

Matroide
Vorlesung WS 96/97
frei nach James G. Oxley: “Matroid
Theory”[7]

Winfried Hochstättler
Zentrum für paralleles Rechnen
Universität zu Köln

Neu kompiliert 19. Oktober 2015

Inhaltsverzeichnis

0.1	Einführung	3
0.2	Präliminarien	5
0.2.1	Mengen	5
0.2.2	Körper und Matrizen	6
0.2.3	Graphen	6
0.2.4	Partialordnungen	9
1	Definitionen und Beispiele	11
1.1	Unabhängige Mengen und Kreise	11
1.2	Basen, Rang und Abschluß	16
1.3	Geometrie niederdimensionaler Matroide	24
1.4	Transversalmatroide	30
1.5	Geometrische Verbände und der Greedyalgorithmus	31
2	Dualität	36
2.1	Abstrakte Dualität	36
2.2	Lineare, graphische und transversale Duale	41
2.2.1	Lineare Duale	41
2.2.2	Graphische Duale	42
2.2.3	Transversale Duale	43
3	Minoren	46
3.1	Allgemeine Minoren	46

<i>Version vom 19. Oktober 2015</i>	2
3.2 Spezielle Minoren	49
3.3 Projektionen, Unterräume und der Satz vom Abschaum	53
4 Repräsentierbarkeit	56
4.1 Techniken zur Konstruktion von Repräsentierungsmatrizen	56
4.2 Repräsentierbarkeit über endlichen Körpern, binäre Matroide	61
4.3 Reguläre Matroide	63
4.4 Algebraische Matroide	65
5 Die verbotenen Minoren regulärer Matroide	68
5.1 Das Resultat und seine Lemmata	68
5.2 Der Beweis von Satz 5.1.4	71
Index	75

Einführung und Präliminarien

0.1 Einführung

Was sind Matroide? In der Tabelle in Abbildung 1 haben wir einige Begriffe aus der Linearen Algebra gesammelt, die in der Matroidtheorie ein Äquivalent haben, bzw. kein Äquivalent haben.

+	-
Unabhängigkeit	Linearkombination
Abhängigkeit	Längen
Basen	Skalarprodukt
Abschluß	(Winkel)
Unterraume	
Orthogonalität	
Homomorphismen	

Abbildung 1:

So gesehen kann man folgende „Gleichung“ aufstellen:

$$\text{Matroide} \longleftrightarrow \text{Lineare Algebra} \setminus \{\text{Zahlen, algebraische Verknüpfungen}\},$$

die auch in dem Titel der grundlegenden Arbeit zur Matroidtheorie ausgedrückt ist:

Hassler Whitney: “*On the abstract properties of linear dependence*”,
Amer. J. Mathematics **57**, 509 – 533, (1935).

Die Grafik in Abbildung 2 soll eine Vorstellung davon geben, wie Matroide und ihre wichtigen Spezialfälle einzuordnen sind.

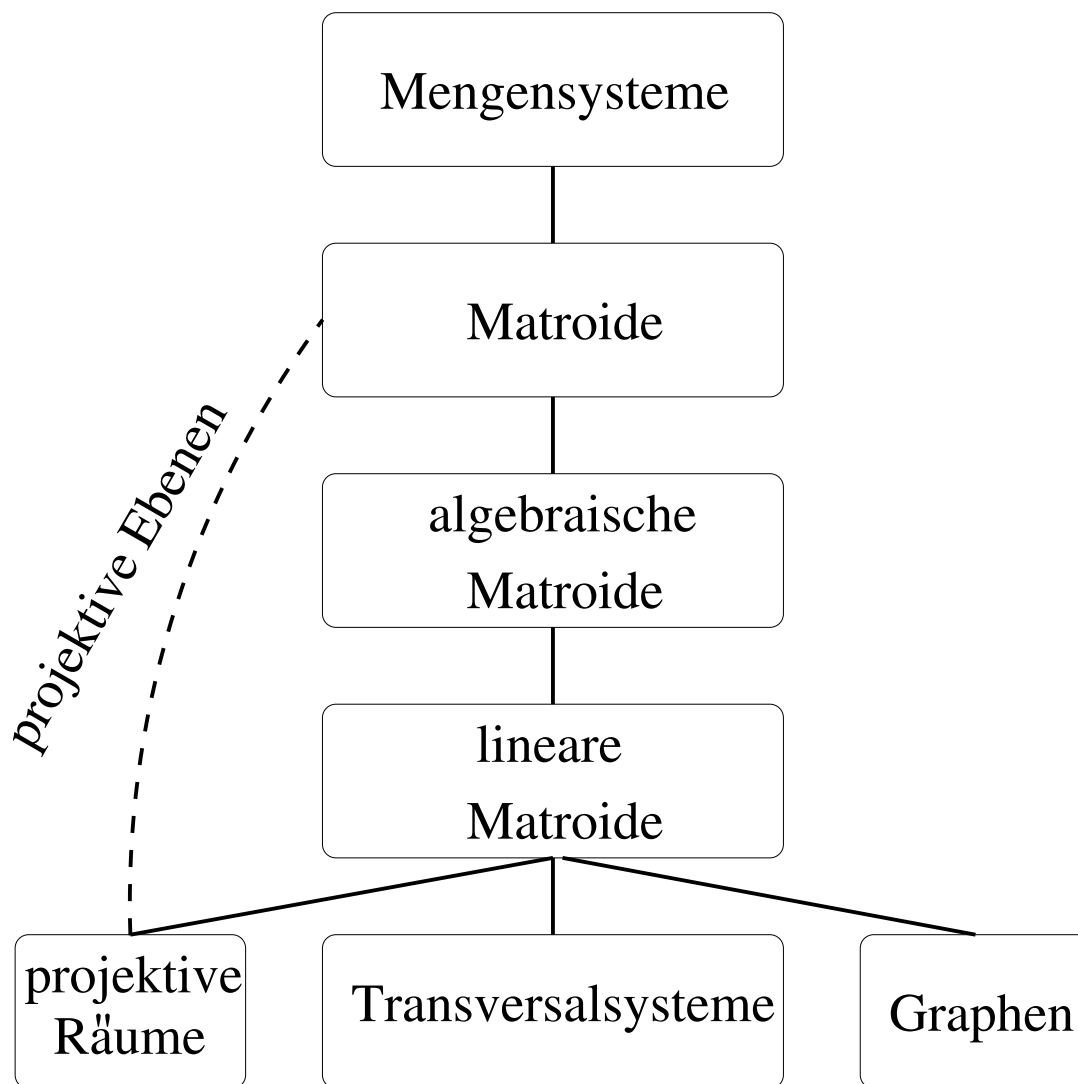


Abbildung 2:

0.2 Präliminarien

0.2.1 Mengen

Falls nicht ausdrücklich anders erwähnt, sind alle Mengen in dieser Vorlesung endlich. Ist E eine Menge, so bezeichnen wir mit

2^E die Potenzmenge von E und mit

$|E|$ die Kardinalität von E .

Die Symbole $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ bezeichnen wie üblich die komplexen, reellen, rationalen, ganzen bzw. natürlichen Zahlen. Dabei nehmen wir an, daß $0 \notin \mathbb{N}$.

Sind X_1, \dots, X_n Mengen, so bezeichnet

$$X_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} X_n := \bigcup_{i=1}^n X_i$$

die disjunkte Vereinigung der Mengen X_i , i.e. implizit sagen wir damit, daß $X_i \cap X_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

Sind X, Y zwei Mengen, so bedeuten

$X \subset Y$, daß $X \subseteq Y$ und $X \neq Y$,

$X \Delta Y := (X \cup Y) \setminus X \cap Y$ die *symmetrische Differenz*,

$X \cup e, X \setminus e$ Abkürzungen für $X \cup \{e\}$, bzw. $X \setminus \{e\}$.

Eine *Multimenge aus einer Menge S* ist eine Menge, bei der Vielfachheiten erlaubt sind. Formal haben wir eine Abbildung $f : S \rightarrow \mathbb{N}_0$. Ist z.B. $S = \{a, b, c, d\}$, so entspricht der Multimenge $\{a, a, b, b, b, d\}$ die Abbildung definiert durch $f(a) = 2, f(b) = 3, f(c) = 0, f(d) = 1$.

Sind $f : \mathbb{Z}^{\geq n_1} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{Z}^{\geq n_2} \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, so definieren wir

$$g(n) = O(f(n)) :\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |g(n)| \leq c|f(n)|.$$

0.2.2 Körper und Matrizen

Bekanntlich gibt es für jeden endlichen Körper \mathbb{K} eine Primzahl p und $k \in \mathbb{N}$, so daß \mathbb{K} genau p^k Elemente hat, also von der *Ordnung* p^k ist. Diesen – bis auf Isomorphie – eindeutigen Körper bezeichnen wir mit $GF(p^k)$ (das *Galoisfeld* der Ordnung p^k). Für $k = 1$ ist $GF(p) \cong \mathbb{Z}_p$. Wir werden uns vor allem für $GF(2)$ und $GF(3)$ interessieren.

Ist \mathbb{K} ein Körper und $d \in \mathbb{N}$, so bezeichnen wir mit \mathbb{K}^d den d -dimensionalen Vektorraum über \mathbb{K} .

Eine Matrix A ist, falls nicht anders erwähnt, stets eine $(m \times n)$ -Matrix. Mit I_r oder I bezeichnen wir die $(r \times r)$ -Einheitsmatrix und mit J_r oder J bzw. 0_r oder 0 die $(r \times r)$ -Matrix aus lauter Einsen bzw. aus lauter Nullen.

Ist V ein \mathbb{K} -Vektorraum und $X \subseteq V$, so bezeichnen wir mit $\langle X \rangle$ den *Abschluß* von X , i.e. die Menge aller \mathbb{K} -Linearkombinationen. Mit $\dim(V)$ bezeichnen wir die Dimension von V . Sind $U, W \subseteq V$ Unterräume, so ist

$$U + W := \{u + w \in V \mid u \in U, w \in W\}.$$

Eine Multimenge $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq V$ heißt *affin unabhängig*, falls $k \geq 1$ und es keine $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ gibt mit $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = 0$ und $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$.

0.2.3 Graphen

Ein *Graph* $G = (V, E)$ besteht aus einer Menge von *Knoten* V , einer Menge von *Kanten* E und einer *Inzidenzfunktion* $\varphi : E \rightarrow V \cup \binom{V}{2}$, wobei $\binom{V}{2}$ die Menge aller zweielementigen Teilmengen von V ist. Ist $\varphi(e) = \{u, v\}$, so sagen wir u ist *adjazent* zu v und e *inzidiert* mit u und v . Das Konzept der Multimenge erlaubt es, Kanten häufig mit ihrem Bild unter der Inzidenzfunktion zu identifizieren, was auch die etwas laxe Schreibweise $G = (V, E)$ rechtfertigt.

Abbildung 3 zeigt die bildliche Darstellung eines Graphen. Die Kante e_4 ist eine *Schleife*, da ihr Bild unter der Inzidenzfunktion einelementig ist. Die Kanten e_1 und e_2 sind *parallel*, da ihre Bildmengen unter φ übereinstimmen. Ein Graph heißt *einfach*, wenn er weder Schleifen, noch parallele Elemente hat. Der Knoten v_4 ist ein *isolierter Knoten*, da er mit keiner Kante inzidiert. Die Inzidenzfunktion eines Graphen kann man durch seine Inzidenzmatrix A beschreiben. Die Zeilen werden dabei durch die Knoten indiziert und die Spalten durch die Kanten. Der

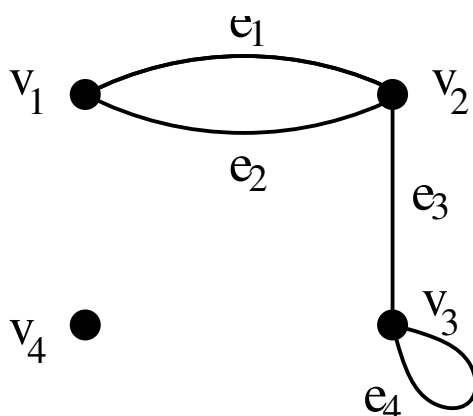


Abbildung 3: Ein Graph

Beispielgraph aus Abbildung 3 hat also die Inzidenzmatrix

$$A = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Der *Grad* $d_G(v)$ eines Knotens v ist die Summe der Einträge in der entsprechenden Zeile von A .

Ein Graph $H = (W, F)$ ist ein Teilgraph von $G = (V, E)$, wenn $W \subseteq V, F \subseteq E$ und $\varphi_H = \varphi_G|_F$. Ist $\emptyset \neq V' \subseteq V$, so bezeichnen wir mit $G[V']$ den von V' in G induzierten Teilgraphen von G mit Knotenmenge V' und Kantenmenge $E' := \{e \in E \mid \varphi(e) \subseteq V'\}$. Analog definieren wir für eine Kantenmenge $\emptyset \neq E' \subseteq E$ den von E' in G induzierten Teilgraphen $G[E']$ von G mit Knotenmenge $V' = \{v \in V \mid \exists e \in E' : v \in \varphi(e)\}$ und Kantenmenge E' .

Sind $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ Graphen, so ist ihre (nicht notwendig disjunkte) *Vereinigung* $G_1 \cup G_2$ der Graph mit Knotenmenge $V_1 \cup V_2$, Kantenmenge $E_1 \cup E_2$ und Inzidenzfunktion $\varphi_{G_1 \cup G_2}$ definiert durch

$$\varphi_{G_1 \cup G_2}(e) := \begin{cases} \varphi_{G_1}(e) & \text{falls } e \in E_1 \\ \varphi_{G_2}(e) & \text{falls } e \in E_2 \end{cases},$$

wobei wir annehmen, daß für $e \in E_1 \cap E_2 : \varphi_{G_1}(e) = \varphi_{G_2}(e)$.

Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $H = (W, F)$ sind *isomorph*, in Zeichen $G \cong H$, wenn es eine Bijektion der Knoten $\psi : V \rightarrow W$ und der Kanten $\vartheta : E \rightarrow F$ gibt mit $\varphi_H \circ \vartheta = \psi \circ \varphi_G$.

Ist $n \in \mathbb{N}$, so gibt es bis auf Isomorphie genau einen Graphen mit n Knoten, bei dem je zwei Knoten adjazent sind, den *vollständigen Graphen* K_n .

Ein Graph $G = (V, E)$ ist *bipartit*, wenn $V = X \dot{\cup} Y$ und außerdem $\forall e \in E : \varphi(e) \cap X \neq \emptyset \neq \varphi(e) \cap Y$. Der *vollständig bipartite Graph* $K_{n,n}$ ist der – bis auf Isomorphie eindeutige – bipartite Graph $G = (X \dot{\cup} Y, E)$ mit $|X| = n = |Y|$ und $e \in E \Leftrightarrow (\varphi(e) \cap X) \neq \emptyset \neq (\varphi(e) \cap Y)$.

Ein *Spaziergang* in einem Graphen ist eine alternierende Folge $v_0 e_1 v_1 \dots v_{k-1} e_k v_k$ von Knoten und Kanten, so daß $\forall i \in \{1, \dots, k\} : \varphi(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$. Sind v_1, \dots, v_k paarweise disjunkt, so ist der Spaziergang ein *Pfad*. Wir sagen, daß so ein Pfad ein (v_0, v_k) -*Pfad* ist und v_0 mit v_k *verbindet*. Die Knoten v_1, \dots, v_{k-1} heißen *innere Knoten* des Pfades. Die *Länge* eines Pfades ist die Anzahl der Knoten, die er enthält. Da ein Pfad in einem einfachen Graphen durch seine Knotenteilfolge determiniert ist, werden wir üblicherweise Pfade als Knotensequenzen angeben. Ein Graph G ist *zusammenhängend*, wenn je zwei Knoten durch einen Pfad verbunden sind, ansonsten ist er *unzusammenhängend*. Ist letzteres der Fall, so heißen die (mengentheoretisch) maximalen zusammenhängenden Teilgraphen von G seine (*Zusammenhangs*)*Komponenten*.

Ist P ein (u, v) -Pfad in $G = (V, E)$ und $e \in E \setminus P$ mit $\varphi(e) = \{u, v\}$, so heißt $P \cup e$ ein *Kreis*. Ein Graph ohne Kreise heißt *Wald*. Ein zusammenhängender Wald ist ein *Baum*. Ein *aufspannender Baum* eines zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ ist ein Teilgraph $T = (V, E')$ von G , der ein Baum ist.

Ein *Matching* in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Kantenmenge M mit $\forall v \in G[M] : d_{G[M]}(v) = 1$.

Ein *gerichteter Graph* $D = (V, A)$ unterscheidet sich von einem Graphen dadurch, daß die Bilder der Knoten (oder auch *Bögen*) unter der Inzidenzfunktion *geordnete* Tupel sind. Ist $a = (u, v)$ eine Kante in einem Digraph, so sagen wir, a verbindet u mit v . Der Kanten u ist der *Anfang* und v die *Spitze* von a . Obige Definitionen werden sinnvoll übertragen, z.B. ist ein *gerichteter Pfad* eine alternierende Folge $v_0 a_1 v_1 \dots v_{k-1} a_k v_k$ von Knoten und Kanten, so daß $\forall i \in \{1, \dots, k\} : \varphi(a_i) = (v_{i-1}, v_i)$.

Aus einem Graphen erhält man einen gerichteten Graphen, indem man ihn mit einer *Orientierung* versieht, d.h. für jede Kante Anfang und Spitze bestimmt. Ist andererseits $D = (V, E)$ ein Digraph, so erhält man, indem man das Bildtupel jedes Bogens durch die entsprechende Menge ersetzt, den *zugrundeliegenden Graphen* von D .

Übung 0.2.1 Sei $T = (V, E)$ ein kreisfreier Graph. Zeigen sie: Es gibt einen Knoten $v \in V$ mit $d(v) = 1$.

Übung 0.2.2 Sei $T = (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie die paarweise Äquivalenz folgender Aussagen:

1. T ist ein Baum.
2. T ist kreisfrei und $|E| = |V| - 1$.
3. T ist zusammenhängend und $|E| = |V| - 1$.

Eine besondere Klasse bilden die Graphen, deren Kanten sich kreuzungsfrei in die Ebene zeichnen lassen.

Definition 0.2.3 Ein ebener Graph ist ein Graph $G = (V, E)$ zusammen mit einer Einbettung f in die Ebene \mathbb{R}^2 , wobei die Knoten des Graphen auf Punkte in \mathbb{R}^2 und die Kanten auf offene Jordanbögen abgebildet werden, so daß,

- die Bilder von je zwei Objekten aus Knoten und Kanten disjunkt sind und
- das Bild eines Knoten v genau dann im topologischen Abschluß des Bildes eines Bogens e liegt, wenn v mit e inzidiert.

Ein Graph heißt planar, wenn er eine ebene Einbettung besitzt. Ist f eine ebene Einbettung eines planaren Graphen G , so besteht $\mathbb{R}^2 \setminus f(G)$ aus offenen einfach zusammenhängenden Mengen, die wir Gebiete von G nennen.

0.2.4 Partialordnungen

Definition 0.2.4 Eine partiell geordnete Menge oder Partialordnung (P, \leq) ist eine Menge P zusammen mit einer reflexiven, antisymmetrischen und transitiven Relation \leq , d.h. es gilt

$$(P1) \quad \forall p \in P : p \leq p,$$

$$(P2) \quad \forall p, q \in P : ((p \leq q \text{ und } q \leq p) \Rightarrow p = q),$$

$$(P3) \quad \forall p, q, r \in P : ((p \leq q \text{ und } q \leq r) \Rightarrow p \leq r)$$

Gilt $x \leq y$ und $x \neq y$, so schreiben wir $x < y$. Wir sagen y bedeckt x , wenn $x < y$ und $x \leq z \leq y \Rightarrow z \in \{x, y\}$.

Zwei Partialordnungen $(P_1, \leq_1), (P_2, \leq_2)$ sind isomorph, wenn es eine relations-treue Bijektion zwischen P_1 und P_2 gibt.

Sind $x, y \in P$, so heißt $z \in P$ obere (untere) Schranke von x und y , wenn $z \geq x$ und $z \geq y$. Ein Element z heißt kleinste obere (größte untere) Schranke oder Supremum $x \vee y$ (Infimum $x \wedge y$ von x und y , wenn z eine obere (untere) Schranke von x und y ist und für alle oberen (unteren) Schranken z' von x und y gilt $z \leq z'$ ($z \geq z'$)).

Eine Partialordnung ist ein Verband, wenn für Paar x, y Supremum und Infimum existieren.

Man kann eine endliche Partialordnung durch ihr HASSE-Diagramm repräsentieren. Dies ist eine graphische Repräsentierung eines einfachen Graphen, bei dem, falls $x < y$ ist, y oberhalb von x gezeichnet wird und $x < y$ mit einer Kante verbunden sind genau dann, wenn y x bedeckt.

Beispiel 0.2.5 Sei $P = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ und $x \leq y \Leftrightarrow x$ ist ein Teiler von y . Dann ist (P, \leq) eine Partialordnung. Abbildung 4 zeigt ihr HASSE-Diagramm. Die Partialordnung ist ein Verband und $x \vee y = \text{kgV}(x, y)$, $x \wedge y = \text{ggT}(x, y)$.

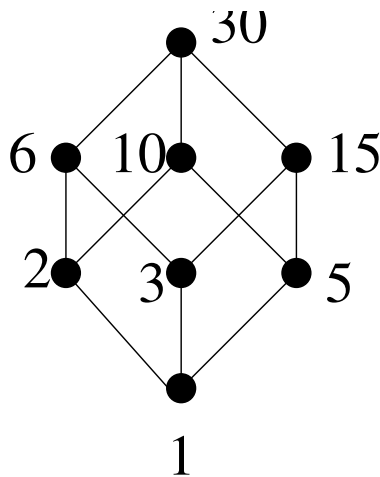


Abbildung 4: Das HASSE-Diagramm der Teiler von 30

Kapitel 1

Definitionen und Beispiele

In der Matroidtheorie gibt es kein Standardaxiomensystem. Das liegt daran, daß bei unterschiedlichem Zugang sich verschiedene Strukturen in den Matroiden zur Axiomatisierung anbieten. Da die eine Struktur die andere jeweils impliziert, bezeichnet man diese Axiomensysteme als *kryptomorph*, da sie implizit die gleiche Struktur definieren. Wir werden im nächsten Abschnitt die Unabhängigkeitsaxiome, die durch die lineare Algebra motiviert sind, und die Kreisaxiome, die bei einem graphentheoretischen Zugang näherliegend sind, kennenlernen und ihre Äquivalenz beweisen.

1.1 Unabhängige Mengen und Kreise

Definition 1.1.1 Ein Matroid M ist ein geordnetes Paar (E, \mathcal{I}) , bestehend aus einer endlichen Menge E und einer Mengenfamilie $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ mit

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$,

(I2) $I \in \mathcal{I}$ und $I' \subseteq I \Rightarrow I' \in \mathcal{I}$,

(I3) $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ und $|I_1| < |I_2| \Rightarrow \exists e \in I_2 \setminus I_1 : I_1 \cup e \in \mathcal{I}$.

Bedingung (I3) nennen wir Basisergänzungsaxiom.

Ist $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid, so sagen wir auch M ist ein Matroid auf E . Die Mengen in \mathcal{I} sind die unabhängigen Mengen von M , und E ist die Grundmenge von M . Werden mehrere Matroide betrachtet, so unterscheiden wir die entsprechenden Familien bzw. Mengen durch die Schreibweise $\mathcal{I}(M)$ und $E(M)$. Die Mengen in $2^E \setminus \mathcal{I}$ heißen abhängig.

Wie oben und durch die Namensgebung bereits angedeutet, sind diese Axiome durch Betrachtung der „Unabhängigkeitsstruktur“ von Mengen von Vektoren in einem Vektorraum motiviert. Der Name „Matroid“ stammt daher, daß man endlich viele Vektoren als Spalten in einer Matrix zusammenfassen kann.

