \in L$: $\quad (u \vee y) \wedge x = u \vee (y \wedge x)$;

Beweis. [Bry75], Theorem 3.3. □

4. Kategorien und Morphismen

Zu Beginn dieses Kapitels wurde im Abschnitt 1 die Mengenlehre von Zermelo und Fraenkel vorausgesetzt, wonach die Zusammenfassung $\mathcal{U}$ aller Mengen – die wir *Universum* nennen – keine Menge ist. Angenommen, das Universum $\mathcal{U}$ ist eine Menge, dann würde die Teilmenge $A := \{x |\ x \in \mathcal{U} \text{ und } x \notin x\} \subseteq \mathcal{U}$ die Äquivalenz $A \in A \Leftrightarrow A \notin A$ implizieren ([AHS90]). Derartige „Mengen“, die auf Grundlage der naiven Mengenlehre zu inneren Widersprüchen führen, werden *echte Klassen* genannt. Das Konzept der Klassen dient also gerade dem Umgang mit „sehr großen“ Mengen. Ferner sei festgehalten, dass jede Menge eine Klasse ist und die Elemente einer Klasse stets Mengen sind. Folgend können die Schreibweisen der Mengenlehre für Klassen übernommen werden.

II.4.1 Definition: Eine **Kategorie** $\mathcal{K} := (\mathrm{Ob}(\mathcal{K}), \mathrm{Mor}(\mathcal{K}), \circ)$ besteht aus

1. einer Klasse von *Objekten* $\mathrm{Ob}(\mathcal{K})$, deren Elemente *$\mathcal{K}$-Objekte* genannt werden.

2. einer Klasse paarweise disjunkter Mengen $\mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$, deren Elemente *Morphismen* von A nach B heißen.

3. einer *Komposition von Morphismen*, d.h. einer Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(B, C) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B) &\to \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(A, C) \\ (g, f) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

   zu jedem Tripel von Objekten.

Ausgehend von diesen Bestandteilen müssen folgende Axiome erfüllt sein, so dass wir von einer Kategorie $\mathcal{K}$ sprechen:

(Cat_1) *Assoziativität*: Sind $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(B, C)$ und $h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(C, D)$, so gilt $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(Cat_2) *Identitäten*: Zu jedem $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K})$ existiert ein *identischer Morphismus* $1_A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(A, A)$, so dass $f \circ 1_A = f$ und $1_A \circ g = g$ für alle $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$ und alle $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(C, A)$ gilt.

Die *Klasse der Morphismen*

$$\mathrm{Mor}(\mathcal{K}) := \bigcup_{A,B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K})} \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(A,B)$$

ergibt sich aus der Vereinigung der Mengen der Morphismen eines jeden Objektpaares (A,B), wobei $\mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(A,B)$ durchaus gleich der leeren Menge sein kann. Morphismen beschreiben die möglichen Beziehungen zwischen Objekten einer Kategorie. Neben Abbildungen sind z.B. Relationen oder Mengensysteme typische Vertreter von Morphismen, d.h. ein Morphismus einer Kategorie muss nicht strukturerhaltend nicht einmal eine Abbildung sein. Ferner können dieselben Objekte mit ganz unterschiedlichen Arten von Morphismen studiert werden, wodurch die Perspektive bezüglich der Objekte verändert werden kann.

Aus dem reichen Fundus möglicher Beispiele wählen wir solche aus, die für unsere Belange von Bedeutung sind. Das Musterexemplar einer Kategorie ist die Kategorie $\mathcal{Set}$, bestehend aus dem Universum $\mathcal{U}$ und den Abbildungen zwischen zwei beliebigen Mengen sowie der üblichen Komposition von Abbildungen.

II.4.2 Beispiel:

a) Die *Kategorie $\mathcal{Set}$ der Mengen* sei definiert durch $\mathrm{Ob}(\mathcal{Set}) := \mathcal{U}$ und den Morphismenmengen $\mathrm{Mor}_{\mathcal{Set}}(A,B)$, bestehend aus allen Abbildungen vom Typ $A \to B$ mit $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{Set})$. Die Komposition von Morphismen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ sei die übliche Komposition $g \circ f : A \to C$ zweier Abbildungen. Die Hintereinanderausführung von Abbildungen ist assoziativ und die identische Abbildung $\mathrm{id} : A \to A$, die jedes Element festhält, erfüllt die Existenz der geforderten Identitäten für jedes $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{Set})$. Betrachten wir zwei Mengenpaare mit $(A,B) \neq (C,D)$, dann ist $\mathrm{Mor}_{\mathcal{Set}}(A,B) \neq \mathrm{Mor}_{\mathcal{Set}}(C,D)$.

b) Die Klasse aller Mengen $\mathcal{U}$ zusammen mit den Relationen als Morphismen bildet ebenso eine Kategorie $\mathcal{Rel}$, deren Komposition wie folgt bestimmt ist: Seien $R_1 \subseteq A \times B$ und $R_2 \subseteq B \times C$ Relationen, dann ist $(R_2 \circ R_1) \subseteq A \times C$ definiert durch

$$(a,c) \in (R_2 \circ R_1) \;:\Leftrightarrow\; \exists b \in B : \; (a,b) \in R_1 \;\text{ und }\; (b,c) \in R_2$$

ebenfalls eine Relation. Die Identitäten entsprechen den so genannten Diagonalen $\Delta_A := \{(a,a) |\ a \in A\}$ für jede Menge A. Die Komposition ist assoziativ und die Identitäten sind neutral bezüglich der Komposition.

c) Betrachten wir die Klasse $\mathrm{Ob}(\mathcal{Vec})$ aller endlichdimensionalen Vektorräume über einem festen Körper K und die Menge aller K-linearen Abbildungen zwischen zwei Objekten aus $\mathrm{Ob}(\mathcal{Vec})$. Zusammen mit der üblichen Komposition von Abbildungen ergibt sich daraus die *Kategorie $\mathcal{Vec}$ der Vektorräume*. Das Assoziativgesetz ist insbesondere für K-lineare Abbildungen erfüllt und die identische Abbildung ist stets K-linear.

e) Die Klasse der Objekte $\mathrm{Ob}(\mathcal{Aff})$ der *Kategorie der affinen Räume* besteht aus den affinen Räumen, d.h. den Nebenklassen eines Vektorraumes. Sind $A := \mathrm{AG}(V)$ und

$A' := \mathrm{AG}(V')$ affine Räume, so sei $\mathrm{Mor}_{\mathcal{Aff}}(A, A')$ die Menge aller affinen Abbildungen von A nach A'. Auch hier sei die Komposition von Morphismen wieder die übliche Komposition von Abbildungen. Die Identität ist eine affine Abbildung und zudem gilt das Assoziativgesetz insbesondere für affine Abbildungen.

II.4.3 Definition: Eine Kategorie $\mathcal{U}$ heißt *Unterkategorie* einer Kategorie $\mathcal{K}$, wenn gilt:

(i) $\mathrm{Ob}(\mathcal{U}) \subseteq \mathrm{Ob}(\mathcal{K})$;

(ii) $\mathrm{Mor}_{\mathcal{U}}(A, B) \subseteq \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$ für alle $(A, B) \in (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$;

(iii) Die Komposition von zwei Morphismen in $\mathcal{U}$ ist dieselbe wie ihre Komposition in $\mathcal{K}$;

(iv) Für jedes $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ ist die Identität 1_A in $\mathcal{U}$ und in $\mathcal{K}$ dieselbe.

Eine Unterkategorie ist für sich genommen ebenfalls eine Kategorie. Die Kategorie $\mathcal{Set}$ ist eine Unterkategorie von $\mathcal{Rel}$, da eine Abbildung gemäß Definition eine spezielle Relation ist.

II.4.4 Definition: Gegeben sei eine Kategorie $\mathcal{K}$, dann heißen zwei Objekte $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K})$ *homomorph äquivalent*, in Zeichen $A \leftrightarrow B$, wenn $\mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B) \neq \varnothing$ und $\mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(B, A) \neq \varnothing$. Die durch die Existenz von Morphismen erklärte Relation heißt *Hom-Äquivalenz*.

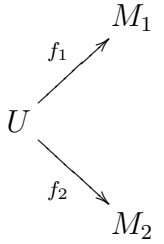
Wegen (Cat_1) ist die Hom-Äquivalenz transitiv und nach (Cat_2) reflexiv. Die Symmetrie ergibt sich aus der Definition der Relation, weshalb „$\leftrightarrow$“ eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Ob}(\mathcal{K})$ ist, deren Äquivalenzklassen wir durch $[A]$ notieren. Auf der Klasse dieser Äquivalenzklassen können wir eine Partialordnung erklären, indem wir

$$[A] \sqsubseteq [B] \quad :\Leftrightarrow \quad \mathrm{Mor}(A, B) \neq \varnothing$$

setzen. Die Reflexivität und Transitivität der Relation „$\sqsubseteq$“ folgen erneut aus den Eigenschaften der Kategorie $\mathcal{K}$ und die Antisymmetrie ergibt sich gerade aus der Konstruktion der Äquivalenzklassen.

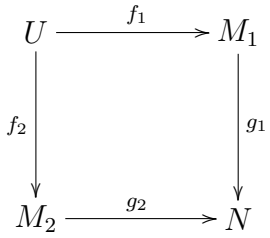
II.4.5 Definition: Die Partialordnung „$\sqsubseteq$“ auf der Klasse aller Äquivalenzklassen der Hom-Äquivalenz heißt die *Hom-Ordnung*.

Seien $\mathcal{K} := (\mathrm{Ob}(\mathcal{K}), \mathrm{Mor}(\mathcal{K}), \circ)$ eine Kategorie, $M_1, M_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K})$ und $f_1, f_2 \in \mathrm{Mor}(\mathcal{K})$ zwei Morphismen mit derselben Quelle $U \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K})$.



Unter welchen Umständen existiert ein Paar von Morphismen $g_1 : M_1 \to N$ und $g_2 : M_2 \to N$, so dass $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$ gilt?

II.4.6 Definition: Gegeben sei das kommutative Diagramm



Das Paar (g_1, g_2) heißt *Fasersumme* oder *Pushout* des Paares (f_1, f_2) genau dann, wenn für jedes Paar von Morphismen (g_1', g_2') mit $g_1' : M_1 \to X$ bzw. $g_2' : M_2 \to X$ und $g_2' \circ f_2 = g_1' \circ f_1$ *genau ein* $\sigma : N \to X$ existiert, so dass

$$g_1' = \sigma \circ g_1$$
$$g_2' = \sigma \circ g_2.$$

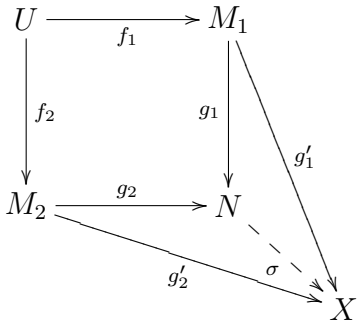


Abb. II.4.: *Diagramm des Pushouts von* (f_1, f_2)

Wir nennen einen Pushout *injektiv*, falls die in Abbildung II.4 angeführten Morphismen injektive Abbildungen sind.

III. Matroide

Dieses Kapitel gliedert sich in insgesamt drei Abschnitte. Im ersten Abschnitt werden die Grundbegriffe der Matroidtheorie erklärt, um im zweiten Konstruktionsprinzipien, wie z.B. die Reduktion oder Kontraktion, zu studieren. Schließlich wird im letzten Abschnitt die Orthogonalität (auch Dualität genannt) von „Matroiden“ erklärt.

1. Grundbegriffe

Ein wesentliches Merkmal eines „Matroids“ ist die Vielfalt kryptomorpher Definitionen. Wie auch [Aig76] werden wir unter einem „Matroid“ eine Menge, ausgestattet mit einem speziellen Hüllenoperator, verstehen und daraufhin weitere äquivalente Charakterisierungen aufzeigen.

1.1. Matroide, Unabhängigkeit und Basis

In Teilabschnitt 3.2 wurden Hüllenoperatoren betrachtet und festgestellt, dass jeder Hüllenoperator mit einem Hüllensystem korrespondiert.

III.1.1 Definition: Seien S eine Menge und cl ein Hüllenoperator auf S, dann heißt $M(S) := (S, \mathrm{cl})$ ein *Matroid auf* S, falls für alle $X \subseteq S$ und $a, b \in S$ zusätzlich die Bedingungen

(M1) $(a \notin \mathrm{cl}(X) \text{ und } a \in \mathrm{cl}(X \cup b)) \Rightarrow b \in \mathrm{cl}(X \cup a)$; [Austauschaxiom]

(M2) $\exists B \subseteq X$ mit $|B| < \infty$ und $\mathrm{cl}(B) = \mathrm{cl}(X)$; [Endliche Basis]

erfüllt sind. In dieser Situation nennen wir cl den *Abschlussoperator* und die Menge S *Grundmenge* des Matroids $M(S)$. Ist die Grundmenge endlich, so nennen wir M *endlich*.

Bemerkung: Die Notation $M(S)$ für ein Matroid verwenden wir vor allem dann, wenn wir die Grundmenge betonen wollen. Anderenfalls schreiben wir anstelle $M(S)$ auch einfach M oder verwenden andere Großbuchstaben des lateinischen Alphabets. Ferner schreiben wir für das Bild des Abschlussoperators anstatt $\mathrm{cl}(X)$ auch einfach $\overline{X}$ für eine Teilmenge $X \subseteq S$.

Das mit dem Matroid $M(S)$ korrespondierende Hüllensystem $\mathcal{H}_{\mathrm{cl}}$ bildet zusammen mit der Inklusionsordnung gemäß Satz II.3.23 einen vollständigen Verband $\mathcal{L}[M(S)]$ mit den Verbandsoperationen

$$\bigwedge_{i \in I} X_i = \bigcap_{i \in I} X_i \qquad\qquad \bigvee_{i \in I} X_i = \mathrm{cl}\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)$$

für alle $X_i \in \mathcal{L}(S)$ und $i \in I$, wobei I eine entsprechende Indexmenge sei.

III.1.2 Definition: Sei $M(S)$ ein Matroid und $X \subseteq S$.

1. $M(S)$ heißt *einfach* oder eine (*kombinatorische*) *Geometrie*, falls $\overline{\varnothing} = \varnothing$ und $\overline{a} = a$ für alle $a \in S$ gelten.

2. Die abgeschlossenen Mengen $X = \overline{X}$ nennen wir *Unterräume des Matroids* $M(S)$ und $\mathcal{L}[M(S)]$ den *Unterraumverband* von $M(S)$.

III.1.3 Beispiel: Seien S eine endliche Menge und $\mathrm{id} : 2^S \to 2^S$ die Identität, d.h. $X \mapsto \mathrm{id}(X) = X$, dann ist (S, id) ein Matroid, in dem jede Teilmenge abgeschlossen ist und welches wir *freies Matroid* von S nennen. Der zugehörige Unterraumverband ist der distributive Boolesche Verband 2^S aus Beispiel II.3.27.

Für jedes Matroid $M(S)$ mit Abschlussoperator $\mathrm{cl} : 2^S \to 2^S$, notiert durch $X \mapsto \overline{X}$ für $X \subseteq S$, erklären wir die Relation $\sim \subseteq (S \times S)$ durch

$$a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad \overline{a} = \overline{b}.$$

Die Elemente aus S zerfallen in disjunkte Äquivalenzklassen $[a] = \{b \in S |\ b \sim a\}$, wobei wir alle diese Klassen bis auf $[\varnothing]$ in der Menge $\widetilde{S} := \{[a] \mid a \in S \setminus \overline{\varnothing}\}$ zusammenfassen. Die Abbildung $\widetilde{\mathrm{cl}} : \widetilde{S} \to \widetilde{S}$ bestimmt durch

$$X \mapsto \widetilde{\mathrm{cl}}(X) := \left\{ [a] \in \widetilde{S} \ :\ a \in \left(\overline{\bigcup_{[b] \in X} b} \setminus \overline{\varnothing} \right) \right\} \tag{III.1}$$

ist ein Abschlussoperator und das Matroid $\widetilde{M(S)}$ mit Abschlussoperator (III.1) ist *einfach*. In der nächsten Definition gelten die oben eingeführten Bezeichnungen.

III.1.4 Definition:

1. Das zum Matroid $M(S)$ korrespondierende einfache Matroid $\widetilde{M(S)}$ mit Abschlussoperator (III.1) heißt *Simplifikation* von $M(S)$.

2. Seien $M(S)$ ein Matroid und $a \in S$, dann heißt a eine *Schlinge* von $M(S)$, falls $a \in \overline{\varnothing}$. Besitzen zwei verschiedene Elemente $a, b \in S$ denselben Abschluss, d.h. gilt $\overline{a} = \overline{b}$, so heißen a und b *parallel*. Die Äquivalenzklasse $[a]$ der Relation „$\sim$“ nennen wir (nicht-triviale) *parallele Klasse* von $M(S)$, falls $|[a]| > 1$ und ansonsten *triviale parallele Klasse*.

Folgend klären wir die aus der Linearen Algebra bekannten Begriffe „Unabhängigkeit“ und „Basis“ für Matroide.

III.1.5 Definition: Seien X, S Mengen mit $X \subseteq S$ und $M(S)$ ein Matroid.

1. Eine Menge X eines Matroids $M(S)$ heißt *unabhängig*, falls $x \notin \overline{X \setminus x}$ für alle $x \in X$. Das Mengensystem aller unabhängigen Mengen eines Matroids $M(S)$ bezeichnen wir mit $\mathcal{I}[M(S)]$ oder $\mathcal{I}$.

2. Die bezüglich der Inklusion maximal unabhängigen Teilmengen B von X heißen *Basen* von X. Insbesondere nennen wir die maximal unabhängigen Mengen der Grundmenge S die *Basen des Matroids* $M(S)$. Das Mengensystem aller Basen eines Matroids $M(S)$ bezeichnen wir durch $\mathcal{B}[M(S)]$ oder kürzer durch $\mathcal{B}$.

3. Zwei Matroide $M(S)$ und $N(T)$ heißen *isomorph*, falls eine Bijektion $\phi : S \to T$ mit

$$a \in \overline{X} \quad \Leftrightarrow \quad \phi(a) \in \overline{\phi(X)}$$

für alle $a \in S$, $X \subseteq S$ existiert.

Die leere Menge ist stets unabhängig und ein einzelnes Element $a \in S$ ist es genau dann, wenn a keine Schlinge ist. Dies impliziert, dass ein einzelnes Element in einem einfachen Matroid stets unabhängig ist.

III.1.6 Proposition: Seien $M(S)$ ein Matroid, $X \subseteq S$ unabhängig und $a \notin X$, so gilt die Äquivalenz:

$$X + a \text{ ist unabhängig} \quad \Leftrightarrow \quad a \notin \overline{X}.$$

Beweis. „⇒“: Ist $X' := X + a$ unabhängig, dann ist $x \notin \overline{X' \setminus x}$ für alle $x \in X'$. Für $x := a$ ergibt sich $a \notin \overline{X' \setminus a} = \overline{X}$.

„⇐“: Setzen wir umgekehrt $a \notin \overline{X}$ voraus, so ist $a \notin \overline{X' \setminus a}$. Angenommen $X + a$ ist nicht unabhängig, dann existiert ein $x \in X$ mit $x \in \overline{(X \setminus x) + a}$ und mit der Unabhängigkeit von X und dem Austauschaxiom (M1) folgt $a \in \overline{(X \setminus x) + x} = \overline{X}$ – ein Widerspruch. □

III.1.7 Satz (Basissatz): Seien S eine Menge, $M(S)$ ein Matroid und $X \subseteq S$, dann gelten:

(i) Für jede Basis B von X ist $\overline{B} = \overline{X}$;

(ii) Alle Basen B von X besitzen dieselbe endliche Mächtigkeit;

(iii) Jede unabhängige Teilmenge U von X kann zu einer Basis B von X erweitert werden.

Beweis. (i) Sei B eine Basis von X, d.h. eine maximal unabhängige Menge. Angenommen, es existiert ein $x \in \overline{X} \setminus \overline{B}$, dann folgt mit Proposition III.1.6 die Unabhängigkeit von $(B + x)$, was im Widerspruch zur Maximalität von B steht.

(ii) Angenommen, es gibt eine unendliche unabhängige Menge U von X, dann existiert nach (M2) eine endliche Menge B von U mit $\overline{B} = \overline{U}$. Sei nun $x \in U \setminus B$, dann ist $B \subsetneq U$ und somit auch $B \subsetneq (U \setminus x)$, da B endlich und U gemäß Annahme unendlich ist. Insgesamt ergibt sich der Widerspruch $x \in \overline{B} \subseteq \overline{U \setminus x}$, d.h. jede unabhängige Menge und somit auch jede Basis besitzt endliche Kardinalität. Seien nun U eine unabhängige Teilmenge und B eine Basis von X, dann ist es hinreichend, die Ungleichung $|U| \leq |B|$ nachzuweisen. Ist $U \subseteq B$ so ist nichts mehr zu zeigen, es sei also $x_1 \in U \setminus B \neq \varnothing$. Aufgrund der Unabhängigkeit von U ist $x_1 \notin (\overline{U \setminus x_1})$ und wegen (i) dieses Satzes ist $x_1 \in \overline{B}$, womit aufgrund der Eigenschaften des Abschlussoperators $B \nsubseteq \overline{U \setminus x_1}$ folgt. Es gibt also ein $y_1 \in B \setminus (\overline{U \setminus x_1})$ und die Menge $U_1 := [(U \setminus x_1) + y_1]$ ist gemäß Proposition III.1.6 unabhängig mit $|U| = |U_1|$ und $|U \cap B| < |U_1 \cap B|$. Setzen wir dieses Verfahren fort, so erhalten wir nach $t \in \mathbb{N}$ vielen Schritten $U_t \subseteq B$ mit $|U| = |U_t| \leq |B|$.

(iii) Sei U_0 eine unabhängige Menge in X. Wir dürfen annehmen, dass U_0 keine Basis ist und wählen ein $x \in X \setminus \overline{U_0} \neq \varnothing$, um die gemäß Proposition III.1.6 unabhängige Menge $U_1 := U_0 + x$ zu bilden und zu prüfen, ob U_1 eine Basis ist. Nach endlich vielen Wiederholungen dieses Prinzips erhalten wir so eine Basis B von X.

□

III.1.8 Proposition: Seien $M(S)$ ein Matroid und $\mathcal{I} := \mathcal{I}[M(S)]$, dann gelten:

(I1) $\mathcal{I} \neq \varnothing$;

(I2) Aus $U_2 \in \mathcal{I}$ und $U_1 \subseteq U_2$ folgt $U_1 \in \mathcal{I}$;

(I3) Zu $U_1, U_2 \in \mathcal{I}$ mit $|U_1| < |U_2|$ gibt es ein $x \in U_2 \setminus U_1$, so dass $(U_1 + x) \in \mathcal{I}$;

(I4) $\forall U \in \mathcal{I}\ \exists n \in \mathbb{N}$ mit $|U| \leq n$.

Beweis. (I1) Da die leere Menge $\varnothing$ stets unabhängig ist, folgt $\mathcal{I} \neq \varnothing$.

(I2) Folgt aus der Definition.

(I3) Gemäß Voraussetzungen existiert ein $x \in U_2 \setminus \overline{U_1} \neq \varnothing$, so dass $U_1 + x$ nach Proposition III.1.6 unabhängig ist.

(I4) Folgt aus (ii) des Basissatzes.

□

Die Bedingung (I2) besagt, dass $\mathcal{I}$ ausgestattet mit der Inklusionsordnung ein Ideal des Verbandes 2^S im Sinne von Definition II.2.4 ist. Da Basen die maximal unabhängigen Teilmengen eines Matroids sind, wird das Ideal $\mathcal{I}$ bereits durch die Menge aller Basen eindeutig bestimmt. Aus der letzten Proposition zusammen mit dem Basissatz ergibt sich die

III.1.9 Folgerung: Seien $M(S)$ ein Matroid, $\mathcal{B} \coloneqq \mathcal{B}[M(S)]$ und $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ mit $B_1 \neq B_2$, dann gelten:

(B1) $\mathcal{B} \neq \varnothing$;

(B2) $\mathcal{B}$ ist eine Antikette, d.h. es gilt $B_1 \nsubseteq B_2$ und $B_2 \nsubseteq B_1$;

(B3) Zu jedem $b_1 \in B_1 \setminus B_2$ existiert ein $b_2 \in B_2 \setminus B_1$ mit $(B_1 \setminus b_1) \cup b_2 \in \mathcal{B}$;

(B4) $\forall B \in \mathcal{B}\ \exists n \in \mathbb{N}$ mit $|B| \leq n$.

Die Menge der Untervektorräume eines K-Vektorraumes V bildet gemäß Beispiel II.3.22 ein Hüllensystem, wobei die lineare Hülle dem dazu korrespondierendem Hüllenoperator entspricht.

III.1.10 Beispiel: Seien V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $A \subseteq V$. Das Tupel $M(V) \coloneqq (V, \langle\rangle)$ ist ein Matroid, da V endliche Basen besitzt und das Austauschaxiom (M1) in diesem Fall gerade dem Austauschsatz von E. Steinitz entspricht. Zwei Elemente von $M(V)$ sind genau dann unabhängig, wenn sie linear unabhängig sind, was impliziert, dass jede Basis des Vektorraums zugleich eine Basis des Matroids ist. Der Nullvektor aus V ist die einzige Schlinge und die 1-dimensionalen Unterräume von V entsprechen den parallelen Klassen, da je zwei Elemente eines 1-dimensionalen Unterraumes skalares Vielfaches voneinander sind. Insbesondere ist $M(V)$ im Allgemeinen *kein* einfaches Matroid.

III.1.11 Definition: Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.

1. Das Matroid $M(V)$ nennen wir *Vektorraummatroid* über K.
2. Ein Matroid $M(S)$ heißt *koordinatisierbar* oder *darstellbar über dem Körper* K, falls M isomorph zu einem Vektorraummatroid $M'(V)$ ist.
3. Ein Matroid $M(S)$, dass über jedem Körper koordinatisiert werden kann, heißt *regulär*. Entsprechend nennen wir ein Matroid *binär*, falls es über dem Körper $\mathbb{F}_2$ koordinatisierbar ist.

1.2. Abhängigkeit, Rang und Kreis

Im letzten Teilabschnitt haben wir unabhängige Mengen eines Matroids $M(S)$ eingeführt und festgestellt, dass diese in Kombination mit der Inklusionsordnung ein Ideal bilden. Im Folgenden betrachten wir Mengen des Systems $2^S \setminus \mathcal{I}$ und deren Beziehungen zu den unabhängigen Mengen bzw. Basen.

III.1.12 Definition: Seien $M(S)$ ein Matroid mit Abschlussoperator $\mathrm{cl} : 2^S \to 2^S$ und $\mathcal{L}[M]$ der Unterraumverband von M.

1. Eine Menge X heißt *abhängig*, falls X nicht unabhängig ist. Das System aller abhängigen Mengen eines Matroids M sei durch $\mathcal{D}[M(S)]$ oder kürzer durch $\mathcal{D}$ notiert.

2. Die bezüglich der Inklusion minimal abhängigen Teilmengen in S heißen *Kreise* von M. Durch $\mathcal{C}[M(S)]$ oder kurz $\mathcal{C}$ notieren wir das System aller Kreise eines Matroids M. Unter der *Länge* eines Kreises $C \in \mathcal{C}(M)$ verstehen wir die Kardinalität von C und nennen einen Kreis mit minimaler Länge *kürzesten Kreis* in M.

3. Ein Element $x \in S$ heißt *abhängig von* X, falls $x \in \overline{X}$.

4. Ist $\overline{A} = X$ für $A \subseteq X$, so sagen wir, dass A den Raum $X \in \mathcal{L}[M]$ *aufspannt* oder *erzeugt*. In diesem Fall nennen wir X das *Erzeugnis* von A. Ferner heißt eine Menge A *aufspannend*, wenn A die gesamte Grundmenge S bzw. das Matroid M erzeugt.

5. Die Menge aller Erzeugnisse $X \in \mathcal{L}[M]$ notieren wir auch durch $\mathcal{F}[M(S)]$ oder kurz durch $\mathcal{F}$.

Jede nichtleere Teilmenge von $\overline{\varnothing}$ ist abhängig und die Menge $\{x, y\}$ mit $x, y \in S \setminus \overline{\varnothing}$ ist genau dann abhängig, wenn $x \in \overline{y}$ oder $y \in \overline{x}$.

Der Basissatz legt die Verallgemeinerung des Dimensionsbegriffes von Vektorräumen und affinen Räumen nahe. Ferner adaptieren wir einen Teil des Terminus der Geometrie für die Theorie der Matroide.

III.1.13 Definition: Seien $M(S)$ ein Matroid und $X \subseteq S$.

1. Die gemeinsame Kardinalzahl aller Basen von X heißt *Rang* der Menge X und wir notieren ihn mit $r(X) \in \mathbb{N}$. Den Rang der Grundmenge S nennen wir *Rang des Matroids*.

2. Die Abbildung $r : 2^S \to \mathbb{N}_0$, erklärt durch $X \mapsto r(X)$, heißt die *Rangfunktion* von M.

3. Unterräume von M mit Rang $1, 2$ und 3 heißen *Punkte*, *Geraden* und *Ebenen*; ein nichtleerer Unterraum H von M heißt *Hyperebene*, falls $1 \leq r(H) = r(M) - 1 < \infty$.

