

Eine Potentialfunktion für Kantenfärbungsspiele

Diplomarbeit
von
Ingo Brinkmeier

angefertigt an der
FernUniversität in Hagen
Fachbereich Mathematik
unter Anleitung von
Herrn Prof. Dr. Winfried Hochstättler

Aachen, im Wintersemester 2007/2008

Inhaltsverzeichnis

Zu dieser Arbeit	vii
1. Einführung	1
1.1. Allgemeines zu Graphen	1
1.2. Färbung von Graphen	3
1.3. Spiele	6
2. Graphenfärbungsspiele	9
2.1. Coloring Construction Games	9
2.2. Bisherige Ergebnisse	14
3. Die Färbung vollständiger Graphen	21
3.1. Vollständige Graphen	21
3.2. Der spielchromatische Index des K_4	22
3.3. Der spielchromatische Index des K_5	25
3.4. Abschätzung des spielchromatischen Index des K_{2n}	28
3.5. Das <i>marking game</i> auf dem vollständigen Graphen K_n	29
4. Eine Potentialfunktion für Kantenfärbungsspiele	32
4.1. Definitionen	32
4.2. Die Potentialfunktion	34
4.3. Potentialstrategien	36
5. Die Färbung vollständiger Graphen mit Potentialstrategien	38
5.1. Experimentelle Ergebnisse	38
5.2. Relevanz der Kantenwahl	40
5.3. Schöne Spiele	42
6. Das Verhalten der Potentialfunktion bei lokalen Änderungen im Graphen	44
6.1. Potentialänderung nach Zugpaaren	44
6.2. Abschätzung der Potentialänderungen	47
6.3. Potentialwert und Farbenanzahl	57
6.4. Probleme beim Abschätzen der Potentialwerte	60
7. Die ersten Züge im Kantenfärbungsspiel	62
7.1. Mögliche Spielpositionen in den ersten Zügen	62
7.2. Bemerkungen zur Komplexität des Kantenfärbungsspiels	85
8. Ausblick	87
8.1. Übersicht über die Ergebnisse dieser Arbeit	87
8.2. Weitere offene Fragen	89

A. Programmcode der Spielsimulation mit Potentialstrategien	91
A.1. Verwendete Klassen	91
A.2. Programmablauf	91
A.3. Quelltext des Pakets <code>completeGraphColoring</code>	92
Literatur	109
Index	112

Abbildungsverzeichnis

1.	Graph mit Knotenmenge $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$	1
2.	Färbung eines Pfades der Länge $n \geq 4$ (1. Möglichkeit)	12
3.	Färbung eines Pfades der Länge $n \geq 4$ (2. Möglichkeit)	12
4.	Färbung des K_4 nach zwei Zügen	23
5.	Färbung des K_4 nach vier Zügen	23
6.	Unabhängige Kanten im K_5	24
7.	Färbung des K_5 nach 4 Zügen (1. Möglichkeit)	26
8.	Färbung des K_5 (2. Möglichkeit)	27
	(a). K_5 nach 4 Zügen (2. Möglichkeit)	27
	(b). Alice färbt $\{4, 5\}$	27
	(c). Alice färbt $\{2, 5\}$	27
	(d). Alice färbt $\{3, 5\}$	27
	(e). Alice färbt $\{1, 3\}$	27
	(f). Bob färbt $\{1, 3\}$	27
	(g). Bob färbt $\{1, 4\}$	27
	(h). Bob färbt $\{2, 4\}$	27
	(i). Bob färbt $\{4, 5\}$	27
9.	Abschätzung des spielchromatischen Index des K_{2n}	28
10.	Isomorphie von partiell gefärbten Graphen	34
	(a). G	34
	(b). G'	34
11.	Eine Kante e mit Potentialwert $\Phi(e) = 4$	35
12.	Eine kritische Kante e im K_4	36
13.	Mehrdeutigkeiten beim Spiel mit Potentialstrategien	37
14.	Färbung des K_6 mit Potentialstrategien	41
	(a). Ausgangssituation	41
	(b). Bob färbt $\{1, 6\}$	41
	(c). Bob färbt $\{1, 5\}$	41
	(d). Alice färbt $\{2, 3\}$	41
	(e). Alice färbt $\{1, 5\}$	41
	(f). Alice färbt $\{1, 6\}$	41
15.	Graph nach dem 1. Zug	62
16.	Graph nach Zug 2.1	63
17.	Graph nach Zug 2.2	63
18.	Graph nach Zug 2.3	64
19.	Graph nach Zug 3.1.1	64
20.	Graph nach Zug 3.1.2	65
21.	Graph nach Zug 3.1.3	65
22.	Graph nach Zug 3.1.4	65
23.	Graph nach Zug 3.1.5	66
24.	Graph nach Zug 3.1.6	66
25.	Graph nach Zug 3.2.3	67

26.	Graph nach Zug 3.2.4	67
27.	Graph nach Zug 3.3.5	68
28.	Graph nach Zug 4.1.1	68
29.	Graph nach Zug 4.1.2	68
30.	Graph nach Zug 4.1.3	69
31.	Graph nach Zug 4.1.4	69
32.	Graph nach Zug 4.2.1	69
33.	Graph nach Zug 4.2.4	70
34.	Graph nach Zug 4.2.5	70
35.	Graph nach Zug 4.2.6	71
36.	Graph nach Zug 4.2.7	71
37.	Graph nach Zug 4.3.1	71
38.	Graph nach Zug 4.3.2	72
39.	Graph nach Zug 4.3.4	72
40.	Graph nach Zug 4.3.5	72
41.	Graph nach Zug 4.3.7	73
42.	Graph nach Zug 4.3.8	73
43.	Graph nach Zug 4.3.9	74
44.	Graph nach Zug 4.4.2	74
45.	Graph nach Zug 4.4.4	75
46.	Graph nach Zug 4.4.5	75
47.	Graph nach Zug 4.4.9	75
48.	Graph nach Zug 4.4.10	76
49.	Graph nach Zug 4.4.11	76
50.	Graph nach Zug 4.5.6	77
51.	Graph nach Zug 4.5.7	77
52.	Graph nach Zug 4.5.12	78
53.	Graph nach Zug 4.5.13	79
54.	Graph nach Zug 4.5.14	79
55.	Graph nach Zug 4.6.7	80
56.	Graph nach Zug 4.6.11	80
57.	Graph nach Zug 4.6.13	81
58.	Graph nach Zug 4.7.3	81
59.	Graph nach Zug 4.7.4	82
60.	Graph nach Zug 4.8.9	83
61.	Graph nach Zug 4.8.10	83
62.	Graph nach Zug 4.9.6	84
63.	Graphen und ihre Liniengraphen	89
	(a). $\mathcal{L}(C_6) = H_3 \subset K_{3,3}$ (siehe Beispiel 2.1)	89
	(b). Kreis $C_6 = \mathcal{L}^{-1}(H_3)$	89
	(c). $K_{3,3}$	89
	(d). $\mathcal{L}^{-1}(K_{3,3}) = \emptyset$	89

Tabellenverzeichnis

1.	Übersicht über die bisherigen Ergebnisse	20
	(a). Knotenfärbungsspiele	20
	(b). Kantenfärbungsspiele	20
2.	Spiele mit Potentialstrategien	39
3.	Abschätzung der maximalen Potentialwerte	48
4.	Untere Schranken für den Potentialwert der letzten ungefärbten Kante .	59

Zu dieser Arbeit

In dieser Arbeit wird die Färbung von Graphen unter spieltheoretischen Gesichtspunkten betrachtet. Die Untersuchung solcher Graphenfärbungsspiele ist ein relativ junger Forschungsbereich in der Färbungstheorie von Graphen, der 1989 mit Hans L. Bodlaenders Arbeit „*On the complexity of some coloring games*“ [7] begründet wurde.

Bei den hier betrachteten Spielen handelt es sich um Zwei-Personen-Nullsummenspiele, bei denen die Spieler abwechselnd je nach Spielvariante Kanten bzw. Knoten eines gegebenen Graphen unter Einhaltung bestimmter Bedingungen färben, bis kein weiterer Zug mehr möglich ist. In unserem Fall ist dies die Bedingung, daß zwei benachbarte Kanten bzw. Knoten nicht in der gleichen Farbe gefärbt werden dürfen. Der erste Spieler gewinnt, falls bei Spielende alle Kanten bzw. Knoten des Graphen gefärbt sind, ansonsten gewinnt der zweite Spieler. Aufgrund dieser Eigenschaft werden diese Spiele auch *maker-braker*-Spiele genannt, Bodlaender bezeichnet sie in seiner Arbeit als *coloring construction games*.

Welcher der Spieler gewinnt hängt neben dem gegebenen Graphen natürlich von der Anzahl der Farben ab, die zur Färbung zur Verfügung stehen. Das Ziel der Untersuchungen von Graphenfärbungsspielen ist es daher immer, für einen gegebenen Graphen (oder eine Klasse von Graphen) die minimale Anzahl der Farben zu bestimmen, die benötigt werden, so daß der erste Spieler durch die Wahl seiner Züge erreichen kann, daß der Graph bei Spielende vollständig gefärbt ist und er somit das Spiel gewinnt, egal welche Züge der andere Spieler ausführt. Diese für einen Graphen charakteristische Größe nennt man die spielchromatische Zahl bzw. den spielchromatischen Index des Graphen, je nachdem ob es sich um Knoten- oder Kantenfärbungsspiele handelt.

Die Anleitung zur Wahl der entsprechenden Kanten und Farben, die dieses Ergebnis sicherstellen, bezeichnet man als Gewinnstrategie. Es geht also darum Gewinnstrategien für das Färbungsspiel auf verschiedenen Graphen(klassen) und den Wert der spielchromatischen Kennzahlen zu bestimmen. In der vorliegenden Arbeit wird speziell das Kantenfärbungsspiel auf den vollständigen Graphen K_n untersucht. Hierzu führen wir eine Potentialfunktion ein und definieren mit deren Hilfe Strategien für das Kantenfärbungsspiel. Anhand von praktischen Experimenten und theoretischen Überlegungen zeigen wir Möglichkeiten und Grenzen des auf dieser Potentialstrategie beruhenden Lösungsansatzes zur Bestimmung des spielchromatischen Index eines Graphen.

Die Arbeit ist in 7 Kapitel eingeteilt. Die ersten beiden Kapitel dienen der Einführung. Im ersten Kapitel werden graphentheoretische Begriffe sowie Grundzüge der Spieltheorie mit einigen Bemerkungen zur Geschichte und Anwendungen eingeführt.

Das zweite Kapitel definiert im ersten Abschnitt die in der Arbeit untersuchten Spiele mit ihren charakteristischen Kennzahlen. Wir zeigen allgemeine Abschätzungen und einige interessante Eigenschaften dieser Größen. Nur für wenige Graphenklassen ist es bisher gelungen, die genauen Werte der spielchromatischen Zahlen bzw. Indizes zu bestimmen. In vielen Fällen konnten nur untere und obere Schranken für ihre Werte angegeben werden. Eine Übersicht über diese bisherigen Ergebnisse findet sich im zweiten Abschnitt des Kapitels.