Proposition 1.1.2 *Sei E die Menge der Spaltenlabel einer Matrix A über einem Körper \mathbb{K} , und sei \mathcal{I} die Menge der Teilmengen I von E , bei denen die Multimenge der mit Elementen aus I gelabelten Spalten linear unabhängig in dem Vektorraum \mathbb{K}^m ist. Dann ist (E, \mathcal{I}) ein Matroid.*

Beweis. Offensichtlich erfüllt \mathcal{I} die Axiome (I1) und (I2). Zur Verifikation von (I3) seien $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ mit $|I_1| < |I_2|$. Nach dem Basisergänzungssatz der linearen Algebra läßt sich I_1 mit Elementen aus $I_1 \cup I_2$ zu einer Basis B von $\langle I_1 \cup I_2 \rangle$ ergänzen. Aus Dimensionsgründen ist $B \setminus \langle I_1 \rangle = B \setminus I_1 \neq \emptyset$. Jedes $e \in B \setminus I_1$ erfüllt dann die Behauptung. \square

Das Matroid, das wir aus der Matrix A erhalten, bezeichnen wir mit $M[A]$ und nennen es das *Vektormatroid* von A .

Beispiel 1.1.3 *Betrachten wir folgende Matrix über $GF(2)$:*

$$A = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Dann ist $E = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$. Die Familie der abhängigen Mengen dieses Matroids ist also

$$\{X \subseteq E \mid \{4\} \subseteq X \text{ oder } \{1, 2\} \subseteq X\}.$$

Also sind $\{4\}$ und $\{1, 2\}$ die minimal abhängigen Mengen, das sind solche abhängige Mengen, deren Teilmengen alle unabhängig sind.

Definition 1.1.4 *Ein Kreis in einem Matroid $M = (E, \mathcal{I})$ ist eine minimal abhängige Teilmenge $C \subseteq E$. Die Menge aller Kreise in M bezeichnen wir mit \mathcal{C} oder mit $\mathcal{C}(M)$. Ist C ein Kreis mit $|C| = n$, so nennen wir n auch die Länge von C .*

Offensichtlich ist die Familie der Kreise eines Matroids wohldefiniert. Andererseits kann man aus der Familie der Kreise auch die Familie der unabhängigen Mengen rekonstruieren, nämlich als Familie der Mengen I , die keine Menge $C \in \mathcal{C}$ enthalten.

Lemma 1.1.5 Sei \mathcal{C} die Familie der Kreise eines Matroids $M = (E, \mathcal{I})$. Dann gilt

(C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$, und

(C2) $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ und $C_1 \subseteq C_2 \Rightarrow C_1 = C_2$,

(C3) $\forall C_1 \neq C_2 \in \mathcal{C} \forall e \in C_1 \cap C_2 \exists C_3 \in \mathcal{C} : C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus e$.

Beweis. (C1) und (C2) folgen unmittelbar aus der Definition eines Kreises. Seien also C_1 und C_2 verschiedene Kreise und $e \in C_1 \cap C_2$. Angenommen $(C_1 \cup C_2) \setminus e$ wäre unabhängig. Sei dann $f \in C_2 \setminus C_1 \neq \emptyset$ (nach (C2)). Da C_2 ein Kreis ist, gilt $C_2 \setminus f \in \mathcal{I}$. Sein nun $I \in \mathcal{I}$ maximal gewählt mit der Eigenschaft, daß $f \notin I \subseteq C_1 \cup C_2$. Da $C_1 \not\subseteq I$ ist, folgt $|I| < |(C_1 \cup C_2) \setminus e|$ im Widerspruch entweder zur Maximalität von I oder zum Basisergänzungsaxiom (I3). \square

Die Bedingung (C3) heißt *schwaches Kreiselimitationsaxiom*. Dies deutet bereits an, daß (C1),(C2) und (C3) die Familie der Kreise eines Matroids charakterisieren:

Satz 1.1.6 Sei E eine endliche Menge und $\mathcal{C} \subseteq 2^E$ eine Familie von Teilmengen von E , die (C1),(C2) und (C3) erfüllt. Sei $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ die Familie derjenigen Teilmengen I von E , die kein Element C von \mathcal{C} enthalten. Dann ist (E, \mathcal{I}) ein Matroid und \mathcal{C} die Menge seiner Kreise.

Beweis. Zunächst zeigen wir, daß \mathcal{I} die Axiome (I1),(I2) und (I3) erfüllt. In den ersten beiden Fällen ist dies klar. Seien also $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ mit $|I_1| < |I_2|$. Da $I_2 \in \mathcal{I}$ ist, gibt es $I \subseteq (I_1 \cup I_2)$ mit $I \in \mathcal{I}$ und $|I| > |I_1|$. Sei ein solches I gewählt mit $k = |I_1 \setminus I|$ minimal. Gilt $k = 0$ sind wir fertig. Ansonsten sei $e \in I_1 \setminus I$. Seien nun $f_1, f_2 \in I \setminus I_1$ mit $f_1 \neq f_2$. Dann sind $X_{f_i} := I \setminus f_i \cup e$ Mengen mit $|X_{f_i}| > |I_1|$, $X_{f_i} \subseteq I_1 \cup I_2$ und $|I_1 \setminus X_{f_i}| < |I_1 \setminus I|$. Also sind beide X_{f_i} abhängig. Seien $C_{f_i} \subseteq X_{f_i}$ Kreise. Da die Mengen $X_{f_i} \setminus e \subseteq I$ unabhängig sind, haben wir $e \in C_{f_1} \cap C_{f_2}$. Nach (C3) gibt es ein $C' \subseteq ((C_{f_1} \cup C_{f_2}) \setminus e) \subseteq I \in \mathcal{I}$. Dieser Widerspruch impliziert die Gültigkeit von (I3). Daß \mathcal{C} genau die Menge der Kreise dieses Matroids ist, folgt sofort aus der paarweisen Äquivalenz der folgenden Aussagen.

1. C ist ein Kreis,
2. $C \notin \mathcal{I}$ und $\forall x \in C : C \setminus x \in \mathcal{I}$,
3. $\exists C' \in \mathcal{C} : C' \subseteq C$ aber $C' \not\subseteq C$,
4. $C \in \mathcal{C}$.

\square

Aus 1.1.6 und 1.1.5 erhalten wir insgesamt folgendes

Korollar 1.1.7 Sei $\mathcal{C} \subseteq 2^E$. Dann ist \mathcal{C} die Menge der Kreise eines Matroids auf E genau dann, wenn \mathcal{C} (C1), (C2) und (C3) erfüllt.

Ein Kreis, der aus einer unabhängigen Menge durch Hinzunahme eines Elementes entsteht, ist eindeutig:

Proposition 1.1.8 Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid, $I \in \mathcal{I}$, $e \in E$ und $I \cup e \notin \mathcal{I}$. Dann gibt es genau einen Kreis $C(I, e) \subseteq I \cup e$ und es gilt $e \in C(I, e)$.

Beweis. Zu zeigen ist nur die Eindeutigkeit. Angenommen, es gäbe zwei solcher Kreise C und C' , dann enthielte nach (C3) die Menge $((C \cup C') \setminus e) \subseteq I$ einen Kreis. Widerspruch. \square

Wie der Name der minimalen abhängigen Mengen und 1.1.3 schon andeuten, ist die Betrachtung der Familie aller Kreise aus der Graphentheorie motiviert:

Proposition 1.1.9 Sei E die Menge der Kanten eines Graphen $G = (V, E)$ und \mathcal{C} die Menge der Kantenmengen von Kreisen des Graphen. Dann ist \mathcal{C} die Menge der Kreise eines Matroids.

Beweis. Wiederum sind (C1) und (C2) trivial. Seien also C_1, C_2 Kantenmengen verschiedener Kreise in G und $e \in C_1 \cap C_2$. Betrachte den Graphen $G' = G[C_1 \Delta C_2] = G'(V', E')$. Dann gilt $\forall v' \in V' : d_{G'} \geq 2$ und $e \notin E'$. Offensichtlich muß G' also einen Kreis mit Kantenmenge wie in (C3) verlangt enthalten. \square

Dieses Matroid, das wir aus einem Graphen erhalten, nennen wir *Kreisimatroid* oder *Polygonmatroid* $M(G)$ von G . Die unabhängigen Mengen von $M(G)$ sind offensichtlich die Kantenmengen von Teilgraphen von G , die Wälder sind. Wir werden im folgenden im Zusammenhang mit Matroiden von Kreisen, Wäldern oder Bäumen sprechen, wenn wir „nur“ deren Kantenmengen meinen.

Vergleichen wir das Kreisimatroid des Graphen in Abbildung 3 mit dem Vektormatroid in Beispiel 1.1.3, so erkennen wir, daß die Bijektion $\psi(e_i) = i$ die Kreise von $M(G)$ genau auf die Kreise von $M[A]$ und also auch die unabhängigen Mengen auf die unabhängigen Mengen abbildet. Allgemein definieren wir:

Definition 1.1.10 Zwei Matroide $M_1 = (E_1, \mathcal{I}_1), M_2 = (E_2, \mathcal{I}_2)$ heißen isomorph, in Zeichen $M_1 \cong M_2$, wenn es eine Bijektion $\psi : E_1 \rightarrow E_2$ gibt mit

$$I \in \mathcal{I}_1 \Leftrightarrow \psi(I) := \{\psi(e) \in E_2 \mid e \in I\} \in \mathcal{I}_2.$$

Ein Matroid, das isomorph zu einem Kreismatroid ist, heißt *graphisch*. Ist ein Matroid M isomorph zu dem Vektormatroid $M[A]$ einer Matrix A über einem Körper \mathbb{K} , so sagen wir M ist *linear über \mathbb{K}* oder *repräsentierbar über \mathbb{K}* oder einfach *\mathbb{K} -repräsentierbar*. Ein Matroid ist *linear*, wenn es einen Körper \mathbb{K} gibt, über dem es linear ist.

Nicht jedes Matroid ist linear. Ganz im Gegenteil, es gibt dafür einfach „zu viele“ Matroide. Üblicherweise mißt man die Größe eines Matroids durch die Anzahl seiner Elemente $n = |E|$. Oxley gibt Referenzen auf Arbeiten [5],[8], in denen folgendes gezeigt wird:

Bezeichne $f(n)$ die Anzahl nicht-isomorpher Matroide mit n Elementen. Dann gilt

$$\begin{aligned} n - \frac{3}{2} \log_2 n + O(\log_2 \log_2 n) &\leq \log_2 \log_2 f(n) \\ &\leq n - \log_2 n + O(\log_2 \log_2 n). \end{aligned}$$

Also ist $f(n)$ von der Größenordnung 2^{2^n} .

Definition 1.1.11 *Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und \mathcal{C} die Menge seiner Kreise. Seien $e, f, g \in E$. Dann sagen wir e, f sind *parallel*, falls $\{e, f\} \in \mathcal{C}$, g ist eine *Schleife*, falls $g \in \mathcal{C}$. Wegen (C3) ist die Relation*

$$e \sim f \Leftrightarrow e, f \text{ sind parallel}$$

*eine Äquivalenzrelation. Die zugehörigen Klassen heißen Parallelenklassen. Ein Matroid heißt *einfach* oder auch *kombinatorische Geometrie*, wenn es keine Schleifen hat und alle Parallelenklassen *trivial* sind, d.h. aus einem Element bestehen.*

Übung 1.1.12 *Betrachte die Matrix*

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Sei $M_q[A]$ das Vektormatroid der Matrix A betrachtet als Matrix über $GF(q)$ für $q \in \{2, 3\}$. Zeige:

- Die Familien der Kreise von $M_2[A]$ und $M_3[A]$ sind verschieden.*

2. $M_2[A]$ ist graphisch und $M_3[A]$ ist nicht graphisch.
3. $M_2[A]$ ist $GF(3)$ -repräsentierbar aber $M_3[A]$ ist nicht $GF(2)$ -repräsentierbar.

Definition 1.1.13 Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid, dann sagen wir

$$M \text{ ist } \left\{ \begin{array}{l} \text{binär,} \\ \text{ternär,} \\ \text{regulär,} \end{array} \right\} \text{ wenn es über } \left\{ \begin{array}{l} GF(2) \\ GF(3) \\ \text{jedem Körper } \mathbb{K} \end{array} \right\} \text{ linear ist.}$$

Übung 1.1.14 Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $M(G)$ sein Polygonmatroid und \mathbb{K} ein Körper. Zeige $M(G)$ ist \mathbb{K} -repräsentierbar.

1.2 Basen, Rang und Abschluß

Definition 1.2.1 Sei (E, \mathcal{I}) ein Matroid, dann heißt $B \in \mathcal{I}$ Basis, wenn es kein $I \in \mathcal{I}$ gibt mit $B \subset I$. Die Familie der Basen bezeichnen wir mit \mathcal{B} .

Die Familie der Basen spiegelt die „Dimension“ des Matroids wieder:

Lemma 1.2.2 Sind B_1 und B_2 Basen eines Matroids $M = (E, \mathcal{I})$, so ist $|B_1| = |B_2|$.

Beweis. Die Annahme $|B_1| < |B_2|$ liefert mit (I3) sofort einen Widerspruch zur Maximalität von B_1 . \square

Wiederum kann man die Familie der Basen axiomatisch beschreiben:

Lemma 1.2.3 Sei \mathcal{B} die Familie der Basen eines Matroids $M = (E, \mathcal{I})$. Dann gilt

(B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$, und

(B2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \forall e \in B_1 \setminus B_2 \exists f \in B_2 \setminus B_1 : B_1 \setminus e \cup f \in \mathcal{B}$.

Beweis. Da $\emptyset \in \mathcal{I}$ ist, gilt (B1). Sei $e \in B_1 \setminus B_2$. Nach Lemma 1.2.2 ist $|B_1 \setminus e| < |B_2|$. Nach (I3) gibt es ein $f \in B_2 \setminus (B_1 \setminus e) = B_2 \setminus B_1$ mit $B_1 \setminus e \cup f \in \mathcal{I}$. Wiederum wegen Lemma 1.2.2 haben wir sogar $B_1 \setminus e \cup f \in \mathcal{B}$. \square

Den Beweis, daß (B1) und (B2) die Basen eines eindeutigen Matroids charakterisieren, bereiten wir durch folgendes Lemma vor:

Lemma 1.2.4 Sei $\mathcal{B} \subseteq 2^E$ mit (B1) und (B2) und $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Dann gilt $|B_1| = |B_2|$.

Beweis. Angenommen es gäbe B_1, B_2 mit $|B_2| < |B_1|$. Wir wählen unter allen solchen Paaren eines mit $|B_1 \setminus B_2|$ minimal. Sei nun $e \in B_1 \setminus B_2$. Nach (B2) gibt es $f \in B_2 \setminus B_1$ mit $(B_1 \setminus e \cup f) \in \mathcal{B}$ im Widerspruch zur Wahl von B_1 und B_2 .
□

Satz 1.2.5 Sei $\mathcal{B} \subseteq 2^E$ mit (B1) und (B2). Sei

$$\mathcal{I} := \{I \in 2^E \mid \exists B \in \mathcal{B} : I \subseteq B\}.$$

Dann ist (E, \mathcal{I}) ein Matroid und \mathcal{B} die Menge seiner Basen.

Beweis. (B1) impliziert (I1), und (I2) ist per definitionem klar. Angenommen (I3) wäre verletzt und $|I_1| < |I_2|$ bildeten ein Gegenbeispiel. Wir wählen nun $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ mit $I_i \subseteq B_i$ und $|B_2 \setminus (I_2 \cup B_1)|$ minimal. Da für alle $e \in I_2 : I_1 \cup e \notin \mathcal{I}$ ist, gilt

$$I_2 \setminus B_1 = I_2 \setminus I_1. \quad (1.1)$$

Angenommen $B_2 \setminus (I_2 \cup B_1) \neq \emptyset$, sei dann e aus dieser Menge. Nach (B2) gibt es $f \in B_1 \setminus B_2$ mit $B_2 \setminus e \cup f \in \mathcal{B}$ im Widerspruch zur Wahl von B_1, B_2 . Somit impliziert (1.1)

$$B_2 \setminus B_1 = I_2 \setminus I_1. \quad (1.2)$$

Angenommen $B_1 \setminus (I_1 \cup B_2) \neq \emptyset$, und e aus dieser Menge. Wiederum gibt es $f \in B_2 \setminus B_1 = I_2 \setminus I_1$ mit $B_1 \setminus e \cup f \in \mathcal{B}$. Dies impliziert, daß $I_1 \cup f \in \mathcal{I}$ im Widerspruch zur Annahme, daß I_1 und I_2 ein Gegenbeispiel bilden. Wir erhalten somit

$$B_1 \setminus B_2 \subseteq I_1 \setminus I_2. \quad (1.3)$$

Mit Lemma 1.2.2 erhalten wir folgende Ungleichungskette:

$$|I_2 \setminus I_1| \stackrel{1.2}{=} |B_2 \setminus B_1| \stackrel{1.2.2}{=} |B_1 \setminus B_2| \stackrel{1.3}{\leq} |I_1 \setminus I_2|.$$

Dies impliziert aber $|I_1| \geq |I_2|$. Widerspruch. Offensichtlich ist \mathcal{B} wieder die Menge der Basen des Matroids. □

Wir fassen zusammen:

Korollar 1.2.6 Eine Familie $\mathcal{B} \subseteq 2^E$ ist genau dann die Menge der Basen eines Matroids, wenn sie (B1) und (B2) erfüllt.

Wir hatten schon angedeutet, daß Proposition 1.1.8 vor allem für Basen interessant ist:

Definition 1.2.7 Sei B eine Basis in einem Matroid (E, \mathcal{I}) und $e \in E \setminus B$. Den nach 1.1.8 eindeutigen Kreis $C(B, e)$ nennen wir Fundamentalkreis von e bzgl. B .

Übung 1.2.8 Sei C ein Kreis in einem Matroid $M = (E, \mathcal{I})$. Zeige:

$$\forall e \in C \exists B \in \mathcal{B} : C = C(B, e).$$

Beispiel 1.2.9 Seien $0 \leq m \leq n$ ganze Zahlen. Sei E eine Menge mit $|E| = n$ und $\mathcal{B} = \binom{E}{m}$ die Menge aller m -elementigen Teilmengen von E . Trivialerweise erfüllt \mathcal{B} (B1) und (B2). Das zugehörige Matroid nennen wir das uniforme Matroid vom Rang m mit n Elementen $\mathcal{U}_{m,n}$. Ist $m = n$ so nennen wir $\mathcal{U}_{n,n}$ das freie Matroid mit n Elementen.

Übung 1.2.10 Beschreibe Kreise und unabhängige Mengen des uniformen Matroids $\mathcal{U}_{m,n}$.

Hat man ein Vektormatroid A , so kann man offensichtlich auch Matroide auf Teilmengen der Spaltenmenge betrachten. Überträgt man dies auf ein allgemeines Matroid $M = (E, \mathcal{I})$ für $F \subseteq E$, so sieht man z.B. direkt, daß die Familie

$$\mathcal{I}(M|_F) := \{I \subseteq F \mid I \in \mathcal{I}\}$$

die Unabhängigkeitsaxiome aus Definition 1.1.1 erfüllt.

Definition 1.2.11 Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $F \subseteq E$. Das Matroid $M|_F := (F, \mathcal{I}(M|_F))$ nennen wir die Restriktion von M auf F und sagen auch $M|_F$ entsteht durch Löschen von $E \setminus F$. Neben $M|_F$ schreiben wir dafür auch $M \setminus (E \setminus F)$.

Ist $X \subseteq E$ so können wir wegen Lemma 1.2.2 den Rang $r(X)$ definieren als

$$r(X) := |B_X| \text{ für ein } B_X \in \mathcal{B}(M|_X).$$

Die Rangfunktion ermöglicht es uns, die „Dimension“ einer Teilmenge zu betrachten. Auch die Rangfunktion liefert ein Axiomensystem. Das Axiom (R3) spiegelt den Dimensionssatz der Linearen Algebra

$$\dim(U \cup V) + \dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V),$$

d.i. die *Modularität* des Unterraumverbandes eines Vektorraumes wieder. Da in Matroiden fehlende Punkte im Schnitt zur Dimensionserniedrigung führen können, erhalten wir eine Ungleichung:

Lemma 1.2.12 Die Rangfunktion eines Matroids $M = (E, \mathcal{I})$ ist nicht-negativ, subkardinal, monoton und submodular, d.h. sie erfüllt die folgenden Bedingungen:

$$(R1) \quad \forall X \subseteq E : 0 \leq r(X) \leq |X|,$$

$$(R2) \quad \forall X \subseteq Y \subseteq E : r(X) \leq r(Y),$$

$$(R3) \quad \forall X, Y \subseteq E : r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y).$$

Beweis. Wiederum sind (R1) und (R2) trivial. Sei $B_{X \cap Y}$ eine Basis für $X \cap Y$. Da $B_{X \cap Y} \in \mathcal{I}(M|_{X \cup Y})$ können wir diese durch wiederholte Anwendung von (I3) zu einer Basis $B_{X \cup Y}$ von $X \cup Y$ ergänzen und erhalten

$$\begin{aligned} r(X) + r(Y) &\geq |B_{X \cup Y} \cap X| + |B_{X \cup Y} \cap Y| \\ &= |(B_{X \cup Y} \cap X) \cup (B_{X \cup Y} \cap Y)| + |(B_{X \cup Y} \cap X) \cap (B_{X \cup Y} \cap Y)| \\ &= |B_{X \cup Y} \cap (X \cup Y)| + |B_{X \cup Y} \cap (X \cap Y)| \\ &= |B_{X \cup Y}| + |B_{X \cap Y}|. \end{aligned}$$

□

Den von einer Menge von Vektoren in einem Vektorraum V aufgespannten Vektorraum kann man betrachten als Menge von Vektoren, die die Dimension nicht vergrößern. Dabei spielt die Reihenfolge keine Rolle, d.h. die *lineare Hülle* ist ein Hüllenoperator:

Definition 1.2.13 Sei E eine Menge und $cl : 2^E \rightarrow 2^E$. Dann heißt cl ein Hüllenoperator, wenn

$$(CL1) \quad \forall X \subseteq E : X \subseteq cl(X),$$

$$(CL2) \quad \forall X \subseteq Y \subseteq E : cl(X) \subseteq cl(Y),$$

$$(CL3) \quad \forall X \subseteq E : cl(cl(X)) = cl(X).$$

Bevor wir zeigen, daß die Rangaxiome das Matroid axiomatisieren, definieren wir zunächst mit Hilfe der Rangfunktion einen Hüllenoperator.

Lemma 1.2.14 *Sei r eine subkardinale, monotone, submodulare Funktion, also z.B. Rangfunktion eines Matroids. Definieren wir die Abschlußfunktion von M als*

$$\forall X \subseteq E : cl(X) := \{e \in E \mid r(X \cup e) = r(X)\},$$

dann ist cl ein Hüllenoperator und

$$r(cl(X)) = r(X).$$

Beweis. (CL1) und (CL2) sind klar. Wir zeigen zunächst die letzte Behauptung per Induktion über $k := cl(X) \setminus X$. Da $k = 0$ klar ist, sei $cl(X) \setminus X = \{y_1 \dots, y_{k+1}\}$. Dann haben wir nach Induktionsvoraussetzung und (R3):

$$\begin{aligned} r(X) + r(X) &= r(X \cup \{y_1 \dots, y_k\}) + r(X \cup y_{k+1}) \\ &\geq r(X \cup \{y_1 \dots, y_{k+1}\}) + r(X), \end{aligned}$$

somit $r(cl(X)) \leq r(X)$, und (R2) impliziert die Gleichheit. Zu zeigen bleibt (CL3). Angenommen $y \in cl(cl(X)) \setminus cl(X)$. Dann haben wir $r(X \cup y) > r(X) = r(cl(X)) = r(cl(X) \cup y)$. Widerspruch. \square

Satz 1.2.15 *Sei $r : 2^E \rightarrow \mathbb{N}$ eine subkardinale, monotone, submodulare Funktion. Sei $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ die Menge der Teilmengen $X \subseteq E$ mit $r(X) = |X|$. Dann ist $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid mit Rangfunktion r .*

Beweis. Nach (R1) ist $0 \leq r(\emptyset) \leq |\emptyset| = 0$, also gilt (I1). Ist $e \notin I$ gilt wegen (R3) und (R1)

$$r(I \cup e) \leq r(I) + r(e) \leq r(I) + 1. \quad (1.4)$$

Dies impliziert sofort (I2). Seien nun $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ mit $|I_1| < |I_2|$. Angenommen $\forall e \in I_2 \setminus I_1 : I_1 \cup e \notin \mathcal{I}$, so hätten wir $I_2 \subseteq cl(I_1)$ und somit mit Lemma 1.2.14 $r(I_2) \leq r(I_1) < |I_2|$ im Widerspruch zu $I_2 \in \mathcal{I}$. Also erfüllt \mathcal{I} (I3).