4. Die Komplemente $S \setminus H$ einer Hyperebene H von M nennen wir *Bond*.

Es gilt $r(S) = 0$ genau dann, wenn $S = \overline{\varnothing}$. Für ein einfaches Matroid bedeutet dies gerade $S = \varnothing$. Analog ist $r(S) = 1$ genau dann, wenn $S = \overline{p}$ für ein $p \in S \setminus \overline{\varnothing}$. Die Punkte eines einfachen Matroids sind also die Elemente von S.

Ist X eine abhängige Menge eines Matroids $M(S)$, dann gibt es ein Element $x \in X$ mit $x \in \overline{X \setminus x}$. Ist Y eine Obermenge von X, dann gilt offenbar ebenfalls $x \in \overline{Y \setminus x}$. Ebenfalls unmittelbar aus den Definitionen und den Eigenschaften des Abschlussoperators folgen die restlichen Aussagen der nächsten Proposition.

III.1.14 Proposition: Sei $M(S)$ ein Matroid, dann gelten:

(i) Ist X abhängig und $X \subseteq Y \subseteq S$, dann auch Y;

(ii) Ist X aufspannend und $X \subseteq Y \subseteq S$, dann auch Y;

(iii) Ist $X \subseteq S$ nicht aufspannend und $Y \subseteq X$, dann auch Y.

Nach (i) der letzten Proposition bildet das Mengensystem $\mathcal{D}$ der abhängigen Mengen gemeinsam mit der Inklusionsordnung einen Filter im Booleschen Verband $2^S := (2^S, \cap, \cup)$. Die Systeme der aufspannenden bzw. nicht aufspannenden Mengen aus (ii) bzw. (iii) entsprechen einem Filter bzw. Ideal in 2^S. Daraus ergibt sich der folgende

III.1.15 Satz: Sei $M(S)$ ein Matroid.

(i) Die minimal aufspannenden Mengen von M sind die Basen B von M;

(ii) Die maximal nicht spannenden Mengen von M sind die Hyperebenen H von M.

III.1.16 Proposition: Seien $M(S)$ ein Matroid und $X \subseteq S$, dann gelten:

(i) $r(X) = r(\overline{X})$ für alle $X \subseteq S$;

(ii) $r(X) = |X|$ genau dann, wenn X unabhängig ist.

Beweis. (i) Sei B eine Basis von X, dann ist $\overline{B} = \overline{X}$ nach (i) des Basissatzes. Jedes Element aus $\overline{X}$ ist also bereits in $\overline{B}$ enthalten. Mit Proposition III.1.6 folgt, dass B zugleich eine maximal unabhängige Menge und damit eine Basis von $\overline{X}$ ist.

(ii) „⇒“: Sei $r(X) = |X| = |B|$ mit $B \subseteq X$ Basis von X. Da B und X dieselbe Mächtigkeit besitzen und zudem $B \subseteq X$ ist, folgt $X = B$ und damit die Unabhängigkeit von X. „⇐“: Seien X unabhängig und $B \subseteq X$ eine Basis von X, dann ist $B = X$, da X selbst unabhängig ist. Gemäß Definition des Ranges folgt $r(X) = |B| = |X|$.

□

III.1.17 Satz: Seien $M(S)$ ein Matroid und $X, Y \subseteq S$, dann gelten:

(R1) $0 \leq r(X) \leq |X|$ für alle endlichen Teilmengen $X \subseteq S$; [Subkardinal]

(R2) Ist $X \subseteq Y$, dann gilt $r(X) \leq r(Y)$; [Monoton]

(R3) $r(X \cap Y) + r(X \cup Y) \leq r(X) + r(Y)$. [Submodular]

Beweis. (R1) Angenommen, B ist eine Basis von X, so gilt $B \subseteq X$, womit aus $r(X) = |B|$ die Behauptung folgt.

(R2) Seien B_X bzw. B_Y Basen von X bzw. Y und $X \subseteq Y$, dann ist $B_X \subseteq X$ eine unabhängige Menge von Y, weshalb $|B_X| \leq |B_Y|$ folgt.

(R3) Sei $B_\cap$ eine Basis von $X \cap Y$, die wir zu einer Basis $B_\cup$ von $X \cup Y$ ergänzen, dann gilt

$$\begin{aligned} & B_\cap = B_\cup \cap (X \cap Y) \quad \text{und} \quad B_\cup = (B_\cup \cap X) \cup (B_\cup \cap Y) \\ \Rightarrow\ & r(X \cap Y) + r(X \cup Y) = |B_\cap| + |B_\cup| \\ & \qquad = |B_\cup \cap (X \cap Y)| + |(B_\cup \cap X) \cup (B_\cup \cap Y)| \\ & \qquad = |B_\cup \cap X| + |B_\cup \cap Y| \ \leq\ r(X) + r(Y). \end{aligned}$$

□

Gemäß Definition III.1.12 heißen die minimal abhängigen Mengen Kreise. Im Folgenden werden wir eben diese sehr nützlichen Teilmengen eines Matroids näher untersuchen.

III.1.18 Proposition: Seien $M(S)$ ein Matroid und $\mathcal{C}$ die Familie der Kreise von M, dann gelten:

(C1) $\varnothing \notin \mathcal{C}$;

(C2) $\mathcal{C}$ ist eine Antikette, d.h. für $C, C' \in \mathcal{C}$ mit $C \neq C'$ folgen $C \nsubseteq C'$ und $C' \nsubseteq C$;

(C3) $\forall C, C' \in \mathcal{C}$ mit $C \neq C'$ und $x \in (C \cap C')$ existiert ein weiterer Kreis D mit $D \subseteq (C \cup C') \setminus x$;

(C4) $\forall C \in \mathcal{C}\ \exists n \in \mathbb{N}$ mit $|C| \leq n$.

Beweis. (C1) Da die leere Menge stets unabhängig ist, kann sie nicht in $\mathcal{C}$ liegen.

(C2) Folgt aus der Minimalität der Kreise C und C'.

(C3) Angenommen $(C \cup C') \setminus x$ enthält keinen Kreis, dann ist $(C \cup C') \setminus x$ unabhängig. Gemäß (C2) können wir ein $y \in (C \setminus C') \neq \varnothing$ wählen. Die Menge $U := C \setminus y$ ist unabhängig, da C ein Kreis ist. Sei B eine Basis von $C \cup C'$ mit $B \supseteq U$, dann ist $y \notin B$. Mindestens ein Element z des Kreises C' kann ebenfalls nicht in B enthalten sein und aufgrund der Wahl ist $y \neq z$. Somit folgt

$$|B| \leq |(C \cup C') \setminus \{y, z\}| = |C \cup C'| - 2 < |(C \cup C') \setminus x|$$

ein Widerspruch zur Maximalität von B.

(C4) Entfernen wir aus einer minimal abhängigen Menge ein einzelnes Element, so erhalten wir eine unabhängige Menge. Diese ist nach (I4) endlich.

□

Die Bedingung (C3) wird *schwaches Kreiseliminationsaxiom* genannt und aufgrund der Bezeichnung ist es nahe liegend, dass auch ein *starkes Kreiseliminationsaxiom* existiert, welches sich aus den Kreis-Axiomen (C1), (C2) und (C3) folgern lässt:

(C3)' Für alle $C \neq C' \in \mathcal{C}$, alle $x \in (C \cap C')$ und $y \in (C \setminus C')$ existiert mind. ein Kreis D aus $\mathcal{C}$, so dass $y \in D \subseteq (C \cup C') \setminus x$ gilt.

Es sei darauf hingewiesen, dass Bedingung (C1) impliziert, dass jeder Kreis (falls einer existiert) nicht leer ist, da die leere Menge unabhängig ist.

Beweis (C3)'. Wir beweisen durch Widerspruch. Seien $C, C' \in \mathcal{C}$ verschiedene Kreise und $x \in (C \cap C')$ bzw. $y \in C \setminus C'$ Elemente, welche die Bedingung (C3)' nicht erfüllen und dabei zugleich $k := |C \cup C'| \in \mathbb{N}$ minimal ist. Der Bedingung (C3) folgend, existiert ein $D \in \mathcal{C}$ mit $D \subseteq (C \cup C') \setminus x$ und $x, y \notin D$, weshalb sich $D \nsubseteq C, C'$ mit (C1) ergibt. Weiter sind $C, C', D \neq \varnothing$ und $y \notin (C' \cup D)$, womit $|C' \cup D| < |C \cup C'| = k$ folgt. Sei $r \in (D \setminus C) \subseteq (D \cap C')$, dann impliziert die Minimalität von k und (C3) die Existenz eines Kreises $D' \in \mathcal{C}$ mit $x \in D' \subseteq (C' \cup D) \setminus r$. Dann ist aber $C \neq D'$ ein weiteres Gegenbeispiel mit $x \in (C \cap D')$, $y \notin (C \setminus D')$ und $|C \cup D'| < |C \cup C'| = k$, welches im Widerspruch zur Minimalität von k steht. □

III.1.19 Satz: Seien $M(S)$ ein Matroid, B eine Basis von M und $p \in S \setminus B$, dann existiert genau ein Kreis C mit $p \in C \subseteq (B + p)$.

Beweis. Die Menge $(B + p)$ ist abhängig, da B maximal unabhängig ist. Folglich enthält $(B + p)$ einen Kreis C, für den stets $p \in C$ gilt. Angenommen, es gibt zwei Kreise $C \neq C'$ mit $p \in (C \cap C')$ und $(C \cup C') \subseteq (B + p)$. Gemäß (C3) existiert ein weiterer Kreis D mit $D \subseteq (C \cup C') \setminus p \subseteq B$, was nicht möglich ist. □

III.1.20 Definition: Den eindeutig bestimmten Kreis des letzten Satzes nennen wir *Fundamentalkreis* zur Basis B und dem Element $p \notin B$ und wir notieren ihn durch $C_p(B) \subseteq B + p$.

III.1.21 Satz: Seien $M(S)$ ein Matroid, B eine Basis von M, $p \in B$ und $q \notin B$, dann gilt die folgende Äquivalenz:

$$(B \setminus p) + q \text{ ist Basis} \quad \Leftrightarrow \quad p \in C_q(B).$$

Beweis. „⇒": Angenommen, $(B \setminus p) + q$ ist eine Basis und $p \notin C_q(B) \subseteq (B + q)$, dann ist $C_q(B) \subseteq (B \setminus p) + q$ und mit Proposition III.1.14 (i) folgt die Abhängigkeit der Menge $(B \setminus p) + q$, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht.
„⇐": Sei nun $p \in C_q(B)$ und angenommen $(B \setminus p) + q$ wäre keine Basis. Da sämtliche Basen dieselbe Mächtigkeit besitzen, muss $(B \setminus p) + q$ abhängig sein, woraus folgt, dass ein Kreis D mit $D \subseteq (B \setminus p) + q$ existiert. Dann ist $D \neq C_q(B)$ nach dem letzten Satz und zudem liegt q im Durchschnitt $D \cap C_q(B)$. Wegen (C3) existiert ein weiterer Kreis $D' \subseteq (D \cup C_q(B)) \setminus q \subseteq B$, was nicht möglich ist. □

III.1.22 Beispiel: Sei $V := \mathbb{F}_2^3$ der Vektorraum bestehend aus $2^3 = 8$ Vektoren, dann bildet V zusammen mit der linearen Hülle das Vektorraummatroid $M[\mathbb{F}_2^3]$. Neben den sieben 1-dimensionalen Unterräumen $\{v, 0\}$ mit $v \in V, v \neq 0$ existieren genau sieben 2-dimensionale Unterräume von V, die je von zwei linear unabhängigen Vektoren aus V aufgespannt werden.

Durch Löschen der Schlingen, Identifizieren jeder parallelen Klasse mit genau einem Repräsentanten und Festhalten der übrigen Elemente erhalten wir die Simplifikation $\widetilde{M[V]}$, in der jeder Punkt bzw. jede Gerade aus einem 1- bzw. 2-dimensionalen Unterraum von V hervorgeht.

Eine graphische Darstellung von $M[\mathbb{F}_2^3]$ ist in Abbildung III.2 skizziert.

III.1.23 Definition: Seien V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$ und $M[V]$ das zugehörige Vektorraummatroid. Dann heißt die Simplifikation $\mathrm{PG}(V) := \widetilde{M[V]}$ (der über V *koordinatisierbare*) *projektive Raum* oder *projektives Matroid*.

Da K-Vektorräume derselben Dimension $n \in \mathbb{N}$ isomorph sind, schreiben wir im Fall $\dim(V) = n + 1$ auch $\mathrm{PG}(n, K)$ statt $\mathrm{PG}(V)$. Sind $K = \mathbb{F}_q$ und $q = p^k$ mit $k \in \mathbb{N}$ und p Primzahl, dann notieren wir $\mathrm{PG}(n, K)$ auch durch $\mathrm{PG}(n, q)$.

1.3. Unterraumverbände

In diesem Teilabschnitt wird gezeigt, dass eine eineindeutige Beziehung zwischen geometrischen Verbänden und einfachen Matroiden existiert. Soweit keine Missverständnisse oder Verwechslungen zu befürchten sind, werden wir im Folgenden einen Verband $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee) = \langle L; \leq \rangle$ durch $\mathcal{L}(L)$ bzw. $\mathcal{L}$ notieren.

Jedes Matroid $M(S)$ korrespondiert mit einem vollständigen Verband $\mathcal{L}[M(S)]$, dessen Grundmenge das Hüllensystem der Unterräume von $M(S)$ bildet.

III.1.24 Proposition: Sei $\mathcal{L}(L)$ mit $L := \mathcal{F}(M)$ der Unterraumverband eines Matroids $M(S)$, dann gelten:

(i) $\mathcal{L}$ ist ein Punktverband;

(ii) Jede Kette aus $\mathcal{L}$ ist endlich;

(iii) $\mathcal{L}$ ist semimodular.

Jeder Unterraumverband eines Matroids ist also geometrisch.

Beweis. (i) Sei $A \in L$ ein Unterraum von M, dann ist $A = \bigvee_{a \in A} \overline{a}$. Jedes Element aus L kann demnach als Verbindung von Punkten aus S dargestellt werden.

(ii) Sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine abzählbar unendliche Kette von Unterräumen aus $M(S)$, dann gilt aufgrund der Definition einer Kette entweder $A_i \subseteq A_{i+1}$ oder $A_i \supseteq A_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Wir setzen $A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, dann existiert gemäß (M2) eine endliche Menge $B \subseteq A$, so dass $\overline{B} = \overline{A}$ erfüllt ist. Da B endlich und in A enthalten ist, gibt es einen Index $j \in \mathbb{N}$ mit $B \subseteq A_j$, so dass $\overline{A} = \overline{B} \subseteq \overline{A_j} = A_j$ gilt. Dies bedeutet, dass die Folge $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in einer geschlossenen Menge $A_j = A_{j+1} = \ldots$ terminiert, also ohne Redundanz endlich ist.

Nehmen wir an, die Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ sei echt absteigend, d.h. es gilt $A_i \supsetneq A_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Betrachten wir eine unendliche Folge bestehend aus beliebigen Atomen $A := \{a_1, a_2, \ldots\}$ mit $a_i \in A_{i-1} \setminus A_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Sei $T_i := \{a_i, a_{i+1}, \ldots\}$ die unendliche Teilfolge von A, die aus Teilmengen der Unterräume A_i besteht. Da $A_{i+1} = \overline{A_{i+1}} \subsetneq \overline{A_i} = A_i$, ist a_i aufgrund der Wahl nicht in $\overline{T_{i+1}}$ für $i \in \mathbb{N}$ enthalten, d.h. kein Element a_i befindet sich im Abschluss der Menge seiner Nachfolger $T_{i+1} = \{a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots\}$. Weiter bezeichne $B_i := A \setminus a_i$ diejenige Menge, welche a_i nicht enthält.
Angenommen, es ist $a_i \in \overline{B_i}$ für ein i, dann existiert (wegen $a_i \notin \overline{T_{i+1}}$) ein maximales $j \in \mathbb{N}$ mit $j \leq i-1$, so dass $a_i \in \overline{T_j \cap B_i}$. Sei nun $B := T_{j+1} \cap B_i$ dann ist $B \cup a_j = T_j \cap B_i$ und $a_i \notin \overline{B} \subseteq \overline{T_{j+1}}$. Da $a_i \in \overline{B \cup a_j}$ folgt mit dem Austauschaxiom $a_j \in \overline{B \cup a_i}$. Es ist aber $B \cup a_i = T_{j+1}$ womit der Widerspruch zu $a_i \notin \overline{T_{i+1}}$ folgt. Es gibt also kein i mit $a_i \in \overline{B_i}$ und die Teilfolge $T_1 = \{a_1, a_2, \ldots\}$ hätte keine echte Teilmenge mit demselben Abschluss, was dem Axiom (M2) widerspricht. Demnach existiert keine echte unendlich absteigende Folge von Unterräumen.

(iii) $\mathcal{L}$ erfüllt die Austauscheigenschaft, da $M(S)$ ein Matroid ist. Mit Proposition II.3.41 folgt damit die Semimodularität von $\mathcal{L}$.

□

Der nächste Satz bildet das Hauptergebnis dieses Teilabschnitts, da er die Verbindung zwischen (einfachen) Matroiden und geometrischen Verbänden herstellt.

III.1.25 Satz: Seien $\mathcal{L}(L)$ ein geometrischer Verband und S die Menge der Atome von L, dann definiert

$$\begin{aligned} \mathrm{cl} : 2^S &\to 2^S && \text{mit} \\ A &\mapsto \overline{A} := \{a \in S |\ a \leq \sup A\} \end{aligned}$$

ein einfaches Matroid $M(S) := (S, \mathrm{cl})$ mit $\mathcal{L}[M(S)] \cong \mathcal{L}(L)$.

Beweis. Sei $a \in A \subseteq S$, dann ist $a \in \sup A$, weshalb die Extensität von cl folgt. Die Eigenschaft (HO2) und (HO3) ergeben sich ebenso aus den Definitionen, weshalb die Abbildung cl ein Hüllenoperator ist.

Die Austauscheigenschaft (M1) ergibt sich aus Proposition II.3.41 und der Semimodularität von $\mathcal{L}$. Sei $A \subseteq S$ eine Menge von Atomen und $x := \sup A \in L$. Wir nummerieren die Atome aus A durch und setzen $C_0 := \varnothing$. Weiter definieren wir eine aufsteigende Kette in A rekursiv durch $C_i := \overline{C_{i-1} + a_i}$ mit $a_i \in A \setminus C_{i-1}$, die in einem geometrischen Verband nur endliche Länge $n \in \mathbb{N}$ besitzen kann. Dem folgend ist $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine endliche Menge von Atomen mit $\overline{A} = \overline{\{a_1, \ldots, a_n\}}$ und somit (S, cl) ein einfaches Matroid.
Wir stellen weiter fest, dass eine Menge von Atomen $A \subseteq S$ genau dann die Gleichung $\overline{A} = A$ erfüllt, wenn A mit der Menge aller Atome unterhalb eines Verbandselementes $x \in L$ übereinstimmt. Da $\mathcal{L}$ ein Punktverband ist gibt es eine bijektive ordnungserhaltende Korrespondenz zwischen den abgeschlossenen Mengen von S und den Elementen von L. Es folgt $\mathcal{L}(L) \cong \mathcal{L}[M(S)]$.

□

Gemäß dem letzten Satz und Proposition III.1.24 besteht eine eineindeutige Beziehung zwischen einfachen Matroiden und geometrischen Verbänden. Es ist daher legitim die Begriffe der Matroidtheorie auf geometrische Verbände anzuwenden und umgekehrt.

III.1.26 Proposition: Seien $\mathcal{L}[M(S)]$ ein geometrischer Verband mit zugehörigem Matroid $M(S)$ und den Rangfunktionen λ bzw. r, dann gilt für alle $A \subseteq S$ die Identität:

$$r(A) \;=\; \lambda(\overline{A}).$$

Beweis. Gemäß Proposition III.1.16 ist $r(A) = r(\overline{A})$ für alle $A \subseteq S$. Für $r(\overline{A}) = 0$ ist die Behauptung klar, da dann $x := \overline{A} \in L := \mathcal{F}(M)$ gerade dem Nullelement $\mathfrak{o} \in L$ entspricht. Wir dürfen also $r(\overline{A}) = n \in \mathbb{N}$ annehmen, dann ist der Rang gerade die Mächtigkeit einer und damit jeder Basis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ von A. Sei weiter $x_i := \mathfrak{o} = b_0 \vee \ldots \vee b_i$ eine Kette der ersten $i \leq n$ Basisvektoren von $M(S)$. Aufgrund der Bedeckungseigenschaft $x_{i-1} \lessdot x_i$ für alle $i \in \mathbb{N}_n$ bildet $x_0 \lessdot x_1 \lessdot \ldots \lessdot x_n$ eine maximale Kette von $\mathfrak{o} = x_0$ nach $x_n = A$. Es ist also $\lambda(x) = r(\overline{A}) = r(A) = n$. □

Bemerkung: Vermöge der letzten Proposition, werden wir nicht mehr zwischen dem ordnungstheoretischen Rang eines geometrischen Verbandes und dem Rang eines (einfachen) Matroids unterscheiden. Sofern keine Verwechslungen zu befürchten sind, werden wir die Rangfunktion r eines Matroids M verwenden ohne diese explizit festzulegen.

1.4. Matroide und Geometrie

Betrachten wir eine Menge $\mathcal{P}$ von Punkten und eine Familie $\mathcal{G} \subseteq 2^{\mathcal{P}}$ von Geraden ausgestattet mit einer Inzidenzrelation $I \subseteq (\mathcal{P} \times \mathcal{G})$. Seien $P \in \mathcal{P}$ ein Punkt und $g \in \mathcal{G}$ eine Gerade, dann *inzidieren* P und g genau dann (d.h. stehen in Relation I), wenn der Durchschnitt $P \cap g$ nichtleer und damit P in g enthalten ist. Wir sagen, dass P *auf* g *liegt* oder g *durch* P *geht*, falls der Punkt P und die Gerade g inzidieren. Weiter halten wir fest, dass sich zwei Geraden in einem Punkt P *schneiden*, wenn beide Geraden mit P inzidieren.

Zunächst klären wir den ersten zentralen Begriff dieses Teilabschnitts.

III.1.27 Definition: Eine *projektive Geometrie* ist ein Tripel $\mathrm{PG} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$, das die folgenden Axiome erfüllt:

(P1) Durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.

(P2) Bilden die Punkte P, Q, R ein Dreieck (d.h. liegen P, Q, R nicht auf einer gemeinsamen Geraden), und schneidet die Gerade g zwei Seiten des Dreiecks (aber nicht P, Q oder R), so schneidet g auch die dritte Seite.

(P3) Jede Gerade inzidiert mit mindestens drei Punkten.

(P4) Die Menge $\mathcal{P}$ ist vom endlichen *Rang* n.

Den Begriff des Ranges einer projektiven Geometrie müssen wir noch erläutern, wozu wir folgende Definition benötigen.

III.1.28 Definition: Eine Menge von Punkten $U \subseteq \mathcal{P}$ heißt *Unterraum*, wenn U mit je zwei Punkten $P \neq Q$ die gesamte Gerade, die durch P und Q geht, enthält.

Die Menge $\mathcal{P}$ ist ein Unterraum und zudem ist der beliebige Durchschnitt von Unterräumen ein Unterraum derselben projektiven Geometrie PG, d.h. die Menge aller Unterräume einer projektiven Geometrie ist ein Hüllensystem, das wir durch $\mathcal{H}[\mathrm{PG}]$ notieren.

III.1.29 Definition: 1. Die Abbildung $\langle\rangle_{\mathrm{geo}} : 2^{\mathcal{P}} \to 2^{\mathcal{P}}$, definiert durch

$$X \mapsto \langle X\rangle_{\mathrm{geo}} := \bigcap_{\substack{X \subseteq Y \\ Y \text{ Unterraum}}} Y,$$

nennen wir *geometrischen Abschluss* der Menge $X \subseteq \mathcal{P}$ von Punkten. Sodann heißt X *Erzeugendensystem* des Unterraumes $\langle X\rangle_{\mathrm{geo}}$ und wir sagen, X *spannt* $\langle X\rangle_{\mathrm{geo}}$ *auf*.

2. Der *Rang* $r(X)$ einer Menge von Punkten $X \subseteq \mathcal{P}$ sei erklärt durch

$$r(X) := \min\{|T| : T \subseteq X \text{ und } \langle T\rangle_{\mathrm{geo}} = X\},$$

d.h. durch die Anzahl der Punkte eines bezüglich der Inklusionsordnung kleinsten Erzeugendensystems von X.

3. Die *Dimension* $\mathrm{Dim}(\mathrm{PG})$ einer projektiven Geometrie sei der um eins verminderte Rang $r(\mathcal{P})$ derselben, d.h. $\mathrm{Dim}(\mathrm{PG}) = r(\mathcal{P}) - 1$.

III.1.30 Satz: Jede projektive Geometrie PG zusammen mit dem geometrischen Abschluss, ist ein einfaches Matroid mit *modularem* Unterraumverband.

Beweis. [Aig76], Satz (VI.2.20). □

Aufgrund des letzten Satzes nennen wir eine projektive Geometrie auch *projektives Matroid*. Der nächste Satz zeigt den Zusammenhang zwischen den koordinatisierbaren projektiven Räumen und den projektiven Geometrien auf.

III.1.31 Satz (Struktursatz für projektive Geometrien): Seien V ein K-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$, dann gelten:

(i) Jeder projektive Raum $\mathrm{PG}(V)$ ist eine projektive Geometrie PG;

(ii) Umgekehrt ist jede projektive Geometrie PG der Dimension $n \geq 3$ koordinatisierbar, d.h. es existiert ein K-Vektorraum V mit $\dim(V) = n + 1 \geq 4$, so dass $\mathrm{PG} \cong \mathrm{PG}(V)$.

Beweis. (i) Satz 2.1.1, [BR04];

(ii) Satz 3.4.2 und Korollar 3.4.3, [BR04].

□

Eng mit projektiven Räumen $\mathrm{PG}(V)$ verwandt sind die affinen Räume $\mathrm{AG}(V)$, da die affinen Unterräume von V die durch eine Translation verschobenen Untervektorräume von V sind.

Bereits in Teilabschnitt 3.2 haben wir das Hüllensystem $\mathcal{H}[\mathrm{AG}(V)]$ zusammen mit der affinen Hülle erklärt und den daraus induzierten affinen Verband $\mathcal{L}[\mathrm{AG}(V)]$ als vollständig identifiziert.

III.1.32 Proposition: Seien V ein K-Vektorraumes und $\langle\rangle_{\mathrm{aff}}$ die affine Hülle, dann ist $\mathrm{AG}(S) := (S, \langle\rangle_{\mathrm{aff}})$ mit $S \subseteq V$ ein Matroid.

Beweis. Gemäß Beispiel II.3.22 bildet die Menge aller affinen Unterräume von V ein Hüllensystem mit dem dazu korrespondierenden Hüllenoperator $\langle\rangle_{\mathrm{aff}}$. Aus der analytischen Geometrie ist weiterhin bekannt, dass die Forderung (M1) nach einer endlichen Basis erfüllt ist. Seien nun $A \subseteq S$, $x, y \in S$ mit $x \notin \langle A\rangle_{\mathrm{aff}}$ und $x \in \langle A \cup y\rangle_{\mathrm{aff}}$, dann ist $x = \mu y + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ mit $x_i \in A$, $\mu + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ und $\mu \neq 0$, woraus wir $y = \mu^{-1}x - \sum_{i=1}^{n} \mu^{-1}\lambda_i x_i$ und somit $y \in \langle A \cup x\rangle_{\mathrm{aff}}$ erhalten. □

III.1.33 Definition: Das Matroid $\mathrm{AG}(S)$ heißt *affines Matroid* mit Grundmenge $S \subseteq V$ über dem K-Vektorraum V.

Bemerkung: Sofern möglich, werden wir Matroide $M(S)$ mit *endlicher* Grundmenge S in die affinen Anschauungsräume einbetten, um dadurch eine *geometrische Darstellung* des Matroids zu erhalten. Geraden, die lediglich zwei Punkte oder Ebenen, die nur drei Punkte enthalten, werden wir zugunsten der besseren Übersicht wegen nur selektiv skizzieren.

Wir interessieren uns in dieser Arbeit vor allem für *endliche* koordinatisierbare projektive Matroide $\mathrm{PG}(n, q)$ und deren Unterstrukturen.

III.1.34 Definition: Seien $k, n \in \mathbb{N}^0$ mit $0 \leq k \leq n$, dann nennen wir die Zahl

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}_q &:= \frac{(q^n-1)(q^n-q)\dots(q^n-q^{k-1})}{(q^k-1)(q^k-q)\dots(q^k-q^{k-1})} \\ &= \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\dots(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\dots(q-1)} \\ &= \prod_{i=0}^{k-1} \frac{q^{n-i}-1}{q^{i+1}-1}\end{aligned}$$

den *Gauß'schen Koeffizienten* $\binom{n}{k}_q$.

Es ist $\binom{n}{0}_q = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da wir das leere Produkt gleich 1 setzen.

III.1.35 Proposition: Sei $k \in \mathbb{N}^0$, dann gilt:

(i) Die Anzahl der Unterräume vom Rang k in $\mathrm{PG}(n-1,q)$ ist $\binom{n}{k}_q$;

(ii) Die Anzahl der k-elementigen unabhängigen Teilmengen in $\mathrm{PG}(n-1,q)$ ist

$$\frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{q^n-q^i}{q-1} = \frac{1}{k!}\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)\left(\frac{q^n-q}{q-1}\right)\ldots\left(\frac{q^n-q^{k-1}}{q-1}\right)$$

(ii) Die Anzahl der k-elementigen Kreise in $\mathrm{PG}(n-1,q)$ ist 0 für $k < 3$ und

$$\frac{1}{k!(q-1)}(q^n-1)(q^n-q)\ldots(q^n-q^{k-2}) \text{ für } k \geq 3.$$

Beweis. [Oxl06], Proposition 6.1.4. □

Insbesondere besitzt jeder projektive Raum $\mathrm{PG}(n,q)$ genau

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = q^0 + q^1 + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

und jede Gerade von $\mathrm{PG}(n,q)$ genau $q+1$ Punkte.