In den folgenden Kapiteln werden wir das Kantenfärbungsspiel auf den vollständigen

Graphen näher betrachten. Im ersten Abschnitt des dritten Kapitels werden diese Graphen definiert und ihre chromatischen Zahlen und Indizes bestimmt. Die Betrachtung einiger Beispiele in den folgenden Abschnitten zeigt die Schwierigkeit, die spielchromatischen Kennzahlen selbst von Graphen kleiner Ordnung genau zu bestimmen. Durch die Angabe von Gewinnstrategien für die beiden Spieler berechnen wir den spielchromatischen Index des K_4 und den spielchromatischen Index des K_5 . Im vierten Abschnitt wird eine die allgemeine Abschätzung aus dem zweiten Kapitel verbessernde untere Schranke für den spielchromatischen Index vollständiger Graphen K_{2n} gerader Ordnung hergeleitet. Im fünften Abschnitt zeigen wir, daß mit der Strategie, die für andere Graphenklassen die besten bisherigen Abschätzungen lieferte, bei den vollständigen Graphen keine gegenüber allgemeinen Abschätzungen verbesserten Ergebnisse erzielt werden können.

Dies motiviert die Einführung neuer Methoden und Werkzeuge, um möglichst gute Strategien für das Kantenfärbungsspiel auf den vollständigen Graphen zu bestimmen und damit den Wertebereich für die spielchromatischen Indizes dieser Graphen einzuschränken. In Kapitel 4 führen wir hierzu eine Potentialfunktion auf den ungefärbten Kanten eines Graphen ein und definieren mit deren Hilfe Strategien für die beiden Spieler.

Kapitel 5 zeigt anhand von Computereperimenten, wie sich diese Potentialstrategien beim Kantenfärbungsspiel auf den vollständigen Graphen bewähren. (Der verwendete Programmcode kann dem Anhang A entnommen werden.) Im ersten Abschnitt werden die Ergebnisse der Simulationen vorgestellt. Diese lassen vermuten, daß die (untere Schranke für die) spielchromatische Zahl vollständiger Graphen proportional zur Ordnung des Graphen wächst. Der zweite Abschnitt zeigt eine Schwäche der Potentialstrategien auf: Durch die Bedingung der Potentialmaximierung bzw. Potentialminimierung wird im Allgemeinen weder die zu färbende Kante noch die zu verwendende Farbe eindeutig bestimmt. Im Fall der Mehrdeutigkeit muss also ein weiteres Auswahlkriterium die zu färbende Kante und Farbe bestimmen. Hier kann es trotz gleicher mittlerer Potentialwerte zu verschiedenen Spielergebnissen kommen. Die Ergebnisse der Experimente geben Anlaß eine weitere offene Frage aus der Theorie der Graphenfärbungsspiele erneut zu stellen: Ist das hier betrachtete Spiel ein sogenanntes „schönes Spiel“? Dieses Problem wird im dritten Abschnitt vorgestellt.

Im sechsten Kapitel untersuchen wir, wie sich der Potentialwert einer ungefärbten Kante ändert, wenn weitere Kanten des Graphen gefärbt werden. Hierzu werden alle möglichen Fälle aufgeführt und Abschätzungen der jeweiligen Potentialänderungen berechnet. Anschließend stellen wir den Zusammenhang zwischen dem Potentialwert der ungefärbten Kanten eines Graphen und seinem spielchromatischen Index dar, und beschreiben die Schwierigkeiten, die beim Abschätzen des Potentialwertes auftreten.

Kapitel 7 veranschaulicht nochmals die Komplexität des Kantenfärbungsspiels indem die ersten Züge des Spiels auf dem K_n explizit dargestellt werden.

In Kapitel 8 werden die Ergebnisse dieser Arbeit noch einmal zusammenfassend beschrieben und abschließend einige offene Fragen aus der Graphenfärbungstheorie erörtert, die sich auch bei den Untersuchungen in dieser Arbeit gestellt haben.

1. Einführung

1.1. Allgemeines zu Graphen

Die in dieser Arbeit benutzten graphentheoretischen Begriffe werden weitestgehend in den Bedeutungen benutzt, wie sie zum Beispiel in [12] oder [39] definiert werden.

Graph

Ein *Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei V eine Menge und $E = \{\{u, v\} \in V \times V \mid u \neq v\}$ eine Menge von Paaren mit verschiedenen Elementen aus V ist. Die Elemente von V heißen *Knoten* oder *Ecken* des Graphen G , die Elemente von E *Kanten* von G . Die Knotenmenge eines Graphen G bezeichnet man mit $V(G)$, seine Kantenmenge mit $E(G)$. Ist $k \in K$ mit $k = \{u, v\}$ eine Kante von G , so heißen u, v *Endpunkte* der Kante k .

Ein Graph läßt sich bildlich darstellen, indem man für jeden Knoten einen Punkt zeichnet und jeweils zwei Punkte mit einer Linie verbindet, wenn die entsprechenden Knoten eine Kante bilden.

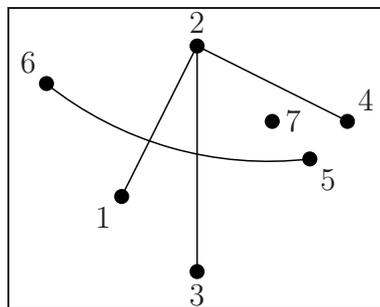


Abbildung 1: Graph mit Knotenmenge $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ und Kantenmenge $E(G) = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{5, 6\}\}$

Gerichteter Graph

Ein *gerichteter Graph* ist ein Paar $\vec{G} = (V, E)$, wobei V eine Menge und $E = \{(u, v) \in V \times V \mid u \neq v\}$ eine Menge von geordneten Paaren verschiedener Elementen aus V ist. Wir bezeichnen die Elemente von V wieder als *Knoten* und die Elemente von E als (*gerichtete*) *Kanten* von \vec{G} . Ist $e = (u, v)$ eine gerichtete Kante, so nennen wir u den *Anfangsknoten* von e und v den *Endknoten* von e .

Teilgraph

Ein Graph $G' = (V', E')$ heißt *Teilgraph* eines Graphen $G = (V, E)$, in Zeichen $G' \subseteq G$, wenn $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ gilt. Ein Teilgraph G' heißt *von V' induzierter Teilgraph*,

wenn er alle Kanten $\{v_1, v_2\} \in E$ mit $v_1, v_2 \in V'$ enthält.

Ordnung und Größe

Die Anzahl der Knoten $|V(G)|$ eines Graphen heißt *Ordnung* von G , die Anzahl der Kanten $|E(G)|$ die *Größe* von G . Anstelle von $|V(G)|$ und $|E(G)|$ schreiben wir auch $|G|$ und $\|G\|$. Ist $|G| < \infty$, so heißt G *endlicher Graph*.

Adjazenz und Inzidenz

Zwei verschiedene Ecken u und v eines Graphen G heißen *adjazent* oder *benachbart*, wenn $\{u, v\}$ eine Kante des Graphen G ist. Zwei verschiedene Kanten e und f sind *adjazent*, wenn sie einen gemeinsamen Endknoten haben. Eine Ecke v ist *inzident* mit einer Kante e , wenn gilt $v \in e$.

Knotengrad und Maximalgrad

Der *Grad* $d_G(v)$ eines Knotens $v \in V(G)$ ist die Anzahl der mit ihm inzidenten Kanten, also

$$d_G(v) := |\{e \mid e \in E(G) \wedge e \text{ inzidiert mit } v\}|$$

Der *Maximalgrad* $\Delta(G)$ eines Graphen G ist der maximale Knotengrad der Knoten von G , also

$$\Delta(G) := \max\{d_G(v) \mid v \in V(G)\}$$

Ebenso definiert man den *Minimalgrad* $\delta(G)$ eines Graphen G als den minimalen Grad der Knoten von G , also

$$\delta(G) := \min\{d_G(v) \mid v \in V(G)\}$$

Kantenfolgen, Wege und Kreise

Eine Folge $P_n = (\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\})$ von Kanten eines Graphen $G = (V, E)$ heißt *Kantenfolge* von G und die Anzahl n der Kanten heißt *Länge* der Kantenfolge. Eine Kantenfolge heißt *Kantenzug*, wenn alle Kanten verschieden sind. Sind alle Knoten v_i paarweise verschieden, so nennt man die Kantenfolge einen *Weg*. Die Knoten v_0 und v_n sind die *Endknoten* von P_n . Man schreibt auch $P_n = v_0 v_1 \dots v_n$ und nennt P_n einen Weg von v_0 nach v_n . Eine geschlossene Kantenfolge $C_n = v_0 \dots v_n$ mit $v_0 = v_n$, $n \geq 3$ und v_0, v_1, \dots, v_{n-1} paarweise verschieden, heißt *Kreis*.

Zusammenhang und Komponenten

Ein nicht leerer Graph G heißt *zusammenhängend*, wenn für je zwei seiner Knoten v_1, v_2 ein Weg von v_1 nach v_2 existiert. Ein maximaler zusammenhängender Teilgraph eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine *Komponente* von G .

Bäume

Ein zusammenhängender Graph G , der keinen Kreis enthält, heißt *Baum*. Es gibt also jeweils genau einen Weg zwischen zwei Knoten $v_1, v_2 \in V(G)$ eines Baumes G . Die Knoten vom Grad 1 eines Baumes heißen *Blätter*. Knoten, die keine Blätter sind, heißen *innere Knoten*. Einen Baum, in dem eine spezielle Ecke als *Wurzel* ausgezeichnet ist, nennt man *Wurzelbaum*. Gibt man zusätzlich allen Kanten des Wurzelbaumes eine Orientierung, indem man alle Kanten von der Wurzel weg richtet, spricht man von einem *gerichteten Wurzelbaum*. Ein Graph, dessen Komponenten Bäume sind, heißt *Wald*.

Kantengraph

Sei der Graph G gegeben. Der Graph $\mathcal{L}(G) := (\mathcal{L}(V(G)), \mathcal{L}(E(G)))$ mit $\mathcal{L}(V(G)) := E(G)$ und $\mathcal{L}(E(G)) := \{\{e, f\} \mid e, f \in E(G) \text{ und } e \neq f \text{ sind adjazent in } G\}$ heißt *Kantengraph* oder *Liniengraph* von G .

Isomorphie

Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ heißen *isomorph*, in Zeichen $G \simeq G'$, wenn es eine bijektive Abbildung $\phi : V \rightarrow V'$ gibt, so dass für alle $u, v \in V$ gilt: $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{\phi(u), \phi(v)\} \in E'$. Die Abbildung ϕ heißt dann *Isomorphismus*.

Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, sind alle im Folgenden betrachteten Graphen endlich und ungerichtet.