Bezeichnet r_M die Rangfunktion von $M = (E, \mathcal{I})$, so bleibt zu zeigen $r = r_M$. Sei also $X \subseteq E$ und B_X eine Basis von $M|_X$. Dann ist $B_X \in \mathcal{I}$, also $r_M(X) = |B_X| = r(B_X) \leq r(X)$. Andererseits ist per definitionem B_X kardinalitätsmaximal in X mit $r(B_X) = |B_X|$. Lemma 1.2.14 impliziert also $r(B_X) = r(X)$. \square

Wir fassen zusammen:

Korollar 1.2.16 Sei $r : 2^E \rightarrow \mathbb{N}$. Dann ist r die Rangfunktion eines Matroids auf E genau dann, wenn r (R1), (R2) und (R3) erfüllt.

Implizit haben wir auch noch folgendes bewiesen:

Proposition 1.2.17 Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid mit Rangfunktion r . Dann gilt

1. $X \in \mathcal{I} \Leftrightarrow |X| = r(X)$,
2. $X \in \mathcal{B} \Leftrightarrow |X| = r(X) = r(E)$,
3. $X \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \forall e \in X : r(X \setminus e) = r(X) = |X| - 1$.

Übung 1.2.18 Gib die Rangfunktion für uniforme und graphische Matroide an.

Beispiel 1.2.19 Sei $\mathcal{P} \subseteq \binom{E}{k}$ eine Teilfamilie der k -elementigen Teilmengen von E mit der Eigenschaft, daß $\forall P_1, P_2 \in \mathcal{P} : |P_1 \cap P_2| = k - 1 \Rightarrow \binom{P_1 \cup P_2}{k} \subseteq \mathcal{P}$. Sei $\mathcal{C} = \mathcal{P} \cup \{C \in \binom{E}{k+1} \mid \forall C' \in \mathcal{P} : C' \not\subseteq C\}$. Offensichtlich erfüllt diese Menge die Kreisaxiome. Wir nennen ein solches Matroid ein paving matroid.

Sei $E = \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3\}$, $k = 5$ und

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \{a_1, a_2, a_3, b_i, c_i \mid i = 1, 2, 3\} \cup \\ &\cup \{b_1, b_2, b_3, a_i, c_i \mid i = 1, 3\} \cup \{c_1, c_2, c_3, a_i, b_i \mid i = 1, 2, 3\}, \end{aligned}$$

das sind die Mengen, die in Abbildung 1.2.19 wie ein L oder ein T aussehen. Dann ist \mathcal{P} ein paving matroid.

$$\begin{array}{ccc} a_1 & - & a_2 & - & a_3 \\ | & & | & & | \\ b_1 & - & b_2 & - & b_3 \\ | & & | & & | \\ c_1 & - & c_2 & - & c_3. \end{array}$$

Abbildung 1.1: Das Tic-Tac-Toe Matroid

Wenden wir uns nun wieder dem Abschlußoperator zu. Er hat eine dem Axiom (B3) ähnliche Austauschenschaft, die wir als Steinitz-MacLane-Austauschenschaft notieren:

Lemma 1.2.20

(CL4) $\forall X \subseteq E \forall e \in E : f \in \text{cl}(X \cup e) \setminus \text{cl}(X) \Rightarrow e \in \text{cl}(X \cup f) \setminus \text{cl}(X)$.

Beweis. Sei $f \in \text{cl}(X \cup e) \setminus \text{cl}(X)$. Wegen Gleichung 1.4 ist $r(X \cup \{f, e\}) = r(X \cup e) = r(X) + 1$ und außerdem $r(X) + 1 \geq r(X \cup f) > r(X)$. Folglich ist $r(X \cup \{f, e\}) = r(X \cup f)$ und somit $e \in \text{cl}(X \cup f)$. \square

Satz 1.2.21 Sei E eine Menge und $\text{cl} : 2^E \rightarrow 2^E$ ein Hüllenoperator mit Steinitz-MacLane-Austauschseigenschaft, also eine Abbildung, die (CL1), (CL2), (CL3) und (CL4) erfüllt. Sei

$$\mathcal{I} := \{X \subseteq E \mid \forall e \in X : e \notin \text{cl}(X \setminus e)\}.$$

Dann ist (E, \mathcal{I}) ein Matroid mit Abschlußoperator cl .

Beweis. (I1) ist trivialerweise erfüllt. Sei nun $e \in I' \subset I \in \mathcal{I}$, so führt die Annahme $e \in \text{cl}(I' \setminus e)$, wegen $e \in \text{cl}(I' \setminus e) \subseteq \text{cl}(I \setminus e)$ (CL2) zum Widerspruch.

Zum Nachweis von (I3) nehmen wir an, es gäbe $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ mit $|I_1| < |I_2|$, die (I3) verletzen. Unter allen solchen wählen wir ein Paar mit maximalem Schnitt. Zunächst haben wir nach Definition von \mathcal{I} und Annahme $\forall e \in I_2 \exists f \in I_1 : f \in \text{cl}(I_1 \cup e \setminus f)$, also wegen (CL4) und, da $I_1 \in \mathcal{I}$ ist $\forall e \in I_2 : e \in \text{cl}(I_1)$, also $I_2 \subseteq \text{cl}(I_1)$. Sei nun $e \in I_2 \setminus I_1 \neq \emptyset$. Wegen $I_2 \in \mathcal{I}$ und (CL2) gilt $I_1 \not\subseteq \text{cl}(I_2 \setminus e)$, sei also $f \in I_1 \setminus \text{cl}(I_2 \setminus e)$. Setze $I_2' := I_2 \setminus e \cup f$, so ist I_1, I_2' ein Paar, das (I3) widerspricht mit größerem Schnitt.

Zu zeigen bleibt, daß $\text{cl}_M = \text{cl}$ ist. Sei also $x \in \text{cl}_M(X) \setminus X$. Per definitionem haben wir dann $r(X \cup x) = r(X)$. Sei B eine Basis von $M|_X$. Dann ist $(B \cup x) \notin \mathcal{I}$ also wegen $B \in \mathcal{I} : x \in \text{cl}(B) \subseteq \text{cl}(X)$. Die umgekehrte Inklusion geht analog.

Korollar 1.2.22 Sei $\text{cl} : 2^E \rightarrow 2^E$. Dann ist cl der Abschluß eines Matroids auf E genau dann, wenn cl (CL1), (CL2), (CL3) und (CL4) erfüllt.

Definition 1.2.23 Die abgeschlossenen Mengen von M bezeichnen wir als Unterräume von M .

Die Unterräume der Dimension $\left\{ \begin{array}{c} r(M) - 1 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right\}$ heißen $\left\{ \begin{array}{c} \text{Hyperebenen} \\ \text{Punkte} \\ \text{Geraden} \end{array} \right\}$.

Wir sagen $X \subseteq E$ ist ein Erzeugendensystem für E , falls $\text{cl}(X) = E$.

Wie nicht anders zu erwarten sind Basen minimale Erzeugendensysteme und Hyperebenen maximale Nicht-Erzeugendensysteme.

Proposition 1.2.24 Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $X \subseteq E$. Dann gilt

1. X ist ein Erzeugendensystem $\Leftrightarrow r(X) = r(E)$.
2. X ist eine Basis $\Leftrightarrow X$ ist ein Erzeugendensystem und $\forall e \in X : X \setminus e$ ist kein Erzeugendensystem.
3. X ist eine Hyperebene $\Leftrightarrow X$ ist kein Erzeugendensystem, aber $\forall e \in E \setminus X : X \cup e$ ist ein Erzeugendensystem.

Beweis. Übung.

Mit Hilfe des Abschlusses beweisen wir jetzt eine Verschärfung des “weak elimination axioms”.

Proposition 1.2.25 Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und \mathcal{C} die Familie seiner Kreise. Dann gilt

1. $X \subseteq E$ ist ein Kreis von M genau dann, wenn $\forall e \in X : e \in \text{cl}(X \setminus e)$ und $X \setminus e \in \mathcal{I}$.
2. $\text{cl}(X) = X \cup \{e \in E \mid \exists C \in \mathcal{C} : e \in C \subseteq X \cup e\}$.

(C3)' $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C} \forall e \in C_1 \cap C_2 \forall f \in C_1 \setminus C_2 \exists C_3 \in \mathcal{C} : f \in C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus e$.

Beweis. Die erste Aussage ist klar, da die Kreise die minimalen abhängigen Mengen sind. Sei nun $e \in \text{cl}(X) \setminus X$. Sei B eine Basis von $M|_X$. Dann ist $r(X \cup e) = r(X) = r(B \cup e) = r(B)$. Also schließt e einen Kreis mit B , woraus die zweite Aussage folgt.

Zum Beweis von **(C3)'** betrachten wir wegen $e \in \text{cl}(C_2 \setminus e)$:

$$f \in \text{cl}(C_1 \setminus f) \subseteq \text{cl}(C_1 \cup C_2 \setminus \{e, f\}),$$

woraus mit der letzten Aussage die Behauptung folgt.

Beispiel 1.2.26 Wir hatten in Übung 1.2.18 die Rangfunktion der Kantenmenge eines graphischen Matroids als

$$r(X) = |V[X]| - |\text{Komponenten von } V[X]|$$

kennengelernt. Also sind die Komplemente der Hyperebenen des Polygonmatroids eines zusammenhängenden Graphen gerade die minimalen Kantenschnitte.

In diesem Zusammenhang stellen wir fest, daß wir bei graphischen Matroiden annehmen können, daß der zugehörige Graph zusammenhängend ist, da die Identifikation zweier Knoten aus verschiedenen Zusammenhangskomponenten keine neuen Kreise liefert.

1.3 Geometrie niederdimensionaler Matroide

Wir haben lineare Matroide als Vektormatroide kennengelernt. Durch Übergang von linearer zu affiner Abhängigkeit kann man in der geometrischen Repräsentierung eine Dimension „sparen“.

Proposition 1.3.1 Sei $E \subseteq V$ eine endliche Teilmenge eines \mathbb{K} -Vektorraumes und \mathcal{I} die Menge der affin unabhängigen Teilmengen von E . Dann ist (E, \mathcal{I}) ein Matroid.

Beweis. Schreibe $E = \{v_1, \dots, v_k\}$ als Matrix A . Betrachte das Vektormatroid $M\left[\begin{pmatrix} A \\ \mathbf{1}^T \end{pmatrix}\right]$ gelabelt mit den zugehörigen Elementen aus E . Offensichtlich ist dann die Menge \mathcal{I} gerade die Familie der unabhängigen Mengen von $M\left[\begin{pmatrix} A \\ \mathbf{1}^T \end{pmatrix}\right]$. \square

Wir sagen M ist *affin* über \mathbb{K} , wenn es isomorph zu einem solchen Matroid ist.

Beispiel 1.3.2 Betrachte die Punktmenge

$$\{(0, 0), (1, 2), (3, 6), (2, 0), (3, 0), (0, 1), (0, 2), (3, -2), (5, -2), (-3, -2)\} \subseteq \mathbb{Q}$$

wie in Abbildung 1.2. Das zugehörige affine Matroid nennen wir *Desargues-Matroid*. Man kann es auch durch seine Dreipunktgeraden als paving matroid definieren.

Übung 1.3.3 Zeige, das Desargues-Matroid ist ein Paving-Matroid.

Das Diagramm in Abbildung 1.2 repräsentiert das Desargues-Matroid also allein durch Inzidenzen und ohne explizite Angabe der Koordinaten der Punkte. Wir erhalten eine Repräsentierung eines Matroids vom Rang kleiner gleich vier, indem wir eine Konfiguration aus Punkten, Geraden und Ebenen zeichnen, wobei die Punkte die Elemente repräsentieren und

1. die Elemente eines dreielementigen Kreises auf einer Geraden liegen und

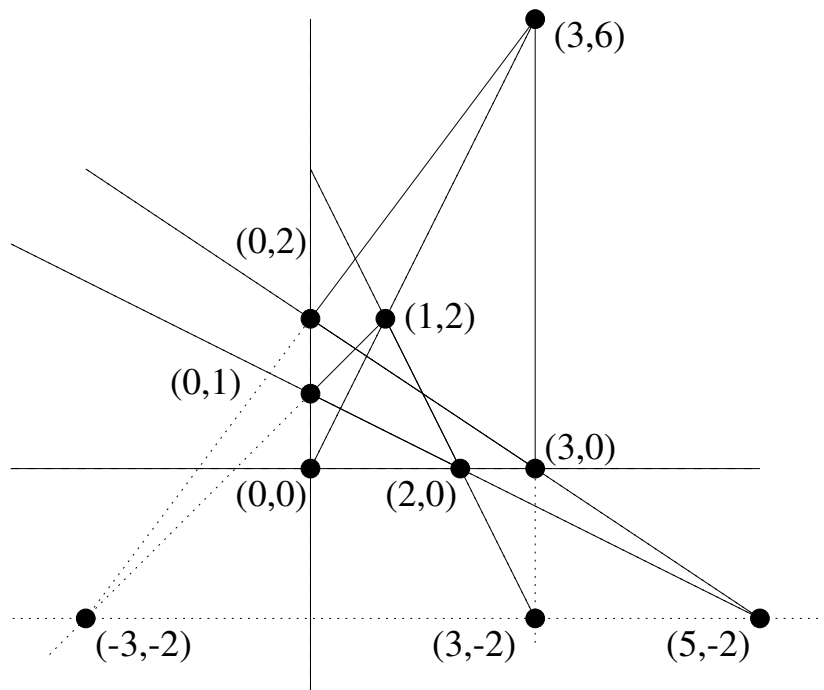


Abbildung 1.2: Das Desargues-Matroid

2. die Elemente eines vierelementigen Kreises in einer Ebene liegen.

Im folgenden werden wir die Frage betrachten, wann eine geometrische Inzidenz-Konfiguration ein Matroid repräsentiert.

Beispiel 1.3.4 Betrachten wir dazu die Rang 4 Inzidenzstruktur in Abbildung 1.3. Wenn wir die Konfiguration als Matroid interpretieren wollen, so erhalten wir

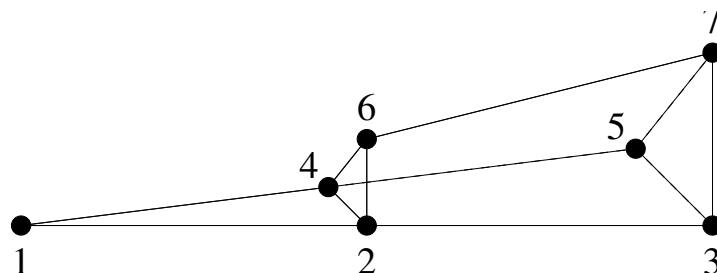


Abbildung 1.3: Das Escher „Matroid“

als abgeschlossene abhängige Mengen seine Dreipunktgeraden $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 4, 5\}$

und die Fünfpunkteebenen $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{1, 2, 3, 6, 7\}$, $\{1, 4, 5, 6, 7\}$. Laut dieser Liste ist $r(\{1, 6, 7\}) = 3$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} 4 + 3 &= r(\{1, 4, 5, 6, 7\} \cup \{1, 2, 3, 6, 7\}) + r(\{1, 4, 5, 6, 7\} \cap \{1, 2, 3, 6, 7\}) \\ &> r(\{1, 4, 5, 6, 7\}) + r(\{1, 2, 3, 6, 7\}) \\ &= 3 + 3 \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Submodularität. Ist hingegen $\{1, 6, 7\}$ eine Gerade, so stellt die Konfiguration ein Matroid dar.

Formalisieren wir das, so fordern wir zunächst als „Selbstverständlichkeiten“, daß eine Gerade mit mindestens zwei Punkten inzidiert und eine Ebene mit mindestens drei Punkten, die nicht alle auf einer Geraden liegen, inzidiert.

Zusätzliche Forderungen notieren wir in

Definition 1.3.5 Ein Inzidenzdiagramm D aus Punkten, Geraden und Ebenen heißt Matroidkonfiguration, wenn

1. je zwei verschiedene Geraden von D haben höchstens einen Punkt gemeinsam
2. je zwei verschiedene Ebenen, die sich in mehr als einem Punkt schneiden, schneiden sich in einer Gerade,
3. je zwei Geraden, die einen Punkt gemeinsam haben, liegen in einer Ebene.
4. jede Gerade, die eine Ebene in mehr als einem Punkt schneidet, ist in dieser Ebene enthalten.

Eine Matroidkonfiguration D repräsentiert das Matroid $M = (E, \mathcal{I})$, wenn es eine Bijektion $\varphi : E \rightarrow \{\text{Punkte von } D\}$ gibt mit $C \subseteq E$ ist ein Kreis von M genau dann, wenn

1. entweder $|C| = 3$ und $\varphi(C)$ liegt auf einer Gerade von D , i.e. $\varphi(C)$ ist collinear
2. oder $|C| = 4$ und $\varphi(C)$ enthält keine drei collinearen Punkte und liegt in einer Ebene, i.e. $\varphi(C)$ ist coplanar
3. oder $|C| = 5$ und $\varphi(C)$ enthält weder drei collineare, noch vier coplanare Punkte.

Übung 1.3.6 1. Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein einfaches Matroid und $r(M) \leq 4$. Dann gibt es eine Matroidkonfiguration, die M repräsentiert.

2. Sei D eine Matroidkonfiguration, dann gibt es ein Matroid, das durch D repräsentiert wird.

Beispiel 1.3.7 Betrachte die Konfiguration in Abbildung 1.4. Nach Übung 1.3.6 definiert diese ein Matroid M , das wir als *Non-Desargues-Matroid* bezeichnen.

Vergleichen wir die Konfiguration mit derjenigen, die durch Abbildung 1.2 definiert wird, so fällt auf, daß eine Dreipunktgerade gebrochen wurde. Diese ist in Vektormatroiden „zwingend vorgeschrieben“.

Satz 1.3.8 (Satz von Desargues (klassisch):) *In der reellen Ebene gilt: Liegen zwei Dreiecke perspektiv, so sind die Schnittpunkte paarweise sich entsprechender Dreiecksseiten collinear.*

Die beiden Dreiecke in Abbildung 1.4 sind $\{a, b, c\}$ und $\{a', b', c'\}$. Der Punkt der Perspektive ist p , und x, y, z entstehen als Schnitte der Geraden sich entsprechender Dreiecksseiten. Offensichtlich können wir mit dem bisher erarbeiteten Instrumentarium diesen Satz auch anders formulieren.

Satz 1.3.9 (Desargues (matroidsch):) *Das Non-Desargues Matroid ist nicht linear.*

Beweis. Angenommen es gäbe Vektoren $p, a, b, c, a', b', c', x, y, z \in \mathbb{K}^3$, die das Matroid über einem Körper \mathbb{K} repräsentierten. Da $GF(2)^3$ nur 8 Elemente hat, gibt es in \mathbb{K} mindestens zwei von Null verschiedene Elemente α, β . Wir betten nun die Konfiguration in \mathbb{K}^4 ein, indem wir z.B. von a übergehen zu $\binom{0}{a}$. Sei nun $v = \binom{\alpha}{p}$ und $w = \binom{\beta}{p}$. Dann ist $\dim(\{p, v, w, a, a'\}) = 3$, also existiert $0 \neq a'' \in \langle v, a' \rangle \cap \langle w, a \rangle$. Analog konstruieren wir b'' und c'' und erhalten die Figur in Abbildung 1.5. Nach der Annahme müßte sich diese Abbildung zu einer Matroidkonfiguration erweitern lassen. Sei M die Rangfunktion dieses Matroids. Betrachten wir die Ebene $\langle a'', b'', c'' \rangle$. Zunächst haben wir $r(M) + r(\{a'', b'', x\}) \leq r(\{a'', b'', v, a', b', x\}) + r(\{a'', b'', w, a, b, x\}) = 6$ also $r(\{a'', b'', x\}) \leq 2$ und somit $x \in \langle a'', b'', c'' \rangle$. Analog schließen wir insgesamt $r(\{a'', b'', c'', x, y, z\}) = 3$. Nun haben wir aber den Widerspruch

$$\begin{aligned} r(\{x, y, z\}) &\leq r(\{a'', b'', c'', x, y, z\} \cap \{p, a, a', b, b', c, c', x, y, z\}) \\ &\leq r(\{a'', b'', c'', x, y, z\}) + r(\{p, a, a', b, b', c, c', x, y, z\}) - 4 \\ &= 3 + 3 - 4 = 2. \end{aligned}$$

□

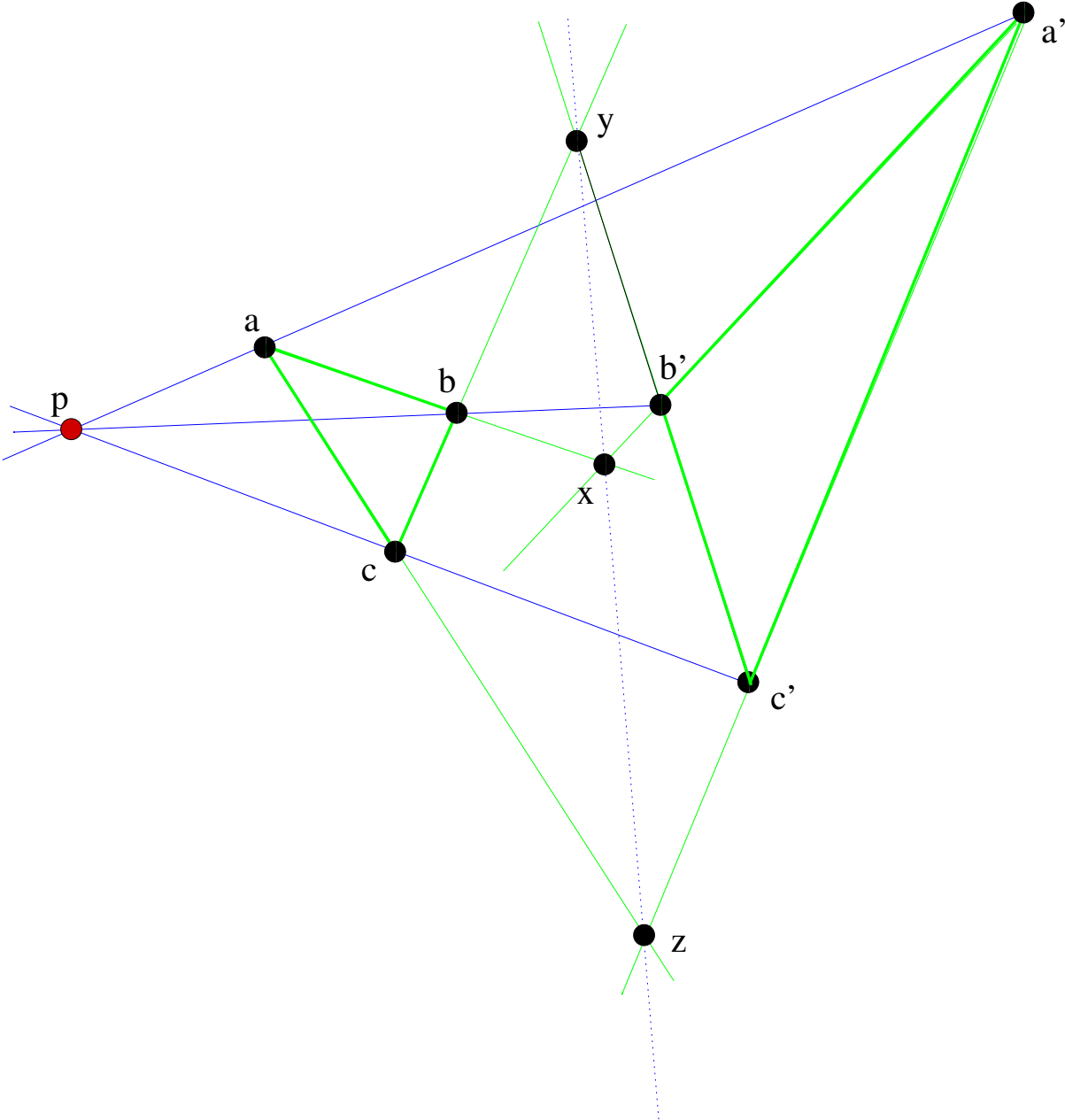


Abbildung 1.4: Das Non-Desargues Matroid

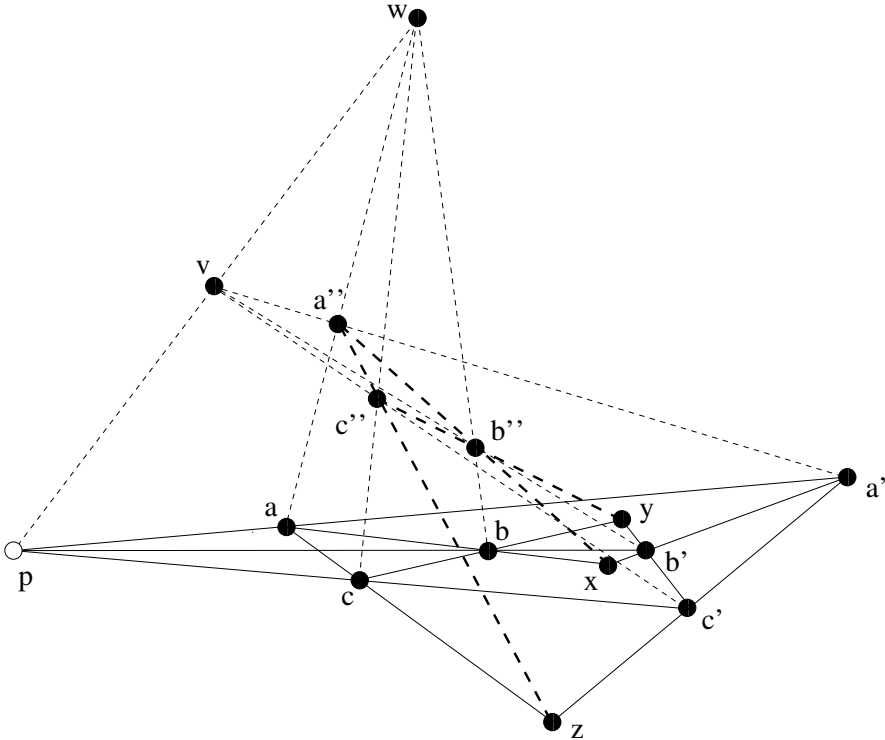


Abbildung 1.5: Das ist kein Matroid

Übung 1.3.10 Betrachte die Matroidkonfiguration in Abbildung 1.6. Das zugehörige Matroid heißt Vámos-Matroid V_8 . Schließe mit Hilfe von Beispiel 1.3.4, daß das Vámos-Matroid nicht linear ist.