III.1.36 Beispiel: a) Das affine Matroid $\mathrm{AG}(\mathbb{F}_3^2)$ vom Rang 3 ist dargestellt in Abbildung III.1 und besteht aus $9 = 3^2$ Punkten. Die Menge $G_1 := \{(0,0);(1,0);(2,0)\} =$

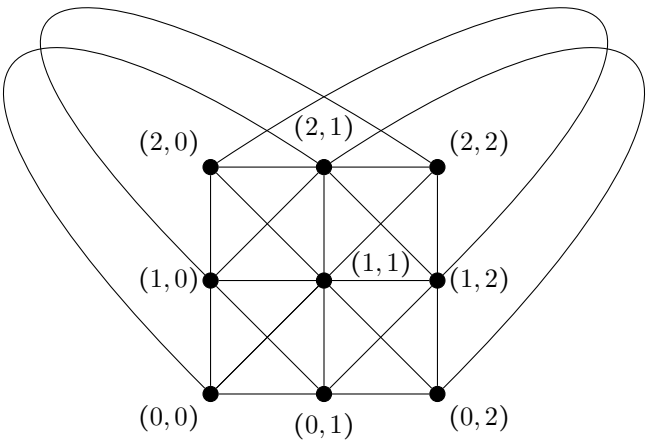


Abb. III.1.: *Affines Matroid* $AG(\mathbb{F}_3^2)$

$\langle(1,0)\rangle$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{F}_3^2$ und $G_2 := \{(0,1);(1,1);(2,1)\}$ sowie $G_3 := \{(0,2);(1,2);(2,2)\}$ sind Translationen von G_1 um $(0,1)$ bzw. $(0,2)$ und somit sind G_1, G_2 und G_3 parallele Geraden in $\mathrm{AG}(\mathbb{F}_3^2)$. Analog erhalten wir drei weitere Klassen paralleler Geraden und somit insgesamt 12 Geraden von $\mathrm{AG}(\mathbb{F}_3^2)$.

b) In Beispiel III.1.22 wurde bereits das koordinatisierbare projektive Matroid $F_7 := \mathrm{PG}(2,2)$ betrachtet, welches auch oft *Fano-Matroid* oder *Fano-Ebene* genannt wird. Obwohl F_7 nicht als affines Matroid realisiert werden kann, ist die graphische Darstellung in Abbildung III.2 durchaus nützlich. Entfernen wir eine beliebige Gerade aus $\mathrm{PG}(2,2)$, so erhalten wir die affine Geometrie $\mathrm{AG}(\mathbb{F}_2^2)$ mit insgesamt vier Punkten.

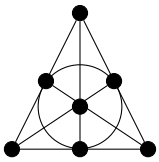


Abb. III.2.: *Projektiver Raum* $PG(2,2)$

1.5. Kryptomorphe Charakterisierung

Die Existenz vieler äquivalenter Charakterisierungen ist ein wesentliches Merkmal von Matroiden. In diesem Teilabschnitt werden wir einige für uns wesentliche kryptomorphe Definitionen einführen und deren Gleichwertigkeit nachweisen. Dieser Fassettenreichtum wird sich später auszahlen, da je nach Problemstellung die eine oder andere Definition eines Matroids am geeignetsten ist.

III.1.37 Satz: Seien $M(S)$ ein Matroid mit Abschlussoperator $\mathrm{cl} : 2^S \to 2^S$ sowie Rangfunktion $r : 2^S \to \mathbb{N}_0$ und $\mathcal{I}$, $\mathcal{D}$ bzw. $\mathcal{C}$ das System der unabhängigen, der abhängigen Mengen bzw. Kreise von M. Dann gelten für $p \in S$ und $X \subseteq S$:

(i) $p \in \overline{X} \;\Leftrightarrow\; (p \in X \text{ oder } \exists U \in \mathcal{I}(X) \text{ mit } U \cup p \in \mathcal{D})$

(ii) $p \in \overline{X} \;\Leftrightarrow\; (p \in X \text{ oder } \exists C \in \mathcal{C} \text{ mit } p \in C \subseteq X \cup p)$

(iii) $p \in \overline{X} \;\Leftrightarrow\; r(X \cup p) = r(X)$.

Beweis. (i) „⇒“: Seien $p \in \overline{X} \setminus X$ und U eine Basis von X. Nach Proposition III.1.16 gilt $r(X) = r(\overline{X}) = |U| < |U \cup p|$, d.h. $U \cup p \notin \mathcal{I}$, womit $U \cup p \in \mathcal{D}$ folgt.

„⇐“: Angenommen $p \in S \setminus \overline{X}$ und $U \in \mathcal{I}$ mit $U \subseteq X$, dann ist $p \notin \overline{U}$ und mit Proposition III.1.6 folgt die Unabhängigkeit von $U \cup p$, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht.

(ii) Unmittelbar einsichtig mit (i).

(iii) Es ist $p \in \overline{X}$ genau dann, wenn $\overline{X \cup p} = \overline{X} = \overline{B}$, wobei B eine Basis von X sei. Das ist genau dann der Fall, wenn $r(X \cup p) = r(X)$.

□

Die Familie der Kreise $\mathcal{C}$ sowie das System der unabhängigen Mengen $\mathcal{I}$ eines Matroids $M(S)$ bestimmen eindeutig dessen Abschlussoperator cl und somit das Matroid selbst.

Wir haben bereits festgehalten, dass $\mathcal{I}$ ein Ideal ist, weshalb dieses Mengensystem auch durch seine maximalen Elemente und damit durch $\mathcal{B}$ determiniert wird. Daraus folgt, dass auch die Menge aller Basen $\mathcal{B}$ den Abschlussoperator cl und damit das Matroid $M(S)$ bestimmt.

Umgekehrt können wir uns die Frage stellen, unter welchen Bedingungen eine Teilmenge von 2^S eindeutig ein Matroid bestimmt. Die folgenden Sätze geben darauf eine Antwort.

III.1.38 Proposition: Seien $\mathcal{I} \subseteq 2^S$ eine Familie von Mengen, welche die Axiome (I1) bis (I4) erfüllt und $\mathrm{cl} : 2^S \to 2^S$ mit $X \mapsto \mathrm{cl}(X) := \overline{X}$ eine Abbildung erklärt durch (i) aus Satz III.1.37, dann ist cl ein Hüllenoperator.

Beweis. Die Abbildung cl erfüllt die Eigenschaften (HO1) und (HO2), wie unmittelbar aus der Definition folgt. Weiter halten wir fest, dass die bezüglich der Inklusionsordnung maximalen Teilmengen aus $\mathcal{I}$ dieselbe endliche Mächtigkeit besitzen: Anderenfalls würde es zwei endliche maximale Mengen $U_1, U_2 \in \mathcal{I}$ mit $|U_1| < |U_2|$ geben und aus (I3) $U_1 + p \in \mathcal{I}$ mit $p \in U_2 \setminus U_1$ folgen – Widerspruch. Wir nennen daher die Elemente aus $\mathcal{I}$ *unabhängig* und die gemeinsame Mächtigkeit aller maximal unabhängigen Teilmengen $U \subseteq X \subseteq S$ den *Rang* von X.

Für den Nachweis der Idempotenz (HO3) zeigen wir zunächst $r(X) = r(\overline{X})$ für alle $X \subseteq S$: Dazu nehmen wir an, dass $|U_1| = r(X) < r(\overline{X}) = |U_2|$ gilt, wobei U_1 bzw. U_2 maximal unabhängige Teilmengen von X bzw. $\overline{X}$ sind. Nach (I3) existiert ein $p \in U_2 \setminus U_1$ mit $U_1 + p \in \mathcal{I}$ und aufgrund der Maximalität von U_1 ist $p \in \overline{X} \setminus X$. Gemäß Satz III.1.37 (i) können wir ein $U' \in \mathcal{I}$ mit $U' \cup p \notin \mathcal{I}$ wählen und zu einer maximal unabhängigen Menge U'' von X mit $U'' \supseteq U'$ und $|U''| = r(X) = |U_1|$ erweitern. Da $p \notin U_1$, ist $|U''| < |U_1 + p|$, womit $U'' \cup p$ nach (I3) unabhängig ist und damit nach (I2) auch $U' \cup p$ – Widerspruch. Nehmen wir nun an, es existiert ein $x \in \overline{\overline{X}} \setminus \overline{X}$, was $U \cup x \in \mathcal{I}$ für alle $U \in \mathcal{I}$ mit $U \subseteq X$ gemäß Satz III.1.37 (i) zur Folge hat. Damit erhalten wir den Widerspruch

$$r(\overline{\overline{X}}) \geq \max_{\substack{U \subseteq \mathcal{I} \\ U \subseteq X}} (U \cup x) = r(X) + 1 = r(\overline{X}) + 1,$$

weshalb cl idempotent und damit ein Hüllenoperator ist. □

III.1.39 Satz (Unabhängigkeitsaxiome): Sei $M(S)$ ein Matroid mit $\mathcal{I}$ als System der unabhängigen Mengen, dann erfüllt M die Axiome (I1) bis (I4). Gelten umgekehrt die Bedingungen (I1) bis (I4) für ein Mengensystem $\mathcal{U} \subseteq 2^S$, so wird dadurch eindeutig ein Matroid $M(S)$ erklärt.

Beweis. Nach Proposition III.1.8 erfüllt M die Axiome (I1) bis (I4). Sei also umgekehrt $\mathcal{I} \subseteq 2^S$ ein System von Mengen, welches den Axiome (I1) bis (I4) genügt. Ferner sei $\mathrm{cl} : 2^S \to 2^S$ der Hüllenoperator aus Proposition III.1.38 und es gelten die dort eingeführten Bezeichnungen.

Aufgrund der Definition von cl und der Bedingung (I4) folgt die Existenz einer endlichen Basis und damit (M2), wozu wir wir nur noch (M1) nachweisen müssen. Seien

dazu $p, q \in S$ und $X \subseteq S$ mit $p \notin \overline{X}$, $p \in \overline{X \cup q}$ gegeben. Mit Hilfe der Kontraposition von Proposition III.1.37 und $p \notin \overline{X}$ ergibt sich

$$p \notin \overline{X} \quad \Rightarrow \quad p \notin X \ \text{ und } \ (\nexists U' \in \mathcal{I}(X) : \ (U' \cup p) \in \mathcal{D}). \tag{III.2}$$

Gemäß Definition von cl existiert $U \in \mathcal{I}$ mit $U \subseteq (X \cup q)$ und $U \cup p \in \mathcal{D}$. Aufgrund der Implikation (III.2) und der Existenz von U ist $q \in U$, da anderenfalls $U \subseteq X$ gilt. Wegen (I2) ist $U \setminus q$ unabhängig und mit $p \notin \overline{X} \supseteq \overline{U \setminus q}$ sowie Proposition III.1.6 ergibt sich die Unabhängigkeit von $U' := (U \setminus q) + p$ mit $U' \subseteq (X + p)$ und $(U' + q) \in \mathcal{D}$. Demnach ist $q \in \overline{X + p}$ und es folgt die Gültigkeit der Austauscheigenschaft. Mit Hilfe der Definition von cl und den Axiomen (I1) bis (I4) ist die Äquivalenz $X \in \mathcal{I} \Leftrightarrow x \notin \overline{X \setminus x} \ \forall x \in X$ einsichtig. Es ist $\mathcal{I}$ also das Mengensystem der unabhängiger Mengen eines Matroids. □

Die Charakterisierung mit Hilfe der Basisaxiome folgt unmittelbar aus dem oben bewiesenen Satz, da Basen spezielle unabhängige Mengen sind.

III.1.40 Satz (Basisaxiome): Seien $M(S)$ ein Matroid und $\mathcal{B}$ das System der Basen von M, dann gelten die Axiome (B1) bis (B4). Erfüllt umgekehrt ein Mengensystem $\mathcal{B} \subseteq 2^S$ die Bedingungen (B1) bis (B4), so wird dadurch eindeutig ein Matroid $M(S)$ erklärt, wobei der Abschluss in M mittels (i) von Proposition III.1.37 begründet wird.

Beweis. Ist $M(S)$ ein Matroid und $\mathcal{B}$ das System der Basen von M, dann erfüllt $\mathcal{B}$ die Axiome (B1) bis (B4) gemäß Folgerung III.1.9. Die Umkehrung ergibt sich durch Rückführung auf den letzten Satz. □

Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$, S eine Menge mit genau n Elementen und $\mathcal{B} := \{X \subseteq S : |X| = k\}$ die Familie aller Teilmengen von S mit genau k Elementen. Das Mengensystem $\mathcal{B}$ erfüllt offenbar die Basisaxiome und induziert somit ein Matroid vom Rang k mit n Elementen, welches wir mit $U_k^n(S)$ bezeichnen.

III.1.41 Definition: Seien $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$, dann heißt $U_k^n(S)$ *uniformes Matroid* vom Rang k mit n Elementen.

III.1.42 Beispiel: In Abbildung III.3 sind die uniformen Matroide U_2^5, U_3^6 sowie U_4^6 geometrisch dargestellt. In letzterem Matroid sind alle maximal 4-elementigen Teilmen-

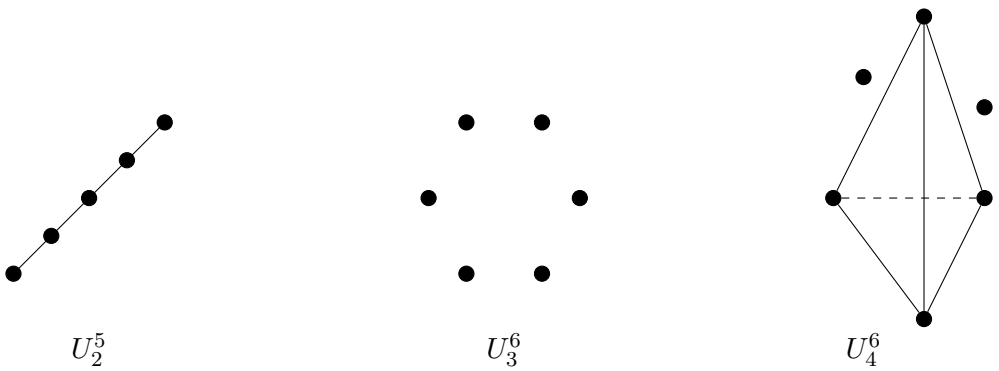


Abb. III.3.: *Darstellung dreier uniformer Matroide*

gen unabhängig, womit die 5-elementigen Teilmengen Kreise darstellen. Analoges lässt sich über die Gerade U_2^5 und U_3^6 festhalten.

III.1.43 Satz (Kreisaxiome): Seien $M(S)$ ein Matroid und $\mathcal{C}$ das System der Kreise von M, dann gelten die Axiome (C1) bis (C4). Erfüllt umgekehrt ein Mengensystem $\mathcal{C} \subseteq 2^S$ die Bedingungen (C1) bis (C4), so wird dadurch eindeutig ein Matroid $M(S)$ erklärt.

Beweis. Gemäß Proposition III.1.18 erfüllt M die Axiome (C1) bis (C4). Umgekehrt werden wir nachweisen, dass die Basisaxiome erfüllt sind und damit das Mengensystem $\mathcal{C}$ ein Matroid erklärt. Die Elemente aus $\mathcal{C}$ nennen wir *Kreise* und jede Obermenge eines Kreises nennen wir *abhängig*. Die nicht abhängigen Teilmengen von S nennen wir *unabhängig*. Sei $\mathcal{B}$ die Menge aller bezüglich der Inklusionsordnung maximal unabhängigen Teilmengen von S. Die leere Menge ist nicht abhängig, weshalb stets eine Basis existiert. Die Maximalität einer jeden Basis impliziert (B2) und die Endlichkeit derselben folgt unmittelbar aus (C4). Es bleibt also nur noch (B3) die Austauscheigenschaft nachzuweisen:

Das Axiom (C3) impliziert die Gültigkeit von Satz III.1.19 sowie der Richtung „⇒“ von Satz III.1.21 bzw. davon modifizierten Varianten. Für die umgekehrte Richtung „⇐“ von Satz III.1.21 folgt aus (C3) zunächst nur die Unabhängigkeit von $(B \setminus p) \cup q$, falls $p \in C_q(B)$. Wäre $B' := (B \setminus p) \cup q$ nicht maximal unabhängig, so gäbe es $B'' \in \mathcal{B}$ mit $B' \subsetneq B''$. Wählen wir $r \in B'' \setminus B'$, dann ist $p \in C_q(B) \cap C_r(B)$, weshalb aus (C3) die Existenz von $D \in \mathcal{C}$ mit $D \subseteq (C_q(B) \cup C_r(B)) \setminus p \subseteq B''$ folgen würde – Widerspruch. Es gilt also Satz III.1.21.

Seien nun $B, B' \in \mathcal{B}$ zwei verschiedene Basen und $p \in B \setminus B'$. Unter allen Kreisen C mit $p \in C \subseteq (B \cup B')$ wählen wir C_0 so, dass $|C_0 \setminus B|$ minimal ist, notfalls $C_p(B')$. Aufgrund der Definitionen ist $C_0 \setminus B \neq \varnothing$ und wir behaupten, dass für jedes $q \in C_0 \setminus B$ die Menge $(B \setminus p) \cup q$ wieder eine Basis ist. Falls nicht, gilt $p \notin C_q(B)$ nach Satz III.1.21. Wenden wir nun die Bedingung (C3)' auf $C_0 \neq C_q(B)$ an und schließen auf die Existenz von $D \in \mathcal{C}$ mit $p \in D \subseteq (C_0 \cup C_q(B)) \setminus q$, dann ist $p \in D \subseteq B \cup B'$ und $|D \setminus B| < |C_0 \setminus B|$, was im Widerspruch zur Minimalität von $|C_0 \setminus B|$ steht. □

III.1.44 Satz (Rangaxiome): Sei $M(S)$ ein Matroid mit Rangfunktion $r : 2^S \to \mathbb{N}_0$, dann gelten die Axiome (R1) bis (R3). Ist umgekehrt $r : 2^S \to \mathbb{N}_0$ eine Abbildung, welche den Bedingungen (R1) bis (R3) genügt, so existiert ein Matroid auf S, dessen zugehörige Rangfunktion r ist.

Beweis. [Aig76], Satz VI.1.18. □

Die Beschreibung eines Matroids mit Hilfe der Rangfunktion werden wir im folgenden Abschnitt benötigen.

1.6. Orthogonalität

Als nächstes werden wir das äußerst nützliche Konzept der Orthogonalität eines Matroids $M(S)$ einführen und uns diesbezüglich an [Cra86] orientieren. Die Grundmenge S sei in diesem Abschnitt stets *endlich*, da anderenfalls einige Sätze ihre Gültigkeit verlieren würden.

III.1.45 Definition: Seien $M(S)$ ein endliches Matroid mit Rangfunktion $r : 2^S \to \mathbb{N}_0$ und $X \subseteq S$, dann heißt $n(X) := |X| - r(X)$ *Nullität* von X. Die Differenz

$$r^*(X) := n(S) - n(S \setminus X)$$

zwischen der Nullität der Grundmenge S und der Nullität von $S \setminus X$ nennen wir den *orthogonalen Rang* von $X \subseteq S$.

Zunächst weisen wir nach, dass die durch den orthogonalen Rang induzierte wohldefinierte Abbildung $r^* : 2^S \to \mathbb{Z}$, welche wir *orthogonale Rangfunktion* nennen, eine Rangfunktion eines Matroids mit Grundmenge S ist.

III.1.46 Satz: Sei $M(S)$ ein endliches Matroid mit Rangfunktion $r : 2^S \to \mathbb{N}_0$, dann ist $r^* : 2^S \to \mathbb{Z}$ die Rangfunktion eines eindeutig bestimmten Matroids.

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass $r^*(\varnothing) = n(S) - n(S \setminus \varnothing) = 0$. Sei nun $Y \supseteq X$ mit $X \lessdot Y$ in $\langle 2^S; \subseteq \rangle$, dann ist

$$r^*(Y) - r^*(X) = |Y| - |X| - [r(S \setminus X) - r(S \setminus Y)] = 1 - [r(S \setminus X) - r(S \setminus Y)],$$

wobei der Term in den eckigen Klammern einen Wert aus $\{0, 1\}$ annimmt. Der Rang $r^*(Y)$ ist also gleich $r^*(X)$ oder $r^*(X)+1$, weshalb (R2) folgt. Aufgrund der Endlichkeit ist nun auch (R1) evident. Seien nun $X, Y \in 2^S$ Element des distributiven Booleschen Verbandes (vgl. Beispiel II.3.27), dann gilt unter der Prämisse $X \subseteq Y$ die Gleichung $|X \cup Y| + |X \cap Y| = |X| + |Y|$ und somit

$$\begin{aligned} &r^*(X \cap Y) + r^*(X \cup Y) \\ &\quad = |X \cap Y| + |X \cup Y| + r[(S \setminus X) \cup (S \setminus Y)] - r[(S \setminus X) \cap (S \setminus Y)] - 2r(S) \\ &\quad \leq |X| + |Y| + r(S \setminus X) + r(S \setminus Y) - 2r(S) \\ &\quad = r^*(X) + r^*(Y). \end{aligned}$$

Die Abbildung r^* ist demnach eine Rangfunktion und gemäß Satz III.1.44 wird dadurch eindeutig ein Matroid bestimmt. □

III.1.47 Definition: Sei $M(S)$ ein endliches Matroid mit Rangfunktion $r : 2^S \to \mathbb{N}_0$.

1. Das durch die orthogonale Rangfunktion $r^* : 2^S \to \mathbb{N}_0$ bestimmte Matroid heißt das zu M *orthogonale* oder *duale Matroid* und wir bezeichnen es durch $M^*(S)$. Manchmal nennen wir $M^*(S)$ auch das *Dual* von M.

2. Die Basen, Kreise und Hyperebenen von M^* heißen *Cobasen*, *Cokreise* und *Cohyperebenen* von M.

3. Eine unabhängige bzw. erzeugende Menge in M^* heißt *counabhängig* bzw. *coerzeugend* in M. Den Rang $r^*(X)$ für $X \subseteq S$ nennen wir den *Corang* von X in M.

Der Abschlussoperator des orthogonalen Matroids M^*, den wir *Coabschlussoperator* von M nennen, ist bestimmt durch die orthogonale Rangfunktion r^* zusammen mit der Äquivalenz aus (iii) von Proposition III.1.37. Den Coabschluss einer Menge $X \subseteq S$ im Matroid M^* werden wir durch $\mathrm{cl}^*(X) := \overline{X}^*$ notieren.

III.1.48 Proposition: Seien $M(S)$ ein endliches Matroid und $M^*(S)$ das zu M orthogonale Matroid auf einer endlichen Grundmenge S, dann gelten:

(i) $r(M) + r(M^*) = |S|$;

(ii) $M = (M^*)^*$.

Beweis. (i) Es ist $r(S) + r^*(S) = r(S) + [|S| - r(S) + r(\varnothing)] = |S|$.

(ii) Für jede Teilmenge $X \subseteq S$ gilt

$$\begin{aligned} r^{**}(X) &= |X| + r^*(S \setminus X) - r^*(S) \\ &= |X| + [|S \setminus X| + r(X) - r(S)] - [|S| - r(S)] \\ &= r(X), \end{aligned}$$

da $|X| + |S \setminus X| - |S| = 0$. Die Behauptung folgt mit Satz III.1.44.

□

Ist eine Aussage in einem Matroid $M(S)$ wahr, dann impliziert Satz III.1.46 die Gültigkeit der „Co-Aussage“, die dadurch gebildet wird, dass wir z.B. Begriffe wie „Kreis“ bzw. „Basis“ durch „Cokreis“ bzw. „Cobasis“ ersetzen. Wir nennen diesen Zusammenhang *Dualitätsprinzip für Matroide* und halten fest, dass die in den Abschnitten 2 und 3 diskutierten Dualitätsprinzipien im Allgemeinen nicht mit denen für Matroide übereinstimmen.

III.1.49 Proposition: Seien $M(S)$, $M^*(S)$ endliche Matroide mit Abschlussoperatoren cl bzw. cl^*, $p \in S$ und $X, Y \subseteq S \setminus p$, so dass $S = X + Y + p$, dann gilt die Äquivalenz

$$p \in \overline{X} \quad \Leftrightarrow \quad p \notin \overline{Y}^*.$$

Beweis. Gemäß den Voraussetzungen und Proposition III.1.37 (iii) gilt

$$p \in \overline{X} \;\Leftrightarrow\; r(X \cup p) = r(X) \;\Leftrightarrow\; r^*(Y) < r^*(Y + p) \;\Leftrightarrow\; p \notin \overline{Y}^*.$$

□

III.1.50 Satz: Seien $M(S)$ ein endliches Matroid und $X \subseteq S$, dann gelten:

(i) X ist unabhängig in $M \quad \Leftrightarrow \quad S \setminus X$ spannt M^* auf;

(ii) X ist Basis in $M \quad \Leftrightarrow \quad S \setminus X$ ist Basis in M^*;

(iii) X ist Kreis in $M \quad \Leftrightarrow \quad S \setminus X$ ist eine Hyperebene von M^*.

Beweis. (i) Die unabhängigen Mengen $X \in \mathcal{I}(M)$ sind gerade solche, für die $[p \in X \Rightarrow p \notin \overline{X \setminus p}]$ erfüllt ist. Gemäß Proposition III.1.49 folgt de Äquivalenz $p \notin \overline{X \setminus p} \Leftrightarrow p \in \overline{S \setminus X}^*$, womit $p \in \overline{S \setminus X}^* \Leftrightarrow \overline{S \setminus X}^* = S$ für *alle* $p \in X$ gilt.

(ii) $X \subseteq S$ ist Basis $\Leftrightarrow$ X ist unabhängig, spannt M auf und mit dem Beweis aus (i) dieses Satzes ist das genau dann der Fall, wenn $S \setminus X$ aufspannend und unabhängig in M^* ist.

(iii) $X \subseteq S$ ist ein Kreis $\Leftrightarrow$ X ist die minimal abhängige Menge in M und dies ist mit (i) genau dann der Fall, wenn $S \setminus X$ eine maximal nicht spannende Menge und gemäß Satz III.1.15 somit eine Hyperebene von M^* ist.

□

In Abbildung III.4 sind zwei Matroide und ihre orthogonalen Gegenstücke dargestellt.

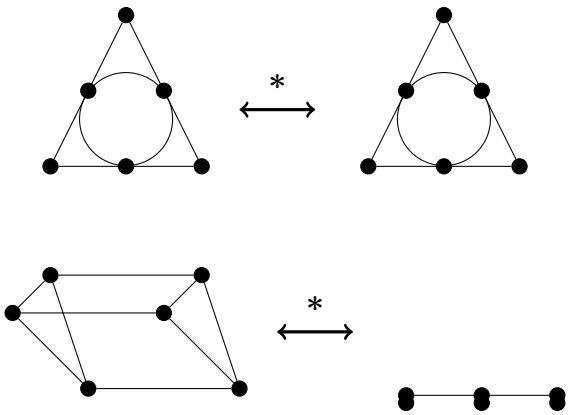


Abb. III.4.: *Darstellung von Matroiden und ihren orthogonalen Gegenstücken*

Die Duale der uniformen Matroide sind äußerst einfach zu bestimmen, wie folgendes Beispiel zeigen wird.

III.1.51 Beispiel: Betrachten wir ein uniformes Matroid $U_k^n(S)$, dessen Basen gemäß Definition die k-elementigen Teilmengen von S sind. Satz III.1.50 (ii) besagt, dass die Basen des dualen Matroids $[U_k^n(S)]^*$ durch die Komplemente und damit durch die $(n-k)$-elementigen Teilmengen von S determiniert sind. Es ist also

$$[U_k^n]^* = U_{n-k}^n. \tag{III.3}$$

III.1.52 Satz: Sei $U_k^n(S)$ ein uniformes Matroid, dann gilt:

(i) Die Kreise von U_k^n sind bestimmt durch

$$\mathcal{C}(U_k^n) = \begin{cases} \varnothing & \text{falls } k = n \\ \{X \subseteq E(U_k^n) \mid |X| = k+1\} & \text{falls } k < n \end{cases}.$$

(ii) Die Hyperebenen von U_k^n sind bestimmt durch

$$\mathcal{H}(U_k^n) = \begin{cases} \varnothing & \text{falls } k = 1 \\ \{X \subseteq E(U_k^n) \mid |X| = k-1\} & \text{falls } k > 1 \end{cases}.$$

Beweis. Die erste Behauptung (i) ist aufgrund der Definition eines uniformen Matroids evident. Die Cokreise von U_k^n sind gemäß Gleichung (III.3) die Kreise von U_{n-k}^n, d.h. die $(n-k+1)$-elementigen Mengen von S und mit Satz III.1.50 folgt die Behauptung. □

III.1.53 Proposition: Die abgeschlossenen Mengen des Matroids $U_k^n(S)$ bestehen aus den Mengen $X \subseteq S$ mit $|X| \leq k-1$ oder $|X| = |S| = n$.