1.2. Färbung von Graphen

Die Färbung von Graphen geht auf das Problem der Färbung von Landkarten zurück: Können die Länder einer Landkarte immer so mit vier Farben gefärbt werden, dass keine zwei Länder mit gemeinsamer Grenze die gleiche Farbe erhalten? Diese schwierige Frage stellte 1852 Francis Guthrie seinem Bruder Frederick, der damals in Cambridge Mathematik studierte. Sie fand als das *Vierfarbenproblem* Eingang in die Mathematik und konnte erst 1977 von K. Appel und W. Haken mit Hilfe eines Computers positiv beantwortet werden¹.

Stellt man sich in der Mitte jeden Landes einen Knoten vor und verbindet zwei Knoten immer dann durch eine Kante, wenn die entsprechenden Länder eine gemeinsame Grenze haben, so wird aus dem Vierfarbenproblem das Färbungsproblem eines Graphen.

Auch viele andere Probleme lassen sich mit Hilfe der Färbung von Graphen modellieren, zum Beispiel die Frequenzuteilung an (Radio-)Sendern², die Erstellung von Stun-

¹Siehe [4, 5].

²Das Problem der Frequenzuteilung besteht darin (Radio-)Sendern so Sendefrequenzen zuzuteilen, dass sich geographisch nahe beieinander liegende Sender nicht durch Interferenzen aufgrund ähnlicher Sendefrequenzen gegenseitig stören. Betrachtet man die Sender als Knoten eines Graphen, die genau dann benachbart sind, wenn die entsprechenden Sender geographisch benachbart sind und die

denplänen³ oder auch Denkspiele wie Sudoku⁴.

Knotenfärbung und chromatische Zahl

Eine *Knotenfärbung* eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $f : V \rightarrow F$ von der Knotenmenge V des Graphen auf eine *Farbmenge* F . Die Elemente der Menge F nennt man die zur Verfügung stehenden Farben. Gilt für je zwei benachbarte Knoten $u, v \in V$ $f(u) \neq f(v)$, so heißt die Knotenfärbung *zulässig*.

An der Menge F interessiert uns lediglich ihre Mächtigkeit. Existiert für ein $k \in \mathbb{N}$ eine zulässige Knotenfärbung $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$, so sagen wir, dass G eine *k-Färbung* hat und nennen G *k-färbbar*.

Existiert eine zulässige Knotenfärbung zu G und F , so existiert auch eine zulässige Knotenfärbung zu G und $F \cup \{a\}$ für ein $a \notin F$. Dies motiviert die Frage nach dem kleinsten $k \in \mathbb{N}$, für welches eine k-Färbung von G existiert⁵. Dieses k nennt man die *chromatische Zahl* von G und bezeichnet sie mit $\chi(G)$. Ein Graph G mit $\chi(G) = k$ heißt *k-chromatisch*.

Das *Färbungsproblem* besteht also darin, für einen gegebenen Graphen zu entscheiden, ob er mit maximal k Farben zulässig gefärbt werden kann. Dieses Problem ist für den Fall $k \geq 3$ \mathcal{NP} -vollständig (vgl. z.B. [22]).

Satz 1.1 Für die chromatische Zahl $\chi(G)$ eines Graphen G gilt folgende Abschätzung:

$$0 \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1 \quad (1)$$

Beweis:

Die höchstens $\Delta(G)$ Nachbarn eines Knoten v werden mit höchstens $\Delta(G)$ Farben gefärbt. Eine weitere Farbe benötigt man für den Knoten v selbst. \square

Dieses Ergebnis wird im folgenden Satz von Brooks verschärft:

verschiedenen Frequenzen als unterschiedliche Farben, dann entsteht hieraus ein Graphenfärbungsproblem.

³Die zu plzierenden Veranstaltungen sind die Knoten des Graphen, und eine Kante wird zwischen den Veranstaltungen eingefügt, die nicht gleichzeitig stattfinden können, z.B. weil sie vom gleichen Lehrer unterrichtet werden oder in der gleichen Klasse stattfinden. Den zuteilbaren Zeitfenstern entsprechen die möglichen Farben. Oder man faßt dies als Kantenfärbungsproblem auf: Dann repräsentieren die Knoten die Lehrer und Klassen und Kanten werden dann zwischen Knoten eingefügt, wenn ein Lehrer in einer Klasse eine Unterrichtsstunde unterrichtet. Die Veranstaltungen müssen zu verschiedenen Zeiten stattfinden, was durch die unterschiedliche Färbung adjazenter Kanten ausgedrückt wird. Die Anzahl benötigter Farben bestimmt dann die Länge des Stundenplans.

⁴Die 81 Felder des Sudoku-Quadrats betrachtet man als Knoten, die genau dann benachbart sind, wenn sie in der gleichen Zeile, der gleichen Spalte oder dem gleichen Unterquadrat liegen. Die Ziffern 1-9 entsprechen jeweils einer der verschiedenen und zur Färbung zu verwendenden Farben. Dieses Problem unterscheidet sich von den vorangehenden dadurch, dass nicht nur eine besonders gute, dass heißt wenige Farben verwendende Färbung gesucht ist, sondern dass ein Teil dieser Färbung bereits vorgegeben ist. Zur Färbung von Sudokugraphen siehe [25].

⁵Ein solches k existiert, denn jeder Graph G besitzt die triviale zulässige Knotenfärbung $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, |V|\}$, die jedem Knoten eine andere Farbe zuordnet.

Satz von Brooks

Satz 1.2 (Satz von Brooks) Ist G ein Kreis ungerader Ordnung oder ein vollständiger Graph, so gilt $\chi(G) = \Delta(G) + 1$. Für alle anderen Graphen G gilt $\chi(G) = \Delta(G)$.

Kantenfärbung und chromatischer Index

Eine *Kantenfärbung* von $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $f : E \rightarrow F$ von der Kantenmenge E auf eine Farbmenge F . Gilt $f(e_1) \neq f(e_2)$ für adjazente Kanten $e_1, e_2 \in E$ so ist f eine *zulässige Kantenfärbung*. Die kleinste Zahl $k \in \mathbb{N}$ für die eine zulässige Kantenfärbung $f : E \rightarrow \{1, \dots, k\}$ existiert, nennt man den *chromatischen Index* von G . Man bezeichnet sie mit $\chi'(G)$.

Jede Kantenfärbung von G ist eine Eckenfärbung des Kantengraphen $\mathcal{L}(G)$ von G und umgekehrt. Insbesondere gilt $\chi'(G) = \chi(\mathcal{L}(G))$. Die Kantenfärbung ist ein echter Spezialfall der Eckenfärbung, denn nicht jeder Graph ist zugleich auch Kantengraph eines anderen Graphen. Das heißt jedes Kantenfärbungsproblem läßt sich als Knotenfärbungsproblem auf dem Kantengraph betrachten, aber nicht zu jedem Knotenfärbungsproblem gibt es ein entsprechendes Kantenfärbungsproblem. Einen weiteren Unterschied gibt es in der Abschätzung der Lösungen der jeweiligen Probleme. Während es für die chromatische Zahl $\chi(G)$ eines Graphen G nur sehr ungenaue Abschätzungen gibt, nimmt der chromatische Index $\chi'(G)$ eines Graphen G immer genau einen von zwei möglichen Werten an:

Satz von Vizing

Satz 1.3 (Satz von Vizing) Für jeden Graphen G gilt:

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Aber obwohl der Maximalgrad leicht zu bestimmen ist und der chromatische Index nur einen von zwei Werten annehmen kann, ist das Problem, diesen Wert für einen gegebenen Graphen genau zu bestimmen, wiederum \mathcal{NP} -schwer⁶.

Eine Übersicht über viele gelöste und ungelöste Probleme der Graphenfärbung gibt das Buch „Graph Coloring Problems“ [26].

Der nächste Abschnitt gibt eine kurze Einführung in die Spieltheorie. Der Satz 1.4 ist hier das wichtigste Resultat. Er stellt sicher, dass die im weiteren Verlauf dieser Arbeit untersuchten Probleme, die Kennzahlen von Graphenfärbungsspielen auf verschiedenen Graphenklassen zu bestimmen, eindeutig bestimmte Lösungen besitzen.

⁶Dies folgt aus der \mathcal{NP} -Vollständigkeit des Knotenfärbungsproblems und daraus, dass jedes Kantenfärbungsproblem in polynomieller Zeit in ein Knotenfärbungsproblem auf dem Kantengraphen umgewandelt werden kann.

1.3. Spiele

Die mathematische Spieltheorie wurde von John von Neumann und Oskar Morgenstern in ihrem 1944 erschienenen Standardwerk „*The Theory of Games and Economic Behaviour*“ [36] entwickelt. Ein Spiel ist nach John von Neumann „einfach die Gesamtheit aller Regeln, die es beschreiben“. Die Spielregeln enthalten Angaben über:

- die Anzahl der Spieler
- zu jedem Spielstand (oder Spielposition) Informationen darüber
 - wer am Zug ist
 - und welche Zugmöglichkeiten der entsprechende Spieler hat
- wer bei Spielende, das heißt dem Erreichen einer Endposition, wie viel gewinnt (man spricht von Auszahlungen an die Spieler)
- und was die Spieler wissen, wenn sie einen Zug ausführen, d.h. aufgrund welcher Informationen sie ihre Entscheidung für oder gegen einen speziellen Zug treffen.

Eine Möglichkeit ein Spiel mathematisch zu beschreiben ist die Extensivform:

Extensivform eines Spiels

Der Verlauf des Spiels wird in einem orientierten Wurzelbaum, den man als *Spielbaum*⁷ bezeichnet modelliert. Bei der Wurzel als Ausgangsposition beginnend führen die Spieler ihre Züge nacheinander aus. Jeder Spielposition entspricht ein Knoten im Spielbaum, der jeweils dem Spieler zugeordnet wird, der am Zug ist. Die Zugmöglichkeiten sind durch die Kanten repräsentiert, deren Anfangsknoten der aktuelle Knoten ist. Sie führen zu neuen Spielpositionen, den nachfolgenden Knoten im Baum. Die Blätter des Baumes sind die Endpositionen des Spiels und eine Auszahlungsfunktion auf diesen Blättern bestimmt die Gewinne beziehungsweise Verluste der einzelnen Spieler.

Formal ist ein endliches n -Personen Spiel in *Extensivform* gegeben durch:

1. Einen endlichen Wurzelbaum T ,
2. Eine Familie $(u_i \mid 1 \leq i \leq n)$ von Auszahlungsfunktionen $u_i : B \rightarrow \mathbb{R}$ auf der Menge der Blätter B von T , die dem Spieler i bei Spielende einen Gewinn oder Verlust zuordnen⁸,
3. Eine Partition der Menge der inneren Knoten von T (Knoten, die keine Blätter sind) in n Gruppen von Informationsmengen $T_{11}, T_{12}, \dots, T_{1k_1}$ (für Spieler 1), $T_{21}, T_{22}, \dots, T_{2k_2}$ (für Spieler 2), usw. für die übrigen Spieler bis zu $T_{n1}, T_{n2}, \dots, T_{nk_n}$

⁷Nach H. W. Kuhn, auf den diese Beschreibung eines Spiels zurückgeht (siehe [32], [33]), wird der Spielbaum in der englischsprachigen Literatur auch als „Kuhn-tree“ bezeichnet.