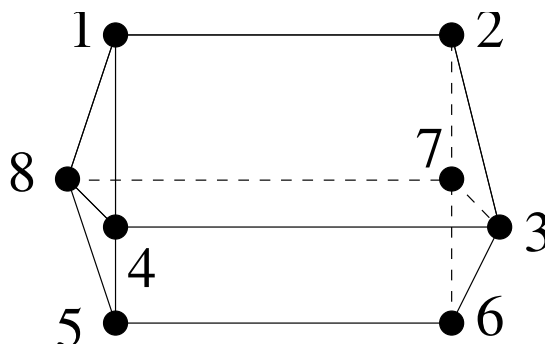


Abbildung 1.6: Das Vámos-Matroid

1.4 Transversalmatroid

Wir kommen zu einer weiteren wichtigen Beispielklasse. Sei S eine endliche Menge und $\{A_1, \dots, A_m\}$ eine Familie von (nicht notwendig paarweise verschiedenen) Teilmengen von S . Ist $J = \{1, \dots, m\}$ so schreiben wir kurz $(A_j)_{j \in J}$. Eine Menge $T \subseteq S$ heißt eine *partielle Transversale* von $(A_j)_{j \in J}$, falls es $K \subseteq J$ und eine Bijektion $\psi : K \rightarrow T$ gibt mit $\forall i \in K : \psi(i) \in A_i$. Haben wir $K = J$, so heißt T eine *Transversale* oder eine *Liste verschiedener Repräsentanten*.

Man kann partielle Transversale einer Familie $\mathcal{A} = (A_j)_{j \in J}$ von Teilmengen einer Menge S als Matchings in bipartiten Graphen $\Delta(\mathcal{A}) = (S \cup J, E)$ auffassen, wobei $e = (s, j) \in E : \Leftrightarrow s \in A_j$.

Satz 1.4.1 Sei \mathcal{A} eine Familie $\{A_1, \dots, A_m\}$ von Teilmengen von S und sei \mathcal{I} die Menge der partiellen Transversalen von \mathcal{A} . Dann ist \mathcal{I} die Menge der unabhängigen Mengen eines Matroids, welches wir das Transversalmatroid $M[\mathcal{A}]$ nennen.

Beweis. Wir haben nur (I3) zu zeigen. Seien also $|T_1| < |T_2|$ partielle Transversale und M_1, M_2 die zugehörigen Matchings in $\Delta(\mathcal{A})$. Da $|M_1| < |M_2|$ enthält $M_1 \cup M_2$ einen M_1 - M_2 -alternierenden Weg P (also einen Weg, der abwechselnd Kanten aus M_1 und M_2 benutzt), der eine Kante mehr in M_2 als in M_1 benutzt.

Da der Weg ungerade Länge hat, besucht er gerade viele Knoten, wir können also oBdA annehmen:

$$P = s_1 1 s_2 2 \dots s_k k.$$

Wir haben also $\psi_2(i) = s_i = \psi_1(i+1)$ für $i = 1, \dots, k-1$, $\psi_2(k) = s_k$ und $s_1 \in T_2 \setminus T_1$. Ist nun K die Indexmenge für T_1 , dann gilt $k \notin K \supseteq \{1, \dots, k-1\}$. Wir definieren nun $\psi : K \cup k \rightarrow T_1 \cup s_1$ vermöge

$$\psi(j) = \begin{cases} \psi_2(j) & \text{falls } j \in \{1, \dots, k\} \\ \psi_1(j) & \text{sonst} \end{cases}$$

und ψ beweist, daß $T_1 \cup s_1$ eine partielle Transversale ist. \square

Definition 1.4.2 Wir sagen eine Matroid ist transversal, wenn es isomorph zu einem Transversalmatroid $M[\mathcal{A}]$ ist.

Beispiel 1.4.3 Betrachte die Graphen in Abbildung 1.7. Der bipartite Graph G_1 definiert ein Transversalmatroid $M[\mathcal{A}]$ auf $\{1, 2, 3, 4\}$. Man sieht $M[\mathcal{A}] = M(G_2)$. Hingegen ist $M(G_3)$ nicht transversal. Denn ansonsten gäbe es A_i mit $\{i, i+1\} \subseteq A_i$ für $i = 1, 2, 3$ im Widerspruch zu $r(M(G_3)) = 2$.

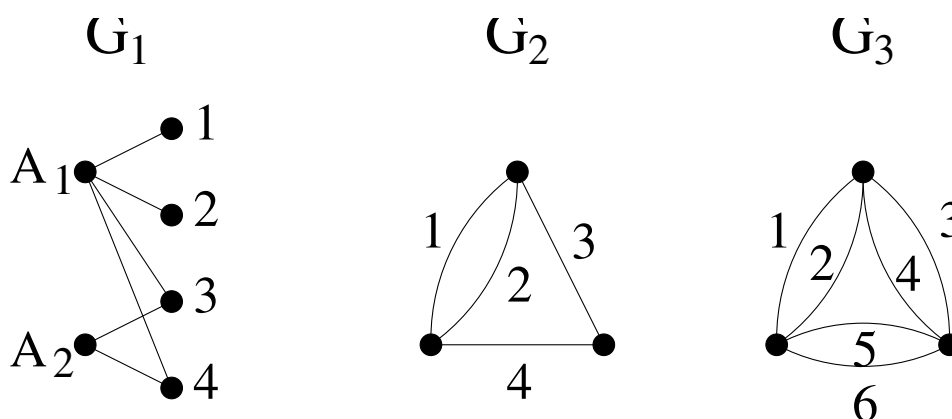


Abbildung 1.7: Transversal, nicht transversal

1.5 Geometrische Verbände und der Greedyalgorithmus

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst den Ansatz der Inzidenzstrukturen für Punkte, Geraden und Ebenen auf beliebige Dimensionen verallgemeinern. Dafür

bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(M)$ die Menge der abgeschlossenen Unterräume von $M = (E, \mathcal{I})$.

Lemma 1.5.1 (\mathcal{L}, \subseteq) ist ein Verband mit

$$\forall X, Y \in \mathcal{L}(M) : X \wedge Y = X \cap Y \text{ und } X \vee Y = cl(X \cup Y).$$

Beweis. Bekanntermaßen induziert die Inklusionsrelation eine Partialordnung. Wir haben also nur zu verifizieren, daß Supremum und Infimum wie behauptet existieren. Proposition 1.2.25 impliziert sofort, daß mit X und Y auch deren Schnitt abgeschlossen ist. Der Rest ist trivial. \square

Wir haben die abgeschlossenen Mengen als maximale Mengen bzgl. konstanten Ranges definiert. Außerdem hatten wir gesehen, daß die Rangfunktion „keine Sprünge“ macht. Demnach erfüllt $\mathcal{L}(M)$ die folgende Definition.

Definition 1.5.2 Sei L ein Verband. Eine Kette von x nach y ist eine Sequenz $x = x_0 < x_1 < \dots < x_n = y$ in L . Die Länge der Kette ist n und die Kette ist maximal, wenn alle $<$ -Relationen in der Kette Bedeckungsrelationen sind. L erfüllt die JORDAN-DEDEKIND-Kettenbedingung (L ist JD), wenn für jedes Paar $x < y$ alle maximalen Ketten von x nach y dieselbe Länge haben. Ist L JD, so definieren wir für $x \in L$ $r(x)$ als die Länge einer maximalen Kette von 0 nach x .

Hat eine Partialordnung ein global kleinstes (größtes) Element, so nennen wir dieses Null. Hat ein Element eine Null, so kann man für jedes Element $x \in P$ die Höhe $h(x)$ definieren als die maximale Länge einer Kette von 0 nach x . Ein Element, das die Null bedeckt (von der Eins bedeckt wird) heißt Atom (Coatom). Ein Verband ist atomar, wenn jedes Element das Supremum der Atome, die mit ihm in Relation stehen, ist.

Ein endlicher Verband heißt semimodular, wenn er die JORDAN-DEDEKIND-Kettenbedingung Bedingung erfüllt und seine Rangfunktion submodular ist, also der Bedingung

$$r(x \vee y) + r(x \wedge y) \leq r(x) + r(y)$$

genügt.

Ein Verband heißt geometrisch, wenn er endlich, atomar und semimodular ist.

Im Abschnitt 1.2 haben wir also bereits eingesehen

Proposition 1.5.3 1. $\mathcal{L}(M)$ ist ein geometrischer Verband.

2. Ist $e \in E$ eine Schleife oder e parallel zu einem Element f , so gilt $\mathcal{L}(M) \cong \mathcal{L}(M \setminus e)$.
3. Ist M ein Matroid und \tilde{M} seine Vereinfachung, so gilt $\mathcal{L}(M) \cong \mathcal{L}(\tilde{M})$.

Für die letzte Aussage definieren wir noch

Definition 1.5.4 Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und \tilde{E} eine Transversale für die Familie derjenigen Parallellklassen, die keine Schleifen sind. Die Vereinfachung von M ist dann das Matroid $\tilde{M} := M|_{\tilde{E}}$.

Die einfachen Matroide stimmen – was auch sonst – mit den geometrischen Verbänden überein.

Satz 1.5.5 Ein Verband L ist genau dann geometrisch, wenn er isomorph zum Unterraumverband $\mathcal{L}(M)$ eines einfachen Matroids ist.

Beweis. Zu beweisen bleibt nur die Rückrichtung. Sei also L ein geometrischer Verband. Stimmen Null und Eins überein, so ist L der Unterraumverband des trivialen Matroids $\mathcal{U}_{0,0}$ ansonsten sei E die Menge seiner Atome. Dann definieren wir

$$\forall X \subseteq E : r(X) := r\left(\bigvee_{e \in X} e\right).$$

Offensichtlich ist r dann nicht-negativ, subkardinal und monoton. Die Submodularität folgt nun aus

$$\begin{aligned} r(X \cap Y) &:= r\left(\bigvee_{e \in X \cap Y} e\right) \\ &\leq r\left(\left(\bigvee_{e \in X} e\right) \wedge \left(\bigvee_{e \in Y} e\right)\right) \\ &\leq r(X) + r(Y) - r(X \cup Y). \end{aligned}$$

Nach Konstruktion sind die Mengen $\{X \subseteq E \mid \exists x \in L : X = \{e \in E \mid e \leq x\}\}$ genau die abgeschlossenen Mengen des durch r definierten Matroids. \square

Die letzten Überlegungen zeigten, daß Matroide aus geometrischem Blickwinkel eine interessante und natürliche Struktur sind. Die folgenden Überlegungen zum Greedyalgorithmus geben einen Zugang aus der kombinatorischen Optimierung. Tatsächlich scheint dieser Zugang älter [1] zu sein als Whitney's namengebende Arbeit [9].

Definition 1.5.6 Sei $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ eine Mengenfamilie, die (I1) und (I2) erfüllt. Dann nennen wir \mathcal{I} ein Unabhängigkeitssystem. Sei nun $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ eine Gewichtsfunktion. Für $X \subseteq E$ definieren wir das Gewicht von X als $w(X) := \sum_{e \in X} w(e)$. Das Maximierungsproblem für (\mathcal{I}, w) lautet:

Finde $B \in \mathcal{I}$ mit B maximal und $w(B)$ maximal!

Die Zusatzbedingung B maximal erleichtert das Leben. Da Teilmengen unabhängiger Mengen unabhängig sind, kann man durch Löschen von Elementen mit negativem Gewicht diese Bedingung umgehen.

Der Greedyalgorithmus für das Paar (\mathcal{I}, w) ist das folgende Verfahren:

```
{Sort  $E$ , so daß  $w(e_1) \geq \dots \geq w(e_m)$ 
 $X = \emptyset$ ;
for  $i = 1$  to  $m$ 
  If  $X \cup e_i \in \mathcal{I}$  then  $X := X \cup e_i$ ;
```

Lemma 1.5.7 Ist (E, \mathcal{I}) ein Matroid und $w : E \rightarrow \mathbb{R}$, so liefert der Greedyalgorithmus eine Optimallösung des Maximierungsproblems (\mathcal{I}, w) .

Beweis. Sei $B_G = \{b_1, \dots, b_r\}$ die vom Greedyalgorithmus gefundene Lösung mit $w(b_1) \geq \dots \geq w(b_r)$. Angenommen B_G ist keine Optimallösung. Sei dann $\tilde{B} = \{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_r\} \in \mathcal{I}$ eine solche und so gewählt, daß $|B_G \cap \tilde{B}|$ maximal. Sei $b_k = e_l$ das Element aus $B_G \setminus \tilde{B}$ mit kleinstem Index. Sei $I_l = \{e_i \in B_G \mid i \leq l\} \in \mathcal{I}$. Da \tilde{B} maximal unabhängig ist und e_l nicht in \tilde{B} ist, muß $\tilde{B} \cup e_l$ abhängig sein. Nach Proposition 1.1.8 gibt es genau einen Kreis $C(\tilde{B}, e_l)$. Da $\mathcal{I} \ni I_l \subseteq \tilde{B} \cup e_l$, gibt es in $C(\tilde{B}, e_l)$ ein e_j mit $j > l$ also $w(e_j) \leq w(e_l)$. Nun ist aber $\tilde{B} \cup e_l \setminus e_j \in \mathcal{I}$ und $w(\tilde{B} \cup e_l \setminus e_j) = w(\tilde{B}) + w(e_l) - w(e_j) \geq w(\tilde{B})$ im Widerspruch zur Maximalität von $|B \cap \tilde{B}|$. \square

Matroide sind genau die Unabhängigkeitssysteme, bei denen der Greedyalgorithmus für beliebige Gewichtsfunktionen die Optimallösung liefert. Man kann also das Basisergänzungsaxiom durch ein Greedyoptimalitätsaxiom ersetzen.

Satz 1.5.8 Sei $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ eine Mengenfamilie. Dann ist \mathcal{I} die Familie der unabhängigen Mengen eines Matroids genau dann, wenn

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$,

(I2) $I \in \mathcal{I}$ und $I' \subseteq I \Rightarrow I' \in \mathcal{I}$,

(G) Für alle Gewichtsfunktionen $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ liefert der Greedyalgorithmus eine maximale Menge in \mathcal{I} von maximalem Gewicht.

Beweis. Wir haben zu zeigen, daß unter (I1) und (I2) die Bedingungen (I3) und (G) äquivalent sind. Die Hinrichtung ist Lemma 1.5.7. Seien also $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ mit $|I_1| < |I_2|$. Betrachte dann die Gewichtsfunktion

$$w(e) = \begin{cases} 1 + \varepsilon & \text{falls } e \in I_1 \\ 1 & \text{falls } e \in I_2 \setminus I_1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{für } \varepsilon = \frac{|I_2| - |I_1|}{2|I_1|}.$$

Der Greedyalgorithmus wählt zunächst die Elemente aus I_1 und „sammelt“ $w(I_1) = |I_1|(1 + \varepsilon)$. Da I_2 in einer maximalen Menge in \mathcal{I} enthalten ist, gilt

$$w(B_G) \geq w(I_2) \geq |I_2| > w(I_1) = \frac{1}{2}(|I_1| + |I_2|).$$

Also gibt es $e \in I_2 \setminus I_1$ mit $I_1 \cup e \subseteq B_G \in \mathcal{I}$, woraus mit (I2) die Behauptung folgt. \square

Beispiel 1.5.9 Sei S eine Menge von Jobs, die auf einem Computernetzwerk mit r Maschinen gescheduled werden soll. Aufgrund von speziellen Hard- und Softwarevoraussetzungen können einige Jobs nicht auf beliebigen Maschinen gerechnet werden. Prioritäten der Jobs und Rechenzeiten ergeben eine Nutzenfunktion $w : S \rightarrow \mathbb{R}$. Die Aufgabe, r Jobs auszusuchen, die gleichzeitig mit maximalem Nutzen gescheduled werden können, löst der Greedyalgorithmus optimal, da eine Transversale der Jobs gesucht wird. Für die Zuordnung bleibt ein gewichtetes Matching zu lösen.

Kapitel 2

Dualität

Wir hatten bei Graphen das Kreismatroid eingeführt und versprochen, daß es zu einem Graphen noch ein weiteres Matroid geben würde. Bei planaren Graphen ist dies das Kreismatroid des dualen Graphen. Wählt man eine Repräsentierung A des Graphen über einem Körper \mathbb{K} , so definiert der Kern von A die Familie seiner Kreise und damit das Matroid. Das duale Matroid erhält man, wie wir im Laufe des Kapitels einsehen werden, wenn man die Familie der „Cokreise“ betrachtet, die durch das Bild von A definiert wird.

2.1 Abstrakte Dualität

Zunächst wollen wir ein Dual für ein beliebiges Matroid einführen. Betrachten wir dazu zunächst noch einmal Axiom (B2).

$$(B2) \quad \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \forall e \in B_1 \setminus B_2 \exists f \in B_2 \setminus B_1 : B_1 \setminus e \cup f \in \mathcal{B}.$$

Hier wird zunächst die Basis verkleinert und dann wieder aufgefüllt. Gehen wir umgekehrt vor, so erhalten wir einen Kreis, aus dem wir ein Element entfernen können:

Proposition 2.1.1 *Sei \mathcal{B} die Menge der Basen eines Matroid. Dann gilt*

$$(B2)^* \quad \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \forall e \in B_2 \setminus B_1 \exists f \in B_1 \setminus B_2 : B_1 \cup e \setminus f \in \mathcal{B}.$$

Beweis. Wir wählen $f \in C(B_1, e) \setminus B_2 \neq \emptyset$ und die Behauptung folgt mit Proposition 1.1.8. \square

Die Bedingung $(B2)^*$ ist aber komplementär zu $(B1)$:

Satz 2.1.2 Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $\mathcal{B}^*(M) := \{E \setminus B \mid B \in \mathcal{B}(M)\}$. Dann ist $\mathcal{B}^*(M)$ die Familie der Basen eines Matroids.

Beweis. Offensichtlich erfüllt $\mathcal{B}^*(M)$ $(B1)$. Sei nun $e \in (E \setminus B_1) \setminus (E \setminus B_2) = B_2 \setminus B_1$. Nach $(B2)^*$ gibt es $f \in B_1 \setminus B_2 = (E \setminus B_2) \setminus (E \setminus B_1)$ mit $B_1 \cup e \setminus f \in \mathcal{B}(M)$ und somit $E \setminus (B_1 \cup e \setminus f) = (E \setminus B_1) \setminus e \cup f \in \mathcal{B}^*(M)$. \square

Definition 2.1.3 Das Matroid aus dem letzten Satz, dessen Grundmenge $E(M)$ ist, heißt das Dual von M notiert als M^* . Die Basen von M^* heißen Cobasen von M , die Kreise Cokreise usw.

Proposition 2.1.4 Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $X \subseteq E$. Dann gilt:

1. $(M^*)^* = M$;
2. $X \in \mathcal{I}(M) \Leftrightarrow cl_{M^*}(E \setminus X) = E$;
3. $cl_M(X) = E \Leftrightarrow E \setminus X \in \mathcal{I}(M^*)$;
4. X ist eine Hyperebene von $M \Leftrightarrow E \setminus X \in \mathcal{C}(M^*)$;
5. $X \in \mathcal{C}(M) \Leftrightarrow E \setminus X$ ist eine Hyperebene von M^* .

Beweis. Die erste Aussage ist klar, die zweite erhalten wir aus $X \in \mathcal{I}(M) \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}(M) : X \subseteq B \Rightarrow \exists B^* \in \mathcal{B}(M^*) : B^* \subseteq (E \setminus X) \stackrel{1,2,24}{\Rightarrow} cl_{M^*}(E \setminus X) = E$. Die dritte Aussage erhalten wir aus 2.) durch Vertauschen der Rollen von M und M^* , sowie X und $E \setminus X$. Rest Übung. \square

Im folgenden werden wir anstatt $\mathcal{B}(M^*)$ kürzer \mathcal{B}^* usw. schreiben.