Beweis. Gemäß Proposition 7.4.1. [Bry86] ist eine Menge $X \subseteq S$ genau dann abgeschlossen, wenn

$$Y := S \setminus X = \bigcup_{i \in I} C_i^* \quad \text{mit } C_i^* \in \mathcal{C}^*(U_k^n)$$

gilt. Aufgrund der Gleichung (III.3) ist es hinreichend nachzuweisen, dass Y eine Vereinigung von $(n-k+1)$-elementigen Teilmengen aus S ist. Da X gemäß Voraussetzung maximal $k-1$ oder alle Elemente enthält, ist dies aufgrund von Satz III.1.52 (i) möglich. □

Abschließend betrachten wir Schnittmengen von Kreisen und Cokreisen eines Matroids und stellen fest, dass diese stets mindestens zwei Elemente enthalten.

III.1.54 Satz: Seien $M(S)$ ein Matroid, C ein Kreis und C^* ein Cokreis von M, dann ist $|C \cap C^*| \neq 1$.

Beweis. Angenommen, es gäbe doch einen Kreis C und einen Cokreis C^* mit $|C \cap C^*| = 1$. Betrachten wir die Hyperebene $H := S \setminus C^*$, für die gemäß Satz III.1.50 (iii) gerade $C \cap H = C \setminus p$, $p \in C$ gilt. Daraus würde aber $p \in \overline{C \setminus p} \subseteq H$ folgen, was nicht sein kann. □

2. Konstruktion von Matroiden

2.1. Reduktion, Kontraktion und Minor

In Proposition II.3.25 haben wir nachgewiesen, dass die Reduktion und Kontraktion eines Hüllenoperators wieder Hüllenoperatoren sind.

III.2.1 Definition: Seien $M(S)$ ein Matroid mit Abschlussoperator cl und $X, Y \subseteq S$.

1. Das Paar $M\backslash X := (S \setminus X, \mathrm{cl}_{S\backslash X})$ heißt *Reduktion* von $M(S)$ um X auf $S \setminus X$. Wir sagen auch $M\backslash X$ entsteht durch *Restriktion* auf $S \setminus X$ und schreiben dafür alternativ $M|(S \setminus X)$.
2. Das Paar $M/X := (S \setminus X, \mathrm{cl}_{S/X})$ heißt *Kontraktion* von $M(S)$ um X auf $S \setminus X$.

Zunächst betrachten wir die Reduktion eines Matroids und setzen zur Vereinfachung der Notation $X^C := S \setminus X$. Wir erinnern uns, dass $\mathrm{cl}_{S\backslash X} : 2^{S\setminus X} \to 2^{S\setminus X}$ definiert ist durch $A \mapsto \overline{A} \cap X^C$.

III.2.2 Satz: Seien $M(S)$ ein Matroid mit Abschlussoperator $\mathrm{cl} : 2^S \to 2^S$ und $X \subseteq S$. Die Reduktion $M\backslash X = M|X^C$ ist ein Matroid und der zugeordnete Verband $\mathcal{L}[M\backslash X]$ wird vermöge der Abbildung

$$\phi : \mathcal{L}[M\backslash X] \to [\mathfrak{o}, \overline{X^C}] \quad \text{definiert durch} \quad A \mapsto \overline{A}$$

ordnungsisomorph in $[\mathfrak{o}, \overline{X^C}] \subseteq \mathcal{L}[M]$ eingebettet, wobei das Supremum in $\mathcal{L}[M\backslash X]$ und $[\mathfrak{o}, \overline{X^C}]$ übereinstimmt, im Allgemeinen jedoch nicht das Infimum. Ist insbesondere X^C ein Unterraum von $M(S)$, so gilt $\mathcal{L}[M\backslash X] \cong [\mathfrak{o}, X^C]$.

Beweis. Die endliche Basenbedingung (M2) ergibt sich direkt aus der Definition des Hüllenoperators $\mathrm{cl}_{S\backslash X}$. Seien $A \subseteq X^C$ und $x, y \in X^C$ mit $x \notin \mathrm{cl}_{S\backslash X}(A) = \overline{A} \cap X^C$ sowie $x \in \mathrm{cl}_{S\backslash X}(A \cup y) = \overline{A \cup y} \cap X^C$, dann ist $x \notin \overline{A}$ bzw. $x \in \overline{A \cup y}$. Mit der Austauscheigenschaft von cl folgt $y \in \overline{A + x} \cap X^C = \mathrm{cl}_{S\backslash X}(A + x)$, d.h. $(S \setminus X, \mathrm{cl}_{S\setminus X})$ ist ein Matroid. Seien ϕ wie im Satz oben definiert und $\psi : [0, \overline{X^C}] \to \mathcal{L}[M\backslash X]$ gegeben durch

$$B \mapsto \psi(B) := B \cap X^C.$$

Beide Abbildungen sind monoton und es gilt $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$. Seien $A_1, A_2 \in \mathcal{L}[M\backslash X]$ (d.h. $A_1, A_2 \subseteq X^C$), dann ist

$$\begin{aligned} \phi(A_1 \vee A_2) &= \phi(\mathrm{cl}_{S\backslash X}(A_1 \cup A_2)) = \overline{\overline{A_1 \cup A_2} \cap X^C} = \overline{A_1 \cup A_2} \\ &= \overline{A_1} \vee \overline{A_2} = \phi(A_1) \vee \phi(A_2); \\ \phi(A_1 \wedge A_2) &= \phi(A_1 \cap A_2) \ \leq \ \overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \phi(A_1) \wedge \phi(A_2). \end{aligned}$$

Im Fall $X^C \in \mathcal{L}[M]$ ist $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$, weshalb mit Proposition II.3.12 $\mathcal{L}[M\backslash X] \cong [\mathfrak{o}, X^C]$ folgt. □

Wir erhalten den Verband $\mathcal{L}[M\backslash X]$ indem wir die Suprema in $\mathcal{L}[M]$ sämtlicher Teilmengen von $S \setminus X$ bilden und dann auf X^C einschränken.

III.2.3 Folgerung: Seien $M(S)$ ein Matroid mit $X \subseteq S$ und $M\backslash X = M|X^C$ eine Restriktion von M. Seien durch r bzw. $r_{M\backslash X}$ die Rangfunktionen von M bzw. $M\backslash X$ bezeichnet, dann gilt für $A \subseteq X^C$:

(i) A ist unabhängig in $M\backslash X \quad \Leftrightarrow \quad A$ ist unabhängig in $M(S)$;

(ii) A ist Basis in $M\backslash X \quad \Leftrightarrow \quad A$ ist Basis von X^C in $M(S)$;

(iii) A ist Kreis in $M\backslash X \quad \Leftrightarrow \quad A$ ist Kreis in $M(S)$;

(iv) $r_{M\backslash X}(A) = r(A)$.

Auch die Kontraktion eines Matroids ist ein Matroid, wie folgend gezeigt wird. Es ist $\mathrm{cl}_{S/X} : 2^{S\setminus X} \to 2^{S\setminus X}$ bestimmt durch $A \mapsto \overline{A \cup X} \setminus X$.

III.2.4 Satz: Seien $M(S)$ ein Matroid mit Abschlussoperator cl und $X \subseteq S$. Die Kontraktion M/X von M ist ein Matroid und der zugeordnete Verband $\mathcal{L}[M/X]$ ist vermöge des Verbandsisomorphismus

$$\phi : \mathcal{L}[M/X] \to [\overline{X}, \mathbb{1}] \quad \text{definiert durch} \quad A \mapsto \overline{A \cup X}$$

isomorph zu $[\overline{X}, \mathbb{1}] \subseteq \mathcal{L}[M]$.

Beweis. Unmittelbar aus der Definition folgt die Gültigkeit von (M2) für den Hüllenoperator $\mathrm{cl}_{S/X}$. Seien nun $x, y \in X^C$ und $A \subseteq X^C$, weiter $x \notin \mathrm{cl}_{S/X}(A) = \overline{A \cup X} \setminus X$ aber $x \in \mathrm{cl}_{S/X}(A \cup y) = \overline{[A \cup X] \cup y} \setminus X$. Mit der Austauscheigenschaft von cl folgt $y \in \overline{[A \cup X] + x} \setminus X = \mathrm{cl}_{S/X}(A \cup x)$.

Seien ϕ wie im Satz oben definiert und $\psi : [\overline{X}, \mathbb{1}] \to \mathcal{L}[M/X]$ erklärt durch $B \mapsto B \setminus X$ für alle $B \in [\overline{X}, \mathbb{1}]$, dann folgt die Bijektivität von ϕ bzw. ψ durch $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi = \mathrm{id}$, wobei für $B \in [\overline{X}, \mathbb{1}]$ die Gleichung

$$\mathrm{cl}_{S/X}(B \setminus X) = \overline{(B \setminus X) \cup X} \setminus X = B \setminus X$$

erfüllt ist. Seien nun $A_1, A_2 \subseteq X^C$, dann gelten

$$\begin{aligned} \phi(A_1 \vee A_2) &= \phi(\mathrm{cl}_{S/X}(A_1 \cup A_2)) = \overline{\mathrm{cl}_{S/X}(A_1 \cup A_2) \cup X} \\ &= \overline{\overline{A_1 \cup A_2 \cup X} \setminus X \cup X} = \overline{\overline{A_1 \cup A_2 \cup X}} \\ &= \overline{A_1 \cup X} \vee \overline{A_2 \cup X} = \phi(A_1) \vee \phi(A_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(A_1 \wedge A_2) &= \phi(A_1 \cap A_2) = \overline{[A_1 \cap A_2] \cup X} = \overline{[A_1 \cup X] \cap [A_2 \cup X]} \\ &= \overline{A_1 \cup X} \wedge \overline{A_2 \cup X} = \phi(A_1) \wedge \phi(A_2), \end{aligned}$$

d.h. ϕ ist ein Verbandsisomorphismus. □

III.2.5 Folgerung: Seien $M(S)$ ein Matroid mit $X \subseteq S$ und M/X eine Kontraktion von M. Durch r bzw. $r_{M/X}$ seien die Rangfunktionen von M bzw. M/X bezeichnet, dann gilt für $A \subseteq X^C$:

(i) A ist unabhängig in M/X $\Leftrightarrow$ $A \cup U$ ist unabhängig in $M(S)$ für alle unabhängigen Mengen $U \subseteq X$;

(ii) A ist Basis in M/X $\Leftrightarrow$ $A + B_X$ ist Basis von M für alle Basen B_X von X;

(iii) A ist Kreis in M/X $\Leftrightarrow$ $A = C \setminus X \neq \varnothing$ mit $C \in \mathcal{C}(M)$, so dass A minimal mit dieser Eigenschaft ist;

(iv) $r_{M/X}(A) = r(A \cup X) - r(X)$.

Beweis. Der Isomorphismus $\mathcal{L}[M/X] \cong [\overline{X}, \mathbb{1}]$ impliziert wegen Proposition III.1.26 die Gültigkeit von (iv), woraus (i) und (ii) folgen. Sei A ein Kreis aus M/X, dann ist A entweder auch ein Kreis in $M(S)$ oder A ist unabhängig in $M(S)$ und es existiert nach (i) eine unabhängige Menge $D \subseteq X$, so dass $A \cup D$ abhängig in $M(S)$ ist. Wählen wir $D_0 \subseteq X$ minimal unter diesen Mengen D, so ist $C_0 = A \cup D_0$ ein Kreis in $M(S)$ mit $A = C_0 \setminus X$. Umgekehrt ist jede Menge $C \setminus X \neq \varnothing$, wobei C Kreis in $M(S)$ ist, abhängig in M/X. □

Da die Kontraktion eines Vektorraummatroids $M[V]$ dem Matroid eines Quotientenraumes von V entspricht, nennen wir M/X mit $X \subseteq S$ auch *Quotientenmatroid*.

III.2.6 Proposition: Seien $M(S)$ ein Matroid und $X \subseteq S$, dann ist

$$M/X = (M^*\backslash X)^*.$$

Beweis. Die Rangfunktionen in diesem Beweis seien durch die Bezeichnung der zugehörigen Matroide indexiert. Gemäß Folgerung III.2.3 (iv) sowie der Definition III.1.45 gilt für alle $A \subseteq S \setminus X$

$$\begin{aligned} r_{(M^*\backslash X)^*}(A) =& |A| + r_{M^*\backslash X}(S \setminus X \setminus A) - r_{M^*\backslash X}(S \setminus X) \\ =& |A| + r_{M^*}(S \setminus (X \cup A)) - r_{M^*}(S \setminus X) \\ =& |A| + [|S \setminus (X \cup A)| + r_M(X \cup A) - r_M(S)] - [|S \setminus X| + r_M(X) - r_M(S)] \\ =& r_M(A \cup X) - r_M(X). \end{aligned}$$

Mit Folgerung III.2.5 (iv) und Satz III.1.44 folgt damit die Behauptung. □

Wir sagen deshalb auch, dass die Kontraktion die zur Reduktion *duale* oder *orthogonale Operation* ist ([Bry86], Abschnitt 7.4).

III.2.7 Proposition: Seien $M(S)$ ein Matroid und $X_1, X_2 \subseteq S$ zwei disjunkte Teilmengen, dann gelten:

(i) $[M\backslash X_1]\backslash X_2 = M\backslash[X_1 + X_2] = [M\backslash X_2]\backslash X_1$;

(ii) $[M/X_1]/X_2 = M/[X_1 + X_2] = [M/X_2]/X_1$;

(iii) $[M/X_1]\backslash X_2 = [M\backslash X_2]/X_1$.

Beweis. (i) Ergibt sich unmittelbar aus Folgerung III.2.3 (iv) und Satz III.1.44.

(ii) Folgerung III.2.5 (iv) impliziert

$$r_{[M/X_1]/X_2}(A) = r(A \cup X_1 \cup X_2) - r(X_1) - r(X_1 \cup X_2) + r(X_1) = r_{M/[X_2+X_1]}(A)$$

und erneut mit Satz III.1.44 folgt die Behauptung.

(iii) Aus den Folgerungen III.2.5 und III.2.3 erhalten wir

$$\begin{aligned} r_{[M/X_1]\setminus X_2}(A) &= r_{M/X_1}(A) = r(A \cup X_1) - r(X_1) \\ &= r_{M\setminus X_2}(A \cup X_1) - r_{M\setminus X_2}(X_1) = r_{[M\setminus X_2]/X_1}(A), \end{aligned}$$

womit mit Satz III.1.44 die Behauptung folgt.

□

III.2.8 Beispiel: Seien $U_k^n(S)$ ein uniformes Matroid und $X \subseteq S$ eine m-elementige Teilmenge, dann ist

$$U_k^n/X \cong \begin{cases} U_0^{n-m} & \text{falls } k \leq m \leq n \\ U_{k-m}^{n-m} & \text{falls } m < n. \end{cases}$$

Seien $M(S)$ ein Matroid und $X \subseteq S$, dann sind die Kontraktion M/X und Reduktion $M\setminus X$ Matroide und somit auch die Kontraktion einer Reduktion bzw. die Reduktion einer Kontraktion.

III.2.9 Definition: Seien $M(S)$ ein Matroid und $X, Y \subseteq S$, dann heißt $(M\setminus X)/Y = (M/Y)\setminus X$ *Minor von* M. Ein Minor von M der nur durch Reduktion aus M hervorgeht heißt *Reduktionsminor* und analog dazu sei der Begriff *Kontraktionsminor* von M definiert.

Weitere Konsequenz der Proposition III.2.7 ist, dass der Minor eines Minors selbst ein Minor ist. Sowohl die Kontraktion als auch die Reduktion eines Matroids $M(S)$ um eine Menge $X \subseteq S$ ergibt ein Matroid auf der Grundmenge $S \setminus X$. Unter welchen Umständen ergeben die Reduktion bzw. Kontraktion von M um X dasselbe Matroid?

III.2.10 Proposition: Seien $M(S)$ ein Matroid mit Rangfunktion r und $X \subseteq S$, dann gilt:

$$M\setminus X = M/X \quad \Leftrightarrow \quad r(X) + r(S \setminus X) = r(M)$$

Beweis. [Oxl06], Proposition 3.1.24. □

III.2.11 Folgerung: Seien $M(S)$ ein Matroid und $p \in S$, dann ist $M/p = M\setminus p$ genau dann, wenn p eine Schlinge oder eine Coschlinge von M ist.

III.2.12 Satz: Seien $M(S)$ ein Matroid, $X \subseteq S$ und $F \subseteq X^C$, dann gelten:

(i) F ist ein Unterraum von $M/X \Leftrightarrow F \cup X$ ist ein Unterraum von M;

(ii) F ist ein Unterraum von $M\backslash X \Leftrightarrow M$ besitzt einen Unterraum F', so dass $F = F' \setminus X$.

Beweis. (i) F ist ein Unterraum von $M/X \Leftrightarrow \mathrm{cl}_{M/X}(F) = \overline{F \cup X} \setminus X = F \Leftrightarrow \overline{F \cup X} = F \cup X \Leftrightarrow F \cup X$ ist ein Unterraum von $M(S)$.

(ii) Analog zu (i).

□

Mit Hilfe verbotener Minoren kann die Koordinatisierbarkeit bestimmter Matroide beschrieben werden. Wir erinnern an die in Beispiel III.1.36 b) festgelegte Notation des Fano-Matroids $F_7 = \mathrm{PG}(2,2)$.

III.2.13 Satz:

(i) Ein Matroid ist binär genau dann, wenn es keinen U_2^4-Minor besitzt;

(i) Ein Matroid ist regulär genau dann, wenn es keinen U_2^4-, F_7- oder F_7^*-Minor besitzt.

Beweis. (i) [Oxl06], Satz 6.5.4.

(i) [Oxl06], Satz 13.1.1.

□

2.2. Erweiterung und Quotient

Reduzieren wir das Matroid $N(T)$ um einen Punkt $p \in T$, so erhalten wir die Reduktion $M(S) := N\backslash p$ mit Grundmenge $S = T \setminus p$. Umgekehrt lassen wir uns nun von der Frage leiten, welche Matroide $N(T)$ wir aus dem Matroid $M(S)$ durch Hinzufügen des Punktes $p \notin S$ unter der Prämisse $N\backslash p \cong M(S)$ erhalten.

III.2.14 Definition: Ein Matroid $N(T)$ heißt *Erweiterung* von $M(S)$ um $X \subseteq T$, falls $S := T \setminus X$ und $N(T)\backslash X$ isomorph zu $M(S)$ ist. Wenn N^* eine Erweiterung von M^* ist, dann nennen wir N *Coerweiterung* von M. Eine Erweiterung $N(T)$ von $M(S)$ um X heißt *einfach*, falls $|X| = 1$.

Neben dem in Definition II.3.32 eingeführten Begriff des modularen Filters benötigen wir noch den folgenden.

III.2.15 Definition: Seien $M(S)$ ein Matroid mit Rangfunktion $r : 2^S \to \mathbb{N}_0$ und $X, Y \subseteq S$. Die Teilmengen X und Y bilden ein *modulares Paar* in M, in Zeichen $(X,Y)\mathcal{M}$, wenn

$$r(X \cap Y) + r(X \cup Y) \;=\; r(X) + r(Y).$$

Seien $S \subsetneq T$ Mengen mit $S = T \setminus p$, so dass $N(T)$ eine einfache Erweiterung von $M(S)$ um p ist. Bezeichnen $\mathcal{F}(M)$ bzw. $\mathcal{F}(N)$ die Menge aller Unterräume von M bzw. N, dann ist

$$\mathcal{F}(M) \;=\; \{F^+ \setminus p |\; F^+ \in \mathcal{F}(N)\}, \tag{III.4}$$

wie sich aus Satz III.2.12 (ii) ergibt. Im Umkehrschluss zu (III.4) lässt sich jeder Unterraum der Erweiterung N mit Hilfe von Unterräumen aus $\mathcal{F}(M)$ darstellen. Sind $F \in \mathcal{F}(M)$ und $r_N : 2^T \to \mathbb{N}_0$ die Rangfunktion der Erweiterung N, dann können wir jedem Unterraum aus $\mathcal{F}(M)$ genau einen der drei folgenden Fälle zuordnen:

1. $(F + p) \in \mathcal{F}(N)$ mit $r_N(F + p) = r_N(F)$,
2. $(F + p) \in \mathcal{F}(N)$ mit $r_N(F + p) = r_N(F) + 1$,
3. $(F + p) \notin \mathcal{F}(N)$.

Fassen wir die Unterräume aus M, welche der ersten Bedingung genügen in dem Mengensystem $\mathcal{M}_M$ zusammen, dann gilt mit den bereits eingeführten Bezeichnungen:

III.2.16 Satz: Das Mengensystem $\mathcal{M}_M$ besitzt die folgenden Eigenschaften:

(i) Ist $F \in \mathcal{M}_M$ und F' ein Unterraum von M mit $F \subseteq F'$, dann ist $F' \in \mathcal{M}_M$;

(ii) Sind $F_1, F_2 \in \mathcal{M}_M$ und $(F_1, F_2)\mathcal{M}$ ein modulares Paar, dann ist $(F_1 \cap F_2) \in \mathcal{M}_M$.

Beweis. (i) Seien $F \in \mathcal{M}_M$ und $F' \in \mathcal{L}[M]$ mit $F \subseteq F'$, dann ist $r_N(F+p) = r_N(F)$ und mit Proposition III.1.37 ergibt sich $p \in \mathrm{cl}_N(F) \subseteq \mathrm{cl}_N(F')$. Daraus folgt $r_N(F'+p) = r_N(F')$ und somit $F' \in \mathcal{M}_M$.

(ii) Sind $F_1, F_2 \in \mathcal{M}_M$ und $(F_1, F_2)\mathcal{M}$ ein modulares Paar, dann ergibt sich aus den Definitionen

$$r_N(F_1 \cap F_2) + r_N(F_1 \cup F_2) = r_N(F_1) + r_N(F_2) = r_N(F_1 + p) + r_N(F_2 + p)$$

und mit Hilfe der Semimodularität der Rangfunktion folgt

$$r_N(F_1 \cap F_2) + r_N(F_1 \cup F_2) \;\geq\; r_N((F_1 \cap F_2) \cup p) + r_N(F_1 \cup F_2 \cup p) \tag{III.5}$$

Wegen $r_N(F_1 \cup p) = r_N(F_1)$ ist $r_N(F_1 \cup F_2 \cup p) = r_N(F_1 \cup F_2)$ und zusammen mit (III.5) ergibt sich $r_N(F_1 \cap F_2) \geq r_N((F_1 \cap F_2) \cup p)$ und somit $r_N(F_1 \cap F_2) = r_N((F_1 \cap F_2) \cup p)$.

□

Demnach ist $\mathcal{M}_M$ ein modularer Filter von $\mathcal{L}[M]$.

III.2.17 Satz: Seien $M(S)$ ein Matroid und $\mathcal{M}$ ein modularer Filter von $\mathcal{L}[M]$, dann existiert eine Menge T mit $T \setminus p = S$, so dass $M(T)$ eine einfache Erweiterung von $M(S)$ ist und $\mathcal{M}_M = \mathcal{M}$.

Beweis. Theorem 1, 10.8 in [Cra70]. □

III.2.18 Folgerung: Sei M ein Matroid, dann besteht eine bijektive Korrespondenz zwischen den einfachen Erweiterungen und den modularen Filtern von M.

Die modularen Filter eines Matroids M bestimmen also eindeutig sämtliche einfachen Erweiterungen von M. Mit Hilfe eines Computers berechneten Blackburn, Crapo & Higgs in den 1960er Jahren mit der beschriebenen Methode einen Katalog, indem sie alle isomorphen Matroide mit endlicher Grundmenge S und $|S| \leq 8$ aufführten. Im Jahr 2008 wurde diese Liste von Mayhew und Royle mit einem verwandten Algorithmus in [May08] bestätigt und auf $|S| \leq 9$ erweitert.

III.2.19 Definition: Ein Matroid $Q(S)$ heißt *Quotient* von $M(S)$, falls es ein Matroid $N(T)$ mit $X \subseteq T$ gibt, so dass $M = N\backslash X$ und $Q = N/X$. Seien weiter $\mathcal{M} \neq \varnothing, \mathcal{F}(M)$ ein modularer Filter von $M(S)$ und $X = \{p\}$, dann nennen wir $Q = (M +_{\mathcal{M}} p)/p$ einen *elementaren Quotienten* von $M(S)$ bezüglich $\mathcal{M}$.

Elementare Quotienten Q von M entstehen durch eine einfache Erweiterung um den Punkt p und anschließende Kontraktion desselben Punktes. Gemäß Definition besitzen ein Quotient Q und das zugehörige Matroid M dieselbe Grundmenge S und es gilt $S = T \setminus X$. In Abbildung III.5 ist dieses Konstruktionsprinzip an einem einfachen Beispiel dargestellt.

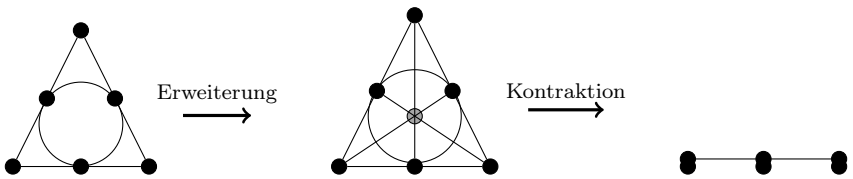


Abb. III.5.: *Konstruktion eines Quotienten*

III.2.20 Proposition: Das Matroid $Q(S)$ ist ein Quotient von $M(S)$ genau dann, wenn ein Matroid N und eine unabhängige Menge $B \in \mathcal{I}(N)$ existieren, so dass $r(N) = r(M)$, $M = N\backslash B$ und $Q = N/B$.

Beweis. „⇒“: Sei $Q(S)$ ein Quotient von $M(S)$, dann gibt es mind. ein Matroid $N'(T)$ und eine Teilmenge $X \subseteq T$ mit $Q = N'/X$ und $M = N'\backslash X$, wobei N' minimalen Rang bezüglich dieser Eigenschaften besitzen soll. Seien B eine Basis von X in N' und $N := N'\backslash(X \setminus B)$, dann sind wegen Proposition III.2.7 folgend $N\backslash B = N'\backslash X = M$ und $N/B = [N'/B]\backslash(X \setminus B)$. Weiter impliziert Folgerung III.2.11 die Identität $N/B = Q$, da sämtliche Elemente aus $X \setminus B$ Schlingen von N'/B sind. Aufgrund der Wahl von N' ist $r(N) = r(N')$. Wir müssen noch $r(N) = r(M)$ zeigen, wozu wir $r(N) \neq r(M)$ annehmen und ein $p \in B$ wählen, so dass $r(S + p) > r(M)$. Daraus würde aber $N\backslash(B \setminus p)/p = M$ und $N/p/(B \setminus p) = Q$ folgen, was der minimalen Wahl von N' widersprechen würde.

„⇐“: Wenn das Matroid N und die unabhängige Menge $B \in \mathcal{I}(N)$ existieren, dann ist $Q = N/B$ offensichtlich ein Quotient von M. □

III.2.21 Folgerung: Seien Q ein Quotient des Matroids M und $r(Q) = r(M)$, dann ist $Q = M$.

Abschließend fassen wir wichtige Eigenschaften von Quotienten eines Matroids in folgendem Satz zusammen.

III.2.22 Satz: Seien $M(S)$ und $Q(S)$ Matroide mit den Rangfunktionen r_M und r_Q sowie Abschlussoperatoren cl_M und cl_Q, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Q ist Quotient von M;

(ii) Jeder Unterraum von Q ist Unterraum von M;

(iii) Wenn $X \subseteq Y \subseteq S$, dann $r_M(Y) - r_M(X) \geq r_Q(Y) - r_Q(X)$;

(iv) Jeder Kreis von M ist eine Vereinigung von Kreisen von Q;

(v) Für alle $X \subseteq S$ ist $\mathrm{cl}_M(X) \subseteq \mathrm{cl}_Q(X)$.

Beweis. Proposition 7.3.6, [Oxl06]. □

2.3. Direkte und parallele Summe

Neben der Reduktion und der Kontraktion ist die „direkte Summe“ ein weiteres elementares Konstruktionsprinzip für Matroide.

III.2.23 Proposition: Seien $M_i(S_i)$ mit $i \in \mathbb{N}_n$ Matroide auf paarweise disjunkten Grundmengen S_i und Abschlussoperatoren cl_i. Dann ist die disjunkte Vereinigung $S := \dotplus_{i=1}^{n} S_i$ zusammen mit der Abbildung $\mathrm{cl} : 2^S \to 2^S$ erklärt durch

$$A \;\mapsto\; \mathrm{cl}(A) := \dotplus_{i=1}^{n} \mathrm{cl}_i(A_i)$$

für alle $A \subseteq S$ ein Matroid $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$.

Beweis. Jede Teilmenge $A \subseteq S$ können wir als disjunkte Vereinigung $A = \dotplus_{i=1}^{n} A_i = A_1 + \ldots + A_n$ mit $A_i \subseteq S_i$ darstellen. Ferner ist die Abbildung cl wohldefiniert, da cl_i dies sind. Aus $A_i \subseteq \mathrm{cl}_i(A_i)$ für alle $i \in \mathbb{N}_n$ folgt $A \subseteq \mathrm{cl}(A) = [\mathrm{cl}_1(A_1) + \ldots + \mathrm{cl}_n(A_n)]$, die Extensität von cl. Analog übertragen sich die Eigenschaften (HO2), (HO3) und (M2). Seien nun $x, y \in S$ mit $x \notin \mathrm{cl}(A) = [\mathrm{cl}_1(A_1) + \ldots + \mathrm{cl}_n(A_n)]$ aber $x \in \mathrm{cl}(A \cup y)$. Da wir S in paarweise disjunkte Mengen $S_1, \ldots, S_n$ aufspalten können, muss es genau ein $j \in \mathbb{N}_n$ mit $y \in S_j$ geben, so dass $x \in [\mathrm{cl}_1(A_1) + \ldots + \mathrm{cl}_j(A_j \cup y) + \ldots \mathrm{cl}_n(A_n)]$ und deshalb $x \in \mathrm{cl}_j(A_j \cup y)$ ist. Wenden wir nun die Austauscheigenschaft von cl_j an, so folgt (M1) für cl. □

Die letzte Proposition führt zu folgender

III.2.24 Definition: Das Matroid $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ auf der Menge $S := \dotplus_{i=1}^{n} S_i$ mit dem Abschlussoperator cl aus letzter Proposition heißt (*direkte*) *Summe* oder (direktes) Produkt von $M_1, \ldots, M_n$.