⁸Die Blätter sind die Endpositionen des Spiels.

(für Spieler n). Alle Knoten einer Informationsmenge müssen den gleichen Ausgangsgrad haben⁹.

4. Eine Menge von Markierungen L_{jk} für jede Informationsmenge T_{jk} des Spielers j und für jeden Knoten $t \in T_{jk}$ eine bijektive Abbildung von L_{jk} auf die Menge der Kanten, die t als Anfangsknoten haben.

An Knoten $t \in T_{ij}$ ($1 \leq i \leq n \wedge 1 \leq j \leq k_i$) ist Spieler i am Zug und die Menge der Markierungen L_{ij} repräsentiert die verschiedenen Zugmöglichkeiten oder *Alternativen* des Spielers i an dieser Spielposition. Durch die Wahl einer der Alternativen wird eine neue Spielposition erreicht. Diese ist gegeben durch den Endknoten der Kante, auf den die vom Spieler gewählte Markierung abgebildet wird. Folgende Eigenschaften von Spielen sind bei deren Untersuchung von Bedeutung:

Nullsummen-Eigenschaft

Bei einem *Nullsummenspiel* ist die Summe aller Auszahlungen an alle Spieler immer gleich Null. Im Spezialfall eines Zwei-Personen-Nullsummenspiels ist also der Gewinn des einen Spielers gleich dem Verlust des anderen Spielers.

Bei einem Nullsummenspiel mit n Spielern gilt für die Auszahlungsfunktionen u_i ($1 \leq i \leq n$) auf den Blättern B von T :

$$\sum_{i=1}^{i=n} u_i(b) = 0 \quad \forall b \in B$$

Informationsmengen und Perfekte Information

Die *Informationsmengen* bestimmen, über welches Wissen über die vorangegangenen Züge die Spieler zum Zeitpunkt ihres Zuges verfügen. Der Spieler, der am Zug ist, weiß nur, dass er sich in einer bestimmten Informationsmenge befindet. Enthält diese mehr als einen Knoten, so weiß er nicht, welcher dieser Knoten im Spielbaum dies genau ist. Ein solcher Fall tritt z. B. bei vielen Kartenspielen auf, in denen der erste Zug ein Zufallszug ist und im Mischen und Verteilen der Karten besteht. Den Spielern ist jeweils nur ein Teil der Folgeposition dieses Zuges bekannt, nämlich die eigenen Karten, nicht aber die Karten der Mitspieler. Der Spieler kann sich also je nach Kartenverteilung an verschiedenen Positionen des Spielbaumes befinden. Im Spielbaum müssen also an allen Knoten einer Informationsmenge die gleichen Züge möglich sein, das heißt die gleich Anzahl von Kanten mit dem Knoten inzidieren.

Kennt hingegen jeder Spieler zu jedem Zeitpunkt alle vorherigen Züge seiner Mitspieler (und auch alle Zufallszüge), so heißt das Spiel ein Spiel mit *perfekter Information*. Die Informationsmengen enthalten in diesem Fall alle nur ein Element.

⁹Zur Beschreibung auch vom Zufall abhängiger Spiele benötigt man eine weitere Knotenmenge Z in der obigen Partition. Zu jedem Knoten $t \in Z$ wird dann eine Wahrscheinlichkeitsverteilung gegeben, gemäß derer ein fiktiver Spieler die entsprechende Zugentscheidung trifft.

Strategien

Unter einer *Strategie* eines Spielers versteht man einen vollständigen Plan, wie sich der Spieler in jeder denkbaren Spielsituation verhalten wird. Auf den Spielbaum bezogen ist eine Strategie des Spieler i eine Funktion, die jeder seiner Informationsmengen eine Zugentscheidung zuordnet:

Seien $T_{i1}, T_{i2}, \dots, T_{ik_i}$ die Informationsmengen des Spielers i und $L_{i1}, L_{i2}, \dots, L_{ik_i}$ die zugehörigen Mengen von Markierungen der Folgezüge. Dann ist das k_i -Tupel $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_{k_i})$ mit $s_j \in L_{ij}$ für alle $1 \leq j \leq k_i$ eine Strategie von Spieler i . Die Einträge s_j sind jeweils die Funktionswerte der Strategiefunktion an der Stelle T_{ij} .

Gibt es m_j Elemente in der Menge L_{ij} , dann ist die Anzahl dieser k_i -Tupel und somit die Anzahl der Strategien von Spieler i gleich dem Produkt $\prod_{j=1}^{k_i} m_j$.

Eine Strategie eines Spielers, die immer zum Gewinn führt, egal welche Strategien die Gegenspieler benutzen, bezeichnet man als *Gewinnstrategie*.

Minimax-Theorem

Satz 1.4 (Minimax-Theorem) In jedem endlichen 2-Personen-Nullsummen-Spiel mit vollständiger Information hat immer einer der Spieler eine Gewinnstrategie.

Eine solche Strategie läßt sich theoretisch mit dem Minimax-Algorithmus aus dem Spielbaum berechnen (vgl. zum Beispiel [21]). Somit bilden die endlichen 2-Personen-Nullsummenspiele mit vollständiger Information in der Spieltheorie die einfachste Klasse von Spielen. Aber obwohl theoretisch für diese Spiele immer eine Gewinnstrategie existiert, kann diese so komplex sein, dass eine Berechnung praktisch nicht möglich ist, wie dies zum Beispiel bei Spielen wie Schach oder Go der Fall ist¹⁰.

¹⁰Shannon berechnet in [37] für die Komplexität des Spielbaumes des Schachspiels eine untere Schranke von 10^{120} . Zum Vergleich: Die Anzahl der Atome des Universums wird auf etwa 10^{80} geschätzt.

Vorsicht!
Das ist so
nicht richtig

2. Graphenfärbungsspiele

Färbungsprobleme auf Graphen wurden unter spieltheoretischen Gesichtspunkten zuerst von Hans Bodlaender [7] untersucht. Er motiviert seine Untersuchung von Färbungsspielen auf Graphen folgendermaßen¹¹:

„Spiele können benutzt werden um Situationen zu modellieren, in denen verschiedene Parteien verschiedene Interessen durchsetzen möchten, oder um den schlimmsten Fall fehlerhaften Verhaltens eines Systems zu simulieren. In letzterem Fall gehen wir davon aus, dass ein fehlerhaftes System eine intelligente Strategie benutzt, um uns am Erreichen unseres Ziels zu hindern. Wenn es uns möglich ist, mit dieser Art von Verhalten umzugehen, dann ist es uns auch möglich kleinere Fehler zu bewältigen.“

2.1. Coloring Construction Games

Im dieser Arbeit werden wir eine Klasse von Spielen betrachten, die Bodlaender als „*coloring construction game*“ bezeichnet. Ein Spieler (*Alice*) probiert einen Graphen zulässig zu färben, während ein zweiter Spieler (*Bob*) probiert, dies zu verhindern. Folgende Regeln definieren das Färbungsspiel:

Gegeben sei ein endlicher Graph $G = (V, E)$, eine Farbmenge F und eine Objektmenge O . Je nachdem, ob wir *Knoten-* oder *Kantenfärbungsspiele* betrachten, sei $O = V$ (für das Knotenfärbungsspiel) oder $O = E$ (für das Kantenfärbungsspiel)¹².

1. Zu Beginn des Spiels sind alle Objekte der Menge O ungefärbt.
2. Zwei Spieler, genannt Alice und Bob, führen abwechselnd ihre Züge aus. Alice beginnt das Spiel.
3. Ein Zug besteht darin, einem ungefärbten Element der Objektmenge so eine Farbe zuzuordnen, dass die entstehende Teilfärbung des Graphen zulässig ist, also keine adjazenten Knoten oder Kanten die gleiche Farbe zugeordnet wird. Beiden Spielern ist die bisherige Färbung des Graphen bekannt.
4. Das Spiel endet, sobald kein weiterer zulässiger Zug mehr möglich ist. Dies ist spätestens nach $|O|$ Zügen der Fall.
5. Alice gewinnt, wenn am Ende des Spiels alle Elemente der Objektmenge gefärbt sind, ansonsten gewinnt Bob.

¹¹„Games can be used to model situations where different parties have conflicting interests, or to model the ‚worst type of erroneous behaviour of a system‘. In the latter case, we assume that an erroneous system uses an intelligent strategy to try to prevent us from reaching our goal. If we are able to deal with this type of behaviour, we are also able to deal with all weaker types of errors.“ schreibt Bodlaender in der Einführung von [7].

¹²Eine weitere Möglichkeit ist $O = V \cup E$ für sogenannte Totalfärbungsspiele.

Bob gewinnt also immer dann, wenn eine Situation erreicht wird, die das vollständige Färben der Objektmenge unmöglich macht, das heißt wenn an einem ungefärbten Element der Objektmenge bereits alle Farben der Farbmenge adjazenten Objekten zugeordnet sind. Ein solches nicht mehr färbbares Objekt nennen wir *kritisch*.

Das oben definierte Spiel hat folgende Eigenschaften:

- Das Spiel ist endlich. Falls die gesamte Objektmenge gefärbt werden kann, wird das Spielende nach $|O|$ Zügen erreicht, ansonsten bereits früher.
- Das Spiel ist ein Nullsummen-Spiel. Jeweils genau einer der Spieler gewinnt und der andere Spieler verliert.
- Das Spiel ist ein Spiel mit perfekter Information. Die Spieler kennen zu jeder Zeit alle vorherigen Züge. Diese sind durch die (partielle) Färbung des Graphen gegeben.

Satz 2.1 (Folgerung aus Satz 1.4) Für das Graphenfärbungsspiel auf einem endlichen Graphen G besitzt immer genau einer der Spieler eine Gewinnstrategie.

Die spielchromatische Zahl

Die *spielchromatische Zahl* $\chi_g(G)$ eines Graphen G , ist die kleinste Zahl $k \in \mathbb{N}$, so dass Alice für das Knotenfärbungsspiel auf G mit der Farbmenge $F = \{1, 2, \dots, k\}$ eine Gewinnstrategie hat. Diese Zahl ist nach Satz 2.1 und da Alice immer gewinnt, wenn $|F| = |V(G)|$ gilt, wohldefiniert.