Proposition 2.1.5 Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $X \subseteq E$. Dann gilt

$$r^*(X) = |X| - r(M) + r(E \setminus X).$$

Beweis. Seien I, I^* eine Basis von $(E \setminus X)$ bzw. eine Cobasis von X . Da $I \in \mathcal{I}(M|_{E \setminus X})$, kann man es dort zu einer Basis B ergänzen. Nach Proposition 2.1.4 ist $cl_M(E \setminus I^*) = E$ und somit B Basis von M und $I \subseteq B$. Offensichtlich ist

$(B \setminus I) \subseteq X$. Außerdem, da $I^* \subseteq (E \setminus B) \in \mathcal{B}^*$ und I^* Cobasis von X ist, gilt $|X \cap (E \setminus B)| = |I^*|$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} |X| &= |X \cap B| + |X \cap (E \setminus B)| \\ &= |B| - |I| + |I^*| \\ &= r(M) - r(E \setminus X) + r^*(X). \end{aligned}$$

□

Wie oben angedeutet kann man bei linearen Matroiden Kreise und Cokreise mit Kern und Bild der Repräsentationsmatrix „identifizieren“. Deren Orthogonalität spiegelt sich in folgender Aussage wieder:

Proposition 2.1.6

$$C \in \mathcal{C}, C^* \in \mathcal{C}^* \Rightarrow |C \cap C^*| \neq 1.$$

Beweis. Sei $x \in C \cap C^*$. Dann ist, da $E \setminus C^*$ eine Hyperebene ist, $x \notin \text{cl}(E \setminus C^*) \stackrel{2.1.4}{=} E \setminus C^* \stackrel{1.2,25}{\Rightarrow} C \setminus x \not\subseteq (E \setminus C^*)$. □

Mit Basen und Kreisen haben wir zwei Mengenfamilien kennengelernt, bei denen kein Mitglied der Familie ein anderes enthält.

Definition 2.1.7 Sei E eine endliche Menge und $\mathcal{A} \subseteq 2^E$ eine Familie, die (C2) erfüllt. Dann sagen wir \mathcal{A} ist ein Clutter. Der Clutter \mathcal{A}' der Komplemente von Mengen in \mathcal{A} heißt Komplementclutter. Der Clutter der inklusionsminimalen, nichtleeren Teilmengen X von E mit $\forall A \in \mathcal{A} : X \cap A \neq \emptyset$ heißt der Blocker $b(\mathcal{A})$ von \mathcal{A} .

Neben der Familien der Kreise und Cokreise haben wir noch die Basen, Cobasen, Hyperebenen und Cohyperebenen als Clutter in einem Matroid, wobei Basen und Cobasen, Kreise und Cohyperebenen, sowie Cokreise und Hyperebenen komplementär sind. Basen und Cokreise stehen in Blockerbeziehung:

Proposition 2.1.8 Sei \mathcal{A}, \mathcal{D} ein Clutter auf E und $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid. Dann gilt

1. $b(\mathcal{A}) = \mathcal{D} \Leftrightarrow b(\mathcal{D}) = \mathcal{A}$,
2. $b(b(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$,
3. $\mathcal{C}^* = b(\mathcal{B}(M))$ und $\mathcal{B}(M) = b(\mathcal{C}^*)$,

$$4. \mathcal{C} = b(\mathcal{B}^*(M)) \text{ und } \mathcal{B}^*(M) = b(\mathcal{C}).$$

Beweis. Wir zeigen zunächst

$$b(\mathcal{A}) = \mathcal{D} \Leftrightarrow \forall X \subseteq E : (\exists D \in \mathcal{D} : D \subseteq X \Leftrightarrow \nexists A \in \mathcal{A} : A \subseteq E \setminus X);$$

Gilt $b(\mathcal{A}) = \mathcal{D}$ und $X \supseteq D \in \mathcal{D}$, so ist offensichtlich $D \cap (E \setminus X) = \emptyset$. Enthält andererseits $E \setminus X$ kein Element von \mathcal{A} , so trifft X jedes Element von \mathcal{A} , enthält also ein Element aus $\mathcal{D} = b(\mathcal{A})$. Erfüllt umgekehrt eine Familie die zweite Bedingung, dann besteht \mathcal{D} aus den minimalen Mengen, die jedes Element von \mathcal{A} treffen. (Beachte, daß \mathcal{D} nach Voraussetzung ein Clutter ist. Ansonsten ist die Aussage falsch, wie die Familien $\mathcal{D} = \{\{1\}, \emptyset\}$, $\mathcal{A} = \emptyset$ zeigen.

Da die letzte Aussage symmetrisch bzgl. Komplementbildung ist, folgen die erste und die zweite Aussage. Zurück zu Matroiden. Nach Proposition 2.1.4 ist eine Menge X aufspannend genau dann, wenn $E \setminus X$ keinen Cokreis enthält. Mit 1.) folgt also, daß Basen und Cokreise sich blocken.

Die letzte Aussage erhält man wieder durch Übergang zum Dual. \square

Da Hyperebenen genau die Komplemente von Cokreisen sind, kann man die Cokreisaxiome zu Hyperebenenaxiomen umschreiben.

Proposition 2.1.9 Sei $\mathcal{H} \subseteq 2^E$. Dann ist \mathcal{H} die Familie der Hyperebenen genau dann, wenn

$$(H1) \ E \notin \mathcal{H}$$

$$(H2) \ \mathcal{H} \text{ ist ein Clutter.}$$

$$(H3) \ \forall H_1, H_2 \in \mathcal{H} \forall e \in E \setminus (H_1 \cup H_2) \exists H_3 \in \mathcal{H} : H_1 \cap H_2 \cup e \subseteq H_3.$$

\square

Übung 2.1.10 Sei E eine Menge und $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_k\} \subseteq 2^E$. Dann ist \mathcal{T} eine m -Partition von E , wenn

- $\forall i = 1, \dots, k : |T_k| \geq m$, und
- $\forall T \in \binom{E}{m} \exists ! i \in \{1, \dots, k\} : T \subseteq T_i$.

Zeige: $M = (E, \mathcal{H})$ ist ein Paving Matroid vom Rang r genau dann, wenn seine Hyperebenen \mathcal{H} eine $(r - 1)$ -Partition von E bilden.

Vor einem abschließenden Beispiel wollen wir noch notieren, daß Proposition 2.1.6 auch eine Art Rückrichtung hat.

Proposition 2.1.11 *Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid. Dann ist $D \in \mathcal{C}^* \Leftrightarrow D$ ist inklusionsminimal, nichtleer mit der Eigenschaft $(\forall C \in \mathcal{C} : |C \cap D| \neq 1)$.*

Beweis. Da wir wissen, daß jeder Cokreis nicht leer ist und die angegebene Eigenschaft hat, sowie ferner die Cokreise einen Clutter bilden, genügt es zu zeigen, daß jede nicht leere Menge D mit der angegebenen Eigenschaft einen Cokreis enthält. Angenommen $B \in \mathcal{B}$ mit $B \cap D = \emptyset$, so hätten wir für beliebiges $d \in D : |D \cap C(B, d)| = 1$. Somit haben wir $D \in b(\mathcal{B}) = \mathcal{C}^*$ nach Proposition 2.1.8. \square

Diese Charakterisierung der Kreise in Abhängigkeit von den Cokreisen (oder umgekehrt) liefert einem so etwas wie Dualität von Homomorphismen. Wir werden kurz darauf eingehen.

Korollar 2.1.12 *Seien $M = (E, \mathcal{I})$ und $M' = (E, \mathcal{I}')$ zwei Matroide auf der gleichen Grundmenge mit $\mathcal{C}(M) \subseteq \mathcal{C}(M')$. Dann ist $\mathcal{C}^*(M') \subseteq \mathcal{C}^*(M)$.*

\square

Bemerkung 2.1.13 *Gilt $\mathcal{C}(M) \subseteq \mathcal{C}(M')$, so sagen wir, die Identität ist ein starker Morphismus (strong map) von M nach M' . Mehr über strong maps findet man in [6]. Im linearen Fall spiegelt dies folgende Situation wieder: Seien $V, V' \subseteq \mathbb{R}^n$ Untervektorräume gegeben als Bild der Homomorphismen $h, h' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Gilt nun $\text{Kern}(h) \subseteq \text{Kern}(h')$ so ist $V' \subseteq V$ und wir haben den Homomorphismus:*

$$g := h'_{|V} : \begin{array}{ccc} V & \rightarrow & V' \\ v & \mapsto & h'(v). \end{array}$$

Diesen kann man betrachten als Einschränkung des globalen kanonischen Homomorphismus auf \mathbb{R}^n mit Kern V/V' . Dessen duale Abbildung g^ vermittelt ebenso einen Homomorphismus von $V'^* \cong V'^{\perp} \rightarrow V^* = V^{\perp}$.*

Definition 2.1.14 *Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid. Dann heißt M selbstdual, wenn $M \cong M^*$. M heißt identisch selbstdual, wenn $\mathcal{B} = \mathcal{B}^*$, d.h. der Isomorphismus wird durch die Identität vermittelt.*

Beispiel 2.1.15 *Betrachten wir das Vámos-Matroid M und die Abbildung $\varphi(i) = (i+1)(\text{mod } 8) + 1$, so vermittelt diese einen Isomorphismus zwischen M und M^* .*

2.2 Lineare, graphische und transversale Duale

Das Dual eines uniformen Matroids ist uniform. In diesem Abschnitt wollen wir etwas weniger triviale Informationen über Duale wichtiger Matroidklassen sammeln.

2.2.1 Lineare Duale

In diesem Abschnitt wollen wir einsehen, daß das Dual eines \mathbb{K} -repräsentierbaren Matroids wieder \mathbb{K} -repräsentierbar ist. Dazu notieren wir zunächst:

Proposition 2.2.1 *Sei $m > n$, $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $U \in \mathbb{K}^{n \times n}$ regulär. Dann ist $M[A] = M[UA]$.*

Beweis. Sei J eine Indexmenge mit $|J| = n$ und A_J die zugehörige quadratische Untermatrix. Dann ist nach linearer Algebra $\text{rang}(A) = \text{rang}(UA)$. Also

$$J \in \mathcal{B}(M[A]) \Leftrightarrow J \in \mathcal{B}(M[UA]).$$

Also ist das Vektormatroid invariant unter elementaren Zeilenoperationen. Außerdem kann man natürlich Spalten vertauschen, wenn man die Label mitschleppt. Speziell kann man immer annehmen, daß ein lineares Matroid als $[I_r|D]$ repräsentiert ist. Praktischerweise liefert einem diese Darstellung direkt eine Darstellung des Dual.

Satz 2.2.2 *Ist M das Vektormatroid der Matrix $(I_r|D)$, so ist $M^* = M[(-D^\top|I_{n-r})]$.*

Beweis. Zunächst ist das Produkt der i -ten Zeile von $(I_r|D)$ mit der j -ten Zeile von $(-D^\top|I_{n-r})$ gerade $-d_{ij} + d_{ij} = 0$. Aus Dimensionsgründen haben wir also

$$\text{Kern}((I_r|D)) = \text{Bild}((-D^\top|I_{n-r})).$$

Durch Übergang zum jeweiligen Orthogonalraum erhalten wir genauso

$$\text{Bild}((I_r|D)) = \text{Kern}((-D^\top|I_{n-r})).$$

Die Behauptung folgt nun aus folgendem Lemma:

Lemma 2.2.3 *Sei A eine Matrix von vollem Rang. Dann ist C^* ein Cokreis von $M[A]$ genau dann, wenn C^* inklusionsminimal, nichtleer mit folgender Eigenschaft ist: Es gibt eine Linearkombination der Zeilen von A mit Träger C^* .*

Beweis. Nach Proposition 2.1.4 ist C^* ein Cokreis genau dann, wenn $E \setminus C^*$ eine Hyperebene ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn es eine Basis A_B der Matrix A gibt, so daß C^* genau aus den Indizes der Vektoren mit Nichtnulleintrag in der ersten Koordinate von $A_B^{-1}A$ besteht. \square

Ende des Beweises von Satz 2.2.2

Korollar 2.2.4 *Ist M linear über \mathbb{K} , so ist auch M^* linear über \mathbb{K} .*

2.2.2 Graphische Duale

Definition 2.2.5 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Das Dual $M^*(G)$ von $M(G)$ nennen wir das Bondmatroid oder auch Cokreisatroid von G . Ein Matroid, das isomorph zu einem Bondmatroid ist, heißt cographisch.*

In diesem Abschnitt wollen wir uns der Frage nach dem Schnitt der graphischen mit den cographischen Matroiden widmen. Wir hatten in Beispiel 1.2.26 festgestellt, daß die Hyperebenen eines graphischen Matroids gerade die Komplemente minimaler Kantenschnitte sind. Nach Proposition 2.1.4 sind die Cokreise eines graphischen Matroids gerade die minimalen Kantenschnitte, die wir auch *Bond*⁷ nennen wollen. Ist $v \in V$ ein Knoten, so bildet die Menge der Kanten, die mit v inzidiert, einen Bond. Solche Bonds nennen wir auch Knotenbond.

Wir wenden uns nun zwei Graphen zu, die in der Graphentheorie im Kontext planarer Graphen eine wesentliche Rolle spielen.

Proposition 2.2.6 *Weder $M^*(K_5)$ noch $M^*(K_{3,3})$ sind graphisch.*

Beweis. Angenommen es gäbe einen Graphen $G = (V, E)$ mit $M(G) \cong M^*(K_5)$. Nach Beispiel 1.2.26 dürfen wir annehmen, daß G zusammenhängend ist und $|V| - 1 = |E| - (5 - 1) = 6$ ist. Da $7 \cdot 3 > 10 \cdot 2$ ist, gibt es einen Knoten vom Knotengrad ≤ 2 . Folglich hat $M^*(G) \cong M(K_5)$ einen Kreis mit höchstens zwei Elementen. Widerspruch. Analog erhalten wir für $K_{3,3}$: $|V| - 1 = |E| - (6 - 1) = 4$ und $5 \cdot 4 > 9 \cdot 2$ impliziert die Existenz eines Dreiecks in $K_{3,3}$. \square

Daß $K_{3,3}$ und K_5 auch nicht planar sind, ist kein zufälliges Zusammentreffen:

Satz 2.2.7 *Ist $G = (V, E)$ planar, so ist $M^*(G)$ graphisch.*

⁷Bond, James Bond

Beweis. Wir konstruieren einen Graphen, dessen Kreismatroid $M^*(G)$ ist. Sei f eine Einbettung von G und F die Menge der Gebiete dieser Einbettung. Wir definieren den Graphen $G^* = (F, E)$ vermöge $\psi^*(e) := \{x \in F \mid f(e) \text{ liegt im topologischen Abschluß von } x\}$. Den so definierten planaren(!) Graphen $G^* = (F, E, \psi^*)$ nennen wir *Dualgraph von G* .

Sei nun C ein Kreis in G . Wir müssen zeigen, daß die zugehörige Kantenmenge ein Bond in G^* ist. In der Einbettung von G bildet der Kreis C einen geschlossenen Jordanbogen und für jede Kante von C liegt in $f^*(G^*)$ ein Ende im Innengebiet von C und das andere im Außengebiet. C bildet also in $M^*(G)$ einen Kantenschnitt, der die Menge der Innengebiete von $f^*(C)$ von der Menge der Außengebiete trennt. Offensichtlich ist dieser Schnitt minimal.

Ist nun umgekehrt B ein Bond in G^* , so trennt er die Menge der Gebiete in F_1 und F_2 . Nun enthält eine Menge \tilde{B} einen Kreis in G genau dann, wenn $\mathbb{R}^2 \setminus f(\tilde{B})$ unzusammenhängend ist. Angenommen dies wäre für $f(B)$ nicht der Fall. Sei $g_1 \in F_1$ und $g_2 \in F_2$. Nach Annahme gibt es eine stetige Kurve von g_1 nach g_2 in $\mathbb{R}^2 \setminus f(B)$. Offensichtlich induziert dieser einen Spaziergang in G^* von g_1 nach g_2 , der keine Kante von B benutzt. Widerspruch. Da ein Kreis in G einen Bond in G^* induziert, folgt die Behauptung. \square

Im Beweis haben wir zusätzlich gezeigt

Korollar 2.2.8 *Ist $G = (V, E)$ ein planarer Graph und $G^*(F, E)$ ein geometrisches Dual so ist $M^*(G) = M(G^*)$.*

2.2.3 Transversale Duale

Zunächst werden wir uns überlegen, daß ein Transversalmatroid M eine Repräsentation $A_1, \dots, A_{r(M)}$ hat:

Lemma 2.2.9 *Sei $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_m)$ eine Familie von Teilmengen von S und T eine maximale partielle Transversale von \mathcal{A} . Ist dann T eine Transversale von $\mathcal{A}' = (A_{i_1}, \dots, A_{i_t})$, wobei $i_j \neq i_k$ für $j \neq k$ und $J' := \{i_1, \dots, i_t\} \subseteq J := \{1, \dots, m\}$. Dann ist $M[\mathcal{A}] = M[\mathcal{A}']$.*

Beweis. Sei $\Delta[\mathcal{A}]$ der bipartite Graph von \mathcal{A} . In diesem Graphen gibt es ein Matching M_T , das genau die Knoten in J' saturiert. Wir haben zu zeigen, daß dies für jede maximale partielle Transversale von \mathcal{A} gilt. Sei also T' eine maximale partielle Transversale, und $M_{T'}$ ein zugehöriges Matching. Da T und T' maximal sind, besteht $M_T \Delta M_{T'}$ aus alternierenden Kreisen und paarweise disjunkten, alternierenden Pfaden ungerader Länge. Seien P_1, \dots, P_s die alternierenden Pfade,

deren Endknoten beide in J liegen. Dann ist $M_{T'} \Delta P_1 \Delta \dots \Delta P_s$ ein Matching für T' , das alle Knoten in J' saturiert. \square

Definition 2.2.10 Sei $G = (V, A)$ ein gerichteter Graph und $X, Y \subseteq V$ mit $|X| = |Y|$. Dann sagen wir X ist mit Y verbunden, wenn es $|X|$ knotendisjunkte (gerichtete) Pfade gibt, die in X beginnen und in Y enden. Ist $Z \subseteq V$, so sagen wir X ist nach Z verbunden, wenn es mit $Y \subseteq Z$ verbunden ist. Sei nun $B_0 \subseteq V$ fest. Dann ist $L(G, B_0)$ die Menge aller Teilmengen von V , die nach B_0 verbunden sind.

Zu einem gerichteten Graphen G betrachten wir folgenden bipartiten Graphen \hat{G} : Sei \hat{V} eine disjunkte Kopie von V und $E := \{v\hat{v} \mid v \in V\} \cup \{v\hat{u} \mid (u, v) \in A(G)\}$ und $\hat{G} = (V \cup \hat{V}, E)$.

Lemma 2.2.11 Sei $G = (V, A)$ ein gerichteter Graph und \hat{G} wie eben definiert. Seien $X, Y \subseteq V$. Dann ist X mit Y verbunden genau dann, wenn $V \setminus X$ mit $\hat{V} \setminus \hat{Y}$ in \hat{G} gematched ist.

Beweis. Sei zunächst $\{P_x \mid x \in X\}$ eine Familie knotendisjunkter gerichteter Wege von X nach Y . Betrachte folgende Bijektion(!) von $\hat{V} \setminus \hat{Y}$ nach $V \setminus X$ in \hat{G} :

$$\psi(\hat{u}) := \begin{cases} v, & \text{falls } (u, v) \text{ eine Kante auf einem der } P_x \text{ ist.} \\ u, & \text{falls } u \text{ auf keinem der Pfade liegt.} \end{cases}$$

Da offensichtlich für alle $u \in \hat{V} \setminus \hat{Y}$ $(u, \psi(u))$ eine Kante von \hat{G} ist, folgt eine Implikation.

Sei also umgekehrt ein Matching M zwischen $\hat{V} \setminus \hat{Y}$ und $V \setminus X$. Für $X \cap Y$ haben wir triviale Pfade. Sei also $x \in X \setminus Y$. Dann ist $\psi(x) \neq \hat{x}$, entspricht also einer Kante (x, y) . Betrachte nun $(y, \psi(y))$. Auf diese Weise können wir einem Pfad in G folgen. Dieser hat erst dann keine Fortsetzung mehr, wenn für ein u der Originalknoten von $\psi(u)$ nicht im Matching ist, also $\psi(u) \in Y$.

Offensichtlich sind diese Pfade knotendisjunkt. \square

Satz 2.2.12 Sei $G = (V, A)$ ein gerichteter Graph und $B_0 \subseteq V$. Dann ist $M = (V, L(G, B_0))$ ein Matroid und M^* ist ein Transversalmatroid. Ist umgekehrt M^* ein Transversalmatroid, und B_0 eine Basis von M , dann gibt es einen gerichteten Graphen $G = (V, A), B_0 \subseteq V$ mit $M \cong (V, L(G, B_0))$.

Beweis. Die Komplemente der maximalen Mengen in $L(G, B_0)$ sind genau die Knotenmengen $B^* = V \setminus B$, die in \hat{G} nach $\hat{V} \setminus \hat{B}_0$ gematched werden können. Die Rückrichtung ist genauso einfach. \square

Definition 2.2.13 Sei $G = (V, A)$ ein Digraph und $B_0 \subseteq V$. Dann heißt das Matroid

$$M = (V, L(G, B_0))$$

ein strenges Gammoid.

Korollar 2.2.14 Ein Matroid ist ein strenges Gammoid genau dann, wenn sein Dual transversal ist.

Kapitel 3

Minoren

Minoren von Matroiden kodieren Teilkonfigurationen und Projektionen der Geometrie. Allgemein spielt das Konzept der verbotenen Minoren eine wesentliche Rolle, da viele wichtige Graphenklassen sich durch Ausschluß einer endlichen Liste von Minoren charakterisieren lassen. Im Laufe dieser Vorlesung werden wir die Charakterisierung für binäre und reguläre Matroide kennenlernen.

3.1 Allgemeine Minoren

Wir hatten in Kapitel 1 bereits Restriktionsminoren kennengelernt. Hier wollen wir die duale Operation zum Löschen von Elementen vorstellen.

Definition 3.1.1 Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $T \subseteq E$. Die Kontraktion von T in M ist dann das Matroid

$$M/T := (M^* \setminus T)^*.$$

Betrachten wir als Beispiel graphische Matroide.

Beispiel 3.1.2 Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $T \subseteq E$. Sei $\tilde{V} := V/T$ die Menge der Äquivalenzklassen der Knoten V bzgl. der Äquivalenzrelation $u \sim v \Leftrightarrow u$ und v liegen in einer Komponente von $G[T]$. Die Kontraktion von T in G ist dann der Graph $G/T = (V/T, E \setminus T)$. Sei nun T ein Wald. Wir haben dann folgende Äquivalenzen

$$W \subseteq E \text{ ist Wald in } G/T \quad \Leftrightarrow \quad W \cup T \text{ ist Wald in } G$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{2.1.4}{\Leftrightarrow} cl_{M^*(G)}(E \setminus (W \cup T)) = E \\
& \stackrel{1.2.25}{\Leftrightarrow} cl_{M^*(G) \setminus T}((E \setminus T) \setminus W) = E \setminus T \\
& \stackrel{2.1.4}{\Leftrightarrow} \text{Wist unabhängig in } (M^*(G) \setminus T)^* = M(G)/T.
\end{aligned}$$

Da unabhängige Mengen und Wälder sich durch das Vorhandensein zusätzlicher Schleifen nicht ändern, erhalten wir insgesamt

$$M(G/T) = M(G)/T.$$

Nach Definition der Rangfunktion gilt offensichtlich für Restriktionsminoren falls $X \subseteq E \setminus T$: $r_M(X) = r_{M \setminus T}(X)$. Folglich erhalten wir aus Proposition 2.1.5 sofort:

Proposition 3.1.3 Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid, $T \subseteq E$ und $X \subseteq (E \setminus T)$. Dann gilt:

$$r_{M/T}(X) = r_M(X \cup T) - r_M(T).$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
r_{M/T}(X) &= |X| + r_{M^* \setminus T}(E \setminus T \setminus X) - r_{M^* \setminus T}(E \setminus T) \\
&= |X| + r_M^*(E \setminus (T \cup X)) - r_M^*(E \setminus T) \\
&= |X| + (|E \setminus (T \cup X)| + r_M(T \cup X) - r_M(E)) \\
&\quad - (|E \setminus T| + r_M(T) - r_M(E))
\end{aligned}$$

□

Als nächstes werden wir unabhängige Mengen, Basen und Kreise der Kontraktion eines Matroids beschreiben.