Als nächstes nehmen wir eine Charakterisierung der direkten Summe z.B. mit Basen oder Kreisen vor und betrachten im Anschluss den Zusammenhang zwischen der direkten Summe und der Reduktion bzw. Kontraktion.

III.2.25 Satz: Seien $M := \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ die direkte Summe der Matroide $M_i(S_i)$ mit $i \in \mathbb{N}_n$ und r die Rangfunktion von M sowie r_i die Rangfunktionen von M_i. Wenn $A := +_{i=1}^{n} A_i$ mit $A_i \subseteq S_i$, dann gelten:

(i) A ist unabhängig in M $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\forall i \in \mathbb{N}_n$: A_i ist unabhängig in M_i;

(ii) A ist Basis in M $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\forall i \in \mathbb{N}_n$: A_i ist Basis in M_i;

(iii) A ist Kreis in M $\quad\Leftrightarrow\quad$ $A = A_i$ ist Kreis in M_i für genau ein $i \in \mathbb{N}_n$ und für $i \neq j$ ist $A_j = \varnothing$;

(iv) $r(A) = \sum_{i=1}^{n} r_i(A_i)$;

(v) $\mathcal{L}[M(S)] = \times_{i=1}^{n} \mathcal{L}[M_i(S_i)]$.

Beweis. Offensichtlich erfüllt $r : 2^S \to 2^S$ mit $A \mapsto r(A) = \sum_{i=1}^{n} r_i(A_i)$ die Rangaxiome und bestimmt somit eindeutig ein Matroid. Wegen (iii) aus Proposition III.1.37 ist r die Rangfunktion von M. Die Aussagen (i) und (ii) können analog gezeigt werden. Für den Rest verweisen wir auf Proposition 7.6.1, [Bry86]. □

III.2.26 Proposition: Sei $M := \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ die direkte Summe der Matroide $M_i(S_i)$ mit $i \in \mathbb{N}_n$, dann gilt für ein beliebiges $j \in \mathbb{N}_n$:

(i) $M|S_j = M_j(S_j)$;

(ii) $M/S_j = \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} M_i$.

Beweis. (i) Es ist $M|S_j = M \backslash (+_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} S_i)$, womit für den Abschlussoperator $\mathrm{cl}_{M|S_j}$ und einer Teilmenge $A = A_1 + \ldots + A_n \subseteq S$ die Identität

$$\mathrm{cl}_{M|S_j}(A) = \mathrm{cl}(A) \cap S_j = [\mathrm{cl}_1(A_1) + \ldots + \mathrm{cl}_n(A_n)] \cap S_j = \mathrm{cl}_j(A_j)$$

und damit die Behauptung folgt.

(ii) Für eine beliebige Teilmenge $A = A_1 + \ldots + A_n \subseteq S$ erfüllt der Abschlussoperator der Kontraktion cl_{M/S_j} die Gleichung

$$\mathrm{cl}_{M/S_j}(A) = \mathrm{cl}(A \cup S_j) \setminus S_j = \dot{+}_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \mathrm{cl}_i(A_i),$$

womit $M/S_j = \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} M_i$ folgt.

□

Lässt sich ein Matroid $M(S)$ durch eine direkte Summe

$$M(S) = M_1(S_1) \oplus \ldots \oplus M_n(S_n)$$

darstellen, dann nennen wir M_i mit $i = 1, \ldots, n$ die *Komponenten* der Summen-Zerlegung von M.

Als nächstes stellen wir uns die Frage, wie wir Matroide mit nicht disjunkten Grundmengen sinnvoll zusammenfügen können. Da wir die direkte Summe in diesem Kontext ausschließen möchten, setzen wir voraus, dass die Restriktion auf die Menge T in folgender Definition keine Komponente von M_1 oder M_2 ist.

III.2.27 Definition: Seien $M_i(S_i)$ mit $i = 1, 2$ einfache Matroide mit gemeinsamer Schnittmenge $T = S_1 \cap S_2$. Ist T ein modularer Unterraum von M_1 und Unterraum von M_2, dann heißt das Hüllensystem

$$M_1 \oplus_T M_2 := \{X \subseteq (S_1 \cup S_2) |\ (X \cap S_i) \text{ ist Unterraum von } M_i \text{ für } i = 1, 2\}$$

mit Grundmenge $S := S_1 \cup S_2$ *verallgemeinerte parallele Summe* von M_1 und M_2.

Die in der letzten Definition eingeführte Notation gelte für den Rest dieses Teilabschnittes. Ferner bezeichnen wir die Rangfunktion von M_i durch $r_i : 2^{S_i} \to \mathbb{N}_0$ und den Abschluss einer Menge $X_i \subseteq S_i$ durch $\overline{X_i}^i$ für $i = 1, 2$.

III.2.28 Proposition: Die verallgemeinerte parallele Summe $M_1(S_1) \oplus_T M_2(S_2)$ ist ein einfaches Matroid mit Grundmenge $(S_1 \setminus T) + (S_2 \setminus T) + T$.

Beweis. Wir verweisen auf Satz 5.3, [Bry75]. □

III.2.29 Beispiel: In Abbildung III.6 ist die verallgemeinerte parallele Summe $M := \mathrm{PG}(2,2) \oplus_T \mathrm{PG}(2,2)'$ dargestellt, wobei die „Verbindungsstelle“ eine gemeinsame Hyperebene beider beteiligter projektiver Matroide ist. Gemäß Proposition III.2.28 ist M ein

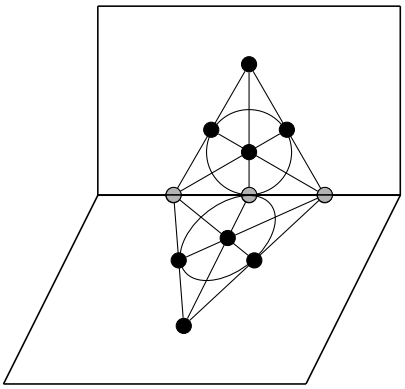


Abb. III.6.: *Verallgemeinerte parallele Summe* $PG(2,2) \oplus_T PG(2,2)'$

Matroid mit einer 11-elementigen Grundmenge.

III.2.30 Satz: Seien $X_1 := X \cap S_1$, $X_2 := X \cap S_2$ und $X_T := X \cap T$ für $X \subseteq S$, dann gelten für die verallgemeinerte parallele Summe $M(S) := M_1(S_1) \oplus_T M_2(S_2)$:

(i) Der Abschluss von $X \subseteq S$ ist bestimmt durch

$$X \mapsto \overline{X} \;=\; \overline{(\overline{X_1}^{1} \cap T) \cup X_2}^{2} \;\cup\; \overline{\overline{[(\overline{X_1}^{1} \cap T) \cup X_2}^{2} \cap T] \cup X_1}^{1};$$

(ii) Der Rang von $X \subseteq S$ ist bestimmt durch

$$r(X) = r(X_1 \cup X_2) \;=\; r_2([\overline{X_1}^{1} \cap T] \cup X_2) + r_1(X_1 \cup T) - r_1(T).$$

(iii) X ist unabhängig in M genau dann, wenn X_1 unabhängig in M_1 und $X_2 \setminus T$ unabhängig von $X_1 \cap T$ in M_2 ist.

Beweis. (i) Zunächst stellen wir fest, dass $\overline{X_1}^{1} \subseteq \overline{X} = \overline{X_1 \cup X_2}$, da $\overline{X} \cap S_1$ gemäß Definition abgeschlossen in M_1 ist. Da $[\overline{X_1}^{1} \cap T] \subseteq T$, ist $[\overline{X_1}^{1} \cap T] \cup X_2 \subseteq \overline{X_1 \cup X_2}$ und erneut mit Hilfe der Definition von M folgt für die in M_2 abgeschlossene Menge

$$X_2' := \overline{[\overline{X_1}^{1} \cap T] \cup X_2}^{2} \;\subseteq\; \overline{X_1 \cup X_2} = \overline{X}.$$

Analog erhalten wir aus $(X_2' \cap T) \subseteq T \subseteq S_1$ und der Definition von M die Inklusion

$$X_1' := \overline{(X_2' \cap T) \cup X_1}^{1} = \overline{\overline{[(\overline{X_1}^{1} \cap T) \cup X_2}^{2} \cap T] \cup X_1}^{1} \;\subseteq\; \overline{X_1 \cup X_2} = \overline{X}.$$

Mit Satz II.3.48 und der Modularität von T folgt schließlich

$$(X_1' \cap T) = [(X_2' \cap T) \vee \overline{X_1}] \wedge T = (X_2' \cap T) \vee (\overline{X_1} \wedge T) = (X_2' \cap T),$$

d.h. die Mengen X_i' sind abgeschlossen in M_i mit $i = 1, 2$ und damit ist $\overline{X} = X_1' \cup X_2'$ abgeschlossen in M.

(ii) Es ist $T' := X_2' \cap T$ ein Unterraum von T und somit ein Unterraum von M. Weiter gilt $\overline{X_1} \wedge T \subseteq T'$, da $(\overline{X_1}^{1} \cap T) \subseteq T'$ und T' ein Unterraum von M ist. Mit Hilfe von Proposition III.1.16 (i) und dem ersten Teil dieses Satzes folgt

$$\begin{aligned} r(X_1 \cup X_2) = r(\overline{X_1 \cup X_2}) &= r\left(\overline{(\overline{X_1}^{1} \cap T) \cup X_2}^{2} \;\cup\; \overline{\overline{[(\overline{X_1}^{1} \cap T) \cup X_2}^{2} \cap T] \cup X_1}^{1}\right) \\ &= r_2\left(\overline{(\overline{X_1}^{1} \cap T) \cup X_2}^{2}\right) + r_1\left(\overline{T' \cup X_1}^{1}\right) - r_1(T') \end{aligned}$$

und aufgrund der Modularität von T in M_1 sowie des bereits Gesagten gilt

$$\begin{aligned} r_1(T' \cup X_1) - r_1(T') &= r_1(T' \vee \overline{X_1}) - r_1(T') \\ &= [r_1((T' \vee \overline{X_1}) \wedge T) + r_1((T' \vee \overline{X_1}^{1}) \vee T) - r_1(T)] - r_1(T') \\ &= r_1(T' \vee (\overline{X_1} \wedge T)) + r_1(\overline{X_1}^{1} \vee T) - r_1(T) - r_1(T') \\ &= r_1(T') - r_1(T') + r_1(\overline{X_1}^{1} \vee T) - r_1(T) \\ &= r_1(\overline{X_1}^{1} \vee T) - r_1(T). \end{aligned}$$

(iii) Folgt aus (ii) zusammen mit Proposition III.1.16 (ii) ([Bry75], Proposition 5.5).

□

III.2.31 Satz: Die verallgemeinerte parallele Summe $M(S) := M_1(S_1) \oplus_T M_2(S_2)$ mit $T := S_1 \cap S_2$ besitzt die folgenden Eigenschaften:

(i) $(M_1 \oplus_T M_2)|S_i = M_i$ für $i = 1, 2$;

(ii) Wenn $p \in (S_1 \setminus T)$, dann $(M_1 \oplus_T M_2)\backslash p = (M_1\backslash p) \oplus_T M_2$;

(iii) Wenn $p \in (S_1 \setminus T)$, dann $(M_1 \oplus_T M_2)/p = (M_1/p) \oplus_T M_2$;

(iv) $M_1 \oplus_T M_2 = M_2 \oplus_T M_1$.

Beweis. (i) Wegen Folgerung III.2.3 (iv) und Satz III.2.30 (ii) ist

$$\begin{aligned} r(X_1) &= r_2(\overline{X_1}^1 \cap T) + r_1(X_1 \cup T) - r_1(T) \\ &= r_1(\overline{X_1}^1 \cap T) + r_1(X_1 \cup T) - r_1(T) = r_1(X_1) \end{aligned}$$

für alle $X_1 \subseteq S_1$, wobei die letzte Identität aus der Modularität von T folgt. Analog erhalten wir $r(X_2) = r_2(X_2)$ und somit die Behauptung.

(ii) Zunächst halten wir fest, dass $M_1\backslash p$ gemäß Proposition 3.8 aus [Bry75] einen zu T isomorphen und modularen Unterraum besitzt. Nach Satz III.2.12 (ii) und der Definition der parallelen Summe ist eine Menge $F \subseteq (S \setminus p)$ genau dann ein Unterraum von $(M_1 \oplus_T M_2)\backslash p$, wenn es einen Unterraum F' von $(M_1 \oplus_T M_2)$ gibt mit $F = F' \setminus p$. Das ist genau dann der Fall, wenn $(F' \cap S_i)$ abgeschlossen in M_i für $i = 1, 2$ ist. Da $p \in (S_1 \setminus T)$, entsprechen die abgeschlossenen Mengen von $(M_1 \oplus_T M_2)\backslash p$ genau den abgeschlossenen Mengen von $(M_1\backslash p) \oplus_T M_2$.

(iii) Analog zu (ii), wobei die Modularität von T in (M_1/p) mit Hilfe von Korollar 3.9, [Bry75] folgt.

(iv) Evident, da T auch in M_2 ein Unterraum ist.

□

III.2.32 Proposition: Seien $M_1(S_1)$ und $M_2(S_2)$ Matroide, so dass $T := S_1 \cap S_2$ ein modularer Unterraum in M_1 und abgeschlossen in M_2 ist. Desweiteren seien B_T eine Basis der Restriktion von M_1 auf T und $B_1 \subseteq S_1$ derart, dass $B_1 + B_T$ eine Basis von M_1 bildet. Dann ist

$$\mathcal{L}[M_2] \quad \cong \quad \mathcal{L}[(M_1 \oplus_T M_2)/B_1].$$

Beweis. Durch iterative Kontraktion der Elemente aus B_1 und Anwendung von Satz III.2.31 (iii) folgt $\mathcal{L}[(M_1 \oplus_T M_2)/B_1] = \mathcal{L}[(M_1/B_1) \oplus_T M_2]$. Mit Folgerung III.2.5 (ii) ergibt sich damit die Behauptung. Der Isomorphismus $\mathcal{L}[M_2] \to \mathcal{L}[(M_1 \oplus_T M_2)/B_1]$ ist gegeben durch

$$X_2 \mapsto X_2 \cup \overline{[X_2 \cap T] \cup B_1}^1.$$

□

2.4. Zerlegung von Matroiden

Die Zerlegung einer mathematischen Struktur in ihre Teilstrukturen, um dadurch ggf. ein Problem in einfachere Teilprobleme zu zerlegen, ist ein übliches Verfahren, welches wir in diesem Abschnitt auf Matroide anwenden.

III.2.33 Definition: Sei $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ ein Verband mit Null- und Einselement, dann heißen zwei Atome $a, b \in L$ *perspektiv*, in Zeichen $a \leftrightsquigarrow b$, wenn es ein Element $x \in L$ gibt, so dass $a \vee x = b \vee x = \mathfrak{1}$ und $a \wedge x = b \wedge x = \mathfrak{0}$.

Zwei Atome eines geometrischen Verbandes sind genau dann perspektiv, wenn sie ein gemeinsames Komplement besitzen. Sind zwei Atome a und b perspektiv mit gemeinsamem Komplement x, dann sind $a, b \not\leq x$, da $a \wedge x = b \wedge x = \mathfrak{0}$.

III.2.34 Proposition: Seien $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ ein geometrischer Verband mit dazu korrespondierendem Matroid $M(S)$ und $a, b \in S \subseteq L$ zwei Atome, dann sind äquivalent:

(i) $a \leftrightsquigarrow b$;

(ii) $\exists x \in L$ mit $a \vee x = b \vee x$ und $a \wedge x = b \wedge x = \mathfrak{0}$;

(iii) $\exists C \in \mathcal{C}(M)$ mit $\{a, b\} \subseteq C$.

Beweis. (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Sei $x \in L$, so dass $a \vee x = b \vee x$ und $a \wedge x = b \wedge x = \mathfrak{0}$. Mit Satz II.3.47 folgt, dass $\mathcal{L}$ relativ komplementiert ist. Es existiert also zu x ein Komplement $y \in L = [\mathfrak{0}, \mathfrak{1}]$, so dass $x \vee y = \mathfrak{1}$. Wir erhalten damit $a \vee x \vee y = b \vee x \vee y = \mathfrak{1}$. Die Gegenrichtung ist trivial.

(i) $\Rightarrow$ (iii): Seien $a, b \in S$ perspektive Atome und $x \in L$ mit $a \vee x = b \vee x$ bzw. $a \wedge x = b \wedge x = \mathfrak{0}$, so dass $m := r(x)$ minimalen Rang besitzt. Sei $B := \{x_1, \ldots, x_m\}$ eine Basis von $x \in L$, dann ist $C := \{a, b, x_1, \ldots, x_m\}$ abhängig, da $a, b \not\leq x$. Wir werden nachweisen, dass jede echte Teilmenge von C unabhängig und damit C ein Kreis ist. Dazu sei $x^i := x_1 \vee \ldots \vee x_{i-1} \vee x_{i+1} \vee \ldots \vee x_m$ für ein $i \in \mathbb{N}_m$ mit $r(x^i) = m - 1$. Aus $b \leq a \vee x^i$ folgt $a \vee x^i = b \vee x^i$ mit $r(a \vee x^i) = 1 + (m - 1) = r(b \vee x^i)$, was im Widerspruch zur minimalen Wahl von x steht. Es ist also $b \not\leq a \vee x^i$ und damit $a \vee b \vee x^i = a \vee x = b \vee x$ mit $r(a \vee x) = r(b \vee x) = m + 1$. Gemäß Proposition III.1.16 (ii) ist folglich jede echte Teilmenge von C unabhängig.

(i) $\Leftarrow$ (iii): Sei umgekehrt $C := \{a, b, x_1, \ldots, x_m\}$ ein Kreis von M. Setzen wir $x := x_1 \vee \ldots \vee x_m$, dann ist $(a \vee x) = (a \vee b \vee x) = (b \vee x)$, da $r(a \vee x) = r(a \vee b \vee x) = r(b \vee x)$. Weiter folgt aus $r(a \wedge x) \leq r(a) + r(x) - r(a \vee x) = 1 + m - (m+1) = 0$ und analog $r(b \wedge x) \leq 0$, dass $a \wedge x = b \wedge x = \mathfrak{0}$. □

III.2.35 Proposition: In geometrischen Verbänden $\mathcal{L}[M(S)]$ ist die Perspektivität von Atomen eine Äquivalenzrelation.

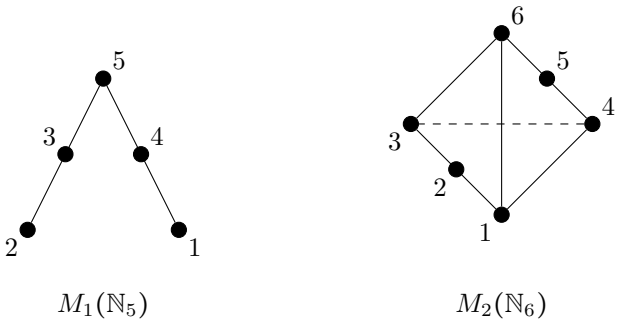
Beweis. Die Reflexivität ergibt sich aus Satz II.3.47 und die Symmetrie ist trivial, so dass wir nur noch die Transitivität nachweisen müssen. Dazu seien $a, b, c \in S$ Atome mit $a \leftrightsquigarrow b$

sowie $b \nleftrightarrow c$ und wir nehmen an, dass die Relation „$\nleftrightarrow$“ nicht transitiv ist. Seien die Kreise C_1, C_2 derart gewählt, so dass $|C_1 \cup C_2|$ minimal ist und $a, b \in C_1$ sowie $b, c \in C_2$ gelten. Wegen Proposition III.2.34 ist die Existenz zweier derartiger Kreise $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ garantiert. Zudem kann es keinen Kreis aus $\mathcal{C}$ geben, der beide Elemente a, c enthält. Gemäß (C3)' existiert sodann ein Kreis $C_1' \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus b$ mit $a \in C_1'$. Da $C_1 \setminus C_2$ unabhängig ist, kann $C_1' \subseteq C_1 \setminus C_2$ nicht sein, weshalb $C_1' \cap C_2 \neq \varnothing$ folgt. Aufgrund der Wahl von C_1 und C_2 sowie der Konstruktion von C_1' ist $|C_1' \cup C_2| = |C_1 \cup C_2|$, was $C_1 \setminus C_2 \subseteq C_1'$ impliziert. Analog erhalten wir einen Kreis $C_2' \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus b$ mit $c \in C_2'$. Entsprechend muss auch $C_1 \setminus C_2$ in C_2' enthalten sein. Dann gilt jedoch $|C_1' \cup C_2'| < |C_1 \cup C_2|$, was im Widerspruch zur minimalen Wahl von C_1 und C_2 steht. □

III.2.36 Definition: Sei $M(S)$ ein Matroid mit dazu korrespondierendem geometrischen Verband $\mathcal{L}[M]$.

1. Die Äquivalenzklassen der Perspektivität heißen *Komponenten* von M.
2. Wir nennen das Matroid M *verbunden*, wenn die Grundmenge S eine Komponente von M ist. Ansonsten heißt M *unverbunden*.
3. Eine Vereinigung von Komponenten von M nennen wir *Separator* von M.

III.2.37 Beispiel: Betrachten wir zunächst das Matroid $M_1(\mathbb{N}_5)$, dargestellt in Abbildung III.7, welches $\{1,2,3,4\}, \{1,4,5\}$ und $\{2,3,5\}$ als Kreise besitzt. Offensichtlich existiert für alle $a, b \in \mathbb{N}_5$ ein Kreis C von M_1 mit $\{a, b\} \subsetneq C$.



$M_1(\mathbb{N}_5)$ $\qquad$ $M_2(\mathbb{N}_6)$

Abb. III.7.: *Verbundenes und nicht verbundenes Matroid*

Aufgrund von Proposition III.2.34 ist das Matroid M_1 verbunden, was bedeutet, dass je ein Paar von Elementen aus $\mathbb{N}_5$ perspektiv in M_1 sind. Das zweite Matroid $M_2(\mathbb{N}_6)$ aus Abbildung III.7 ist hingegen unverbunden, es besitzt die beiden Geraden $\{1,2,3\} \cong U_2^3$ und $\{4,5,6\} \cong U_2^3$ als Komponenten. Wir halten fest, dass $M_2 \cong U_2^3 \oplus U_2^3$.

III.2.38 Proposition: Sei $M(S)$ ein Matroid, dann sind die folgenden Aussagen für $T \subseteq S$ äquivalent:

(i) T ist Separator von M;

(ii) $r(T) + r(S \setminus T) = r(M)$;

(iii) $r(T) + r^*(T) - |T| = 0$;

(iv) $M/T = M\backslash T$;

Beweis. „(i) $\Rightarrow$ (ii)“: Sei T ein Separator, d.h. eine disjunkte Vereinigung von Komponenten von M. Seien B_T und $B_{S\setminus T}$ Basen von $M|T$ bzw. $M|S \setminus T$ und $B := B_T \cup B_{S\setminus T}$. Angenommen B ist abhängig, dann existiert ein Kreis $C \subseteq B$. Gemäß Proposition III.2.34 darf C nicht ein Element aus B_T und $B_{S\setminus T}$ besitzen, weshalb $C \subseteq B_T$ oder $C \subseteq B_{S\setminus T}$ gilt. Das kann aber nicht sein, d.h. B ist unabhängig. Da B_T bzw. $B_{S\setminus T}$ maximal unabhängige Mengen von T bzw. $S \setminus T$ sind, ist B eine maximal unabhängige Menge von M. Aufgrund der Definition des Ranges folgt die Behauptung.

„(ii) $\Leftarrow$ (i)“: Es gelte umgekehrt $r(T) + r(S \setminus T) = r(M)$. Angenommen, T sei kein Separator, dann gibt es zwei Elemente $t \in T$ und $s \in (S \setminus T)$ sowie einen Kreis C von M mit $\{t, s\} \subsetneq C$. Wir ergänzen die Elemente s und t zu Basen B_T und $B_{S\setminus T}$ von $M|T$ bzw. $M|(S\setminus T)$. Die Vereinigung $B := B_T \cup B_{S\setminus T}$ bildet aufgrund der Voraussetzung eine Basis von M. Offensichtlich muss $B \subsetneq C$ gelten, d.h. C enthält entweder ein weiteres Element aus T oder $S \setminus T$. Das ist allerdings nicht möglich, da sodann C einen Fundamentalkreis von $M|T$ oder $M|(S \setminus T)$ umfasst und dieser gemäß (iii) aus Folgerung III.2.3 ein Kreis von M ist.

„(ii) $\Leftrightarrow$ (iii)“: Es ist $r^*(T) = |T| - r(M) + r(S \setminus T) \Leftrightarrow r(T) + r^*(T) - |T| = r(T) + r(S \setminus T) - r(M)$, d.h. $r(T) + r^*(T) - |T| = 0$ genau dann, wenn $r(T) + r(S \setminus T) - r(M) = 0$. Das ist gemäß der Äquivalenz (i) $\Leftrightarrow$ (ii) genau dann der Fall, wenn T ein Separator ist.

„(ii) $\Leftrightarrow$ (iv)“: Ergibt sich aus Proposition III.2.10. □

Ist T ein Separator von $M(S)$, dann ist offensichtlich auch $S \setminus T$ ein Separator von M. Dies können wir aus (ii) der letzten Proposition ablesen oder unmittelbar aus der Definition ableiten.

III.2.39 Definition: Sei $\mathcal{L}(L)$ ein Verband mit Null- und Einselement, dann heißt $\mathcal{L}$ *zerlegbar*, wenn es nicht-triviale Intervalle $\mathcal{L}_1(L_1) := [o, z_1]$ und $\mathcal{L}_2(L_2) := [o, z_2]$ von $\mathcal{L}$ gibt, so dass für jedes $x \in L$ ein eindeutiges Paar $(x_1, x_2) \in L_1 \times L_2$ mit $x = x_1 \vee x_2$ existiert.

Ist ein Verband $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$ zerlegbar, dann ist das Produkt $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$ isomorph zu $\mathcal{L}$. Der nächste Satz wird zeigen, dass ein geometrischer Verband genau dann unzerlegbar ist, wenn er nur die trivialen Separatoren besitzt.

III.2.40 Satz: Sei $\mathcal{L}(L)$ ein geometrischer Verband, dann gilt die Äquivalenz:

$$\mathcal{L} \text{ ist unzerlegbar} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \text{ Atome } a, b \in L \text{ ist } a \nleftrightarrow b.$$

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei $\mathcal{L}(L)$ ein unzerlegbarer geometrischer Verband und angenommen nicht jedes Paar von Atomen ist perspektiv. Wählen wir ein Atom $b \in L$ und setzen $[b] := \{a |\ a \nleftrightarrow b\}$ sowie $z_1 := \bigvee_{a\in[b]} a$, dann stimmt die Atommenge $[b]$ mit der Menge der Atome aus $[o, z_1]$ überein. Seien nun $A := \{a \in L |\ o \lessdot a,\ a \not\leq z_1\} \neq \varnothing$ die Menge aller

Atome, die nicht perspektiv zu b sind und damit auch nicht in $[\mathfrak{o}, z_1]$ enthalten sind, sowie $z_2 := \bigvee_{a \in A} a$. Wir werden zeigen, dass dann $\mathcal{L}_1(L_1) := [\mathfrak{o}, z_1]$ und $\mathcal{L}_2(L_2) := [\mathfrak{o}, z_2]$ eine Zerlegung von $\mathcal{L}$ ist. Dazu seien $x \in L$, $x_1 := x \wedge z_1$ und $x_2 := x \wedge z_2$. Die Mengen der Atome von $[\mathfrak{o}, x_1]$ und $[\mathfrak{o}, x_2]$ sind komplementär im Sinne der Mengentheorie, da die Mengen der Atome aus L_1 und L_2 gemäß Konstruktion disjunkt sind. Demnach ist $x = x_1 \vee x_2$. Bezeichnen B_1 und B_2 Basen von $[\mathfrak{o}, x_1]$ und $[\mathfrak{o}, x_2]$, dann ist auch die Vereinigung $B := B_1 \cup B_2$ unabhängig. Anderenfalls würde es einen Kreis geben, der je ein Atom aus L_1 und L_2 enthalten würde, was nicht sein kann. Es ist also B eine Basis von $[0, x]$ und deshalb $r(x) = r(x_1) + r(x_2)$. Angenommen, es gibt Elemente $x_1' \leq z_1$ und $x_2' \leq z_2$ mit $x = x_1' \vee x_2'$, dann müssen die Ungleichungen $x_1' \leq x_1$ und $x_2' \leq x_2$ erfüllt sein. D.h. $r(x_1') + r(x_2') \geq r(x) = r(x_1) + r(x_2)$ und somit $r(x_1') = r(x_1)$ bzw. $r(x_2) = r(x_2')$ also $x_1 = x_1'$ und $x_2 = x_2'$. Dies widerspricht der Annahme, dass es keine Zerlegung geben würde.