Satz 2.2 (Abschätzung der spielchromatischen Zahl) Für die spielchromatische Zahl gilt:

$$0 \leq \chi(G) \leq \chi_g(G) \leq \Delta(G) + 1 \quad (2)$$

Beweis:

Die spielchromatische Zahl eines Graphen muss offensichtlich mindestens so groß wie die chromatische Zahl des Graphen sein. Die obere Schranke folgt wie in Satz 1.1. \square

Es gibt Graphen, für die die spielchromatische und chromatische Zahl den gleichen Wert haben: Dies sind zum Beispiel die vollständigen Graphen K_n , für die gilt $\chi(K_n) = \chi_g(K_n) = n$. Es gibt aber auch Graphen, deren spielchromatische Zahl echt größer als die chromatische Zahl ist. Mehr noch, der Unterschied kann beliebig groß werden:

Beispiel 2.1 Sei $K_{r,r}$ ($r \geq 3$) der vollständig bipartite Graph, dessen Partitionen aus jeweils r Knoten bestehen, M ein perfektes Matching in $K_{r,r}$ und $H_r = K_{r,r} - M$ der Graph der entsteht, wenn man die Kanten des perfekten Matchings in $K_{r,r}$ weglässt. Dann gilt $\chi(H_r) = 2$ und $\chi_g(H_r) = r$.

Beweis:

Färbt man jeweils alle Knoten einer der Teilmengen der Knotenpartition von $K_{r,r}$ mit der gleichen Farbe, so erhält man eine zulässige Knotenfärbung von $K_{r,r}$ mit zwei Farben. Dies ist auch eine zulässige Färbung von H_r . Beim Knotenfärbungsspiel auf dem

H_r mit weniger als r Farben hat Bob jedoch die folgende Gewinnstrategie: Immer wenn Alice einen Knoten v färbt, färbt Bob den Knoten u der anderen Knotenpartition, der nicht mehr durch eine Kante mit v verbunden ist (das heißt die Kante $\{u, v\}$ gehört zu dem perfekten Matching M), in der gleichen Farbe. Diese Farbe kann dann im weiteren Verlauf des Spiels nicht mehr benutzt werden, denn alle Knoten sind dann zu einem Knoten dieser Farbe adjazent. Also benötigt Alice mindestens r Farben, um das Spiel zu gewinnen. Da ihr dies andererseits mit r Farben immer möglich ist, gilt $\chi_g(H_r) = r$. \square

Dieses Beispiel zeigt auch eine weitere Eigenschaft der spielchromatischen Zahl. Ist G ein Graph und $H \subseteq G$ ein Teilgraph von G , so gilt für ihre chromatischen Zahlen $\chi(H)$ und $\chi(G)$ offensichtlich $\chi(H) \leq \chi(G)$, das heißt die chromatische Zahl ist ein *monotoner Parameter*. Dies gilt nicht für die spielchromatische Zahl, wie Kierstead in [27] zeigt:

Beispiel 2.2 Der Graph H_r in obigem Beispiel ist ein Teilgraph des vollständig bipartiten Graphen $K_{r,r}$, aber es ist $r = \chi_g(H_r) \geq \chi_g(K_{r,r}) = 3$.

Beweis:

Wie wir gezeigt haben, ist $\chi(K_{r,r}) = 2$, also ist auch $\chi_g(K_{r,r})$ mindestens gleich 2. Sei $V(K_{r,r}) = \{V_1, V_2\}$ die Partition der Knoten von $K_{r,r}$. Alice beginnt das Spiel und färbt o.B.d.A. einen Knoten der Menge V_1 in der Farbe 1. Färbt Bob anschließend einen weiteren Knoten aus V_1 in der Farbe 2, so kann keiner der Knoten in V_2 mehr mit der Farbe 1 oder 2 gefärbt werden. Um einen Knoten der Menge V_2 zu färben, ist Alice also gezwungen eine weitere Farbe 3 zu verwenden. Das bedeutet $\chi_g(K_{r,r}) \geq 3$. Man sieht aber leicht, dass drei Farben zum vollständigen Färben des Graphen ausreichen, denn Alice kann durch ihren zweiten Zug immer erreichen, dass ein Knoten aus V_2 mit einer der 3 vorhandenen Farben gefärbt wird. Die Farbe, die für die Färbung des jeweils ersten Knotens einer der beiden Teilmengen der Knotenpartition verwendet wurde, kann dann auch zur Färbung der übrigen Knoten der gleichen Teilmenge benutzt werden. \square

Der spielchromatische Index

Analog zur spielchromatischen Zahl definiert man den *spielchromatischen Index* $\chi'_g(G)$ als die kleinste Zahl $k \in \mathbb{N}$, so dass Alice für das Kantenfärbungsspiel auf dem Graphen G mit der Farbmenge $F = \{1, 2, \dots, k\}$ eine Gewinnstrategie hat.

Satz 2.3 Für den spielchromatischen Index eines Graphen G gelten die folgenden Abschätzungen:

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \chi'_g(G) \leq \max(0, 2\Delta(G) - 1) \quad (3)$$

Beweis:

Im Graphen gibt es einen Knoten, der mit $\Delta(G)$ Kanten inzidiert. Diese Kanten müssen offensichtlich alle unterschiedlich gefärbt werden. Außerdem muss der spielchromatische Index mindestens genauso groß wie der chromatische Index des Graphen sein. Da eine Kante zu höchstens $2 \cdot (\Delta - 1)$ verschiedenen Kanten adjazent sein kann, ergibt sich als obere Schranke $2 \cdot \Delta(G) - 1$, falls überhaupt eine Kante im Graphen existiert. Andernfalls gilt $\Delta(G) = 0$ und zusammen erhält man die rechte Ungleichung. \square

Wie bei der spielchromatischen und der chromatischen Zahl, gibt es auch beim spielchromatischen und chromatischen Index Graphen, für die diese Zahlen den gleichen Wert haben, und Graphen, deren spielchromatischer Index größer als der chromatische Index ist.

Beispiel 2.3 Für die bipartiten Graphen $K_{1,r}$, die Sterne, ist $\chi'_g(K_{1,r}) = \chi'(K_{1,r}) = r$, denn alle Kanten eines Sterns sind adjazent zueinander und man benötigt daher immer genau r Farben, um sie zu färben.

Für die Wege P_n der Länge $n \geq 4$ gilt hingegen $\chi'_g(P_n) = 3$ und $\chi'(P_n) = 2$, das heißt spielchromatischer und chromatischer Index sind verschieden.

Beweis:

Ein Weg P_n kann immer mit zwei Farben gefärbt werden, indem man den Kanten abwechselnd die beiden Farben zuteilt. Da adjazente Kanten unterschiedliche Farben haben müssen, benötigt man andererseits mindestens zwei Farben für die Färbung von Wegen mit einer Länge größer als 1. Dies ergibt $\chi'(P_n) = 2$. Beim Kantenfärbungsspiel hat Bob für weniger als 3 Farben folgende Gewinnstrategien:

1. Da der Weg P_n eine Länge $n \geq 4$ hat, gibt es zu jeder Kante f des Weges eine Kante h , so dass die Kanten f und h beide adjazent zu einer dritten Kante g sind. Färbt Alice in ihrem Zug nun die Kante f in der ersten Farbe und benutzt Bob dann die andere Farbe, um h zu färben, so steht für g keine neue Farbe mehr zur Verfügung und Bob gewinnt.

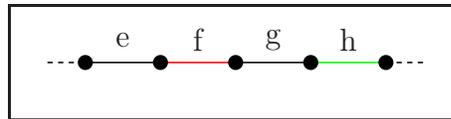


Abbildung 2: Färbung eines Pfades der Länge $n \geq 4$ (1. Möglichkeit)

2. Färbt Alice in ihrem Zug eine Kante e des Weges P_n , zu der es eine Kante h gibt, die von e durch genau zwei weitere Kanten getrennt ist¹³, so kann Bob im nächsten Zug diese Kante h in der gleichen Farbe färben. Für die Färbung der beiden mittleren Kanten f und g werden dann zwei weitere Farben benötigt und Bob gewinnt.

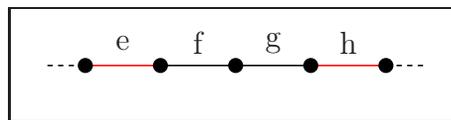


Abbildung 3: Färbung eines Pfades der Länge $n \geq 4$ (2. Möglichkeit)

¹³Dies gilt bei Wegen P_n der Länge $n \geq 4$ zumindest immer für die Endkanten des Weges.

Da außerdem $\chi'_g(P_n) \leq 2\Delta(P_n) - 1 = 3$ (siehe (3)) gilt, folgt also $\chi'_g(P_n) = 3$ für $n \geq 4$. \square

Während es für die spielchromatische Zahl $\chi_g(G)$ eines Graphen G keine obere Schranke in Abhängigkeit von $\chi(G)$ gibt (siehe das Beispiel des bipartiten Graphen auf Seite 10), ist diese Frage für den spielchromatischen Index noch nicht beantwortet:

Gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{N}$, so dass für jeden Graphen G gilt $\chi'_g(G) \leq \chi'(G) + c$?¹⁴

Die genaue Berechnung der spielchromatischen Zahl und des spielchromatischen Index ist in den meisten Fällen weitaus komplizierter als in den obigen Beispielen. Es ist ein mindestens genauso schwierigeres Problem wie das Knotenfärbungsproblem. Dies zeigen Bodlaenders Komplexitätsanalysen von mit dem coloring construction game verwandten Spielen in [7]. Diese gehören zur Komplexitätsklasse \mathcal{PSPACE} , d.h. sie benötigen polynomiell von der Größe des Problems abhängigen Speicherplatzbedarf. Es gilt $\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{PSPACE}$. Bis heute ist ungeklärt, ob diese Komplexitätsklassen verschieden sind, aber es wird stark vermutet, dass die Inklusion echt ist.

Kantenfärbungsspiele

Kantenfärbungsspiele auf einem Graphen G lassen sich prinzipiell als spezielle Knotenfärbungsspiele auf dem Kantengraphen $\mathcal{L}(G)$ von G auffassen. Eine spezielle Untersuchung von Kantenfärbungsspielen erscheint somit überflüssig. Der Liniengraph eines Graphen ist jedoch im Allgemeinen wesentlich komplizierter als der ursprüngliche Graph.

Satz 2.4 Für Ordnung und Größe des Liniengraphen eines zusammenhängenden Graphen G , der kein Baum ist, gilt:

$$|\mathcal{L}(G)| = \|G\| \geq |G| \tag{4}$$

und

$$\|\mathcal{L}(G)\| \geq |\mathcal{L}(G)| \geq \|G\| \tag{5}$$

Beweis:

Zu (4): Zusammenhängende Graphen, Bäume ausgenommen, haben mindestens genauso viele Kanten wie Knoten. Denn jeder zusammenhängende Graph, der kein Baum ist, enthält einen Kreis und in einem Kreis stimmen Kanten- und Knotenanzahl überein. Zu jedem weiteren Knoten des Graphen muss mindestens eine Kante führen. Dies ergibt die erste Ungleichung.

Zu (5): Mit G ist auch $\mathcal{L}(G)$ zusammenhängend und enthält einen Kreis. Damit gilt die Ungleichung (4) auch für $\mathcal{L}(G)$ und wir erhalten (5). \square

¹⁴Diese Frage stellen Lam, Shiu und Xu in [34].