Proposition 3.1.4 Sei B_T eine Basis von $M|_T$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(M/T) &= \{I \subseteq E \setminus T \mid I \cup B_T \in \mathcal{I}(M)\} \\
&= \{I \subseteq E \setminus T \mid \exists B \in \mathcal{B}(M|_T) : I \cup B \in \mathcal{I}(M)\} \\
\mathcal{B}(M/T) &= \{B' \subseteq E \setminus T \mid B' \cup B_T \in \mathcal{B}(M)\} \\
&= \{B' \subseteq E \setminus T \mid \exists B \in \mathcal{B}(M|_T) : B' \cup B \in \mathcal{B}(M)\} \\
\mathcal{C}(M/T) &= \{C \setminus T \mid C \in \mathcal{C}(M) \text{ und } \forall C' \in \mathcal{C} : (C' \setminus T \not\subseteq C \setminus T \neq \emptyset)\} \\
cl_{M/T}(X) &= cl_M(X \cup T) \setminus T
\end{aligned}$$

Beweis. Nach Proposition 1.2.17 und der vorangegangenen Proposition haben wir

$$X \in \mathcal{I}(M/T) \Leftrightarrow r_{M/T}(X) = |X| \Leftrightarrow r_M(X \cup T) = r_M(T) + |X|.$$

Die letzte Gleichung bedeutet aber genau, daß sich X durch eine Basis von T zu einer Basis von $X \cup T$ ergänzen läßt. Dies impliziert die ersten und die zweiten Gleichheiten. Für die dritte Behauptung sei $B_{C,T}$ eine Basis von T , die $C \cap T$ enthält. Dann haben wir

$$\begin{aligned} r_{M/T}(C \setminus T) &= r(C \cup B_T) - r(B_T) \\ &\leq r(C) + r(B_T \setminus C) - r(B_T) \\ &= |C| - 1 - |B_T \cap C| \\ &= |C \setminus T| - 1. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt direkt wiederum mit Proposition 1.2.25.

□

Übung 3.1.5 Charakterisiere $\mathcal{I}(M \setminus T)$, $\mathcal{B}(M \setminus T)$, $\mathcal{C}(M \setminus T)$, $cl_{M \setminus T}$, $\mathcal{C}^*(M \setminus T)$, $\mathcal{C}^*(M/T)$, $\mathcal{H}(M \setminus T)$, $\mathcal{H}(M/T)$.

Proposition 3.1.6 Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $T \subseteq E$. Dann gilt $M/T = M \setminus T$ genau dann, wenn $r(T) + r(E \setminus T) = r(M)$.

Beweis. Wir haben nach Korollar 1.2.16 und Proposition 3.1.3

$$\begin{aligned} M/T = M \setminus T &\Leftrightarrow r_{M/T} = r_{M \setminus T} \\ &\Leftrightarrow \forall X \subseteq (E \setminus T) : r_M(X \cup T) = r_M(X) + r_M(T). \end{aligned}$$

Mit $X = E \setminus T$ folgt die eine Implikation. Andererseits schließen wir aus der Submodularität der Rangfunktion für beliebiges $X \subseteq E \setminus T$: $r(X \cup T) + r(E \setminus T) \geq r(X) + r(M)$. Setzen wir darin die Gleichung $r(T) + r(E \setminus T) = r(M)$ ein, so erhalten wir: $r(X \cup T) \geq r(X) + r(T)$ woraus wiederum mit der Submodularität die letzte Gleichung folgt. □

Hieraus erhalten wir sofort das

Korollar 3.1.7 $M/e = M \setminus e$ genau dann, wenn e eine Schleife oder eine Coschleife (Brücke) ist.

Wir schließen diesen Abschnitt mit dem Nachweis daß die Kontraktions- und Löschooperationen assoziativ und kommutativ sind.

Proposition 3.1.8 Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $T_1, T_2 \subseteq E$ mit $T_1 \cap T_2 = \emptyset$. Dann gilt:

1. $(M \setminus T_1) \setminus T_2 = M \setminus (T_1 \cup T_2) = (M \setminus T_2) \setminus T_1$.
2. $(M/T_1)/T_2 = M/(T_1 \cup T_2) = (M/T_2)/T_1$.
3. $(M \setminus T_1)/T_2 = (M/T_2) \setminus T_1$.

Beweis. Die erste Aussage folgt sofort aus der Definition des Restriktionsminors, damit ist per definitionem die zweite Aussage klar. Wir zeigen nun noch, daß die Rangfunktionen von $(M \setminus T_1)/T_2$ und $(M \setminus T_2)/T_1$ übereinstimmen, denn für $X \subseteq E \setminus (T_1 \cup T_2)$ haben wir:

$$\begin{aligned}
 r_{(M/T_1) \setminus T_2}(X) &= r_{M/T_1}(X) \\
 &= r_M(X \cup T_1) - r_M(T_1) \\
 &= r_{M \setminus T_2}(X \cup T_1) - r_{M \setminus T_2}(T_1) \\
 &= r_{(M \setminus T_1)/T_2}(X).
 \end{aligned}$$

□

Definition 3.1.9 Ein Matroid der Form $M/X \setminus Y$ heißt ein Minor von M . Ist \mathcal{N} eine Klasse von Matroiden, so heißt ein Minor N_1 von M ein \mathcal{N} -Minor von M , wenn N_1 isomorph zu einem Element aus \mathcal{N} ist.

Übung 3.1.10 Das Matroid N ist ein Minor von M genau dann, wenn N^* ein Minor von M^* ist.

3.2 Spezielle Minoren

Die meisten Klassen von Matroiden, die wir bisher vorgestellt haben, sind abgeschlossen unter Minorenbildung. Für graphische Matroide haben wir uns das bereits in Beispiel 3.1.2 überlegt. Wir werden hier weitere positive Beispiele kennenlernen und mit den Transversalmatroiden eine Klasse als Gegenbeispiel untersuchen.

Wie steht es mit Vektormatroiden? Unter Restriktionsbildung sind diese offensichtlich abgeschlossen mit

$$M[A] \setminus T = M[A_{\cdot, E \setminus T}],$$

wobei $M[A_{\cdot, E \setminus T}]$ die Matrix sei, die aus A durch Streichen der mit T indizierten Spalten entstehe. Da Vektormatroide nach Satz 2.2.2 abgeschlossen unter Dualität sind, haben wir insgesamt sofort

Proposition 3.2.1 1. *Minoren graphischer Matroide sind graphisch.*

2. *Für jeden Körper \mathbb{K} ist jeder Minor eines \mathbb{K} -repräsentierbaren Matroids \mathbb{K} -repräsentierbar.*

3. *Jeder Minor eines regulären Matroids ist regulär.*

Wir haben aufgrund unserer Überlegungen zur Darstellung des Duals eines linearen Matroids $M[A]$ schon eine Technik zur Hand, um die Repräsentierung eines Kontraktionsminors zu berechnen. Eine kurze Meditation über Satz 2.2.2 zeigt, daß es einfach ist, eine lineare Darstellung für M/I zu finden, wenn I unabhängig in M ist. Ist nämlich A_B eine reguläre Untermatrix von A , die eine Basis repräsentiert und $A_B^{-1}A/I$ die Matrix, bei der die zu I gehörenden Einheitsspalten sowie die Zeilen, in denen einer dieser Einheitsvektoren nicht null ist, gestrichen worden sind, so stellt diese M/I dar.

Lemma 3.2.2 *Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid, I unabhängig und $I \subseteq B \in \mathcal{B}(M)$. Dann ist*

$$M[A]/I = M[A_B^{-1}A]/I = M[A_B^{-1}A/I].$$

Beweis. Beachte $M/I = (M^* \setminus I)^*$. □

Beispiel 3.2.3 *Betrachte die Graphen in Abbildung 3.1. Der rechte geht aus dem linken durch Kontraktion der Kante e_3 hervor. Die zugehörigen Matrizenoperationen sehen so aus:*

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \cong \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_4 \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

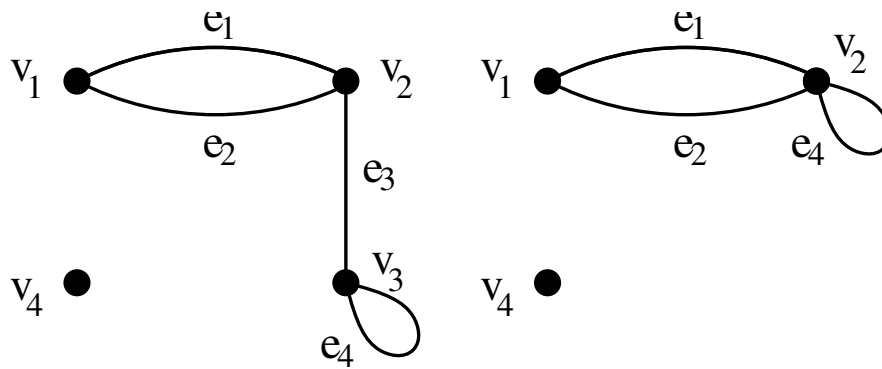


Abbildung 3.1: Eine Kontraktion

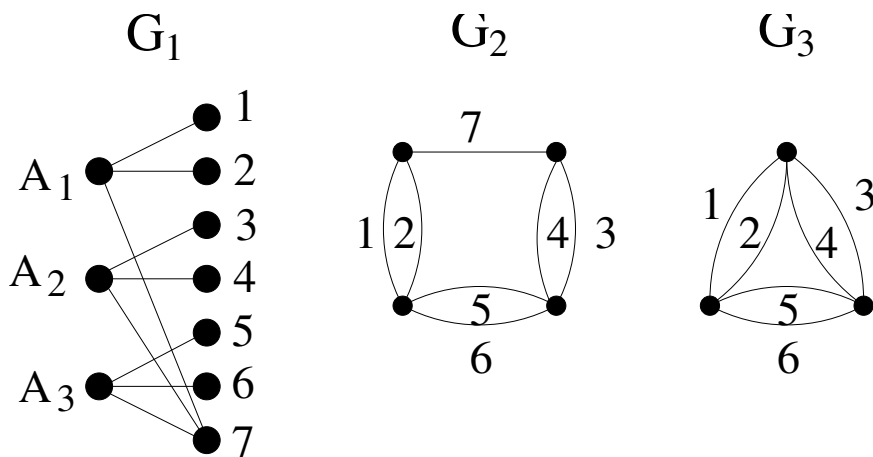


Abbildung 3.2: Transversalmatroidale sind nicht abgeschlossen unter Kontraktion.

Wie steht es mit Transversalmatroiden? Offensichtlich ist für das Mengensystem $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in J}$ über E und $T \subseteq E$ $M[\mathcal{A}] \setminus T = M[(A_i \setminus T)_{i \in J}]$ ein Transversalmatroid. Wie steht es aber mit den Kontraktionen?

Beispiel 3.2.4 Betrachten wir das Transversalmatroid $M[\mathcal{A}]$ mit $\Delta[\mathcal{A}] = G_1$ in Abbildung 3.2, so ist offensichtlich $M[\mathcal{A}] \cong M(G_2)$. Allerdings ist $M[\mathcal{A}]/7 \cong M[G_3]$ nicht transversal nach Beispiel 1.4.3.

Also sind strenge Gammoids als Dual von Transversalmatroiden nicht unter Restriktion abgeschlossen. Deswegen definieren wir

Definition 3.2.5 Ein Gammoid ist ein Matroid, das isomorph zu einem Restriktionsminor eines strengen Gammoids ist.

Die Klasse der Gammoids ist also erzwingenermaßen abgeschlossen unter Minorenbildung. Allerdings gilt zusätzlich:

Proposition 3.2.6 Jedes Transversalmatroid ist ein Gammoid.

Beweis. Sei $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in J}$ und $A_i \subseteq S$ für $i \in J$. Wir orientieren $\Delta[\mathcal{A}]$ von S nach J und betrachten das zugehörige strenge Gammoid $L(G, J)$. Sei nun $I \subseteq S$ unabhängig in $L(G, J)$. Dann gibt es knotendisjunkte Wege von I nach J in $\Delta(\mathcal{A})$. Da jeder gerichtete Weg in $\Delta(\mathcal{A})$ aus höchstens einer Kante besteht, bilden diese Wege ein Matching, also ist $I \in \mathcal{I}(M[\mathcal{A}])$ und somit $M[\mathcal{A}] \cong L(G, J)|_S$. \square

Proposition 3.2.7 Das Dual eines Gammoids ist ein Gammoid.

Beweis. $M = L(\mathcal{A}, S)|_T \xrightarrow{2.2, 12} M^* = M[\mathcal{A}]/(S \setminus T)$. \square

Wir beschließen den Exkurs über Gammoids mit der Feststellung, daß die Gammoids die kleinste unter Minoren abgeschlossene Klasse von Matroiden sind, die die Transversalmatroids enthalten:

Korollar 3.2.8 Die Gammoids sind genau die Transversalmatroids und ihre Kontrakte.

Beweis. Ist M ein Gammoid, so ist M^* ein Gammoid also $M^* = L(\mathcal{A}, S)|_T$ und somit $M = M[\mathcal{A}]/(S \setminus T)$. \square

3.3 Projektionen, Unterräume und der Satz vom Abschaum

In diesem Abschnitt wollen wir uns wieder der verbandstheoretischen Sichtweise zuwenden und Minoren an ihren geometrischen Verbänden studieren. Der Satz vom Abschaum besagt, daß Minoren oben auf dem Verband „schwimmen“.

Proposition 3.3.1 Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $T \subseteq E$ und $F \subseteq E \setminus T$. Dann gilt

1. F ist ein Unterraum von M/T genau dann, wenn $F \cup T$ ein Unterraum von M ist.
2. F ist ein Unterraum von $M \setminus T$ genau dann, wenn M einen Unterraum F' mit $F = F' \setminus T$ hat.

Beweis. Nach Proposition 3.1.4 ist $\text{cl}_{M/T}(X) = \text{cl}_M(X \cup T) \setminus T$ und nach Übung 3.1.5 ist $\text{cl}_{M \setminus T}(X) = \text{cl}_M(X) \setminus T$ woraus die Behauptung folgt. \square

Aus dieser Beobachtung erhalten wir einen Zusammenhang zwischen Filtern, Idealen und Minoren.

Definition 3.3.2 Sei (P, \leq) eine Partialordnung und $F, I \subseteq P$. Dann heißt F ein Filter von P , wenn F nach oben abgeschlossen ist, d.h. aus $x \geq y \in F$ folgt $x \in F$. Analog nennen wir I ein Ideal wenn I nach unten abgeschlossen ist, d.h. aus $x \leq y \in I$ folgt $x \in I$. Ein Filter (Ideal), der (das) durch ein Element erzeugt wird, also z.B. $F = \{x \in P \mid x \geq a\}$ heißt Hauptideal (Hauptfilter).

Proposition 3.3.3 Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $T \subseteq E$. Dann gilt

1. $\mathcal{L}(M/T)$ ist isomorph zu dem Hauptfilter $[\text{cl}_M(T), 1_M]$.
2. Ist $E \setminus T$ ein Unterraum, so ist $\mathcal{L}(M \setminus T)$ isomorph zu dem Hauptideal $[0_M, E \setminus T]$.

Beweis. Zur ersten Aussage betrachte den Isomorphismus $X \mapsto X \cup T$. Die zweite Aussage ist völlig trivial. \square

Als Korollar erhalten wir:

Korollar 3.3.4 Sind T_1 und $E \setminus T_2$ Unterräume von M mit $T_1 \subseteq E \setminus T_2$. Dann ist $\mathcal{L}(M/T_1 \setminus T_2) \cong [T_1, E \setminus T_2]$. \square

Der Verbandes eines Restriktionsminors ist nur bei Restriktion auf einen Unterraum ein Intervall des Verbandes von M .

Als nächstes wollen wir zeigen, daß man bei einem Minor $M/Y \setminus X$ oBdA. annehmen kann, daß Y unabhängig und X counabhängig ist. Dafür benötigen wir zunächst:

Lemma 3.3.5 *Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $X, Y \subseteq E$ mit $X \cap Y = \emptyset$. Sei Y_1 eine Basis von $M|_Y = M \setminus (E \setminus Y)$ und X_1 eine Cobasis von $M.X := M/(E \setminus X)$. Dann gilt für jede Partition (X_2, Y_2) von $(X \setminus X_1) \cup (Y \setminus Y_1)$:*

$$M \setminus X/Y = M \setminus (X_1 \cup Y_2)/(Y_1 \cup X_2).$$

Beweis. Kontrahiert man eine Basis, bleiben nur noch Schleifen. Also gilt nach Korollar 3.1.7 für jede Partition (W_1, W_2) von $Y \setminus Y_1$: $M/Y = M/(Y_1 \cup W_1) \setminus W_2$. Dual erhalten wir $M \setminus X = M \setminus (X_1 \cup Z_1)/Z_2$ für jede Partition (Z_1, Z_2) von $X \setminus X_1$. Also folgt die Behauptung aus Proposition 3.1.8. \square

Proposition 3.3.6 *Unter den Voraussetzungen des letzten Lemmas haben wir $M/Y \setminus X = M \setminus [X_1 \cup (Y \setminus Y_1)]/[Y_1 \cup (X \setminus X_1)]$. Außerdem sind $X_1 \cup (Y \setminus Y_1)$ und $Y_1 \cup (X \setminus X_1)$ counabhängig bzw. unabhängig.*

Beweis. Zu zeigen ist nur die letzte Behauptung. Da jedes Element von $X \setminus X_1$ in $M \setminus X_1$ eine Coschleife, also eine Brücke, ist, ist $Y_1 \cup X \setminus X_1$ unabhängig in $M \setminus X_1$ also erst recht in M . Die Counabhängigkeit folgt mittels Dualität. \square

Nach diesen Vorbereitungen haben wir die Hauptarbeit für den Beweis des Satzes vom Abschaum schon geleistet.

Satz 3.3.7 (Satz vom Abschaum) *Sei M_1 ein einfacher Minor eines Matroid $M = (E, \mathcal{I})$. Dann hat M einen Unterraum F vom Rang $r(M) - r(M_1)$, so daß es eine ordnungstreue Injektion von $\mathcal{L}(M_1)$ nach $[F, 1_M]$ gibt.*

Beweis. Sei $M_1 = M \setminus X/Y$. Nach Proposition 3.3.6 können wir oBdA. annehmen, daß Y unabhängig und X counabhängig ist. Somit haben wir $r(M_1) = r(M) - |Y|$. Sei $F = \text{cl}(Y)$, da M_1 einfach ist haben wir $F \subseteq X \cup Y$ und $M_1 = M/F \setminus (X \setminus F)$. Also ist $\phi : \mathcal{L}[M_1] \rightarrow [F, 1_M]$ definiert durch $\phi(Z) = \text{cl}(Z \cup F)$ injektiv und ordnungstreu. \square

Wir wollen dieses Kapitel beschließen mit der Überlegung, wie man aus einer geometrischen Repräsentierung eines Matroids eine Repräsentierung eines Kontraktionsminors M/e gewinnen kann. Sei dazu H eine Hyperebene, die e nicht enthält. Ist $f \in E \setminus H$ und schneidet die Gerade $\text{cl}_M(\{f, e\})$ H in g , so addieren wir für f eine Parallele zu g , ansonsten wir f zu einem neuen Punkt auf H . Außerdem werden alle Punkte (außer e) einer Geraden, die e enthält zu einer Parallelitätsklasse und Ebenen, die e enthalten zu Geraden.

Beispiel 3.3.8 Kontrahiert man bei der S_8 das Element an der Spitze, so erhält man F_7 , die Fano-Ebene. Kontrahiert man hingegen das zentrale Element e , so erhält man das graphische Matroid des C_4 mit drei Doppelkanten.

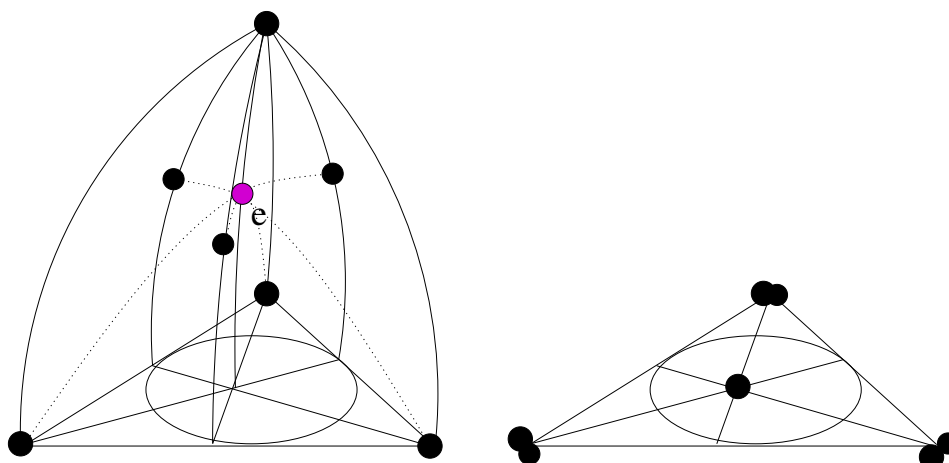


Abbildung 3.3: Geometrische Realisierung eines Kontraktionsminors

Kapitel 4

Repräsentierbarkeit

In diesem Kapitel wollen wir repräsentierbare Matroide für gewisse Körper diskutieren und eine Verallgemeinerung der linearen Repräsentierung anreißen.

4.1 Techniken zur Konstruktion von Repräsentierungsmatrizen

In Abschnitt 2.2.1 hatten wir festgestellt, daß jede Repräsentierungsmatrix durch Wahl einer Basis überführt werden kann in die Form $(I_r|D)$. Also genügt es, sich darauf zu konzentrieren, solche Matrizen zu konstruieren. Wir labeln die Spalten dieser Matrix mit $\{e_1, \dots, e_n\}$. Die Zeilen labeln wir mit $\{e_1, \dots, e_r\}$. Also sind die Zeilen von D mit e_1, \dots, e_r und die Spalten mit e_{r+1}, \dots, e_n gelabelt. Offensichtlich ist für $r + 1 \leq k \leq n$ der Fundamentalkreis

$$C(B, e_k) = e_k \cup \{e_i \mid 1 \leq i \leq r \text{ und } D_{i,k-r} \neq 0\}.$$

Ersetzen wir nun in D alle Nicht-Null-Einträge durch 1en, so bestehen die Spalten der resultierenden Matrix also gerade aus den Inzidenzvektoren der Fundamentalkreise von M bzgl. B . Deswegen bezeichnen wir diese 0-1-Matrix als B -Fundamentalmatrix von M und bezeichnen sie mit $D^\#$. Beachte, daß die Fundamentalmatrix auch für nicht-lineare Matroide definiert ist.

Proposition 4.1.1 *Seien (I_r, D_1) und (I_r, D_2) $(r \times n)$ -Matrizen über den Körpern \mathbb{K} bzw. \mathbb{K}' . Dann ist die Identität ein Isomorphismus von $M[(I_r, D_1)]$ nach $M[(I_r, D_2)]$ genau dann, wenn für alle korrespondierenden quadratischen Untermatrizen D'_1, D'_2 von D_1 bzw. D_2 gilt*

$$\det(D'_1) = 0 \Leftrightarrow \det(D'_2) = 0.$$

Beweis. Seien $I \subseteq \{e_{r+1}, \dots, e_n\}, J \subseteq \{e_1, \dots, e_r\}$ die Spalten bzw. Zeilenindexmenge von D_1 und D_2 . Seien dann \tilde{D}_i , die $(r \times r)$ -Matrizen die aus den Spalten mit Indizes $I \cup J$ entstehen. Nach Determinantenentwicklungssatz für $i = 1, 2 : \det(\tilde{D}_i) = \det(D'_i)$. \square

Betrachten wir die Matrix $D^\#$, so können wir diese auch als Adjazenzmatrix eines bipartiten Graphen $G = (V_1 \cup V_2, E)$ mit $V_1 = \{e_1, \dots, e_r\}$ und $V_2 = \{e_{r+1}, \dots, e_n\}$ und $e = (e_i, e_j) \in E \Leftrightarrow D_{i, k-r} \neq 0$ auffassen. Diesen Graphen nennen wir *Fundamentalgraph von M und B* und bezeichnen ihn mit $G(D^\#)$ oder $G(M, B)$.