„$\Leftarrow$“: Wir nehmen an, dass $\mathcal{L}(L)$ zerlegbar ist und sämtliche Atome perspektiv zueinander sind. Seien nun $a \in L_1$ und $b \in L_2$ zwei Atome. Aufgrund der Voraussetzung sind a und b perspektiv, es gibt demnach ein $x \in L$ mit $a \vee x = b \vee x$ und $a \wedge x = b \wedge x = \mathfrak{o}$. Aufgrund der Annahme folgt die Existenz von $x_i \in L_i$ mit $i = 1, 2$, so dass $x = x_1 \vee x_2$. Dies impliziert $(a \vee x_1) \vee x_2 = x_1 \vee (x_2 \vee b)$ und somit $a \vee x_1 = x_1 \Rightarrow a \leq x_1 \leq x$ – ein Widerspruch zu $a \nleftrightarrow b$. □

III.2.41 Folgerung: Ein geometrischer Verband $\mathcal{L}(L)$ ist isomorph zu einem direkten Produkt von endlich vielen unzerlegbaren geometrischen Verbänden. Die Faktoren in diesem Produkt sind bis auf deren Anordnung eindeutig bestimmt.

In Satz III.1.30 haben wir festgestellt, dass der Unterraumverband eines projektiven Matroids stets einen modularen Unterraumverband besitzt.

III.2.42 Satz: Ein modularer geometrischer Verband $\mathcal{L}[M]$ ist genau dann unzerlegbar, wenn $\mathcal{L}$ isomorph zum Verband eines projektiven Matroids ist.

Beweis. [Fai86], Korollar 3.6.5. □

IV. Morphismen zwischen Matroiden

In diesem Kapitel untersuchen wir verschiedene Arten strukturerhaltender Abbildungen zwischen endlichen Matroiden, wobei unser Hauptaugenmerk auf die so genannten „Strong Maps“ und den Spezialfall der „Strong Port Maps“ gerichtet ist. Nachdem wir grundlegende Eigenschaften dieser Abbildungsarten studiert haben, werden wir uns vor allem die Frage nach der Existenz von Strong (Port) Maps stellen. Wir stützen uns dabei auf [Kun86], [Cra70] und [Cra67].

1. Weak und Strong Maps

1.1. Grundlegendes

Wir beginnen mit den ersten beiden zentralen Definitionen für geometrische Verbände. Gemäß Konvention betrachten wir in diesem Kapitel ausschließlich Matroide bzw. geometrische Verbände mit *endlicher* Grundmenge.

IV.1.1 Definition: Seien L und L' geometrische Verbände und $\sigma : L \to L'$ eine Abbildung.

1. Die Abbildung σ heißt *Weak Map*, wenn für alle $x \in L$ die Bedingungen

   (W1) $\sigma(x) = \sup\{\sigma(a) |\ o \lessdot a \leq x\}$,

   (W2) $r(\sigma(x)) \ \leq \ r(x)$

   gelten.

2. Erfüllt σ dagegen die stärkeren Bedingungen

   (S1) $\sigma(x \vee y) = \sigma(x) \vee \sigma(y)$

   (S2) $x \leq y \ \Rightarrow \ \sigma(x) \leqq \sigma(y)$

   für alle $x, y \in L$, so nennen wir σ eine *Strong Map*.

Eine Strong Map σ ist also ein $\vee$-Homomorphismus, der die Bedeckungseigenschaft respektiert.

IV.1.2 Proposition: Jede Strong Map σ ist auch eine Weak Map.

Beweis. Sei $C = o \lessdot \ldots \lessdot x$ eine maximale Kette in L der Länge $n \in \mathbb{N}$. Bedingung (S2) impliziert, dass das Bild von C unter σ eine Kette der Länge kleiner oder gleich n ist. Mit Proposition III.1.26 folgt (W2). Sei $x \in L$, dann kann $x = a_1 \vee \ldots a_n$ als Verbindung von endlich vielen Atomen ausgedrückt werden, weshalb aus (S1) und dem eben Gesagtem Bedingung (W1) und damit die Behauptung folgt. □

IV.1.3 Proposition: Sei $\sigma : L \to L'$ eine Abbildung zwischen geometrischen Verbänden, dann gelten:

(i) Ist σ ein $\vee$-Homomorphismus, dann gilt:

$$[\forall x, y \in L : \; x \leq y \Rightarrow \sigma(x) \leq \sigma(y)] \quad \Leftrightarrow \quad [\forall \text{ Atom } a \in L : \; \mathfrak{o} \leq \sigma(a)]$$

(ii) Ist σ eine Strong Map, dann ist auch Bild(σ) zusammen mit den eingeschränkten Verbandsoperationen von L' ein geometrischer Verband.

Beweis. (i) „$\Rightarrow$“: Sei $a \in L$ mit $\mathfrak{o} \leq a$, dann folgt aufgrund der Voraussetzung $\sigma(\mathfrak{o}) \leq \sigma(a)$ und $\sigma(\sup\{\mathfrak{o}\}) = \sup\{\sigma(\mathfrak{o})\} = \sup\{\mathfrak{o}\} = \mathfrak{o}$, da σ ein $\vee$-Homomorphismus ist.

„$\Leftarrow$“: Sei o.B.d.A. $x \lessdot y$ in L, dann existiert gemäß Proposition II.3.42 ein Atom a in L mit $x \vee a = y$. Das Bild $\sigma(a)$ bedeckt dann entweder das Nullelement oder ist selbst das Nullelement in L'. Da σ ein $\vee$-Homomorphismus ist folgt schließlich $\sigma(y) = \sigma(x \vee a) = \sigma(x) \vee \sigma(a)$, d.h. $\sigma(x) \leq \sigma(y)$.

(ii) Bild(σ) ist offensichtlich die Grundmenge eines Verbandes endlicher Länge. Seien $y \in \text{Bild}(\sigma) \subseteq L'$ und $x \in L$ ein beliebiges Urbild von y. Da L ein Punktverband ist, existieren Atome $a_1, \ldots, a_n$ mit $x = a_1 \vee \ldots \vee a_n$. Da σ ein $\vee$-Homomorphismus ist, ergibt sich damit $\sigma(x) = y = \sigma(a_1) \vee \ldots \vee \sigma(a_n)$, d.h. Bild$(\sigma)$ ist Grundmenge eines Punktverbandes. Die Semimodularität weisen wir mit Hilfe von Proposition II.3.41 nach, wozu $b, y \in \text{Bild}(\sigma)$ und b ein Atom mit $b \not\leq y \Rightarrow (y \wedge b) = \mathfrak{o} \lessdot b$ seien. Ein Urbild $a \in L$ von b kann nur ein Punkt sein, da σ eine Strong Map ist. Mit x bezeichnen wir das Urbild von y, dann ist $x \lessdot (a \vee x)$ und aus

$$x \lessdot (a \vee x) \quad \Rightarrow \quad [y = \sigma(x) \; \lessdot \; \sigma(a \vee x) = \sigma(a) \vee \sigma(x) = b \vee y]$$

folgt schließlich $y \lessdot b \vee y$ und damit die Semimodularität.

□

Der erste Teil der Proposition impliziert

IV.1.4 Folgerung: Jeder $\vee$-Homomorphismus zwischen geometrischen Verbänden, der Atome auf Atome oder das Nullelement abbildet, ist eine Strong Map.

Die Bedingung (W2) impliziert, dass für Atome a des Definitionsbereichs einer Weak Map $\sigma : L \to L'$ stets die Ungleichung

$$r(\sigma(a)) \; \leq \; r(a) = 1 \tag{IV.1}$$

erfüllt ist, was impliziert, dass ein Atom aus L unter σ entweder auf ein Atom oder das Nullelement $\mathfrak{o}$ von L' abgebildet wird. Aufgrund der Ungleichung (IV.1) und der letzten Folgerung ist insbesondere jede Weak Map, die zugleich ein $\vee$-Homomorphismus ist, eine Strong Map.

Unmittelbar aus dem Axiom (W1) ergibt sich die folgende

Bemerkung: Jede Weak-Map $\sigma : L \to K$ und somit auch jede Strong Map ist bereits eindeutig durch die Einschränkung $\sigma_{|S} : S \to K$ bestimmt, wobei S die Menge der Atome von L ist.

Aufgrund der Ungleichung (IV.1) trifft die Einschränkung $\sigma_{|S}$ im Bildbereich nur Atome oder das Nullelement.

IV.1.5 Definition: Seien $M(S)$ ein Matroid und $0 \notin S$ ein Element, das nicht in der Grundmenge enthalten ist. Die direkte Summe

$$M_0 \coloneqq M \oplus U_0^1$$

mit Grundmenge $S_0 \coloneqq S + 0$ ist isomorph zu M und entsteht durch Hinzufügen von 0 zu jeder abgeschlossenen Menge von M. Das Element 0 bezeichnen wir als *Nullelement* des Matroids M.

Sind $M(S)$ und $N(T)$ Matroide, so können wir eine Abbildung $\tau : S_0 \to T_0$ vermöge (W2) zu einer wohldefinierten Abbildung $\sigma : \mathcal{L}[M] \to \mathcal{L}[N]$ zwischen geometrischen Verbänden fortsetzen, welche *Erweiterung von* τ heißt.

IV.1.6 Beispiel: Betrachten wir die uniformen Matroide $U_2^3(S)$ und $U_3^3(T)$, deren Unterraumverbände in Abbildung IV.1 skizziert sind.

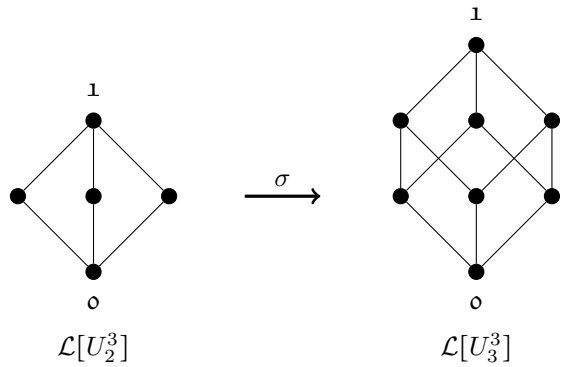


Abb. IV.1.: *Erweiterung σ ist keine Weak Map*

Ordnen wir durch $\tau : S_0 \to T_0$ den Atomen des Definitionsbereichs jeweils verschiedene Atome des Wertebereichs zu und $0 \mapsto 0$, so ist $\sigma(\mathbb{1}) = \{\sigma(a) |\ a \in S\} = \mathbb{1}$ gemäß (W1). Die Erweiterung σ von τ kann demnach keine Weak Map sein, da $r(\mathbb{1}) < r(\sigma(\mathbb{1}))$.

IV.1.7 Proposition: Das Kompositum zweier Strong Maps zwischen geometrischen Verbänden ist wieder eine Strong Map.

Beweis. Seien $\sigma_1 : L_1 \to L_2$ und $\sigma_2 : L_2 \to L_3$ zwei Strong Maps, dann ist $(\sigma_2 \circ \sigma_1)(x \vee y) = \sigma_2(\sigma_1(x \vee y)) = \sigma_2(\sigma_1(x) \vee \sigma_1(y)) = \sigma_2(\sigma_1(x)) \vee \sigma_2(\sigma_1(y))$ für alle $x, y \in L_1$. Wenn $x \leq y$ in L_1 gilt, dann folgt $\sigma_1(x) \leq \sigma_1(y)$ in L_2 und damit auch $\sigma_2(\sigma_1(x)) \leq \sigma_2(\sigma_1(y))$ in L_3. □

Im folgenden Satz wird charakterisiert, unter welchen Umständen eine Abbildung zwischen zwei Matroiden zu einer Weak bzw. Strong Map fortgesetzt werden kann.

IV.1.8 Satz: Seien $M(S)$, $N(T)$ zwei Matroide mit korrespondierenden Verbänden $\mathcal{L}[M]$, $\mathcal{L}[N]$. Weiter sei $\sigma : \mathcal{L}[M] \to \mathcal{L}[N]$ die Erweiterung der Abbildung $\tau : S_0 \to T_0$ mit $\tau(0) = 0$, dann gelten:

(i) σ ist eine Weak Map $\Leftrightarrow$

(W3) Wenn $I \subseteq S$, so dass die Beschränkung von τ auf I bijektiv ist und $\tau(I)$ unabhängig in N, dann ist I unabhängig in M.

(ii) σ ist eine Strong Map $\Leftrightarrow$ $\forall$ Unterraum B von N: $\overset{-1}{\sigma}(B) \in \mathcal{L}[M]$.

Beweis. (i) „$\Rightarrow$“: Seien σ als Erweiterung von τ eine Weak Map und $I \subseteq S$, so dass $\tau_{|I}$ bijektiv ist und das Bild $\tau(I)$ unabhängig und somit nach (I4) endlich. Aufgrund der Voraussetzungen, den Definitionen sowie Proposition III.1.16 folgt

$$\begin{aligned} |I| &= |\tau(I)| \leq |\tau(\overline{I})| = r(\tau(\overline{I})) \\ &= r(\sup \tau(\overline{I})) \leq r(\sup \overline{I}) = r(\sup I) = r(I). \end{aligned}$$

Zusammen mit $r(I) \leq |I|$ ergibt sich die Identität $r(I) = |I|$ und somit die gewünschte Unabhängigkeit von I.

„$\Leftarrow$“: Angenommen, die Erweiterung σ von τ ist keine Weak Map. Da die Abbildung σ vermöge des Axioms (W1) gebildet wurde, gibt es eine abgeschlossene Menge $A = \overline{A}$ in $M(S)$, die gegen das Axiom (W2) verstößt und damit die Ungleichung $r(\overline{A}) < r(\overline{\sigma(A)})$ erfüllt. Sei B eine Basis von $\overline{\sigma(A)}$ in $N(T)$ und damit unabhängig, dann folgt für jedes zu B bijektive Urbild $\overset{-1}{\sigma}(B)$ die Ungleichung

$$r(\overset{-1}{\sigma}(B)) \leq r(\overline{A}) < r(\overline{\sigma(A)}) = |B| = |\overset{-1}{\sigma}(B)|.$$

Gemäß Voraussetzung müsste $\overset{-1}{\sigma}(B)$ unabhängig sein, was aufgrund der letzten Ungleichung und Proposition III.1.16 nicht möglich ist.

(ii) „$\Rightarrow$“: Seien $\sigma : \mathcal{L}[M] \to \mathcal{L}[N]$ als Erweiterung von τ eine Strong Map, $y \in \mathcal{L}[N]$ und $\mathcal{X} := \{x \in \mathcal{L}[M] |\ \sigma(x) \leq y\}$. Das Mengensystem $\mathcal{X}$ besitzt ein größtes Element $x^* := (\bigvee_{x \in \mathcal{X}} x) \in \mathcal{X}$, da $\sigma(\bigvee_{x \in \mathcal{X}} x) = \bigvee_{x \in \mathcal{X}} \sigma(x) \leq y$. Ein Atom a besitzt also genau dann die Eigenschaft $\sigma(a) \leq y$, wenn $a \leq x^*$ erfüllt ist. Deshalb ist $\overset{-1}{\sigma}(y) = \{a |\ a \leq x^*\}$ eine abgeschlossene Teilmenge der Menge S der Atome von $\mathcal{L}[M]$.

„$\Leftarrow$“: Seien umgekehrt σ eine Erweiterung der Abbildung τ und $B \in \mathcal{L}[N]$, so dass das Urbild $\overset{-1}{\sigma}(B)$ abgeschlossen in M und somit Element von $\mathcal{L}[M]$ ist. Zunächst stellen wir fest, dass die Abbildung σ ein Ordnungshomomorphismus ist, da σ Punkte auf Punkte oder das Nullelement abbildet und die beteiligten

Verbände atomar sind. Sind $A, B \subseteq S_0$ Unterräume, dann folgt $\sigma(A) \subseteq \sigma(A \vee B)$ aus $A \subseteq A \vee B$ und analog $\sigma(B) \subseteq \sigma(A \vee B)$. Zusammen ergibt sich damit $\sigma(A) \vee \sigma(B) \subseteq \sigma(A \vee B)$. Die Menge $[\sigma(A) \vee \sigma(B)]$ ist abgeschlossen in $\mathcal{L}[N]$ und somit aufgrund der Voraussetzung auch $\bar{\sigma}^{-1}(\sigma(A) \vee \sigma(B))$ in $\mathcal{L}[M]$. Die Mengen A und B sind in $\bar{\sigma}^{-1}(\sigma(A) \vee \sigma(B))$ enthalten, da $\sigma(A), \sigma(B) \subseteq [\sigma(A) \vee \sigma(B)]$. Dem folgend ergibt sich die Gültigkeit der Implikation

$$(A \vee B) \subseteq \bar{\sigma}^{-1}[\sigma(A) \vee \sigma(B)] \Rightarrow \sigma(A \vee B) \subseteq \sigma(\bar{\sigma}^{-1}[\sigma(A) \vee \sigma(B)]) \subseteq \sigma(A) \vee \sigma(B),$$

d.h. σ ist ein $\vee$-Homomorphismus und aufgrund Folgerung IV.1.4 ist σ eine Strong Map.

□

Bei der Hintereinanderausführung von Weak Maps müssen wir die Komposition zunächst auf die Atome des Definitionsbereichs beschränken und erst im Wertebereich die Abbildung erweitern.

IV.1.9 Proposition: Das Kompositum zweier Weak Maps zwischen zwei Matroiden ist eine Weak Map.

Beweis. Seien $M_1(R), M_2(S), M_3(T)$ Matroide und $\sigma_1 : R_0 \to S_0$ bzw. $\sigma_2 : S_0 \to T_0$ Weak Maps. Weiter seien $A \subseteq R$ und $\sigma_2(\sigma_1(A))$ unabhängig in M_3 und die Einschränkung $(\sigma_2 \circ \sigma_1)_{|A}$ bijektiv, dann sind auch die Abbildungen σ_1 auf A und σ_2 auf $\sigma_1(A)$ bijektiv. Aufgrund der Voraussetzungen ist $\sigma_1(A)$ unabhängig in M_2 und damit auch A unabhängig in M_1. Das Kompositum erfüllt also die Bedingung (W3) und kann somit zu einer Weak Map von $\mathcal{L}[M_1]$ nach $\mathcal{L}[M_3]$ fortgesetzt werden. □

Beim Studium von Strong Maps können wir uns gemäß letztem Satz auf Abbildungen zwischen Matroiden zurückziehen. Dabei werden wir das Nullelement nur dann berücksichtigen, wenn es notwendig ist.

IV.1.10 Definition: Seien $M(S), N(T)$ Matroide und $\sigma : S_0 \to T_0$ eine Abbildung, dann heißt σ *Weak Map* bzw. *Strong Map* zwischen M und N, wenn sie der Charakterisierung (i) bzw. (ii) des Satzes IV.1.8 genügt. Die Existenz einer Strong Map von M nach N symbolisieren wir durch $M \to N$ und die Nicht-Existenz entsprechend durch $M \nrightarrow N$.

Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir meist $\tau : S \to T$ anstatt $\tau : S_0 \to T_0$. Desweiteren werden wir je nach Notwendigkeit eine Strong Map durch $\sigma : S \to T$, $\sigma : M \to N$ oder $\sigma : M(S) \to N(T)$ notieren.

IV.1.11 Beispiel: Seien $U_2^3(S)$ und $U_2^4(T)$ uniforme Matroide, deren Unterraumverbände in Abbildung IV.2 skizziert sind. Wir stellen uns die Frage nach den möglichen Weak bzw. Strong Maps zwischen den geometrischen Verbänden $\mathcal{L}[U_2^3]$ und $\mathcal{L}[U_2^4]$.

Da es hinreichend ist Weak bzw. Strong Maps zwischen Matroiden zu untersuchen, müssen wir Abbildungen $\tau : S_0 \to T_0$ bestimmen, welche den Forderungen (i) bzw. (ii) des Satzes IV.1.8 genügen. Sowohl die Projektion der Punkte aus S auf ein einzelnes

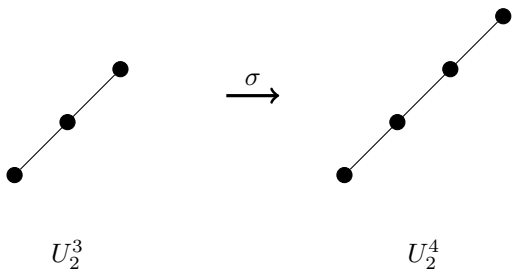


Abb. IV.2.: *Weak und Strong Maps zwischen U_2^3 und U_2^4*

Element aus T_0 sowie die Abbildung $\iota : S_0 \to T_0$ mit $x \mapsto x$ sind Weak bzw. Strong Maps. Eine Weak Map τ ist in diesem Beispiel genau dann eine Strong Map, wenn τ bijektiv ist oder sämtliche Punkte aus S auf einen Punkt aus T_0 projiziert.

IV.1.12 Definition: Seien $M(S)$, $N(T)$ Matroide, $\sigma : S \to T$ eine Abbildung und $y \in T_0$.

1. Die Abbildung σ heißt *konstante Abbildung*, falls alle $x \in S$ auf ein y abgebildet werden. Ist $y = 0$, so nennen wir σ *Nullabbildung*.

2. Das Urbild $\overset{-1}{\sigma}(y \cup \{0\})$ heißt die **Faser** von y unter σ.

Die nächste Charakterisierung wird uns im Kontext surjektiver Strong Maps von Nutzen sein.

IV.1.13 Proposition: Seien $M(S)$, $N(T)$ Matroide und $\sigma : S_0 \to T_0$ eine Abbildung, dann gilt die Äquivalenz:

$$\sigma \text{ ist eine Strong Map} \quad \Leftrightarrow \quad \forall A \subseteq S : \ \sigma(\overline{A}) \subseteq \overline{\sigma(A)}$$

Beweis. „⇒“: Seien σ eine Strong Map und $A \subseteq S$, dann ist $A \subseteq \overset{-1}{\sigma}(\overline{\sigma(A)})$ abgeschlossen in M und somit $\overline{A} \subseteq \overset{-1}{\sigma}(\overline{\sigma(A)})$, woraus die Behauptung folgt.
„⇐“: Umgekehrt sei $\sigma(\overline{A}) \subseteq \overline{\sigma(A)}$ für alle $A \subseteq S$, dann erfüllt eine abgeschlossene Menge Y in N die Gleichung

$$\sigma[\overset{-1}{\sigma}(Y)] \ \subseteq \ \overline{\sigma[\overset{-1}{\sigma}(Y)]} = \overline{Y} = Y.$$

Daraus folgt

$$\overline{\overset{-1}{\sigma}(Y)} \ \subseteq \overset{-1}{\sigma}(\sigma[\overline{\overset{-1}{\sigma}(Y)}]) \ \subseteq \overset{-1}{\sigma}(Y)$$

und zusammen mit der Extensität des Abschlussoperators ergibt sich $\overline{\overset{-1}{\sigma}(Y)} = \overset{-1}{\sigma}(Y)$. □

1.2. Faktorisierungssatz, Reduktion und Kontraktion

Während wir im Teilabschnitt 2.1 die Reduktion und die Kontraktion als Konstruktionsarten von Matroiden untersucht haben, werden wir daraus im Folgenden zwei wichtige Klassen von Strong Maps ableiten. Je nach Bedürfniss werden wir Strong Maps auf geometrischen Verbänden oder Matroiden betrachten.

IV.1.14 Definition: Seien $M(S)$ ein Matroid mit Abschlussoperator $\mathrm{cl} : 2^S \to 2^S$ und $X \subseteq S$ eine Teilmenge der Grundmenge.

1. Die Abbildung $\iota : \mathcal{L}[M \setminus X] \to \mathcal{L}[M]$, definiert durch $A \mapsto \overline{A}$, nennen wir (*kanonische*) *Injektion* von $\mathcal{L}[M\backslash X]$ in $\mathcal{L}[M]$. Eine Injektion notieren wir auch durch das Symbol $\hookrightarrow$.

2. Als *Restriktion* von $\mathcal{L}[M]$ auf $\mathcal{L}[M\backslash X]$ bezeichnen wir die Abbildung $\rho : \mathcal{L}[M] \to \mathcal{L}[M\backslash X]$, erklärt durch $A \mapsto \mathrm{cl}_{M\backslash X}(A)$.

3. Schließlich heißt die Abbildung $\kappa : \mathcal{L}[M] \to \mathcal{L}[M/X]$ erklärt durch $A \mapsto \mathrm{cl}_{M/X}(A)$ *Kontraktion* von $\mathcal{L}[M]$ auf $\mathcal{L}[M/X]$.

Eine Restriktion $\rho : \mathcal{L}[M] \to \mathcal{L}[M\backslash X]$ weist also einem $A \in \mathcal{L}[M]$ das größte Element des Verbandes $\mathcal{L}[M\backslash X]$ zu, welches die Menge A als Obermenge besitzt.

IV.1.15 Satz: Seien $M(S)$ ein Matroid und X eine Teilmenge der Grundmenge S, dann gelten:

(i) Die Injektion $\iota : \mathcal{L}[M\backslash X] \hookrightarrow \mathcal{L}[M]$ ist eine Strong Map;

(ii) Die Kontraktion $\kappa : \mathcal{L}[M] \to \mathcal{L}[M/X]$ ist eine Strong Map;

(iii) Die Restriktion $\rho : \mathcal{L}[M] \to \mathcal{L}[M\backslash X]$ ist eine Weak Map.

Beweis. (i) Seien $A, B \in \mathcal{L}[M\backslash X]$ und $X^C := S \setminus X$, dann folgt aufgrund der Definitionen

$$\begin{aligned}\iota(A) \vee \iota(B) &= \overline{A} \vee \overline{B} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A \cup B} \\ &= \overline{\overline{A \cup B} \cap X^C} = \iota(\overline{A \cup B} \cap X^C) \\ &= \iota(A \vee B).\end{aligned}$$

Es ist ι also ein $\vee$-Homomorphismus. Angenommen, $A \lessdot B$ in $\mathcal{L}[M\backslash X]$, dann existiert nach Proposition II.3.42 ein Atom $a \in X^C$, so dass $B = \mathrm{cl}_{M\backslash X}(A + a) = \overline{A + a} \cap X^C$. Dem folgend ist $\overline{B} \subseteq \overline{A + a}$ und aufgrund der Monotonie des Abschlussoperators ergibt sich aus $(A + a) \subseteq B$ schließlich $\overline{A + a} \subseteq \overline{B}$. Da a ein Atom aus S ist, bedeckt $\overline{B} = \iota(B)$ gerade $\overline{A} = \iota(A)$.

(ii) Für alle $A, B \in \mathcal{L}[M]$ gilt aufgrund der Assoziativität der Supremumsbildung

$$\begin{aligned}\kappa(A \vee B) &= \overline{(A \vee B) \cup X} \setminus X = [(A \vee B) \vee X] \setminus X \\ &= [(A \vee X) \vee (B \vee X)] \setminus X = \overline{(A \vee X) \cup (B \vee X)} \setminus X.\end{aligned}$$

Wegen (iii) aus Proposition II.3.19 und der Rechtdistributivität folgt

$$\begin{aligned}\kappa(A \vee B) &= \overline{(A \vee X) \cup (B \vee X)} \smallsetminus X = \overline{[(A \vee X) \cup (B \vee X)]} \smallsetminus X \\ &= \overline{[(A \vee X) \smallsetminus X] \cup [(B \vee X) \smallsetminus X]} = [(A \vee X) \smallsetminus X] \vee [(B \vee X) \smallsetminus X] \\ &= \kappa(A) \vee \kappa(B).\end{aligned}$$

Wegen Folgerung II.3.43 respektiert die Kontraktion die Eigenschaft (S2), d.h. die Kontraktion κ ist eine Strong Map.

(iii) Bei einer Restriktion ρ wird jedem $A \in \mathcal{L}[M]$ das größte Element des Verbandes $\mathcal{L}[M\backslash X]$ zugewiesen, welches die Menge A als Obermenge besitzt. Da durch die Einschränkung ein geometrischer Verband entsteht und eine Restriktion Punkte der Menge A fixiert, ist die Eigenschaft (W1) klar. Aus Folgerung III.2.3 und der Definition ergibt sich (W2).

□

Im Allgemeinen ist eine Restriktion keine Strong Map, wie z.B. eine surjektive Abbildung $\rho : \mathcal{L}[U_2^3] \to \mathcal{L}[U_2^2]$ zeigt. Von einfacher Struktur sind die injektiven Strong Maps, da diese den Injektionen entsprechen.

Betrachten wir die Identität $M \overset{\mathrm{id}}{\to} N$ zwischen zwei Matroiden M und N mit derselben Grundmenge, dann ist gemäß Proposition IV.1.13 und Satz III.2.22 id genau dann eine Strong Map, wenn N ein Quotient von M ist.

IV.1.16 Definition: Sei $M(S)$ ein Matroid und $Q(S)$ ein Quotient von M, dann heißt $\mathrm{id} : S_0 \to S_0$ die *Quotientenabbildung* von M auf Q.