Bei der Bestimmung der chromatischen Indizes können wir uns auf zusammenhängende Graphen beschränken, denn für nicht-zusammenhängende Graphen ist diese Zahl gleich dem Maximum der chromatischen Indizes der Komponenten des Graphen.

Die spielchromatischen Indizes einiger einfacher Graphenklassen sind bereits exakt bestimmt worden. Einige dieser Ergebnisse werden im nächsten Abschnitt vorgestellt.

2.2. Bisherige Ergebnisse

Obwohl Graphenfärbungsprobleme wie das Vierfarbenproblem schon lange mathematisch untersucht werden, ist die Betrachtung von Graphenfärbungen unter spieltheoretischen Gesichtspunkten ein relativ neuer Forschungsbereich. Das hier betrachtete Graphenfärbungsspiel (vgl. Abschnitt 2.1) wurde 1981 von Steven J. Brams erfunden und von Martin Gardner in seiner Kolumne „*Mathematical Games*“ als spieltheoretische Version des Vierfarbenproblems veröffentlicht. Es dauerte jedoch weitere 10 Jahre bis das Problem 1991 mit Bodlaenders Veröffentlichung [7] Eingang in die graphentheoretische Fachwelt fand. Bodlaender definiert verschiedene Graphenfärbungsspiele und untersucht die Komplexität dieser Spiele. Er führt auch den Begriff der spielchromatischen Zahl $\chi_g(G)$ eines Graphen G ein und beendet seinen Artikel mit der Vermutung:

Es gibt eine Konstante c , so dass die spielchromatische Zahl $\chi_g(P)$ für alle planaren Graphen P höchstens gleich c ist.

Wie groß aber ist diese Konstante c ? Mit dieser Frage und dem Problem, die spielchromatischen Zahlen anderer Graphenklassen zu bestimmen setzten sich die folgenden Arbeiten auseinander.

Spielchromatische Zahlen von Graphenklassen

Sei \mathcal{K} eine Klasse von Graphen, dann definieren wir die *spielchromatische Zahl* $\chi_g(\mathcal{K})$ der Graphenklasse \mathcal{K} als

$$\chi_g(\mathcal{K}) := \sup\{\chi_g(G) \mid G \in \mathcal{K}\}.$$

Im folgenden bezeichne \mathcal{T} die Klasse der *Wälder*, \mathcal{P} die Klasse der *planaren Graphen*, \mathcal{Q} die Klasse der *außerplanaren Graphen*, \mathcal{PT}_k die Klasse der *partiellen k -Bäume* und \mathcal{I}_k die Klasse der *Intervallgraphen* mit Cliquenzahl $k + 1$.

Zunächst zeigten Faigle, Kern, Kierstead und Trotter 1993 in [20], dass für die Klasse \mathcal{T} der *Wälder* gilt:

$$\chi_g(\mathcal{T}) \leq 4.$$

Außerdem zeigen sie in dieser Arbeit folgendes Ergebnis für Intervallgraphen:

$$\chi_g(\mathcal{I}_k) \leq 3k - 2.$$

In ihrem 1994 veröffentlichten Artikel [30] zeigen Kierstead und Trotter dann unter Benutzung des Vierfarbensatzes, dass für *planare Graphen* $P \in \mathcal{P}$ die Abschätzung

$\chi_g(P) \leq 33$ gilt und geben außerdem 8 als untere Schranke für die maximale spielchromatische Zahl planarer Graphen an. Dinski und Zhu verbessern diese Abschätzung 1999 in [13]. Sie zeigen, dass ein Graph mit azyklischer chromatischer Zahl¹⁵ k eine spielchromatische Zahl von höchstens $k(k+1)$ hat. Da die azyklische chromatische Zahl planarer Graphen höchstens gleich 5 ist¹⁶, folgt $\chi_g(\mathcal{P}) \leq 30$. Im selben Jahr führt Zhu in [44] ein neues Spiel und einen zugehörigen Parameter ein, das *marking game* und die *game coloring number*. Hiermit gelingt es ihm die obere Schranke der spielchromatischen Zahl planarer Graphen auf 19 zu verbessern.

Das *marking game* und die *game coloring number*

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Das *marking game* oder *ordering game* auf G wird von zwei Spielern, *Alice* und *Bob*, gespielt, wobei Alice den ersten Zug hat. Zu Beginn des Spiels ist keiner der Knoten $v \in V$ markiert. Ein Zug der Spieler besteht darin, einen noch nicht markierten Knoten zu markieren. Das Spiel endet, wenn alle Knoten markiert sind. Sei nun für jeden Knoten $v \in V$ $t(v)$ der Zug, in dem v markiert wurde, das heißt $t(v) = j$ bedeutet, dass v im j -ten Zug markiert wurde. Sei weiter $s(v) = |\{u \mid u \text{ ist adjazent zu } v \wedge t(u) < t(v)\}|$, das heißt $s(v)$ ist die Anzahl der Nachbarn von v , die vor v markiert wurden. Das Spielergebnis ist dann

$$s := 1 + \max_{v \in V} s(v)$$

Alice hat das Ziel, diese Zahl zu minimieren, während Bob versucht sie möglichst groß werden zu lassen. Die *game coloring number* $col_g(G)$ ist die kleinste Zahl s , für die Alice auf dem Graphen G eine Strategie hat, die zu einem Spielergebnis von höchstens s führt. Zhu zeigt folgenden Beziehung zwischen der spielchromatischen Zahl eines Graphen und seiner *game coloring number*:

Satz 2.5 Die *game coloring number* ist eine obere Schranke der spielchromatischen Zahl. Es gilt für jeden Graphen G :

$$\chi_g(G) \leq col_g(G). \quad (6)$$

Beweis:

Spielen Alice und Bob das Knotenfärbungsspiel auf dem Graphen G mit $col_g(G) = k + 1$ Farben, so ist Alices Gewinnstrategie im Knotenfärbungsspiel die gleiche, wie im *marking game*. Wählt sie die zu färbenden Knoten gemäß dieser Strategie, so hat jeder ungefärbte Knoten höchstens k gefärbte Nachbarknoten. Alice kann also den gewählten Knoten mit der ersten noch zulässigen Farbe der Farbmenge $\{1, \dots, k + 1\}$ färben. \square

¹⁵Die azyklische chromatische Zahl $\chi_a(G)$ eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Variante der chromatischen Zahl. Es ist die kleinste Zahl t , die es ermöglicht, die Knoten von G so mit t Farben zu färben, dass alle Farbklassen unabhängige Knotenmengen sind und alle von jeweils zwei dieser Farbklassen induzierten Teilgraphen von G , kreisfrei sind.

¹⁶Dies zeigt Borodin in [8].

Die *game coloring number* und das Listenfärbungsspiel

Gleichzeitig gibt die *game coloring number* auch Abschätzungen für die Parameter verwandter Graphenfärbungsspiele wie dem *Listenfärbungsspiel*. Bei diesem Spiel müssen die Knoten (bzw. Kanten) des Graphen G mit Farben aus einer Liste gefärbt werden, die den einzelnen Knoten jeweils zugeordnet sind. Die *spiellistenchromatische Zahl* $ch_g(G)$ ist dann die kleinste Zahl k , für die Alice eine Gewinnstrategie für die zulässige Färbung des Graphen hat, wenn alle den Knoten zugeordneten Listen mindestens k Elemente enthalten.

Satz 2.6 Sei G ein Graph mit *game coloring number* $col_g(G)$. Dann gilt für die spiellistenchromatische Zahl $ch_g(G)$ dieses Graphen:

$$ch_g(G) \leq col_g(G) \quad (7)$$

Beweis:

Wählt Alice beim Listenfärbungsspiel den zu färbenden Knoten gemäß der Gewinnstrategie des *marking game*, so ist diese Strategie im Fall von mindestens $col_g(G)$ -elementigen Listen auch eine Gewinnstrategie für das Listenfärbungsspiel. Alice kann die erste noch zulässige der $col_g(G)$ Farben zur Färbung des gewählten Knotens verwenden. Da der gewählte Knoten höchstens $col_g(G) - 1$ bereits gefärbte Nachbarknoten haben kann, ist eine solche zulässige Farbe immer in der $col_g(G)$ -elementigen Liste vorhanden. \square

Verwendet Alice diese Strategie spielt also nur die Anzahl der Elemente in den Listen, nicht jedoch die Verteilung der verschiedenen Farben auf die Listen eine Rolle. Mit dem Satz 2.6 lassen sich also viele der folgenden Ergebnisse, in denen die *game coloring number* verschiedener Graphenklassen bestimmt werden, direkt auf das Listenfärbungsspiel übertragen. Zu Listenfärbungsspielen siehe [9, 35].

Fortsetzung: Bisherige Ergebnisse

Auch alle folgenden Verbesserungen der oberen Schranke für die spielchromatische Zahl planarer Graphen gelingen mit Hilfe der *game coloring number*. So verringert Kierstead in [27] die obere Schranke nochmals um Eins auf 18 und Zhu schließlich in [46] auf 17. Für die Klasse der planaren Graphen gilt also¹⁷:

$$8 \leq \chi_g(\mathcal{P}) \leq col_g(\mathcal{P}) \leq 17.$$

In Abhängigkeit von der Taillenweite¹⁸ des Graphen geben Zhu et al. in [24] weitere Schranken für die *game coloring number* planarer Graphen an.

Die *game coloring number* scheint einfacher handhabbar als die spielchromatische Zahl zu sein und hat einige Eigenschaften, welche die spielchromatische Zahl nicht hat. So ist die *game coloring number* zum Beispiel im Gegenteil zur spielchromatischen Zahl

¹⁷Für $col_g(\mathcal{P})$ zeigt Wu in [40, 41] die bessere untere Schranke $col_g(\mathcal{P}) \geq 11$.

¹⁸Als Taillenweite eines Graphen G bezeichnet man die Länge eines kürzesten Kreises in G .

ein monotoner Parameter¹⁹, wie Jiaojiao Wu in [40] zeigt. Auch die besten Abschätzungen der spielchromatischen Zahlen vieler andere Graphenklassen beruhen auf den Abschätzungen der *game coloring number* dieser Graphenklassen.

Kierstead und Trotter [30] zeigen 1994, dass für *außerplanare Graphen* $6 \leq \chi_g(\mathcal{Q}) \leq 8$ gilt. Guan und Zhu [23] verbessern dieses Ergebnis im Jahr 2000 und zeigen, dass für jeden außerplanaren Graphen G gilt $\chi_g(G) \leq \text{col}_g(G) \leq 7$. Die spielchromatische Zahl der Klasse außerplanarer Graphen hat also den Wert 6 oder 7:

$$6 \leq \chi_g(\mathcal{Q}) \leq 7$$

Die *game coloring number* außerplanarer Graphen ist hingegen genau bestimmt und hat den Wert 7. Dies folgt aus den obigen Ergebnis von Guan und Zhu [23] und einer Arbeit von Kierstead und Yang [31], die zeigt, dass es außerplanare Graphen mit *game coloring number* 7 gibt.