Beispiel 4.1.2 Betrachten wir die Fano-Ebene $F_7 = GF(2)^3 \setminus \{0\}$. Eine geometrische Repräsentierung haben wir links in Abbildung 4.1. Auf der rechten Seite sehen wir das non-Fano Matroid F_7^- . F_7 wird außerdem repräsentiert durch die

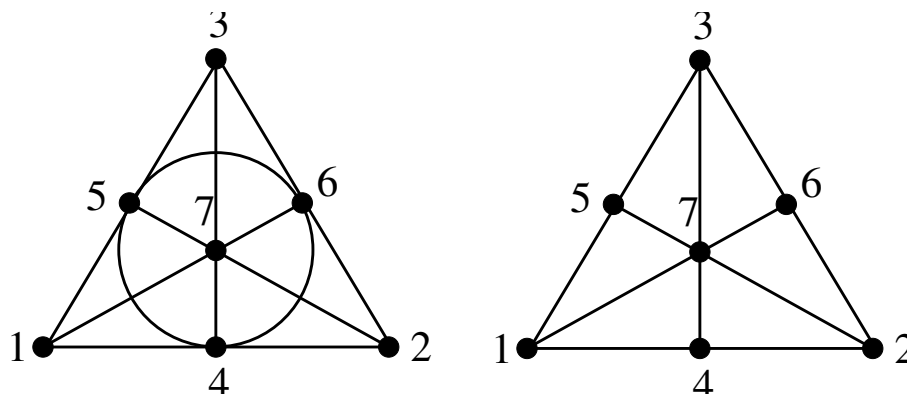


Abbildung 4.1: Das Fano und das non-Fano Matroid

Matrix

$$\begin{array}{c}
 e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4 \quad e_5 \quad e_6 \quad e_7 \\
 \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

über $GF(2)$ oder verkürzt

$$\begin{matrix} e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Das Fano Matroid hat offensichtlich eine transitive Automorphismengruppe also erhalten wir bei Wahl einer beliebigen Basis als Fundamentalgraph den Graphen

in Abbildung 4.2. Den Fundamentalgraph des Duals erhält man nach Satz 2.2.1 durch Vertauschen der Farbklassen.

Betrachten wir die gleiche Matrix über \mathbb{R} , so ändert sich der Fundamentalgraph nicht, wohl aber das Matroid, D stellt dann nämlich das non-Fano dar.

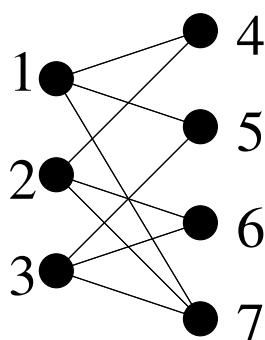


Abbildung 4.2: Der Fundamentalgraph des Fano und des non-Fano Matroids.

Satz 4.1.3 Sei die $(r \times n)$ -Matrix $(I_r | D_1)$ eine \mathbb{K} -Repräsentierung des Matroids M . Sei $\{b_1, \dots, b_k\}$ eine Basis des Kreismatroids des Fundamentalgraphen $G(D_1^\#)$. Dann ist $k = n - \text{Anzahl der Zusammenhangskomponenten von } G(D_1^\#)$. Ist zusätzlich $(\theta_1, \dots, \theta_i)$ ein geordnetes i -Tuple aus Nicht-Null-Elementen von \mathbb{K} und $i \leq k$, so hat M eine \mathbb{K} -Repräsentierung $(I_r | D_2)$, bei der für alle $j \leq i$ der zur Kante b_j gehörende Eintrag von D_2 gerade θ_j ist. Außerdem gibt es je eine $(r \times r)$ -Diagonalmatrix U und eine $(n - r \times n - r)$ -Diagonalmatrix V , so daß $D_2 = UD_1V$.

Beweis. Die Aussage über k ist klar nach Übung 1.2.18. Den Rest des Satzes zeigen wir mittels vollständiger Induktion über i . Die Aussage gilt trivialerweise für $i = 0$ mit $U = I_r, V = I_{n-r}$. Sei nun $i \geq 1$. Da $\{b_1, \dots, b_i\}$ unabhängig in $M(G(D_1^\#))$ ist, bilden die Kanten einen Wald. Dieser enthält einen Knoten v vom Grad 1. Wir dürfen annehmen, daß die an v anliegende Kante b_i ist. Nach Induktionsannahme gibt es also Diagonalmatrizen U', V' , so daß $U'D_1V'$ in b_j den Eintrag θ_j hat, für $j = 1, \dots, i - 1$. Entspricht der Knoten v einer Spalte von D_1 , so entspricht keins der b_j für $j \leq i - 1$ einem Element in dieser Spalte. Wir können also durch Änderung des entsprechenden Eintrags von V' die Spalte so skalieren, daß der b_i -Eintrag θ_i wird. Andernfalls können wir U' modifizieren und die Zeile skalieren. \square

Dieses Resultat ermöglicht es uns, die Körper zu bestimmen, über denen F_7 und F_7^- linear sind.

Korollar 4.1.4 Sei \mathbb{K} ein Körper. Dann gilt

1. F_7 ist \mathbb{K} -linear genau dann, wenn \mathbb{K} Charakteristik 2 hat.
2. F_7^- ist \mathbb{K} -linear genau dann, wenn \mathbb{K} Charakteristik verschieden von 2 hat.

Beweis. Die Kanten des Fundamentalgraphen ohne $\{(2, 7), (3, 6), (3, 7)\}$ bilden einen aufspannenden Baum im Fundamentalgraph, können also auf 1 fixiert werden. Wegen der Gerade $\{4, 7, 3\}$ in F_7 und F_7^- muß der Eintrag $d_{2,4} = d_{1,4} = 1$ sein. Wegen der Gerade $\{5, 7, 2\}$ muß $d_{3,4} = 1$ sein. Die Gerade $\{1, 6, 7\}$ impliziert nun $d_{3,3} = 1$. Also ist $\{4, 5, 6\}$ linear abhängig über \mathbb{K} genau dann, wenn

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2 = 0.$$

Abschließend wollen wir uns als Übung noch überlegen, daß die Fundamentalmatrix eines Minors ein „Minor der Fundamentalmatrix“ ist.

Übung 4.1.5 Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid, $N = M/X \setminus Y$ ein Minor, wobei X unabhängig und Y counabhängig. Sei D die Fundamentalmatrix von M bzgl. einer Basis, die X enthält. Dann ist $B \setminus X$ eine Basis von N , und die Fundamentalmatrix von N bzgl. B entsteht aus D durch Streichen der mit Y indizierten Spalten und der mit X indizierten Zeilen.

Wir wollen diesen Abschnitt mit der Feststellung schließen, daß die Tatsache linear über einem Körper der Charakteristik 0 zu sein, nicht durch Ausschluß von endlich vielen Minoren garantiert werden kann.

Beispiel 4.1.6 Sei p eine ungerade Primzahl und L_p die Matrix $L_p = (I_{p+1} | J_{p+1} - I_{p+1})$ über $GF(p)$. Seien die Spalten der Einheitsmatrix mit e_1, \dots, e_{p+1} gelabelt und die übrigen mit d_1, \dots, d_{p+1} . Wir untersuchen zunächst einmal die nicht aufspannenden Kreise und zeigen

Die nicht aufspannenden Kreise sind

1. die Fundamentalkreise $\{e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, d_i\}$,

2. die Kreise $\{e_i, d_i, e_j, d_j\}$ für $i \neq j$,
3. sowie $\{d_1, \dots, d_{p+1}\}$.

Offensichtlich sind dies alles Kreise. Angenommen wir hätten einen weiteren nicht aufspannenden Kreis C . Diesen können wir durch Einheitsvektoren zu einer Menge von Vektoren \tilde{C} mit der Eigenschaft $r(\tilde{C}) = |\tilde{C}| - 1 = p$ ergänzen. Dann muß \tilde{C} Einheitsvektoren aus I enthalten. Streichen wir diese und die zugehörigen Zeilen erhalten wir eine Untermatrix von $(J_{p+1} - I_{p+1})$, die höchstens eine 1-Spalte enthält, da C keinen der Kreise vom Typ 2 enthält. Dies ergibt einen Widerspruch, da $\det(J_d - I_d) = (-1)^{d-1}d - 1^1$ und die Determinante einer Matrix mit einer Eins-Spalte und ansonsten Spalten mit genau einer Null an verschiedenen Stellen betragslich 1 ist. Nun zeigen wir:

$M[L_p]$ ist linear über einem Körper \mathbb{K} genau dann, wenn \mathbb{K} Charakteristik p hat.

Wir wählen die angegebene Basis und dürfen nach Satz 4.1.3 auf einem Wald im Fundamentalgraph den Wert 1 vorschreiben. Deshalb können wir in der ersten Spalte und der ersten Zeile, sowie auf der Stelle $d_{2,3}$ Einsen vorschreiben. Mit Hilfe des Viererkreises $\{e_1, e_2, d_1, d_2\}$ folgt zunächst, daß die zweite Zeile der Darstellungsmatrix wie in D sein muß. Die Viererkreise $\{e_2, e_i, d_2, d_i\}$ für $i = 1, \dots, p+1$, implizieren die Eindeutigkeit der Darstellungsmatrix.

Jeder Minor von $M[L_p]$ ist linear über \mathbb{Q} und über jedem Körper der Charakteristik $p' \geq p$.

Da $M[L_p]$ selbstdual ist, bzgl. der Identität ist, genügt es wegen der Symmetrie $M[L_p] \setminus e_1$ und $M[L_p] \setminus d_1$ zu betrachten. Letzteres wird durch $L_p \setminus d_1$ repräsentiert und $M \setminus e_1$ durch die Matrix \tilde{A}

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} e_2 & \dots & e_p & e_{p+1} & d_1 & d_2 & \dots & d_p & d_{p+1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & p-1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & p-1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also sind die $M[L_p]$ minorenminimal nicht über \mathbb{Q} linear und leider unendlich viele.

¹Aus der Betrachtung der Eigenwerte der Matrix konstant Eins erhält man $\det J_d - \lambda I_d = (1)^d \lambda^{d-1} \lambda - n$. Setzt man $\lambda = 1$, so folgt die Behauptung.

4.2 Repräsentierbarkeit über endlichen Körpern, binäre Matroide

Ein Grund, warum ein Matroid über einem Körper nicht repräsentierbar ist kann sein, daß der Körper zu klein ist.

Übung 4.2.1 Sei \mathbb{K} ein Körper und $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Dann ist $U_{2,k}$ linear über \mathbb{K} genau dann, wenn $|\mathbb{K}| \geq k - 1$.

Diese Tatsache wollen wir bei binären Matroiden genauer studieren.

Dafür benötigen wir zunächst zwei Lemmata.

Lemma 4.2.2 Ein Matroid M ist binär genau dann, wenn für alle $C \in \mathcal{C}$ und alle $C^* \in \mathcal{C}^*$ $|C \cap C^*|$ gerade ist.

Beweis. Ist M binär, so folgt die Behauptung aus Lemma 2.2.3. Für $C \subseteq E$ sei nun χ^C die charakteristische Funktion, bzw. der Inzidenzvektor von C . Betrachte den $GF(2)$ -Vektorraum

$$W = \langle \chi^C \mid C \in \mathcal{C} \rangle.$$

Dann gilt nach Voraussetzung für jedes $C^* \in \mathcal{C}^*$: $C^* \in W^\perp$. Nach Proposition 2.1.11 ist aber $C^* \in \mathcal{C}^*$ genau dann, wenn C^* inklusionsminimal, nicht-leer mit der Eigenschaft $\forall C \in \mathcal{C} : |C \cap C^*| \neq 1$ ist. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn C^* inklusionsminimal nicht-leer in W^\perp ist. Ist nun A eine $GF(2)$ -Matrix mit $\text{Bild}(A^\top) = W^\perp$, so ist nach Lemma 2.2.3 $M = M[A]$. \square

Satz 4.2.3 Ein Matroid ist binär genau dann, wenn es keinen $U_{2,4}$ -Minor hat.

Beweis. In der Übung wurde die eine Richtung bewiesen. Sei nun N ein nicht-binäres Matroid mit der Eigenschaft, daß jeder Minor von N binär ist. Wegen Lemma 4.2.2 enthält N einen Kreis C und einem Cokreis C^* mit ungeradem Schnitt. Wir wählen diese so, daß der Schnitt möglichst klein ist. Da Kontraktion von $e \in C \setminus C^*$ oder Löschen von $f \in C^* \setminus C$ daran nichts ändert, gilt notwendig $C = C^*$. Sei nun $e \in E(N) \setminus C$. Da $N \setminus e$ binär ist, schließen wir, daß dort C^* kein Cokreis mehr ist. Also ist jedes solche e eine Coschleife in $N \setminus C$. Demnach ist $H_0 := E \setminus C$ eine unabhängige Hyperebene. Sei $b_1 \in H_0 \neq \emptyset$. Seien nun H_1, \dots, H_m die von H_0 verschiedenen Hyperebenen N , die den Unterraum $H_0 \setminus b_1$ (der Codimension 2) enthalten. Offensichtlich ist $b_1 \notin H_i$ für $i = 1, \dots, m$ und $|C \cap (E \setminus H_i)| < |C|$. Aufgrund der Minimalität von C muß also $|C \cap$

$(E \setminus H_i)$ gerade und somit $H_i \cap C$ ungerade sein. Da $C \not\subseteq H_i$ (denn B_1 ist keine Coschleife)XS aber $C \subseteq \bigcup_{i=1}^m H_i$ und C ungerade, nicht einelementig ist, schließen wir $m \geq 3$. Nun ist aber nach Proposition 3.3.3 $N/(H_0 \setminus b_1) \cong U_{2,m+1}$. Aufgrund der Minimalität von N erhalten wir daraus $H_0 = b_1, m = 3$ und somit $N = U_{2,4}$. \square .

Korollar 4.2.4 *Ein Matroid ist binär genau dann, wenn jeder Unterraum der Dimension $r(M) - 2$ (i.e. jede Cogerade) in höchstens drei Hyperebenen enthalten ist.*

Beweis. Dies folgt sofort aus Proposition 3.3.3 und dem Satz vom Abschaum. \square

Für den Fall ternärer Matroide und der Matroide linear über $GF(4)$ ist es bekannt, daß die Liste der verbotenen Minoren endlich ist. Wir geben hier die Resultate ohne Beweis an. Den Beweis im ternären Fall findet man im Buch von Oxley. Der $GF(4)$ -Fall sollte demnächst als Preprint erhältlich sein. Man beachte, daß mit einem Matroid N auch sein Dual N^* ein minimaler verbotener Minor sein muß.

Satz 4.2.5 (Bixby, Seymour 1979) *Ein Matroid ist ternär genau dann, wenn es keinen der folgenden Minoren enthält: $U_{2,5}, U_{3,5}, F_7, F_7^*$.*

Für den $GF(4)$ Fall stellen wir noch zwei Beispiele vor.

Beispiel 4.2.6 *Betrachte das Matroid P_6 , das in Abbildung 4.3 geometrisch repräsentiert ist.*

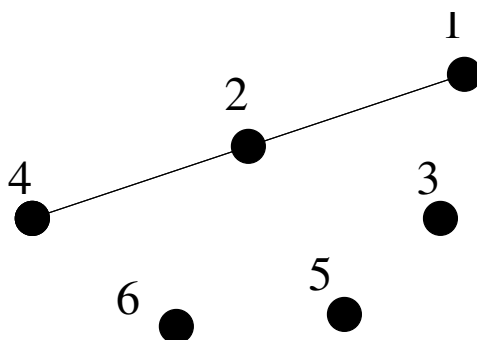


Abbildung 4.3: P_6

1. Das Matroid P_6 ist \mathbb{K} -repräsentierbar genau dann, wenn $|\mathbb{K}| \geq 5$. Denn ist x_1, \dots, x_6 eine Repräsentierung und $l = \langle x_1, x_2, x_4 \rangle$ so gibt es $0 \neq x_{3,5} \in l \cap \langle x_3, x_5 \rangle$ und analog $x_{3,6}$ sowie $x_{5,6}$. Diese Punkte sind offensichtlich paarweise verschieden und verschieden von x_1, x_2, x_4 . Also ist $U_{2,6}$ \mathbb{K} -linear und somit $|\mathbb{K}| \geq 5$. Für die Rückrichtung betrachte α, β paarweise verschieden und verschieden von 0, 1 mit $\alpha\beta \neq 1$

$$A = \begin{pmatrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \beta \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

2. Das Matroid P_8 sei gegeben durch folgende Matrix über $GF(3)$:

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Dann ist P_8 ein minorenminimales nicht $GF(2^k)$ -repräsentierbares Matroid für jedes $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Für den etwas längeren Beweis verweisen wir wieder auf [7].

Satz 4.2.7 (Geelen, Gerards, Kapoor 1997) Ein Matroid ist linear über $GF(4)$ genau dann, wenn es keinen der folgenden Minoren enthält:

$$U_{2,6}, U_{4,6}, F_7^-, (F_7^-)^*, P_6, P_8, P_8''.$$

Für keinen anderen endlichen Körper ist es bekannt, ob die Liste der verbotenen Minoren überhaupt endlich ist.

4.3 Reguläre Matroide

Wir wollen nun den Bogen von regulären Matroiden zur ganzzahligen Programmierung schlagen.

Definition 4.3.1 Sei A eine Matrix über \mathbb{R} . Dann heißt A total unimodular, falls jede Unterdeterminante den Wert 0, 1 oder -1 hat.

Proposition 4.3.2 Sei A eine total unimodulare Matrix. Dann ist $M[A]$ regulär.

Beweis. Sei B eine quadratische Untermatrix von A und \mathbb{K} ein Körper. Eventuell durch Identifikation $-1 = 1$ im Falle der Charakteristik 2 können wir B als Matrix über \mathbb{K} betrachten. Offensichtlich gilt dann $\det_{\mathbb{K}}(B) = \det_{\mathbb{R}}(B) \bmod \text{char}(\mathbb{K})$.

□

Die Umkehrung bereiten wir mit einem Lemma vor.

Lemma 4.3.3 Sei \mathbb{K} ein Körper mit von zwei verschiedener Charakteristik und D eine Matrix über \mathbb{K} mit Einträgen in $\{0, +1, -1\}$, so daß $M[(I, D)]$ binär ist. Sei B eine Basis von $M[(I, D)]$. Dann ist $|\det((I, D)_{\cdot, B})| = 1$.

Beweis. Sei \tilde{B} die Basis der Einheitsvektoren. Wir führen Induktion über $k = |\tilde{B} \setminus B|$. Die Fälle $k = 0, 1$ sind klar, sei also $k \geq 2$ und $e \in \tilde{B} \setminus B$. Nach (B2) gibt es $f \in B \setminus \tilde{B}$, so daß $B' := \tilde{B} \setminus e \cup f$ wieder eine Basis ist. Wir zeigen nun, daß $(I, D)_{B'}^{-1}(I, D)$ eine $\{0, +1, -1\}$ -Matrix ist, woraus die Behauptung mittels vollständiger Induktion folgt. Da B' eine Basis ist, ist $d_{e,f} \in \{+1, -1\}$. Pivotieren wir dieses Element in die Basis, so lautet die Update-Formel für Element $d_{j,k}$:

$$d_{j,k} := d_{j,k} - d_{e,k} \frac{d_{j,f}}{d_{e,f}}.$$

Ist dieser Wert aber zwei, so ist $\tilde{B} \setminus \{e, j\} \cup \{f, k\}$ keine $GF(2)$ -Basis, aber eine Basis über jedem Körper mit von zwei verschiedener Charakteristik. □

Lemma 4.3.4 Sei $M = (E, \mathcal{I})$ linear über $GF(2)$ und einem Körper \mathbb{K} mit von zwei verschiedener Charakteristik. Dann gibt es eine total unimodulare Matrix A mit $M = M[A]$.

Beweis. Wir wählen eine Basis von M . Sei $(I|D)$ eine \mathbb{K} -Repräsentierung und B_D eine Basis des graphischen Matroids $G(D^\#)$. Nach Satz 4.1.3 können wir annehmen, daß D in den zu B_D gehörenden Einträgen auf 1 skaliert ist. Sei nun d ein Nichtnulleintrag, der nicht in B_D ist. Sei dann C_d der Fundamentalkreis von d in $G(D^\#)$. Wir beweisen nun mit vollständiger Induktion über $|C_d|$, daß $d \in \{0, +1, -1\}$. Wir können also annehmen, daß alle d' mit $|C_{d'}| < |C_d|$ in $\{+1, -1\}$ liegen. Sei D_d die quadratische Teilmatrix von D , die zu den Knoten von C_d gehört und d' ein von Null verschiedener Eintrag von D_d , der nicht in $B_D \cup \{d\}$ liegt. Dann ist d' in $G(D^\#)$ eine Sehne von C_d , also ist $C_{d'}$ kürzer als C_d und somit $d' \in \{1, -1\}$. Sei nun \tilde{C}_d ein kürzester Kreis in $G(D_d^\#)$, der d enthält. Dann hat die \tilde{C}_d entsprechende Matrix \tilde{D}_d in jeder Zeile und Spalte genau

zwei Nichtnulleinträge. Bis auf d sind diese alle 1 oder -1 . Über $GF(2)$ ist die Matrix, die an allen Nicht-Null-Einträgen 1-en stehen hat, abhängig. Folglich muß Sie es auch über \mathbb{K} sein und somit $d \in \{+1, -1\}$.

Die Behauptung folgt nun aus Lemma 4.3.3. \square

Wir erhalten somit insgesamt folgende Äquivalenz:

Satz 4.3.5 *Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid. Dann sind folgende Aussagen paarweise äquivalent:*

1. M ist regulär.
2. M ist linear über $GF(2)$ und einen Körper mit von 2 verschiedener Charakteristik.
3. Es gibt eine total unimodulare Matrix A mit $M = M[A]$.

\square

4.4 Algebraische Matroide

Neben linearer Abhängigkeit gibt es in der Körpertheorie noch algebraische Abhängigkeit. Auch diese definiert Matroide. Diese Matroidklasse werden wir nur kurz vorstellen. Sie scheint kompliziert zu sein.

Definition 4.4.1 *Sei \mathbb{F} ein Unterkörper des Körpers \mathbb{K} und $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \mathbb{K}$. Dann heißt $\beta \in \mathbb{K}$ algebraisch abhängig von $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ über \mathbb{F} , wenn β algebraisch über $\mathbb{F}(\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ ist, d.h. β einer algebraischen Gleichung*

$$p_0(\alpha_1, \dots, \alpha_t)\beta^g + p_1(\alpha_1, \dots, \alpha_t)\beta^{g-1} + \dots + p_g(\alpha_1, \dots, \alpha_t) = 0$$

genügt, deren Koeffizienten Polynome in $\mathbb{F}[\alpha_1, \dots, \alpha_t]$ sind, die nicht alle Null sind. $T \subseteq \mathbb{K}$ heißt algebraisch abhängig, falls ein $t \in T$ algebraisch abhängig von $T \setminus t$ ist, ansonsten algebraisch unabhängig über \mathbb{F} .

Proposition 4.4.2 *Sei β algebraisch abhängig von $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ aber algebraisch unabhängig von $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}$. Dann ist α_s algebraisch abhängig von $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, \beta$.*

Beweis. Wir betrachten α_s und β über $\mathbb{G} := \mathbb{F}(\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1})$. Dann ist β algebraisch abhängig von α_s über \mathbb{G} . Ordnen wir die algebraische Relation

$$p_0(\alpha_s)\beta^g + p_1(\alpha_s)\beta^{g-1} + \dots + p_g(\alpha_s) = 0 \quad (4.1)$$

nach Potenzen von α_s , so erhalten wir

$$q_0(\beta)\alpha_s^h + q_1(\beta)\alpha_s^{g-1} + \dots + q_h(\beta) = 0. \quad (4.2)$$

Da β nach Voraussetzung nicht algebraisch über \mathbb{F} ist, ist jedes Polynom $q_i(x)$ entweder identisch Null oder $q_i(\beta) \neq 0$. Sie können aber nicht alle identisch Null sein, da ansonsten schon Gleichung 4.1 trivial wäre. \square

Übung 4.4.3 Sei s algebraisch über $\mathbb{F}(t)$ und t algebraisch über \mathbb{F} . Dann ist s algebraisch über \mathbb{F} .