Seien nun $\sigma : M(S) \to N(T)$ eine surjektive Strong Map und $\widehat{N}(S)$ dasjenige Matroid, welches durch die Rangfunktion $A \mapsto r_{\widehat{N}}(A) := r_N[\sigma(A)]$ induziert wird. Das Matroid N kann aus $\widehat{N}$ durch Simplifikation gewonnen werden, weshalb die assoziierten Unterraumverbände $\mathcal{L}[N]$ und $\mathcal{L}[\widehat{N}]$ isomorph sind. Wir erhalten also

IV.1.17 Proposition: Jede surjektive Strong Map $\sigma : M(S) \to N(S)$ kann dargestellt werden als

$$M(S) \overset{\mathrm{id}}{\to} \widehat{N}(S) \overset{\tau}{\to} N(T),$$

wobei id eine Quotientenabbildung und die Erweiterung von τ ein Verbandsisomorphismus ist.

Als nächstes werden wir sehen, dass Injektionen und Kontraktionen bereits ausreichen, um jede Strong Map vollständig zu beschreiben.

IV.1.18 Satz (Faktorisierungssatz): Jede Strong Map kann als Komposition einer Injektion, gefolgt von einer Kontraktion, ausgedrückt werden.

Beweis. Wir verweisen auf [Kun86], 8.2.7 The factorisation theorem. □

In Abbildung IV.3 wird die Strong Map $\sigma : M \to N$ als Hintereinanderausführung einer Injektion $\iota : M \hookrightarrow Q$ und einer Kontraktion $\kappa : Q \to N$ um z dargestellt.

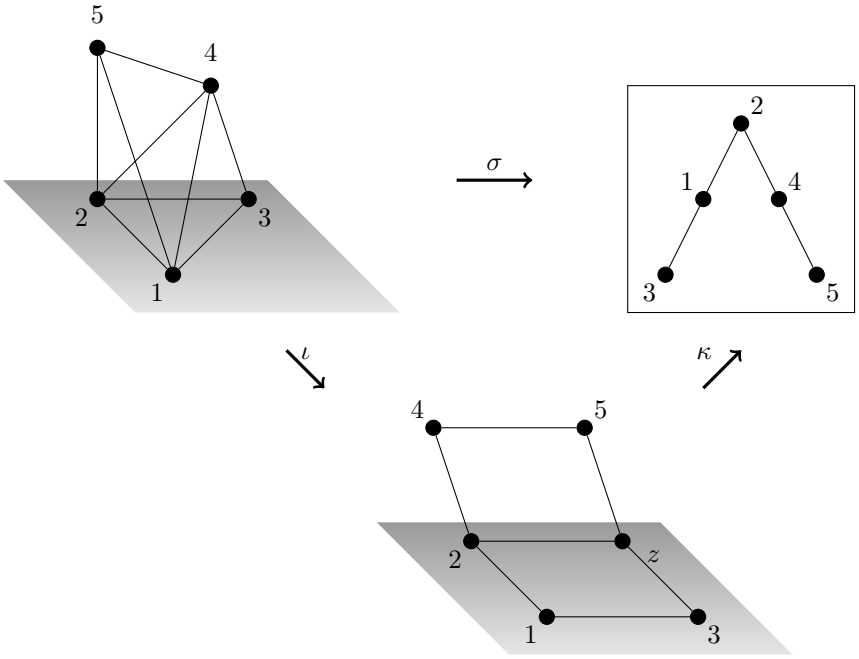


Abb. IV.3.: *Faktorisierung der Strong Map* $\sigma : M \to N$

Das Kompositum zweier Strong Maps ist eine Strong Map und zudem erfüllt die Komposition zweier Strong Maps das Assoziativgesetz. Da Identität $\mathrm{id} : M \to M$ für jedes Matroid M eine Strong Map ist, bilden die Klasse der Matroide zusammen mit den Strong Maps eine Kategorie:

IV.1.19 Proposition: Das Tripel $\mathcal{M} = (\mathrm{Ob}(\mathcal{M}), \mathrm{Mor}_{\mathcal{M}}(M,N), \circ)$, wobei $\mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ die Klasse aller *endlichen* Matroide, $\mathrm{Mor}_{\mathcal{M}}(M,N)$ die Menge aller Strong Maps $M \to N$ mit $M, N \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ und $\circ$ die übliche Komposition von Abbildungen ist, bildet die *Kategorie der Matroide*.

Der Faktorisierungssatz für Strong Maps besagt in diesem Kontext, dass die Subobjekte eines Objekts $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ den Minoren desselben Matroids entsprechen.

Weiter folgt aus Proposition IV.1.7, dass die Existenz einer Strong Map „$\to$“ als transitive Relation auf $\mathrm{Ob}(\mathcal{M}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ interpretiert werden kann. Diese Relation ist darüber hinaus reflexiv, da die Identität eine Strong Map ist. Wir betrachten demnach eine Präpartialordnung $\langle \mathrm{Ob}(\mathcal{M}); \to \rangle$.

IV.1.20 Definition: Die durch die Kategorie $\mathcal{M}$ erklärte Hom-Ordnung bzw. Hom-Äquivalenz heißt *Hom-Ordnung* bzw. *Hom-Äquivalenz der Strong Maps*.

Eine natürliche Frage ist die nach der Struktur der Hom-Äquivalenz, d.h. welche Matroide sind bezüglich dieser Hom-Ordnung vergleichbar bzw. unvergleichbar?

IV.1.21 Proposition: Jede konstante Abbildung $\sigma : M(S) \to N(T)$ ist eine Strong Map.

Beweis. Aufgrund der Voraussetzungen besteht Bild(σ) neben dem Nullelement aus maximal einem weiteren Element $y \in T_0$, weshalb das Urbild der Elemente aus $T \setminus \{y\}$ gleich der leeren Menge ist. Die Faser von $\overline{y}$ ist demnach abgeschlossen und somit σ eine Strong Map. □

Es gibt also keine zwei verschiedenen Matroide, die bezüglich der Hom-Ordnung unvergleichbar sind, d.h. die Hom-Ordnung ist in diesem Fall eine Kette. Somit besitzt die Hom-Äquivalenz nur eine einzige Äquivalenzklasse, die alle Objekte von $\mathcal{M}$ enthält.

2. Strong Port Maps und die Hom-Ordnung

In diesem Abschnitt betrachten wir Matroide $M(S)$ aus $\mathrm{Ob}(\mathcal{M})$, die ein fixiertes Element e in ihrer Grundmenge enthalten, und fassen diese zu einer Klasse $\mathrm{Ob}(\mathcal{M}_e) \subseteq \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ zusammen, deren Objekte wir *Matroid Ports* nennen.

Wir beginnen mit der Definition spezieller Strong Maps, die zusammen mit der Klasse $\mathrm{Ob}(\mathcal{M}_e)$ und der üblichen Komposition eine Unterkategorie $\mathcal{M}_e := (\mathrm{Ob}(\mathcal{M}_e), \mathrm{Mor}(\mathcal{M}_e), \circ)$ von $\mathcal{M}$ bildet und somit selbst eine Kategorie ist.

IV.2.1 Definition: Seien $M(S)$, $N(T)$ Matroid Ports und $\sigma : S \to T$ eine Abbildung, die wir *Strong Port Map* nennen, falls diese die Bedingungen

(SP1) $\sigma(e) = e$ und $\bar{\sigma}^{1}(e) = \{e\}$ und

(SP2) σ ist eine Strong Map

erfüllt. Die Existenz einer Strong Port Map von M nach N notieren wir durch $M \to N$ und entsprechend drücken wir durch $M \nrightarrow N$ die Nicht-Existenz einer solchen Abbildung aus.

Einen kürzesten Kreis eines Matroid Ports $M(S)$, der das fixierte Element $e \in S$ enthält, heißt *Girth Kreis* von M. Unter dem *Girth* von M verstehen wir die Länge eines Girth Kreises desselben Matroids und notieren dies durch $\mathrm{girth}(M) \in \mathbb{N}$. Besitzt ein Matroid Port M keinen Girth Kreis, dann setzen wir $\mathrm{girth}(M) := \infty$.

IV.2.2 Definition: Die durch die Kategorie $\mathcal{M}_e = (\mathrm{Ob}(\mathcal{M}_e), \mathrm{Mor}(\mathcal{M}_e), \circ)$ induzierte Hom-Ordnung bzw. Hom-Äquivalenz heißt *Hom-Ordnung* bzw. *Hom-Äquivalenz der Strong Port Maps*.

2.1. Matroid Ports mit MaxFlow-MinCut-Eigenschaft

Die folgenden Sätze dieses Teilabschnitts stammen aus der bereits in der Einleitung erwähnten Arbeit [HN00] von W. Hochstättler und J. Nesetril.

IV.2.3 Satz: Seien $M(S)$ ein Matroid Port und $k \in \mathbb{N}$, dann gilt:

$$C_k \to M \;\Leftrightarrow\; \operatorname{girth}(M) \leq k.$$

Beweis. „⇒:“ Seien $\sigma : C_k \to M$ eine Strong Port Map und $Y := \sigma(C_k) \setminus \{e\} \subsetneq S$, dann ist $\overset{-1}{\sigma}(Y \cup \{0\})$ nicht abgeschlossen und nach Satz III.1.37 (ii) existiert ein Kreis $C \in \mathcal{C}(M)$ mit $e \in C \subseteq (Y + e)$.

„⇐:“ Seien $C = \{e, b_1, \ldots, b_l\}$, $l \leq k$ ein Kreis in M und $C_k := \{e, a_1, \ldots, a_{k-1}\}$, dann ist die Abbildung $\sigma : C_k \to M$ erklärt durch $\sigma(e) = e$, $\sigma(a_i) = b_i$ für $i \leq l$ und $\sigma(a_i) = \sigma(0) = 0$ für $l < i \leq k-1$ eine Strong Port Map. □

Bezeichnet C_∞ den freien Matroid Port, dann ist $C_\infty \to M$ für jedes $M \in \operatorname{Ob}(\mathcal{M}_e)$.

IV.2.4 Folgerung: (i) Seien $k, l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, dann gilt

$$C_k \to C_l \;\Leftrightarrow\; k \geq l.$$

(ii) Seien M, N Matroid Ports, dann gilt

$$M \to N \;\Rightarrow\; \operatorname{girth}(M) \geq \operatorname{girth}(N).$$

Als nächstes untersuchen wir die Existenz von Strong Port Maps $M \to C_k$.

IV.2.5 Proposition: Sei $M(S)$ ein Matroid Port mit $k-1 \in \mathbb{N}$ Cokreisen $C_1^*, \ldots, C_{k-1}^*$, so dass $C_i^* \cap C_j^* = \{e\}$ für alle $1 \leq i < j \leq k-1$. Dann ist die Abbildung $\sigma : M \to C_k$ definiert durch

$$x \;\mapsto\; \sigma(x) := \begin{cases} e & \text{falls } x = e, \\ a_i & \text{falls } x \in C_i^* \setminus e, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

eine Strong Port Map.

Beweis. Sei $A \subseteq C_k$ abgeschlossen. Wir weisen nach, dass $\overset{-1}{\sigma}(A \cup \{0\})$ abgeschlossen in M ist. Ist $e \notin A$, so ist $\overset{-1}{\sigma}(A \cup \{0\}) = \bigcap_{a_i \notin A} (S \setminus C_i^*)$ gemäß Satz III.1.50 (iii) als Durchschnitt von Hyperebenen abgeschlossen. Es sei also $e \in A$ und um einen Widerspruch herzuleiten nehmen wir an, dass $\overset{-1}{\sigma}(A \cup \{0\})$ nicht abgeschlossen ist. Dann gibt es gemäß Satz III.1.37 (ii) einen Kreis C in M mit $C \cap [S \setminus \overset{-1}{\sigma}(A \cup \{0\})] = \{g\}$. Da $S \setminus \overset{-1}{\sigma}(A \cup \{0\}) = \bigcup_{a_i \notin A} (C_i^* \setminus e)$, existiert $1 \leq i_0 \leq k-1$, so dass $g \in C_{i_0}^*$ und $a_{i_0} \notin A$. Gemäß Satz III.1.54 ist $|C \cap C_{i_0}^*| > 1$ und damit $e \in C$. Ist $a_i \notin A$, dann enthält $(C \cap C_i^*)$ mindestens zwei Elemente, d.h $\overset{-1}{\sigma}(A \cup \{0\}) = S \setminus C_{i_0}^*$ und dies impliziert $A = C_k \setminus \{a_i\}$, ein Widerspruch zur Abgeschlossenheit von A. □

IV.2.6 Satz: Seien $M(S)$ ein Matroid Port und $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, dann gilt:

$$M \to C_k \quad \Leftrightarrow \quad \exists \text{ Cokreise } C_1^*, \ldots, C_{k-1}^* \text{ in } M, \text{ so dass } C_i^* \cap C_j^* = \{e\} \quad \forall 1 \leq i < j \leq k-1;$$

Beweis. Wegen Proposition IV.2.5 müssen wir nur noch „⇒“ nachweisen. Dazu seien $\sigma : M \to C_k$ ein Strong Port Map, $C_k := \{e, a_1, \ldots, a_{k-1}\}$ und $\widehat{C_i^*} := \overline{\sigma}^{-1}(\{e, a_i\})$, dann reicht es zu zeigen, dass jede Menge $\widehat{C_i^*}$ einen Cokreis C_i^* mit $e \in C_i^*$ enthält. Um das einzusehen betrachten wir die abgeschlossene Menge $F := \overline{\sigma}^{-1}(C_k \cup \{0\} \setminus \{e, a_i\}) \subsetneq S$, die nicht e enthält. In dieser Situation existiert eine Hyperebene H mit $F \subseteq H$ und $e \notin H$, so dass $C_i^* := S \setminus H$ ein Cokreis der gewünschten Form ist. □

IV.2.7 Definition: Sei $M(S)$ ein Matroid, dann heißt eine endliche Menge von Kreisen $\{C_1, \ldots, C_k\}$ mit $(C_i \cap C_j) = \{e\}$ für $1 \leq i < j \leq n$ ein *Flow* von M und k der *Wert* des Flows. Einen Flow mit maximalem Wert nennen wir *MaxFlow* von M.

Gemäß Satz IV.2.6 existiert ein Flow mit Wert k in einem Matroid $M(S)$ genau dann, wenn $M^* \to C_k$. Gemäß Satz IV.2.3 gibt es einen Cokreis C^* mit $e \in C^*$ und $|C^*| = l$ genau dann in M^*, wenn $C_l \to M^*$. Wir erhalten demnach die Abschätzung

$$\max\{k |\ M^* \to C_k\} \ \leq \ \min\{l |\ C_l \to M^*\} \tag{IV.2}$$

und sagen, dass ein Matroid M die *MaxFlow-MinCut-Eigenschaft* besitzt, wenn in (IV.2) die Gleichheit gilt.

IV.2.8 Satz: Sei M ein Matroid Port, dann existiert eine Zahl $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so dass die folgende Äquivalenz erfüllt ist:

$$M^* \leftrightarrow C_k \quad \Leftrightarrow \quad M \text{ besitzt die MaxFlow-MinCut-Eigenschaft.}$$

Sind $M, N \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ beliebige Matroide, dann existiert stets eine Strong Map von M nach N und umgekehrt. Wie wir festgestellt haben, ändert sich die Situation grundlegend, wenn wir Strong Port Maps zwischen Matroid Ports betrachten. Wir bemerken, dass unter diesen Umständen die konstante Strong Map im Allgemeinen nicht das Axiom (SP1) erfüllt. Die aus den Strong Port Maps induzierte Hom-Ordnung besitzt demnach eine wesentlich komplexere Struktur als die aus den Strong Maps abgeleitete.

2.2. Projektive Matroide

In diesem Teilabschnitt betrachten wir ausschließlich koordinatisierbare projektive Matroide $\mathrm{PG}(n,q)$, die in der Grundmenge das fixierte Element e enthalten.

IV.2.9 Proposition: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$, dann gibt es keine zwei oder mehr verschiedenen Cokreise in $\mathrm{PG}(n,q)$, die sich genau im fixierten Element e treffen.

Beweis. Seien S die Grundmenge und C_1^*, C_2^* zwei Cokreise von $\mathrm{PG}(n,q)$, dann gilt gemäß Proposition III.1.35 und Satz III.1.50 (iii) die Ungleichung

$$\begin{aligned} |(C_1^* \cap C_2^*)| &= |(S \smallsetminus H_1) \cup (S \smallsetminus H_2)| = |S \smallsetminus (H_1 \cup H_2)| \\ &= (1 + q + \ldots + q^n) - 2(1 + q + \ldots + q^{n-1}) + (1 + q + \ldots + q^{n-2}) \\ &= q^n - q^{n-1} = (q-1)q^{n-1} \geq 2. \end{aligned}$$

□

IV.2.10 Folgerung: Seien $\mathrm{PG}(n,q)$, $n \geq 2$ ein projektives Matroid und C_k ein Kreis mit $k \geq 3$ Elementen, dann gibt keine Strong Port Map von $\mathrm{PG}(n,q)$ nach C_k.

Beweis. Folgt aus Satz IV.2.6 und der letzten Proposition. □

IV.2.11 Beispiel: Seien $F_7(S) \coloneqq \mathrm{PG}(2,2)$ der projektive Matroid Port und H eine Hyperebene von F_7 mit $e \notin H$, dann ist $C_1^* \coloneqq S \smallsetminus H$ nach Satz III.1.50 (iii) ein Cokreis von F_7. Die Cokreise von F_7 besitzen genau 4 Punkte, da eine Hyperebene aus genau 3 Punkten besteht. Die Menge $\{e,a\}$ mit $a \in H$ ist deshalb im Dual F_7^* abgeschlossen und durch die Erweiterung

$$M \coloneqq F_7^* +_{\mathcal{M}} x$$

mit $\mathcal{M} \coloneqq \{ [\{e,p\}) \}$ als modularem Hauptfilter entsteht ein weiterer Cokreis $C_2^* \coloneqq \{e,a,x\}$ von F_7. Der Matroid Port M^* besitzt F_7 als Kontraktionsminor, ist von Girth

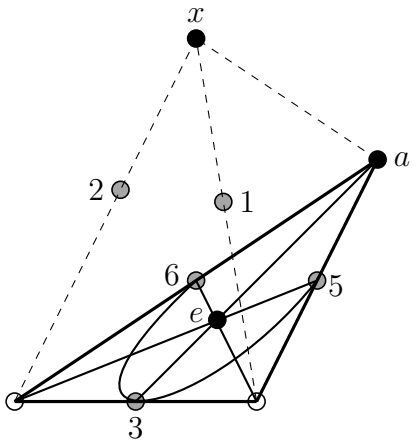


Abb. IV.4.: *Skizze der Coerweiterung M^**

3 und zudem existiert eine Strong Port Map $M \to C_3$ gemäß Satz IV.2.6. In Abbildung IV.4 ist die Coerweiterung von F_7 um x angedeutet, wobei die Hyperebene von F_7 durch

$H := \{2,6,a\}$ bestimmt ist und die beiden Punkte 1 und 2 derart platziert sind, dass $\{1,2,3,5,6\}$ eine Hyperebene der Coerweiterung M^* bildet.

IV.2.12 Proposition: Eine Strong Port Map $\sigma : C_k \to C_l$ mit $k,l \in \mathbb{N}$ und $3 \leq l \leq k$ ist surjektiv.

Beweis. Angenommen, σ ist nicht surjektiv, dann gibt es einen Punkt $q \neq e$, der nicht von σ getroffen wird. Die Menge $X := \mathrm{Bild}(\sigma) \setminus \{e\}$ ist abgeschlossen, da $q, e \notin X \subseteq C_l$. Entsprechend müsste $\overset{-1}{\sigma}(X \cup \{0\})$ abgeschlossen sein, was aber wegen $e \notin \overset{-1}{\sigma}(X \cup \{0\})$ nicht sein kann. □

Eine unmittelbare Folgerung aus der letzten Proposition ist, dass eine Strong Port Map der Form $C_{k+1} \to C_k$ entweder ein oder kein Element des Definitionsbereichs auf das Nullelement abbildet.

Jedes projektive Matroid $\mathrm{PG}(n,q)$ enthält $\mathrm{PG}(n-1,q)$ als Hyperebene, weshalb aus Symmetriegründen die Existenz einer Strong Port Map $\iota : \mathrm{PG}(n-1,q) \hookrightarrow \mathrm{PG}(n,q)$ gesichert ist. Als nächstes werden wir nachweisen, dass es keine Strong Port Map von $\mathrm{PG}(n,q)$ nach $\mathrm{PG}(n-1,q)$ gibt.

IV.2.13 Proposition: Wenn es eine Strong Port Map $\sigma : \mathrm{PG}(n,q) \to \mathrm{PG}(n-1,q)$ gibt, dann wird einzig das Nullelement auf das Nullelement unter σ abgebildet.

Beweis. Wir beweisen durch Widerspruch, nehmen also an, es würde mindestens ein Element $x \in \mathrm{PG}(n,q), x \neq 0$ mit $\sigma(x) = 0$ geben. Da projektive Räume einfache Matroide sind, ist $\{e,0\}$ abgeschlossen in $\mathrm{PG}(n-1,q)$ und damit $\overset{-1}{\sigma}(\{e,0\}) \ni e,x$ abgeschlossen in $\mathrm{PG}(n,q)$. Wir bezeichnen die im Urbild von $\{e,0\}$ durch e und x aufgespannte Gerade, bestehend aus $(q+1)$ Elementen, mit g und wählen ein $a \in g \setminus \{e,x\} \neq \varnothing$. Die Strong Port Map σ kann a nur das Nullelement zuweisen, da anderenfalls die Bedingung (S2) verletzt würde. Unter diesen Umständen ist jedoch das Urbild des Nullelements nicht abgeschlossen, was zum Widerspruch führt. □

Vorangehende Proposition benötigen wir für folgenden

IV.2.14 Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$, dann gibt es keine Strong Port Map von $\mathrm{PG}(n,q)$ nach $\mathrm{PG}(n-1,q)$.

Beweis. Betrachten wir zunächst die Situation für $n := 2$ und nehmen an, es gibt eine Strong Port Map $\sigma : \mathrm{PG}(2,q) \to \mathrm{PG}(1,q)$. Bezeichnen wir die Grundmenge von $\mathrm{PG}(2,q)$ mit S und die von $\mathrm{PG}(1,q)$ durch T, dann ist $|T| = q+1$ gemäß Proposition III.1.35. Sei weiter $T := \{e, y_1, \ldots, y_q\}$, dann sind die Fasern

$$\overset{-1}{\sigma}(y_i \cup \{0\}) \qquad \forall i \in \mathbb{N}_q$$

abgeschlossen in $\mathrm{PG}(2,q)$ mit $r(\overset{-1}{\sigma}(y_i \cup \{0\})) \leq 2$, da $e \notin \overset{-1}{\sigma}(y_i \cup \{0\})$ für $i \in \mathbb{N}_q$. Weiter besitzt $X := \overset{-1}{\sigma}(\{y_1, \ldots, y_q, 0\})$ genau $\frac{q^3-1}{q-1} - 1 = q(q+1)$ Elemente, weshalb es mindestens $q \geq 2$ verschiedene Geraden in X gibt. Diese Geraden besitzen in einer projektiven Ebene

stets einen Schnittpunkt p, für den aufgrund des Gesagten $\sigma(p) = 0$ gelten muss. Dies steht im Widerspruch zu Proposition IV.2.13.

Nehmen wir nun an, dass eine Strong Port Map $\sigma : \mathrm{PG}(n,q) \to \mathrm{PG}(n-1,q)$ für $n \geq 3$ existiert. Mit H bezeichnen wir eine Hyperebene von $\mathrm{PG}(n-1,q)$, die das fixierte Element e nicht enthält und aus $r := \frac{q^{n-1}-1}{q-1}$ Elementen besteht. Seien $g_1, \ldots, g_r$ die durch je ein Elemente $p \in H$ und e in $\mathrm{PG}(n-1,q)$ erzeugten Geraden, dann ist $r(\overset{-1}{\sigma}(g_i)) \leq 2$ für alle $1 \leq i \leq r$. Anderenfalls würde es eine Strong Port Map $\mathrm{PG}(k,q) \to \mathrm{PG}(1,q)$ mit $n \leq k \leq 2$ geben, die durch Restriktion eine Strong Port Map $\mathrm{PG}(2,q) \to \mathrm{PG}(1,q)$ impliziert, was nicht sein kann. Das Urbild von $\mathrm{PG}(n-1,q)$ kann demnach unter σ maximal $|\mathrm{PG}(n-1,q)|$ Elemente enthalten – Widerspruch zur Existenz von σ. □

Veranschaulichen wir uns die Situation im Fall $q = 2$. Die Fasern von y_1 bzw. y_2 sind abgeschlossen und besitzen zusammen die 6 Elemente aus $\mathrm{PG}(2,2) \setminus e$.

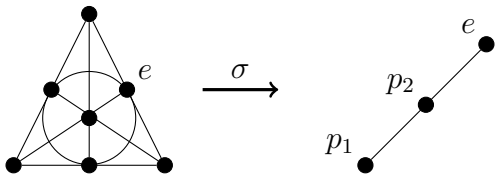


Abb. IV.5.: *Strong Port Maps und projektive Geometrien*

Deshalb sind die Fasern von y_1 und y_2 zwei verschiedene Geraden in $\overset{-1}{\sigma}(\{y_1, y_2, 0\})$, die sich in der projektiven Ebene in mindestens einem Element p schneiden. Das kann aber nur dann sein, wenn $\sigma(p) = 0$ gilt, was im Widerspruch zu Proposition IV.2.13 steht.

2.3. Antikette der Hom-Ordnung

Ziel dieses Abschnittes ist die Konstruktion einer unendlich langen Antikette in der durch die Strong Port Maps induzierten Hom-Ordnung. In einem ersten Ansatz werden wir projektive Matroide coparallel coerweiteren und rasch feststellen, dass dieser Weg nicht zielführend ist. Ebenso wird durch Angabe eines Gegenbeispiels konstatiert, dass eine ähnliche Konstruktion – angewendet auf uniforme Matroide vom Rang 2 – fehlschlägt. Letztlich werden wir mit Hilfe allgemeiner uniformer Matroide die gewünschte Antikette konstruieren.

Besitzt ein Matroid M einen echt kleineren Girth als ein Matroid N, so existiert gemäß Folgerung IV.2.4 (ii) keine Strong Port Map von M nach N. Es ist daher nahe liegend die Girth-Kreise der vorgegebenen Matroide M und N durch Coerweiterungen entsprechend zu modifizieren. Da Matroide einer Antikette unvergleichbar bezüglich der Hom-Ordnung sind, müssen wir ferner darauf achten, dass durch die Modifikation nicht $N \to M$ induziert wird.

Wie wir bereits in Satz IV.2.14 festgestellt haben, existiert keine Strong Port Map von $\mathrm{PG}(n,q)$ nach $\mathrm{PG}(n-1,q)$, allerdings können wir $\mathrm{PG}(n-1,q)$ in $\mathrm{PG}(n,q)$ einbetten.

Seien $D_n^0 := \mathrm{PG}^*(n,2)$ das Dual des projektiven Matroid Ports $\mathrm{PG}(n,2)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $X_k := \{e, x_1, \ldots, x_k\}$ für $k \in \mathbb{N}$ bzw. $X_0 := \{e\}$; zudem definieren wir rekursiv

$$D_n^k := D_n^{k-1} +_{\mathcal{M}_{k-1}} x_k$$

mit $\mathcal{M}_{k-1} := [X_{k-1})$ als modularem Hauptfilter von $\mathcal{L}[D_n^{k-1}]$. Beachten wir, dass D_n^k durch Substitution von e durch die parallele Klasse X_k in $\mathrm{PG}^*(n,2)$ hervorgeht, so ist die Gültigkeit der nächsten Proposition augenscheinlich.

IV.2.15 Proposition: a) Die Kreise von D_n^k bestehen aus

(i) den zweielementigen Teilmengen von $\{e, x_1, \ldots, x_k\}$;

(ii) den Kreisen C von $\mathrm{PG}^*(n,2)$ mit $e \notin C$;

(iii) den Kreisen C von $\mathrm{PG}^*(n,2)$ mit $e \in C$, wobei e durch ein Element aus $\{e, x_1, \ldots, x_k\}$ ersetzt werden darf.

b) Die Hyperebenen von D_n^k bestehen aus

(i) den Hyperebenen $H \in \mathcal{H}(\mathrm{PG}^*(n,2))$ mit $e \notin H$;

(ii) den Mengen $H \cup \{x_1, \ldots, x_k\}$ mit $H \in \mathcal{H}(\mathrm{PG}^*(n,2))$ und $e \in H$.

Das Dual $P_n^k := [D_n^k]^*$ des eben definierten Matroid Ports D_n^k entsteht demnach durch eine coparallele Coerweiterung aus dem projektiven Matroid $\mathrm{PG}(n,2)$. In Abbildung IV.6 ist der Fall $n = 2$ und $k = 1$ dargestellt.

IV.2.16 Definition: Sei M ein Matroid Port, dann nennen wir einen Kreis $C \in \mathcal{C}(M)$ mit $e \in C$ *relevant*.

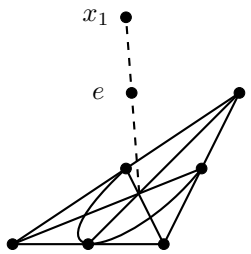


Abb. IV.6.: *Matroid Port* P_2^1

Nach Satz III.1.50 sind die relevanten Kreise von P_n^k bestimmt durch die Hyperebenen aus Proposition IV.2.15 b) (i), weshalb

$$\operatorname{girth}(P_n^k) = 3 + k$$

gilt. Aus Teil a) derselben Proposition IV.2.15 folgt, dass die Mengen $C_i^* := \{e, x_i\}$ mit $i \in \mathbb{N}_k$ verschiedene Cokreise in P_n^k sind. Da weiter $\mathrm{PG}(n,2)$ eine Hyperebene H besitzt, die nicht das fixierte Element e enthält, ist die Existenz eines relevanten Kreises vom Typ (iii) aus Proposition IV.2.15 garantiert. Demnach gibt es neben den k Cokreisen $C_1^*, \ldots, C_k^*$ einen weiteren Cokreis C_{k+1}^* in P_n^k, so dass $(C_i^* \cap C_j^*) = \{e\}$ für alle $1 \le i < j \le k+1$ gilt.