Für *triangulierte Graphen* G mit maximaler Cliquenzahl²⁰ k zeigt Zhu in [45], dass gilt:

$$\chi_g(G) \leq \text{col}_g(G) \leq 3k - 1.$$

Außerdem führt er in dieser Arbeit die sogenannten *(a, b)-pseudo partiellen k-Bäume* ein und zeigt, dass für jedes $k \geq 1$ die *game coloring number* dieser Graphen höchstens gleich $3k + 2a + b + 2$ ist. Für den Fall $(a, b) = (0, 0)$ entsprechen diese Graphen den *partiellen k-Bäumen*. Partielle k -Bäume sind Teilgraphen von k -Bäumen. Diese sind rekursiv definiert:

1. Der vollständige Graph K_k ist ein k -Baum
2. Ist G ein k -Baum und K eine k -Clique in G , dann ist der Graph G' , den man aus G erhält, indem man einen neuen Knoten u zu G hinzufügt und u mit jedem der Knoten aus K durch eine Kante verbindet, wieder ein k -Baum.

Für diese partiellen k -Bäume ist die *game coloring number* genau bestimmt und gleich der oberen von Yang und Zhu angegebenen Schranke. Kierstead und Yang [31] geben zuerst für alle $k \geq 1$ die untere Schranke $3k + 1$ für die maximale *game coloring number* an, welche Wu in [40] für alle $k \geq 2$ auf $3k + 2$ verbessert. Zusammen mit dem oben genannten Ergebnis von Faigle, Kern, Kierstead und Trotter [20] für Bäume folgt also:

$$\text{col}_g(\mathcal{PT}_k) = \begin{cases} 4 & \text{für } k = 1 \\ 3k + 2 & \text{für } k \geq 2 \end{cases}$$

Schon 1994 zeigten Kierstead und Trotter [30], dass Graphen G , die in eine zusammenhängende kompakte orientierbare 2-dimensionale Mannigfaltigkeit vom Geschlecht g einbettbar sind, eine beschränkte spielchromatische Zahl haben und deren maximale Größe

¹⁹Vgl. Beispiel 2.2.

²⁰Einen vollständigen Teilgraphen K eines Graphen G nennt man *Clique*. Die maximale Ordnung der Cliques von G heißt *Cliquenzahl* von G .

nur von g abhängt, gaben jedoch keine Werte an. Dinski und Zhu geben 1999 in [13] erstmals konkrete Werte an und zeigen $\chi_g(G) \leq 16g^2 + 36g + 20$. Mit Hilfe der *game coloring number* zeigt Zhu [45] die bessere Abschätzung $\chi_g(G) \leq \text{col}_g(G) \leq \lfloor \frac{1}{2}(3\sqrt{1+48g} + 23) \rfloor$. Kierstead [27] beweist schließlich

$$\chi_g(G) \leq \text{col}_g(G) \leq \frac{1}{4}(3\sqrt{73 + 96g} + 41).$$

Für die Graphenklasse der *cactus trees* \mathcal{C} , das heißt für zusammenhängende Graphen, in denen je zwei Kreise höchstens einen Knoten gemeinsam haben, zeigt Elżbieta Sidorowicz in [38]

$$\chi_g(\mathcal{C}) = \text{col}_g(\mathcal{C}) = 5.$$

Relaxierte und asymmetrische Knotenfärbungsspiele

Die aktuelle Forschung betrachtet auch zwei Verallgemeinerungen des Knotenfärbungsspiels beziehungsweise des *marking games*. Dies ist zum einen das *relaxierte Knotenfärbungsspiel* und zum anderen das *asymmetrische (a, b) -Knotenfärbungsspiel* beziehungsweise das *asymmetrische (a, b) -marking game*.

Das relaxierte Knotenfärbungsspiel wurde 2003 von Chou, Wang und Zhu [11] eingeführt und kombiniert die relaxierte Färbung eines Graphen und die Spielidee. Die d -relaxierte spielchromatische Zahl und das d -relaxierte Knotenfärbungsspiel sind wie die spielchromatische Zahl und das Knotenfärbungsspiel definiert, wobei nur der Begriff der zulässigen Färbung verändert wird. Eine d -relaxierte Färbung ist zulässig, wenn alle Teilgraphen, die von den Knoten je einer Farbklasse induziert werden, höchstens den Maximalgrad d haben. Das 0-relaxierte Knotenfärbungsspiel entspricht also dem herkömmlichen Knotenfärbungsspiel. Die d -relaxierte spielchromatische Zahl wird in [11, 14, 16–18, 40] untersucht.

Kierstead [28] führt 2005 das asymmetrische (a, b) -Knotenfärbungsspiel ein. Es unterscheidet sich vom normalen Färbungsspiel dadurch, dass Alice in ihrem Zug a Knoten wählt und zulässig färbt, während Bob in seinem Zug b Knoten färbt. Das asymmetrische $(1, 1)$ -Knotenfärbungsspiel ist also wieder das herkömmliche Knotenfärbungsspiel. Ebenso markiert Alice beim asymmetrischen (a, b) -marking game in ihrem Zug a Knoten, während Bob in seinem Zug b Knoten markiert. Das asymmetrische Knotenfärbungsspiel und *marking game* werden in [28, 29, 31] und den bisher nur online verfügbaren Arbeiten [42, 43] untersucht.

Kantenfärbungsspiele

Obwohl die Kantenfärbungsspiele, wie wir gesehen haben, ein Spezialfall der Knotenfärbungsspiele sind, führen Lam, Shiu und Xu das Kantenfärbungsspiel und den spielchromatischen Index in [34] nochmals explizit ein. Sie zeigen Abschätzungen für die Graphenklasse \mathcal{W} der *Räder* (engl. *wheels*) und die Klassen \mathcal{T}_Δ der *Bäume* mit Maximalknotengrad Δ . Räder W_n sind Graphen, die aus einem Kreis C_n der Länge n entstehen,

indem man dem Kreis C_n einen weiteren Knoten u hinzufügt und alle Knoten von C mit diesem neuen Knoten u durch Kanten verbindet²¹. Es gilt

$$\chi'_g(W_n) = \begin{cases} 5 & \text{für } n = 3 \\ n + 1 & \text{für } n \geq 4 \end{cases}.$$

Für Bäume T mit Maximalknotengrad $\Delta(T)$ zeigen die Autoren $\chi'_g(T) \leq \Delta(T) + 2$.

Cai und Zhu führen in [10] das *edge ordering game* ein, also das *marking game* auf der Kantenmenge eines Graphen G . Wie beim *marking game* auf der Knotenmenge eines Graphen zeigt man: Besitzt Alice eine Strategie, die sicherstellt, dass bei Spielende zu jeder Kante e höchstens s Kanten adjazent sind, die im Verlauf des Spiels vor e markiert worden sind, so hat sie auch eine Gewinnstrategie für das Kantenfärbungsspiel auf diesem Graphen mit $s + 1$ Farben. Auf diese Weise zeigen Cai und Zhu dann, dass für alle k -degenerierte Graphen²² G gilt

$$\chi'_g(G) \leq \Delta(G) + 3k - 1.$$

Mit diesem Ergebnis zeigen sie für planare Graphen P $\chi'_g(P) \leq \Delta(P) + 14$, für außerplanare Graphen Q $\chi'_g(Q) \leq \Delta(Q) + 5$ und für Wälder T nochmals $\chi'_g(T) \leq \Delta(T) + 2$.

Für Bäume T mit Maximalknotengrad $\Delta(T) = 3$ und ungerader Kantenanzahl verbessern sie die Abschätzung auf $4 = \Delta(T) + 1$. Erdős, Faigle, Hochstättler und Kern zeigen in [19], dass diese bessere Abschätzung $\chi'_g(T) \leq \Delta(T) + 1$ auch für alle Bäume T mit Maximalknotengrad $\Delta(T) \geq 6$ gilt. Andres zeigt in [2] für die Klasse $\mathcal{T}_{\Delta=5}$ der Bäume mit Maximalknotengrad $\Delta = 5$ $\chi'_g(\mathcal{T}_{\Delta=5}) = 6$ und in [1] $\chi'_g(T) \leq 4$ für alle Bäume T mit Maximalknotengrad $\Delta(T) \leq 3$ ²³. Insgesamt gilt damit für Wälder T mit Maximalknotengrad $\Delta(T)$:

$$\chi'_g(T) \leq \begin{cases} \Delta(T) + 1 & \text{für } \Delta(T) \in \mathbb{N} \setminus \{4\} \\ \Delta(T) + 2 & \text{für } \Delta(T) = 4 \end{cases}.$$

Die relaxierte Version des Kantenfärbungsspiels betrachtet Dunn in [15] und zeigt erste Ergebnisse für k -degenerierte Graphen.

²¹Für das Rad W_n gilt also $\delta(W_n) = n$.

²²Ein Graph G heißt k -degeneriert, wenn es eine lineare Ordnung L auf der Knotenmenge $V(G)$ von G gibt, so dass für jeden Knoten $v \in V(G)$ gilt $|\{u \mid \{u, v\} \in E(V) \wedge L(u) < L(v)\}| \leq k$.

²³Offensichtlich gilt auch für die trivialen Fälle $\Delta(T) = 1$ und $\Delta(T) = 2$ immer $\chi'_g(T) \leq \Delta(T) + 1$. Für $\Delta(T) = 1$ ist das offensichtlich. Im Fall $\Delta(T) = 2$ sind die Bäume T isomorph zu den Wegen P . Für diese gilt immer $\chi'_g(P) \leq 3$, wie wir im Beispiel auf Seite 12 gezeigt haben.

(a) Knotenfärbungsspiele

Graphenklasse \mathcal{K}	obere Schranke für $\chi_g(\mathcal{K})$ und $col_g(\mathcal{K})$	untere Schranke für $\chi_g(\mathcal{K})$	untere Schranke für $col_g(\mathcal{K})$
Wälder \mathcal{T}	4 [20]	4 [20]	4 [20]
planare Graphen \mathcal{P}	17 [46]	8 [30]	11 [40]
außerplanare Graphen \mathcal{Q}	7 [23]	6 [30]	7 [31]
Intervallgraphen \mathcal{I}_k	$3k - 2$ [20]		
partielle k -Bäume \mathcal{PT}_k	$3k+2$ [45]		$3k + 2$ [40]
triangulierte Graphen	$3k - 1$ [45]		
Kaktus-Bäume \mathcal{C}	5 [38]	5 [38]	5 [38]

(b) Kantenfärbungsspiele

Graphenklasse \mathcal{K}	obere Schranke für $\chi'_g(\mathcal{K})$	untere Schranke für $\chi'_g(\mathcal{K})$
Räder W_n ($n \geq 4$)	$n + 1$ [34]	$\Delta + 1$ [34]
Bäume T mit $\Delta(T) \neq 4$	$\Delta(T) + 1$ [1, 2, 19]	
Bäume T mit $\Delta(T) = 4$	6 [10]	
planare Graphen P	$\Delta(P) + 14$ [10]	
außerplanare Graphen Q	$\Delta(Q) + 5$ [10]	
k -degenerierte Graphen G	$\Delta(G) + 3k - 1$ [10]	

Tabelle 1: Übersicht über die bisherigen Ergebnisse

3. Die Färbung vollständiger Graphen

3.1. Vollständige Graphen

Ein Graph mit n Knoten, in dem jedes Paar von Ecken adjazent ist, heißt *vollständiger Graph* der Ordnung n , in Zeichen K_n .