Lemma 4.4.4 Sei γ algebraisch abhängig von $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ und jedes α_i algebraisch abhängig von β_1, \dots, β_s . Dann ist auch γ abhängig von β_1, \dots, β_s .

Beweis. Wir zeigen dies mit vollständiger Induktion über t , der Fall $t = 1$ war die letzte Übung. Ansonsten betrachten wir $\mathbb{F}(\alpha_1, \dots, \alpha_t) = \mathbb{F}(\alpha_t)(\alpha_1, \dots, \alpha_{t-1})$. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann γ algebraisch über $\mathbb{F}(\alpha_t)(\beta_1, \dots, \beta_s)$. Da allerdings α_t algebraisch über $\mathbb{F}(\beta_1, \dots, \beta_s)$ ist, folgt aus der letzten Übung die Behauptung. \square

Satz 4.4.5 Sei \mathbb{F} ein Unterkörper des Körpers \mathbb{K} und $E \subseteq \mathbb{K}$ und $\mathcal{I} = \{I \subseteq E \mid I \text{ ist algebraisch unabhängig über } \mathbb{F}\}$. Dann ist $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid.

Beweis. Offensichtlich erfüllt \mathcal{I} (I1) und (I2). Angenommen (I3) wäre nicht erfüllt und $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ mit $|I_2| > |I_1|$ und $\forall e \in I_2$ wäre $I_1 \cup e$ algebraisch abhängig. Sei nun $I'_1 \subseteq I_1 \cup I_2$ eine Menge kleinster Kardinalität, von der alle $e \in I_2$ algebraisch abhängig sind und so daß $|I'_1 \setminus I_2|$ minimal ist. Da $|I_2| > |I_1| \geq |I'_1|$ können wir $e \in I_2 \setminus I'_1$ wählen. Sei $I''_1 \subseteq I'_1$ minimal mit der Eigenschaft, daß $I''_1 \cup e$ algebraisch abhängig ist. Dann ist $I''_1 \cup e \not\subseteq I_2$, sei also $f \in I''_1 \setminus I_2$. Nach Minimalitätsannahme ist e über I''_1 nicht aber über $I''_1 \setminus f$ algebraisch. Nach Proposition 4.4.2 ist demnach f algebraisch über $I''_1 \setminus f \cup e$ und damit über $I'_1 \setminus f \cup e$. Demnach ist jedes Element von I'_1 algebraisch über $I'_1 \setminus f \cup e$. Außerdem ist aber jedes Element von I_2 algebraisch über I'_1 . Also ist nach Lemma 4.4.4 jedes Element von I_2 algebraisch über $I'_1 \setminus f \cup e$ im Widerspruch zur Wahl von I'_1 . \square

Proposition 4.4.6 *Minoren algebraischer Matroide sind algebraisch.*

Beweis. Offensichtlich sind Restriktionen algebraischer Matroide algebraisch. Eine algebraische Darstellung einer Kontraktion M/T erhält man durch Betrachtung von $E \setminus T$ über $\mathbb{F}(T)$ aus Proposition 3.1.4. \square

Mit etwas mehr Algebra kann man zeigen, daß man in algebraischen Matroiden Serien abkürzen kann:

Satz 4.4.7 ([2]) *Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein algebraisches Matroid mit $E \subseteq \mathbb{K} \supseteq \mathbb{F}$. Sei S in Serie in M (d.h. alle Elemente in S sind coparallel). Dann gibt es ein Element β im algebraischen Abschluß von \mathbb{K} , so daß für alle $S \subseteq C \subseteq E$ gilt:*

$$C \in \mathcal{C}(M) \Leftrightarrow C \setminus S \cup \beta \in \mathcal{C}(M \cup \beta).$$

Proposition 4.4.8 ([4]) *Das Vamos-Matroid ist nicht algebraisch.*

Beweis. Die Punkte 1, 2 sind in Serie im Restriktionsminor $M_{\{1,2,3,4,7,8\}}$. Wäre dieser algebraisch, so gäbe es im algebraischen Abschluß des Oberkörpers ein $\beta \in \text{cl}(3, 4) \cap \text{cl}(7, 8)$. Nach Beispiel 1.3.4 liegt β dann aber auch im Schnitt der Geraden durch 1, 2 und 5, 6. Widerspruch. \square

Proposition 4.4.9 *Das Dual T^* des Tic-Tac-Toe Matroids ist nicht algebraisch.*

Beweis. Das Dual des Tic-Tac-Toe Matroids hat Rang 4 und die Komplemente der 5-Punkt-Hyperebenen des Tic-Tac-Toe Matroids bilden die 4-Punkt-Hyperebenen des Duals. Betrachten wir nun die Restriktion auf $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$, so bildet diese ein Prisma. Darin sind etwa $\{a_1, b_1\}$ in Serie. Wäre T^* algebraisch, so gäbe es im algebraischen Abschluß des Oberkörpers ein $\beta_1 \in \text{cl}(a_2, b_2) \cap \text{cl}(a_3, b_3)$. Nach Beispiel 1.3.4 liegt β_1 dann aber auch auf der Geraden durch a_1, b_1 . Ebenso finden wir β_2 im Schnitt der Geraden durch b_i, c_i . Dann liegen β_1 und β_2 auf den durch a_i, b_i, c_i erzeugten Ebenen. Betrachten wir nun das Matroid, das durch $\{a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, c_3, \beta_1, \beta_2\}$ erzeugt wird. Es hat Rang 4 und nach Voraussetzung und wegen der letzten Überlegung hat es folgende 4-Punkthyperebenen:

$$\{a_1, c_1, a_1, c_2\}, \{a_2, c_2, a_3, c_3\}, \{a_1, c_1, \beta_1, \beta_2\}, \{a_2, c_2, \beta_1, \beta_2\}, \{a_3, c_3, \beta_1, \beta_2\}.$$

Also ist dieses Matroid das Vamos-Matroid, welches wir bereits als nicht-algebraisch identifiziert haben. \square

Bemerkung 4.4.10 *Das Tic-Tac-Toe Matroid besitzt alle bisher bekannten Eigenschaften algebraischer Matroide. Es ist bisher nicht bekannt, ob die algebraischen Matroide unter Dualität abgeschlossen sind.*

Kapitel 5

Die verbotenen Minoren regulärer Matroide

In diesem Kapitel wollen wir das zentrale Resultat an den Anfang stellen und uns erst dann den Beweis erarbeiten. Der hier vorgestellte elementare Beweis dieses klassischen Resultates geht zurück auf Gerards [3]. Der neue Beweis der excluded minors für $GF(4)$ -Repräsentierbarkeit beruht im wesentlichen auf dem gleichen Ansatz.

5.1 Das Resultat und seine Lemmata

Satz 5.1.1 *Ein Matroid ist regulär genau dann, wenn es keinen $U_{2,4}$, F_7 oder F_7^* -Minor hat.*

Offensichtlich ist dies wegen Satz 4.2.3 äquivalent mit

Satz 5.1.2 *Ein binäres Matroid ist regulär genau dann, wenn es keinen F_7 oder F_7^* -Minor hat.*

Wir hatten oben schon bemerkt, daß die Fundamentalmatrix ein binäres Matroid repräsentieren muß. Bei regulären Matroiden muß es wegen Satz 4.3.5 eine Vorzeichenbelegung der Fundamentalmatrix geben, so daß diese regulär wird.

Definition 5.1.3 *Sei X eine $(m \times n)$ -Matrix mit Einträgen in $\{0, 1\}$. Eine Vorzeichenbelegung von X ist eine $(m \times n)$ -Matrix Y mit $\forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n : |y_{i,j}| = x_{i,j}$.*

Die folgende Matrix X_F liefert mit $(I_3|X_F)$ eine Darstellung von F_7 :

$$X_F := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Mit dieser Definition ist Satz 5.1.2 äquivalent zu:

Satz 5.1.4 Sei X eine $(m \times n)$ -Matrix mit Einträgen in $\{0, 1\}$. Dann sind folgende beiden Aussagen äquivalent:

1. X hat keine total unimodulare Vorzeichenbelegung.
2. Betrachtet man die Matrix $(I_m|X)$ über $GF(2)$, so kann sie durch eine Kombination der Operationen Löschen einer Zeile oder Spalte, Permutation von Zeilen oder Spalten und Pivotieren in $(I_3|X_F)$ oder $(I_4|X_F^\top)$ überführt werden.

Diesen letzten Satz wollen wir nun mit Hilfe mehrerer Lemmata beweisen.

Lemma 5.1.5 Sei G ein einfacher, zusammenhängender, bipartiter Graph mit der Eigenschaft, daß jedes Paar von Knoten gleicher Farbklasse einen Knotenschnitt bildet. Dann ist G ein Pfad oder ein Kreis.

Beweis. Ist G weder ein Pfad noch ein Kreis, so hat G einen aufspannenden Baum, der kein Pfad ist. Darin gibt es zwei Blätter in der gleichen Farbklasse. \square

Lemma 5.1.6 Sei D eine $(n \times n)$ -Matrix mit Einträgen in $\{0, 1, -1\}$. Ist $G(D^\#)$ ein Kreis, dann ist D total unimodular genau dann, wenn die Anzahl negativer Einträge in D die gleiche Parität wie n modulo 2 hat.

Beweis. Da Permutation von Zeilen oder Spalten höchstens das Vorzeichen der Determinante ändert, dürfen wir annehmen, daß

$$D^\# = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hat man eine echte quadratische Untermatrix von D , so entspricht dieser ein echter Teilgraph von $G(D^\#)$ enthält also eine Zeile oder Spalte mit nur einem Nichtnulleintrag. Induktiv folgt sofort, daß jede echte Untermatrix von D Determinante $0, 1$ oder -1 hat. Wir müssen also nur die Determinante von D untersuchen. Durch abwechselndes Skalieren von Zeilen und Spalten erhalten wir $|\det(D)| = |\det(D_1)|$ mit

$$D^\# = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & d_{1,n} \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei $d_{1,n} \in \{+1, -1\}$. Entwicklung nach der ersten Zeile liefert: $\det(D_1) = 1 + (-1)^{n+1}d_{1,n}$. Die Behauptung folgt nun leicht mittels Induktion über die Anzahl der -1 en in D \square

Lemma 5.1.7 *Seien D_1 und D_2 total unimodulare Matrizen mit $D_1^\# = D_2^\#$. Dann entsteht D_2 aus D_1 durch Multiplikation einiger Zeilen und Spalten mit -1 .*

Beweis. Wir versehen die Kanten des Graphen $G(D_1^\#) = G(D_2^\#)$ mit Vorzeichen und zwar die Kante (ij) mit $\sigma(ij) = (D_1)_{ij} * (D_2)_{ij}$. Zunächst zeigen wir, daß für jeden Kreis C in $G(D_1^\#)$ gilt:

$$\prod_{e \in C} \sigma(e) = 1.$$

Wir beweisen das über die Anzahl k der Sehnen von C . Im Fall $k = 0$ betrachten wir die von den Knoten der Untermatrix des Kreises induzierten Matrizen. Dann folgt aus Lemma 5.1.6:

$$\prod_{ij \in C} (D_1)_{ij} = \prod_{ij \in C} (D_2)_{ij} = (-1)^n$$

und somit die Induktionsvoraussetzung. Ist nun $k > 0$ und f eine Sehne in C , so zerteilt f den Kreis C in C_1 und C_2 , so daß $C_1 \cup f$ und $C_2 \cup f$ Kreise sind, die beide weniger Sehnen als C haben. Nach Induktionsvoraussetzung erhalten wir also

$$1 = \prod_{e \in C_1 \cup f} \sigma(e) * \prod_{e \in C_2 \cup f} \sigma(e) = \sigma(f)^2 * \prod_{e \in C} \sigma(e) = \prod_{e \in C} \sigma(e).$$

Betrachten wir nun ein Knotenpaar $s, t \in G(D^\#)$, so „hat“ also entweder jeder s - t -Weg positives Vorzeichen oder jeder hat negatives Vorzeichen. Wählen wir nun

einen Knoten $v_0 \in G(D^\#)$, so hat definiert demnach σ eine Partition der Knoten in „positive“ und „negative“ Knoten. Die Multiplikation einer Zeile oder Spalte mit -1 bewirkt, daß dieser Knoten die Farbklasse wechselt. Also überführt die Multiplikation der negativen Knoten mit -1 die Matrix $D_1^\#$ in $D_2^\#$ und umgekehrt. \square

Schließlich müssen wir noch die Pivotoperation etwas genauer unter die Lupe nehmen. Damit diese die Matrix wieder in die Form $(I|X)$ überführt, hängen wir an den reinen Gauß-Eliminationsschritt noch eine Vertauschung der alten mit der neuen Basisspalte an. Sei z.B.

$$A_1 := \left(I_r \mid \begin{array}{c} \alpha \quad \underline{x}^\top \\ \underline{y} \quad Z \end{array} \right)$$

Pivotieren wir nun nach $\alpha \neq 0$ erhalten wir zunächst

$$A_2 := \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha^{-1} & 0 & 1 & \alpha^{-1}\underline{x}^\top & & \\ -\alpha^{-1}\underline{y} & I_{r-1} & 0 & Z - \alpha^{-1}\underline{y}\underline{x}^\top & & \end{array} \right)$$

und schließlich

$$A_3 := \left(I_r \mid \begin{array}{cc} \alpha^{-1} & \alpha^{-1}\underline{x}^\top \\ \alpha^{-1}\underline{y} & Z - \alpha^{-1}\underline{y}\underline{x}^\top \end{array} \right).$$

Lemma 5.1.8 1. Ist $G(A_1^\#)$ zusammenhängend, so auch $G(A_3^\#)$.

2. Ist $A = \begin{pmatrix} \alpha & \underline{x}^\top \\ \underline{y} & Z \end{pmatrix}$ quadratisch, so ist $\det(A) = \alpha \det(Z - \alpha^{-1}\underline{y}\underline{x}^\top)$.

Beweis. Ist $G(A_3^\#)$ unzusammenhängend, so kann A_3 durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen in eine Blockdiagonalmatrix überführt werden. Pivotieren wir andererseits auf α^{-1} , so erhalten wir A_1 zurück. Man überlegt sich aber leicht, daß pivotieren in einer Blockdiagonalmatrix eine Blockdiagonalmatrix liefert. Also ist auch $G(A_3^\#)$ unzusammenhängend. Die zweite Aussage rechnet man leicht nach. \square

5.2 Der Beweis von Satz 5.1.4

In diesem Abschnitt wollen wir den Beweis der ausgeschlossenen Minoren regulärer Matroide führen.

Beweis. Offensichtlich impliziert die Existenz einer total unimodularen Vorzeichenbelegung für X mit Lemma 4.3.3 eine ebensolche für jede Untermatrix jeder Matrix, die aus X durch Pivotieren hervorgeht. Also folgt die eine Richtung aus der Tatsache, daß die Fano-Ebene nicht über \mathbb{R} linear ist und Satz 4.3.5.

Nehmen wir also nun an, daß X keine total unimodulare Vorzeichenbelegung hat und minimal mit dieser Eigenschaft ist, d.h. jede echte Teilmatrix von X hat eine solche. Offensichtlich ist dann $G(X)$ zusammenhängend und weder ein Kreis noch ein Pfad. Nach Lemma 5.1.5 kann entweder X oder X^T durch Spaltenvertauschungen in die Form $(\underline{x}|\underline{y}|Z)$ gebracht werden, so daß $G(Z)$ zusammenhängend ist. Nach Voraussetzung haben $(\underline{x}|Z)$ und $(\underline{y}|Z)$ total unimodulare Vorzeichenbelegungen und wegen Lemma 5.1.7 können wir diese so wählen, daß sie auf Z übereinstimmen. Alle diese Eigenschaften sind invariant unter Pivotieren von Elementen aus Z .

Wir wollen nun zeigen, daß $(\underline{x}|\underline{y}|Z)$ durch Pivotieren, Zeilen- und Spaltenvertauschen sowie Löschen von Zeilen- und Spalten in X_F überführt werden kann. Sei nun W eine Untermatrix von einer Matrix $(\underline{x}_1|\underline{y}_1|Z_1)$, die durch Pivotieren aus $(\underline{x}|\underline{y}|Z)$ entsteht mit folgender Eigenschaft: W ist nicht total unimodular, aber jede echte Untermatrix einer Matrix, die durch Pivotieren eines Elementes in Z aus W entsteht ist total unimodular. Wir behaupten:

W ist eine Untermatrix von $(\underline{x}_1|\underline{y}_2)$ die durch Multiplikation von Zeilen und Spalten mit -1 in $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ überführt werden kann.

Offensichtlich muß W \underline{x} und \underline{y} treffen. Trifft W auch ein Element in Z , so können wir auf diesem Pivotieren und mit Lemma 5.1.8 erhalten wir einen Widerspruch zur Wahl von W . Der Rest der Behauptung ist trivial.

Also können wir annehmen, daß die ersten zwei Zeilen von $(\underline{x}_1|\underline{y}_2)$ gerade $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sind. Da $G(Z_1^\#)$ zusammenhängend ist, können wir einen kürzesten Pfad P von dem Knoten der ersten Zeile zum Knoten der zweiten Zeile finden. Angenommen dieser hätte Länge zwei. Dann hätte Z_1 eine Spalte, die in den ersten zwei Zeilen $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ nicht Null wäre. Offensichtlich kann diese Zeile aber höchstens mit einem von \bar{x} und \bar{y} eine total unimodulare Matrix bilden. Also hat P mindestens Länge vier. Dieser kürzeste Weg führt also auf folgende Submatrix D .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & * & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & * \\ & & * & * & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & * & * & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & * & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & 0 & 0 & 0 & \dots & * & * & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & * & * \end{pmatrix},$$

wobei die * Einträge +1 oder -1 bedeuten und die weiteren Einträge von \underline{x} und \underline{y} unklar sind. Durch Multiplikation einiger Zeilen und Spalten mit -1 können wir erreichen, daß alle *-Einträge bis auf den in der zweiten Zeile 1 sind. Indem wir die zweite Zeile evtl. noch mit -1 multiplizieren und die ersten beiden Spalten vertauschen, können wir sogar annehmen, daß alle * Einträge 1 sind. Nun pivotieren wir auf dem Element $D_{3,4}$ und erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ & & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Streichen wir hier die dritte Zeile und vierte Spalte, so erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ & & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dies können wir solange fortführen, bis wir auf die (3×4) -Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ c & d & 1 & 1 \end{pmatrix}$

mit $c, d \in \{0, 1, -1\}$ stoßen. Da das Löschen sowohl der ersten als auch der zweiten Spalte auf eine total unimodulare Matrix führt, müssen $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ d & 1 \end{pmatrix}$ und auch $\det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ d & 1 \end{pmatrix}$ in $\{0, 1, -1\}$ sein. Dies impliziert $d = 0$. Die (3×3) -Matrix, die durch Löschen der zweiten Spalte entsteht hat Determinante $c - 2$, also gilt $c = 1$ und über $GF(2)$ ist die Matrix X_F . \square

Literaturverzeichnis

- [1] BORŮVKA, O. O jistém problému minimálním. *Práce Mor. Přírodověd Spol. v Brně 17* (1974), 37 – 58.
- [2] DRESS, A., AND LOVÁSZ, L. On some combinatorial properties of algebraic matroids. *Combinatorica 7(1)* (1987), 39 – 48.
- [3] GERARDS, A. A short proof of tutte's characterization of totally unimodular matrices. *Linear Algebra Appl. 114/115* (1974), 207 – 212.
- [4] INGLETON, A., AND MAIN, R. Non-algebraic matroids exist. *Bull. London Math. Soc. 7* (1975), 144 – 146.
- [5] KNUTH, D. The asymptotic number of geometries. *Journal of Combinatorial Theory B 17* (1974), 398 – 401.
- [6] N. WHITE, E. *Theory of Matroids*, vol. 26 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 1986.
- [7] OXLEY, J. *Matroid Theory*. Oxford University Press, 1992.
- [8] PFIFF, M. An upper bound on the number of matroids. *Journal of Combinatorial Theory B 14* (1973), 241 – 245.
- [9] WHITNEY, H. On the abstract properties of linear dependence. *Amer. J. Math.* 57 (1935), 509–533.

Index

- $GF(p^k)$, 6
- K_n , 8
- $K_{n,n}$, 8
- $M = (E, \mathcal{I})$, 11
- $M[\mathcal{A}]$, 30
- M^* , 37
- $O(f(n))$, 5
- $X \Delta Y$, 5
- \mathcal{B} , 16
- $\mathcal{C}(M)$, 12
- $\Delta(\mathcal{A})$, 30
- $\mathcal{U}_{m,n}$, 18
- $\langle X \rangle$, 6
- \mathbb{C} , 5
- \mathbb{N} , 5
- \mathbb{Q} , 5
- \mathbb{R} , 5
- \mathbb{Z} , 5

- abgeschlossene Mengen, 22
- abhängige Menge, 11
- Abschluss, 19
- affine Unabhängigkeit, 6
- affines Matroid, 24
- algebraisch unabhängig, 65
- algebraisches Matroid, 66
- Atom, 32
- atomarer Verband, 32

- Basis, 16
- Basisergänzungsaxiom, 11
- Baum, 8
- binäres Matroid, 16
- bipartitier Graph, 8

- Blocker, 38
- Bondmatroid, 42

- Clutter, 38
- Coatom, 32
- Cobasis, 37
- cographisch, 42
- Cokreis, 37
- Cokreismatroid, 42
- collinear, 26
- coplanar, 26

- Desargues Matroid, 24
- Dual, 37

- ebener Graph, 9
- einfaches Matroid, 15
- Erzeugendensystem, 22
- Escher Matroid, 25

- Filter, 53
- freies Matroid, 18
- Fundamentalgraph, 57
- Fundamentalkreis, 18
- Fundamentalmatrix, 56

- Gammoid, 51
- geometrischer Verband, 32
- Gerade, 22
- gerichteter Graph, 8
- Gewichtsfunktion, 34
- Graph, 6
- graphisches Matroid, 15
- Greedyalgorithmus, 34

- Hüllenoperator, 19

Hasse-Diagramm, 10
Hyperebene, 22, 39
Ideal, 53
induzierter Teilgraph, 7
Infimum, 10
Inzidenzdiagramm, 26
isomorph, 14
Jordan-Dedekind-Kettenbedingung, 32
Kette, 32
kombinatorische Geometrie, 15
Kontraktion, 46
Krei in Graph, 8
Kreis, 12
Kreiseliminationsaxiom, 13
Kreismatroid, 14
Länge einer Kette, 32
Länge eines Kreises, 12
lineares Matroid, 15
Matching, 8
Matroid, 11
maximale Kette, 32
Maximierungsproblem, 34
Minor, 49
Modularität, 19
monoton, 19
Multimenge, 5
parallel, 15
Partialordnung, 9
partielle Transversale, 30
paving matroid, 21
Pfad, 8
planarer Graph, 9
Polygonmatroid, 14
Punkt, 22
Rang, 18
reguläres Matroid, 16
repräsentierbares Matroid, 15
Restriktion, 18
Schleife, 15
selbstdual, 40
semimodular, 19
semimodularer Verband, 32
Steinitz-MacLane-Austauscheigenschaft, 21
strenges Gammoid, 45
subkardinal, 19
submodular, 19
Supremum, 10
symmetrische Differenz, 5
ternäres Matroid, 16
Tic-Tac-Toe Matroid, 21
total unimodular, 63
Transversale, 30
transversales Matroid, 31
Transversalmatroid, 30
unabhängige Menge, 11
Unabhängigkeitssystem, 34
uniformes Matroid, 18
Unterraum, 22
Vamos Matroid, 30
Vektormatroid, 12
Verband, 10
Vorzeichenbelegung, 68
Wald, 8
zusammenhängender Graph, 8