Insgesamt ergibt sich aus Satz IV.2.6 und $\operatorname{girth}(P_n^k) = 3 + k$, dass $P_{n+1}^{k+1} \to C_{k+3} \hookrightarrow P_n^k$.

Coerweitern wir nicht coparallel, so können wir die Anzahl der dadurch induzierten Cokreise deutlich reduzieren. Zudem gehen wir nun vom Matroid Port U_2^n, d.h. von einer Geraden mit $n \ge 5$ Punkten, aus.

IV.2.17 Proposition: Seien $M(T)$ ein einfacher Matroid Port und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge 2$, dann ist eine Strong Port Map $\sigma : U_2^n(S) \to M(T)$ injektiv.

Beweis. Zunächst weisen wir nach, dass einzig das Nullelement unter σ auf das Nullelement abgebildet wird. Dazu nehmen wir an, dass es einen Punkt $x \in S \setminus \{0, e\}$ mit $\sigma(x) = 0$ gibt. Aufgrund der Voraussetzung ist $\overset{-1}{\sigma}(\{e,0\}) = \overline{\{e,x\}} = U_2^n$ und damit $\overset{-1}{\sigma}(0) = S \setminus \{e\}$, was zum Widerspruch führt.
Seien nun $x_1, x_2 \in S$ zwei Elemente mit identischem Bild $\sigma(x_1) = \sigma(x_2) \neq e$, dann ist

$$U := \overset{-1}{\sigma}\left[\sigma(x_1) \cup \sigma(x_2) \cup \{0\}\right] = \overset{-1}{\sigma}\left[\sigma(x_i) \cup \{0\}\right] \qquad i = 1,2$$

abgeschlossen in U_2^n. Da die Menge U das fixierte Element e nicht enthält, kann es sich nur um einen Punkt in U_2^n handeln, womit $x_1 = x_2$ und damit die Behauptung folgt. □

Reduzieren wir das Matroid U_2^{n+1} um einen beliebigen Punkt, so erhalten wir U_2^n und mit Hilfe des letzten Satzes ergibt sich die

IV.2.18 Folgerung: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $2 \le n < m$, dann existiert keine Strong Port Map von U_2^m nach U_2^n.

Umgekehrt existiert stets eine Injektion $U_2^n \hookrightarrow U_2^m$, falls $2 \leq n \leq m$.

Seien nun $D_n^0 := U_{n-2}^n(S)$ das uniforme Matroid mit $e, a \in S$ und $X_k := \{e, a, x_1, \ldots, x_k\}$ für $k \in \mathbb{N}$ bzw. $X_0 := \{e, a\}$. Wir definieren rekursiv

$$D_n^k := D_n^{k-1} \; +_{\mathcal{M}_{k-1}} \; x_k, \tag{IV.3}$$

wobei $\mathcal{M}_{k-1} := [X_{k-1})$ der modulare Hauptfilter von $\mathcal{L}[D_n^{k-1}]$ ist. Sei nun $G_n^k := (D_n^k)^*$ das orthogonale Gegenstück von D_n^k mit $k \geq 0$ und $n \geq 5$, dann entsteht G_n^k aus dem uniformen Matroid U_2^n durch eine spezielle Coerweiterung um $\{x_1, \ldots, x_k\}$.

IV.2.19 Beispiel: Ausgehend von $D_6^0(S)$ mit $S = \{p_1, p_2, p_3, p_4, e, a\}$ sowie $D_5^0(T)$ mit $T := \{q_1, q_2, q_3, e, b\}$ erhalten wir durch Erweiterung (IV.3) um $X := \{x_1, x_2, x_3\}$ bzw. $Y := \{y_1, y_2\}$ die Matroid Ports D_6^3 bzw. D_5^2 und ihre dualen Gegenstücke G_6^3 bzw. G_5^2. Die Abbildung $\sigma : G_6^3 \to G_5^2$ definiert durch

$$\begin{aligned} x_1 &\mapsto y_1 & \qquad p_1, p_2, p_3, p_4 &\mapsto q_2 \\ x_2 &\mapsto y_2 & e &\mapsto e \\ x_3 &\mapsto q_3 & a &\mapsto b \end{aligned}$$

ist eine Strong Port Map.

Setzen wir dagegen $D_n^0 := \mathrm{PG}^*(n, 2)$, erweitern gemäß (IV.3) und definieren $P_n^{[k]} := (D_n^k)^*$, dann besitzt die Coerweiterungen $P_n^{[k]}$ von $\mathrm{PG}(n, 2)$ einen U_2^4-Minor und ist somit gemäß Satz III.2.13 (i) nicht binär. Bislang konnte nicht geklärt werden, ob die Matroide $P_{n+1}^{[k+1]}$ und $P_n^{[k]}$ unvergleichbar bezüglich der Hom-Ordnung sind.

Uniforme Matroide besitzen eine einfache Struktur, die sich in der Existenz von Strong Port Maps zwischen diesen widerspiegelt. Im Folgenden werden wir eine untere Schranke für die Kardinalität des Bildes einer Strong Port Map $\sigma : U_k^n \to M$ herleiten, welche ausschlaggebend für das darauf folgende Konstruktionsprinzip sein wird und uns schließlich eine unendlich lange Antikette liefert.

Die nächste Proposition und die zugehörige Folgerung betrachten wir allgemeiner für Strong Maps.

IV.2.20 Proposition: Seien $M(T)$ ein einfaches Matroid und $\sigma : U_k^n(S) \to M(T)$ eine Strong Map mit $k \geq 1$, dann besitzt jede Faser $\overset{-1}{\sigma}(y \cup \{0\})$ mit $y \in \mathrm{Bild}(\sigma)$ maximal $(k-1)$ oder genau n Punkte.

Beweis. Für $\mathrm{Bild}(\sigma) = \varnothing$ ist die Behauptung trivialerweise erfüllt. Enthält das Bild lediglich ein Element, so ist σ die konstante Strong Map, weshalb die Faser des einzigen Bildpunktes alle n Elemente des Definitionsbereichs umfasst. Seien nun $|\mathrm{Bild}(\sigma)| > 1$ und $x_1, \ldots, x_j \in (S \setminus \{0\})$ endlich viele paarweise verschiedene Elemente mit identischem Bild $y := \sigma(x_1) = \ldots = \sigma(x_j) \in \mathrm{Bild}(\sigma)$. Da M einfach ist, muss die Faser $\overset{-1}{\sigma}(y \cup \{0\})$

abgeschlossen sein, weshalb nach Proposition III.1.53 die Ungleichung

$$1 \leq j \;\leq\; |\,\bar{\sigma}^{-1}(y \cup \{0\})| \;\leq\; (k-1)$$

erfüllt ist. Ist $\bar{\sigma}^{-1}(0) = 0$, so kann j den maximalen Wert $(k-1)$ annehmen. □

Sei $s \in \mathbb{R}$, dann bezeichnen wir durch $\lceil s \rceil$ die kleinste ganze Zahl $\geq s$.

IV.2.21 Folgerung: Seien $\sigma : U_k^n \to M$ eine Strong Map mit $|\mathrm{Bild}(\sigma)| > 1$ und M ein einfaches Matroid. Dann gilt die Ungleichung

$$|\mathrm{Bild}(\sigma)| \quad \geq \quad \left\lceil \frac{n}{k-1} \right\rceil \quad \geq \quad 2. \tag{IV.4}$$

Beweis. Aufgrund der Voraussetzung ist σ weder die konstante Strong Map noch die Nullabbildung, was bedeutet, dass nach Proposition IV.2.20 jede Faser aus $\mathrm{Bild}(\sigma)$ höchstens $(k-1)$ Elemente des Definitionsbereichs umfasst. Je mehr Elemente eine Faser enthält umso kleiner wird das Bild von σ. Bilden wir demnach einzig das Nullelement auf 0 ab, so können wir die natürliche Zahl j aus Proposition IV.2.20 maximal wählen und somit das Bild minimieren. Das Bild umfasst in Folge dessen mindestens $\lceil \frac{n}{k-1} \rceil$ Elemente, indem wir jeweils $(k-1)$ der n Elemente des Definitionsbereichs auf dasselbe Element von M unter σ abbilden. □

Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq k < n$, $B_n^0 := U_k^n$ und $X_{i-1} := \{e, x_1, \ldots, x_{i-1}\}$ mit $X_0 := \{e\}$. Für $i \in \mathbb{N}$ definieren wir rekursiv den Matroid Port

$$B_n^i := B_n^{i-1} +_{\mathcal{M}_{i-1}} \{x_i\},$$

wobei $\mathcal{M}_{i-1} := [X_{i-1})$ der modulare Hauptfilter in $\mathcal{L}[B_n^{i-1}]$ ist. Das Matroid B_n^i entsteht demnach durch Substitution des fixierten Elements e durch eine parallele Klasse $\{e, x_1, \ldots, x_i\}$ in U_k^n. Um anzuzeigen, dass B_n^i aus dem uniformen Matroid Port U_k^n mit $k < n$ hervorgegangen ist, schreiben wir auch $B_n^i(k)$ anstatt B_n^i. Aufgrund der Definition des Matroid Ports $B_n^i(k)$ sind die folgenden Aussagen evident.

IV.2.22 Proposition: a) Die Kreise von $B_n^i(k)$ bestehen aus

(i) den zweielementigen Teilmengen von $\{e, x_1, \ldots, x_i\}$;

(ii) den Mengen der Größe $(k+1)$ mit maximal einem Element aus $\{e, x_1, \ldots, x_i\}$.

b) Die Hyperebenen von $B_n^i(k)$ bestehen aus

(i) den Hyperebenen $H \in \mathcal{H}(U_k^n)$ mit $e \notin H$;

(ii) den Mengen $H \cup \{x_1, \ldots, x_i\}$ mit $H \in \mathcal{H}(U_k^n)$ und $e \in H$.

Sei nun $A_n^i(n-k) := A_n^i := [B_n^i(k)]^*$ das Dual von B_n^i mit $i, n \in \mathbb{N}$ und $m := n - k$, wobei für $i = 0$ die Identität $A_n^0 = (B_n^0(k))^* = (U_k^n)^* = U_m^n$ gilt. Die Cokreise von $A_n^i(m)$ sind die Kreise von $B_n^i(k)$ und ferner entsprechen die Kreise von $A_n^i(m)$ den mengentheoretischen Komplementen der Hyperebenen von $B_n^i(k)$.

Dadurch ergibt sich mit Hilfe des Satzes III.1.52 die folgende Charakterisierung.

IV.2.23 Satz: a) Die Cokreise von $A_n^i(m)$ bestehen aus

(i) den zweielementigen Teilmengen von $\{e, x_1, \ldots, x_i\}$;

(ii) den Mengen der Größe $(k+1)$ mit maximal einem Element aus $\{e, x_1, \ldots, x_i\}$.

b) Die Kreise von $A_n^i(m)$ bestehen aus

(i) den Mengen $C \cup \{x_1, \ldots, x_i\}$ mit $C \in \mathcal{C}(U_m^n)$ und $e \in C$;

(ii) den Kreisen $C \in \mathcal{C}(U_m^n)$ mit $e \notin C$.

Die Kreise von A_n^i enthalten gemäß letztem Satz IV.2.23 entweder $(m+1)$ oder $(m+1+i)$ Elemente, wobei ein relevanter Kreis von A_n^i nur aus $(m+i+1)$ Elemente bestehen kann. Es ist also

$$\operatorname{girth}[A_n^i(m)] = (m+1+i). \tag{IV.5}$$

IV.2.24 Proposition: Das Matroid $A_n^i(m)$ enthält U_m^{n-1} als Restriktionsminor.

Beweis. Gemäß Definition ist $A_n^i(m) = [B_n^i(k)]^*$, wobei $B_n^i(k)$ durch Substitution von e durch die parallele Klasse $\{e, x_1, \ldots, x_i\}$ aus U_k^n hervorgeht. Gemäß Beispiel III.2.8 und Folgerung III.2.5 ist

$$B_n^i(k)/\{e\} \;\cong\; U_{k-1}^{n-1} \oplus U_0^i,$$

wobei U_0^i einer Menge $\{x_1, \ldots, x_i\}$ von Schleifen entspricht. Gemäß Folgerung III.2.11 gilt damit

$$B_n^i(k)/\{e\}/\{x_1, \ldots, x_i\} \cong B_n^i(k)/\{e\}\backslash\{x_1, \ldots, x_i\},$$

d.h. U_{k-1}^{n-1} ist ein Kontraktionsminor von $B_n^i(k)$. Somit ist $U_{n-k}^{n-1} = U_m^{n-1}$ Restriktionsminor von $A_n^i(m) = [B_n^i(k)]^*$ und entsteht durch Reduktion um $\{e, x_1, \ldots, x_i\}$. □

IV.2.25 Proposition: Seien $\sigma : M \to M'$ eine Strong Port Map und C ein relevanter Kreis von M, dann enthält $\sigma(C)$ einen relevanten Kreis von M'.

Beweis. Sei $C \in \mathcal{C}(M)$. Die Abbildung $\sigma^* : C \to \sigma(C)$ mit $\sigma^*(x) := \sigma(x)$ für alle $x \in C$ ist als Nachbeschränkung surjektiv und ebenfalls eine Strong Port Map. Das Urbild $\overset{-1}{\sigma^*}(Y)$ mit $Y := \sigma^*(C) \setminus \{e\}$ ist nicht abgeschlossen, da e im Urbild nicht enthalten sein kann. Gemäß Satz III.1.37 (ii) enthält $Y \cup \{e\}$ somit einen relevanten Kreis. □

IV.2.26 Satz: Seien $n > m > 2$ und $r := (m-1)(n+i+1)+1$, dann gelten:

(i) $A_r^{i+1}(m) \not\to A_n^i(m)$;

(ii) $A_n^i(m) \not\to A_r^{i+1}(m)$.

Beweis. (i) Wir beweisen durch Widerspruch und nehmen dazu an, dass eine Strong Port Map $\sigma : A_r^{i+1} \to A_n^i$ existiert. Sei C ein Girth-Kreis von $A_r^{i+1}(m)$, dann enthält $\sigma(C)$ gemäß Proposition IV.2.25 einen Girth-Kreis von $A_n^i(m)$. Nach Proposition IV.2.24 ist $R := U_m^{r-1}$ ein Restriktionsminor von $A_r^{i+1}(m)$ und die Restriktion

$$\widetilde{\sigma} : R \to A_n^i \quad \text{definiert durch} \quad \widetilde{\sigma}(x) := \sigma(x) \quad \forall x \in R$$

eine Strong Map, da $e \notin R$ und σ eine Strong Port Map ist. Weiter folgt mit Proposition IV.2.20, dass eine einzelne Faser von $\widetilde{\sigma}$ maximal $(m-1) > 1$ Elemente enthält. Nach Satz IV.2.23 ist aber $|C \cap R| = m > 2$, weshalb $|\mathrm{Bild}(\widetilde{\sigma})| > 1$ folgt. Somit ist $\widetilde{\sigma}$ nicht die konstante Strong Map und Folgerung IV.2.21 angewendet auf $\widetilde{\sigma}$ impliziert den Widerspruch $n + i = |\mathrm{Bild}(\widetilde{\sigma})| \geq \left\lceil \frac{r-1}{m-1} \right\rceil = n + i + 1$.

(ii) Wegen Gleichung (IV.5) folgt

$$\mathrm{girth}[A_n^i(m)] = m + i + 1 \quad < \quad \mathrm{girth}[A_r^{i+1}(m)] = m + i + 2.$$

und mit der Kontraposition von Folgerung IV.2.4 (ii) ergibt sich die Behauptung. □

IV.2.27 Satz: Zu jedem einfachen Matroid Port $M(S)$ mit $r(M) \geq 1$ und $|S| \geq 2$ existiert ein bezüglich der Hom-Ordnung der Strong Port Maps unvergleichbares einfaches Matroid.

Beweis. Seien $r(M) = k \geq 1$ und $|S| = n$ mit $k, n \in \mathbb{N}$. Betrachten wir den Matroid Port U_{k+1}^r mit $r := k(n+1)$. Gemäß Satz III.1.52 (i) besitzen die Kreise von U_{k+1}^r genau $k+2$ Elemente, d.h. es ist $\mathrm{girth}(M) \leq k + 1 < k + 2 = \mathrm{girth}(U_{k+1}^r)$ und Folgerung IV.2.4 (ii) impliziert $M \twoheadrightarrow U_{k+1}^r$. Angenommen es existiert eine Strong Port Map $U_{k+1}^r \to M$, dann enthält dessen Bild nach Folgerung IV.2.21 mindestens $n + 1 > |S| = n$ Elemente, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. □

2.4. Parallele Summe und Pushout

T. Brylawski entdeckte in den 1970er Jahren die in Teilabschnitt 2.3 eingeführte verallgemeinerte parallele Summe $M_1 \oplus_T M_2$ zweier Matroide M_1 und M_2 und beantwortete damit die von H. Crapo aufgeworfene Frage nach der Existenz von (injektiven) Pushouts in der Kategorie $\mathcal{M}$ der Matroide und Strong Maps. Im Allgemeinen existiert in $\mathcal{M}$ kein Pushout, doch ist die „Verbindungsstelle“ T ein modularer Unterraum von M_1 oder M_2, dann ist die parallele Summe ein injektiver Pushout ([Bry75], Proposition 5.2 und Satz 5.3).

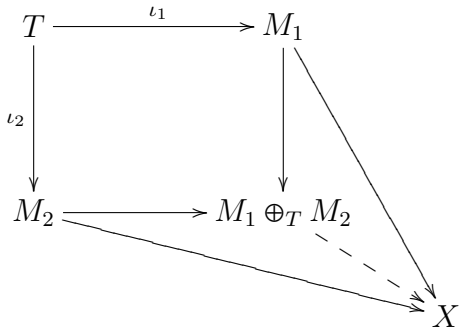


Abb. IV.7.: *Diagramm des injektiven Pushouts von* (ι_1, ι_2)

Da die beteiligten Morphismen bzw. Strong Maps Injektionen sind, können die Ergebnisse entsprechend für die Kategorie $\mathcal{M}_e$ interpretiert werden.

Im Folgenden untersuchen wir die Wirkung der parallelen Summe auf die Existenz von Strong Port Maps. Die verallgemeinerte parallele Summe könnte für die noch offene Frage nach der Dichte der Hom-Ordnung relevant sein. Wir halten fest, dass die Simplifikation eine Strong Port Map ist, falls der fixierte Punkt $e \notin \overline{\varnothing}$ in keiner nicht-trivialen parallelen Klasse enthalten ist.

IV.2.28 Proposition: Seien $N(R), M_1(S_1)$ Matroid Ports und $M_2(S_2)$ ein Matroid mit $T := S_1 \cap S_2$. Weiter seien T ein modularer Unterraum in M_1 und abgeschlossen in M_2 sowie $e \notin T$, dann gelten:

(i) Wenn $N \to M_1$, dann $N \to (M_1 \oplus_T M_2)$.

(ii) Wenn $N \not\to M_1$, dann $N \not\to (M_1 \oplus_T M_2)$.

Beweis. (i) Es sei $\sigma : N \to M_1$ eine Strong Port Map, dann folgt die Existenz von $\widetilde{\sigma} : N \to M_1 \oplus_T M_2$ direkt aus $\widetilde{\sigma}(x) := \sigma(x)$ für alle $x \in R$.

(ii) Sei $N \not\to M_1$ und angenommen es gibt doch eine Strong Port Map $N \to (M_1 \oplus_T M_2)$. Sei $B_2 \subseteq S_2$, so dass $B_2 \cup B_T$ eine Basis von M_2 ist. Es ist

$$N \to (M_1 \oplus_T M_2) \overset{\kappa}{\to} M_1^* \overset{s}{\to} \widetilde{M_1^*} \cong M_1,$$

wobei κ die Kontraktion von $M_1 \oplus_T M_2$ um B_2 bezeichnet. Gemäß Proposition III.2.32 ist $\mathcal{L}(M_1) \cong \mathcal{L}(M_1^*)$, womit $M_1 \cong \widetilde{M_1^*}$ folgt. Da die Kontraktion κ und die Simplifikation s Strong Port Maps sind, müsste demnach $N \to M_1$ gelten, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht.

□

Besitzen die bei der parallelen Summe beteiligten Matroide nur einen einzelnen „Verbindungspunkt“ p, dann gilt die folgende Proposition.

IV.2.29 Proposition: Seien $M_1(S_1), N(T)$ Matroid Ports und $M_2(S_2)$ ein Matroid mit $S_1 \cap S_2 = \{p\}$ und $p \neq e$, dann gilt:

(i) Wenn $M_1 \to N$, dann $(M_1 \oplus_p M_2) \to N$;

(ii) Wenn $M_1 \not\to N$, dann $(M_1 \oplus_p M_2) \not\to N$.

Beweis. (i) Seien $\sigma : M_1 \to N$ eine Strong Port Map und $\widetilde{\sigma} : M_1 \oplus_p M_2 \to N$ definiert durch

$$x \mapsto \begin{cases} \sigma(x) & \text{falls } x \in S_1 \setminus \{p\} \\ \sigma(p) & \text{falls } x \in S_2 \end{cases}$$

eine Abbildung. Ferner seien $Y \in \mathcal{L}[N]$ und $\sigma(p) \notin Y$, dann ist die Menge $X := \widetilde{\sigma}^{-1}(Y \cup \{o\})$ aufgrund der Definition von $\widetilde{\sigma}$ und den Voraussetzungen abgeschlossen in M_1 und damit auch in $M_1 \oplus_p M_2$. Seien nun $\sigma(p) \in Y$ und $F_1 := X \cap S_1$ bzw. $F_2 := X \cap S_2$. Da $\sigma(p) \in Y$, ist $F_2 = S_2$ und damit abgeschlossen in M_2 bzw. in $M_1 \oplus_p M_2$. Weiter ist F_1 aufgrund der Definition von $\widetilde{\sigma}$ abgeschlossen in M_1 und damit auch in $M_1 \oplus_p M_2$. Insgesamt ist X abgeschlossen in $(M_1 \oplus_p M_2)$ und damit $\widetilde{\sigma}$ eine Strong Port Map.

(ii) Es gelte nun $M_1 \not\to N$. Angenommen es existiert doch eine Strong Port Map $\sigma : M_1 \oplus_p M_2 \to N$, so müsste $\sigma|M_1 : M_1 \to N$ ebenfalls eine Strong Port Map sein, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht.

□

Betrachten wir die Identität $\mathrm{id} : U_2^3 \to U_2^3$, dann existiert keine Strong Port Map von $U_2^3 \oplus_e U_2^n$ nach U_2^3 für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$, da die Restriktion auf einen der beiden Summanden gemäß Proposition IV.2.17 injektiv sein müsste.

V. Schlusswort und Ausblick

Den Ausführungen dieser Arbeit folgend ist es nahe liegend das in der Einleitung erwähnte Dichteproblem analog auf die Hom-Ordnung der Strong Port Maps zu übertragen, wozu M und N Matroid Ports mit $M \to N$ und $N \twoheadrightarrow M$ seien. Unter welchen Umständen existiert dann ein Matroid $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M}_e)$, so dass $M \to X \to N$ und $N \twoheadrightarrow X \twoheadrightarrow M$?

Angenommen das Matroid X existiert, dann impliziert Folgerung IV.2.4 die Ungleichung $\mathrm{girth}(M) \leq \mathrm{girth}(X) \leq \mathrm{girth}(N)$, weshalb insbesondere der Fall $\mathrm{girth}(M) = \mathrm{girth}(N)$ interessant sein dürfte. Zudem darf das Matroid X –falls es existiert– keinen zu N isomorphen Minor besitzen, da anderenfalls die Bedingung $N \twoheadrightarrow X$ verletzt würde.

Ist die Abbildung $\sigma : M \to N$ nicht injektiv oder surjektiv, dann folgt aus dem Faktorisierungssatz IV.1.18 die Existenz eines Matroids $M^+ \not\cong M$, so dass $M \overset{\iota}{\to} M^+ \overset{\kappa}{\to} N$. Dabei ist ι eine Injektion und κ eine Kontraktion. Reduziert dabei die Kontraktion den Girth-Kreis und ist die aus ι induzierte Restriktion keine Strong Port Map, dann liefert der Faktorisierungssatz eine Teilantwort auf die gestellte Frage. Ein möglicher Ansatz das Dichte-Problem zu lösen ist deshalb, das hinter dem Faktorisierungssatz stehende Konstruktionsprinzips (Higgs Major, [Kun86] Abschnitt 8.2) zu modifizieren bzw. zu verallgemeinern. Hierzu können die in dieser Arbeit untersuchten Konstruktionsprinzipien herangezogen werden.

Im Rahmen dieser Arbeit konnten wir keine abschließende Antwort auf dieses interessante Problem geben, die gefundenen Resultate und die untersuchten Beispiele deuten allerdings darauf hin, dass zumindest für einen „großen Teil“ an Paaren aus $\mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ ein Matroid X existiert, so dass die oben genannten Bedingungen erfüllt sind.

Abschließend möchte ich meinem Betreuer Prof. Hochstättler meinen herzlichen Dank für die hervorragende Betreuung und wegweisende Hilfe aussprechen.

Literaturverzeichnis

[AH04] Al-Hawary, Talal A.: *On Strong Maps of Matroids.* Academic Open Internet Journal, 13, 2004.

[AHM03] Al-Hawary, Talal Ali und D. George McRae: *Toward an Elementary Axiomatic Theory of the Category of LP-Matroids.* Applied Categorical Structures, 11:157–169, 2003.

[AHS90] Adamek, Jiri, Horst Herrlich und George E. Strecker: *Abstract and Concrete Categories - The Joy of Cats.* John Wiley & Sons Inc, 1990.

[Aig75] Aigner, Martin: *Kombinatorik - I. Grundlagen und Zähltheorie*, Band 1. Springer Verlag, 1975.

[Aig76] Aigner, Martin: *Kombinatorik - II. Matroide und Transveralstheorie*, Band 2. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1976.

[Bir35] Birkhoff, Garrett: *Abstract Linear Dependence And Lattices.* American Journal of Mathematics, 57:800–804, October 1935.

[Bir67] Birkhoff, Garrett: *Lattice Theory*, Band XXV. American Mathematical Society - Colloquiu Publications, Providence, Rhode Island, 1967.

[BR04] Beutelspacher, Albrecht und Ute Rosenbaum: *Projektive Geometrie.* Vieweg Verlag, 2004.

[Bry75] Brylawski, Tom: *Modular Constructions for Combinatorial Geometries.* Transactions of the American Mathematical Society, 203:1–44, 1975.

[Bry86] Brylawski, Thomas: *Constructions.* In: White, Neil (Herausgeber): *Theory of Matroids.* Cambridge University Press, 1986.

[Cra67] Crapo, Henry: *Structure theory for geometric lattices.* Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 38:14–22, 1967.

[Cra70] Crapo, Henry H.: *On the Foundation of Combinatorial Geometry.* Massachusetts Institute of Technology, 1970.

[Cra86] Crapo, Henry: *Orthogonality.* In: *Theory of Matroids.* White, Neil, 1986.

[Dei04] Deiser, Oliver: *Einführung in die Mengenlehre.* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004.

[Ern82] Erné, Marcel: *Einführung in die Ordnungstheorie.* Bibliographisches Institut - Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zurüch, 1982.

[Fai86] Faigle, Ulrich: *Lattices*, Kapitel 3, Seiten 45–61. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[FF00] Faure, Claude-Alain und Alfred Frölicher: *Modern Projective Geometry*. Kluwer Academic Press, London ; New York, 2000.

[Grä91] Grätzer, George: *General Lattice Theory*. Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland, 1991.

[Her67] Hermes, Hans: *Einführung in die Verbandstheorie*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2. Auflage, 1967.

[Hig68] Higgs, D. A.: *Strong Maps of Geometries*. Journal of Combinatorial Theory, 5:185–191, 1968.

[HN00] Hochstättler, W. und J. Nesetril: *A Note on MaxFlow-MinCut and Homomorphic Equivalence in Matroids*. Journal of Algebraic Combinatorics, 12:295–300, 2000.

[HN04] Hell, Paul und Jaroslav Nesetril: *Graphs and Homomorphisms*. Oxford University Press, 2004.

[Kun86] Kung, Joseph: *Strong Maps*. In: White, Neil (Herausgeber): *Theory of Matroids*. Cambridge University Press, 1986.

[Lau04] Lau, Dietlinde: *Algebra und Diskrete Mathematik 2*. Springer Verlag, 2004.

[May08] Mayhew, Dillon: *Matroids with nine elements*. Journal of Combinatorial Theory Series B, 98:415–431, 2008.

[MP96] Martin, Norman und Stephen Pollard: *Closure Spaces and Logic*. Kluwer Academic Press, London ; New York, 1996.

[NT99] Nesetril, Jaroslav und C. Tardif: *Density*. Contemporary Trends in Discrete Mathematics, Seiten 229–237, 1999.

[Oxl06] Oxley, James: *Matroid Theory*. Oxford University Press, 2006.

[SS94] Scheja, G. und U. Storch: *Lehrbuch der Algebra, Teil 1*. B.G. Teubner Stuttgart, 1994.