Für die Größe $\|K_n\|$ des vollständigen Graphen K_n gilt:

$$\|K_n\| := |E(K_n)| = \sum_{i=1}^{i=n-1} i = \frac{n \cdot (n-1)}{2} \quad (8)$$

Der vollständige Graph K_n hat also $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ Kanten.

Chromatische Zahl und chromatischer Index des K_n

Durch die k -Färbung eines Graphen wird die Knoten- beziehungsweise die Kantenmenge des Graphen in k Partitionen unterteilt, deren Elemente jeweils in der gleichen Farbe gefärbt sind. Die Elemente einer solchen Partition, die auch *Farbklasse* genannt wird, sind paarweise nicht adjazent. Solche Knoten- beziehungsweise Kantenmengen heißen *unabhängig*²⁴.

Repräsentieren wir den K_n durch $V(K_n) = \{1, 2, \dots, n\}$ und $E(K_n) = \{\{i, j\} \mid i, j \in V(K_n) \wedge i \neq j\}$. Dann ist $M = \{\{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{k-1}, v_k\}\}$ mit $v_i \in V(K_n) \forall 1 \leq i \leq k$ genau dann eine unabhängige Kantenmenge des K_n , wenn für alle $1 \leq i, j \leq k$, $i \neq j$ gilt: $v_i \neq v_j$, also jeder Knoten des Graphen mit höchstens einer der Kanten dieser Menge inzidiert. Eine maximale unabhängige Kantenmenge des K_n enthält also $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ²⁵ Kanten und jede unabhängige Kantenmenge des K_n kann zu einer maximalen unabhängigen Kantenmenge ergänzt werden²⁶. Diese Überlegungen helfen, die folgenden Aussagen zu beweisen.

Satz 3.1 Für die chromatische Zahl und den chromatischen Index des K_n gilt:

$$\chi(K_n) = n = \Delta(K_n) + 1 \quad (9)$$

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n = \Delta(K_n) + 1 & \text{für ungerades } n \geq 3 \\ n - 1 = \Delta(K_n) & \text{für gerade } n \end{cases} \quad (10)$$

Beweis:

Zu (9): Da alle Knoten paarweise adjazent sind, benötigt man offensichtlich für jeden Knoten eine andere Farbe, also gilt $\chi(K_n) = n$.

²⁴Unabhängige Kantenmengen bezeichnet man auch als *Matching* oder *Paarung*.

²⁵ $\lfloor x \rfloor$ bezeichnet die größte ganze Zahl $\leq x$.

²⁶Man wähle solange zwei beliebige Knoten, die zu keiner der Kanten in der Kantenmenge inzident sind, und füge die sie verbindende Kante der Kantenmenge hinzu, bis dies nicht mehr möglich ist. Falls n gerade ist, sind am Ende alle Knoten inzident zu einer Kante der unabhängigen Kantenmenge, ist n ungerade, bleibt ein Knoten übrig, der nicht mit einer dieser Kanten inzidiert.

Zu (10): Wir betrachten zuerst den Fall n ungerade, $n \geq 3$. Angenommen die Abbildung $f : V(K_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, \Delta(K_n) = n - 1\}$ wäre eine zulässige Kantenfärbung des K_n . Dann müssten für jedes $i \in K_n$ die Kantenmengen $f^{-1}(i)$ unabhängig sein und da jede Kante gefärbt werden muss, müsste $E(K_n) = \bigcup_{i=1}^{i=n-1} f^{-1}(i)$ gelten. Da eine unabhängige Kantenmenge des K_n höchstens $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n-1}{2}$ (n ist ungerade) Kanten enthalten kann, wäre also $|E(K_n)| \leq (n-1) \cdot \frac{n-1}{2}$. Nach Gleichung (8) ist aber $|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2} > \frac{(n-1)^2}{2}$. Dies ist ein Widerspruch! Da der chromatische Index nach dem Satz von Vizing (Satz 1.3) einen der beiden Werte $\Delta(K_n)$ oder $\Delta(K_n) + 1$ annehmen muss, gilt also $\chi'(K_n) = \Delta(K_n) + 1 = n$.

Sei nun n gerade. Dann lassen sich die Kanten folgendermaßen in $\Delta(K_n) = n - 1$ unabhängige Kantenmengen partitionieren²⁷: Wir definieren Kantenteilmengen E_i durch

$$E_i := \{\{i, n\}\} \cup \{\{i - j, i + j\} \mid j = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1\}$$

für $i = 1, \dots, n - 1$, wobei für die Kante $\{i - j, i + j\}$ die Zahlen $(i - j)$ und $(i + j)$ jeweils als eine der Zahlen $1, \dots, n - 1$ modulo $n - 1$ betrachtet werden. Die so definierten Kantenmengen E_i sind unabhängig und es gilt $\bigcup_{i=1}^{i=n-1} E_i = E(K_n)$. Also ist $\chi(K_n) = \Delta(K_n) = n - 1$. \square

Während die spielchromatische Zahl der vollständigen Graphen immer gleich der chromatischen Zahl ist, $\chi_g(K_n) = \chi(K_n)$, ist der spielchromatische Index für $n \geq 4$ vermutlich immer größer als der chromatische Index.

3.2. Der spielchromatische Index des K_4

Satz 3.2 Der spielchromatische Index des K_4 ist gleich 5:

$$\chi'_g(K_4) = 5.$$

Beweis:

Für eine Anzahl von Farben ≤ 5 hat Bob folgende Gewinnstrategie: Wegen $\chi'(K_4) = 3$ werden mindestens 3 Farben benötigt. Alice beginnt das Spiel und färbt die erste Kante. O.B.d.A. sei dies die Kante $\{1, 2\}$ mit der Farbe 1 (*rot* in Abbildung 4). Bob wählt dann die Kante, die nicht adjazent zu der von Alice gefärbten Kante ist²⁸ (in der Abbildung 4 ist das die Kante $\{3, 4\}$), und färbt diese in einer anderen Farbe, der Farbe 2 (*grün*). Dies führt zu dem in Abbildung 4 dargestellten Spielstand:

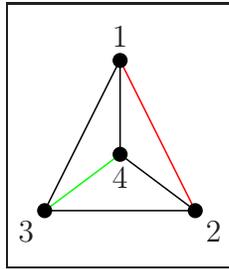
Jeweils zwei der jetzt noch ungefärbten Kanten sind adjazent, und alle ungefärbten Kanten sind adjazent zu den beiden bereits gefärbten Kanten. Das bedeutet, dass noch mindestens zwei weitere Farben benötigt werden, um den Graphen zulässig zu färben.

Alice färbt nun die nächste Kante. O. B. d. A. sei das die Kante $\{1, 3\}$. Hierzu muss sie wiederum eine neue Farbe benutzen, dies sei die Farbe 3 (*blau*)²⁹. Bob färbt jetzt

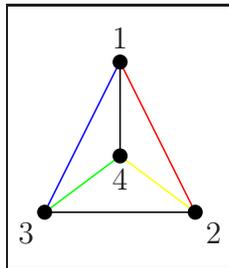
²⁷Siehe auch [6], dem diese Partitionierung entnommen ist.

²⁸Die beiden gefärbten Kanten bilden also eine unabhängige Kantenmenge.

²⁹Egal welche Kante Alice für diesen Zug wählt und welche neue Farbe sie dieser Kante zuweist, die entstehenden Graphen mit ihrer partiellen Färbung sind immer isomorph zueinander.

Abbildung 4: Färbung des K_4 nach zwei Zügen

wieder die Kante, die nicht zu der von Alice gefärbten Kante adjazent ist (dies ist in Abbildung 5 die Kante $\{2, 4\}$), und benutzt hierzu die vierte Farbe 4 (*gelb*). Es entsteht die folgende partielle Färbung:

Abbildung 5: Färbung des K_4 nach vier Zügen

Es verbleiben zwei unabhängige ungefärbte Kanten (die Kanten $\{1, 4\}$ und $\{2, 3\}$), die jeweils adjazent zu allen bereits gefärbten Kanten sind. Sie können nicht mehr zulässig gefärbt werden und Bob gewinnt das Spiel.

Sind hingegen 5 Farben gegeben, so kann Alice in ihrem nächsten Zug eine der beiden ungefärbten Kanten mit dieser fünften Farbe färben. Bob muss dann dieselbe Farbe zur Färbung der letzten ungefärbten Kante verwenden. Der Graph ist zulässig gefärbt und Alice gewinnt.

Auch wenn Bob im zweiten Zug eine andere Kante färbt, oder die gleiche Farbe wie Alice verwendet, gewinnt Alice mit 5 Farben: Alice kann dann immer erreichen, dass ein Paar unabhängiger Kanten in der gleichen Farbe gefärbt ist. Für die restlichen vier Kanten stehen dann noch vier Farben zur Verfügung, mit denen der Graph immer zulässig gefärbt werden kann. Also ist $\chi'_g(K_4) = 5$. \square

Unabhängige Kantenmengen und Farbklassen

Zum Beweis der Formel (10) aus Satz 3.1 haben wir die Tatsache benutzt, dass die Kanten des Graphen G durch eine zulässige Kantenfärbung in $\chi'(G)$ verschiedene unabhängige Kantenmengen $E_1, \dots, E_{\chi'(G)}$ partitioniert werden. Beim Kantenfärbungsspiel

wird also Alice immer versuchen die Kanten einer solchen unabhängigen Kantenmenge in der gleichen Farbe zu färben, während Bob versuchen wird, das Gegenteil zu erreichen, nämlich jede Kante eines Matchings in einer anderen Farbe zu färben.

Wie wir gesehen haben, kann Bob mit dieser Strategie erreichen, dass er das Kantenfärbungsspiel auf dem K_4 mit weniger als 5 Farben gewinnt. Hierbei half uns jedoch die spezielle Eigenschaft des K_4 , dass die unabhängigen Kantenmengen im K_4 eindeutig bestimmt sind: Für jede Kante $e \in E(K_4)$ gibt es genau eine Kante $f \in E(K_4)$, so dass e und f unabhängig sind. Dies ist im Allgemeinen nicht der Fall. Im K_5 gibt es zu einer fest gewählten Kante $e \in E(K_5)$ bereits 3 Möglichkeiten, eine Kante $F \in E(K_5)$ zu wählen, so dass die Kanten e und f unabhängig sind (siehe Abbildung 6).

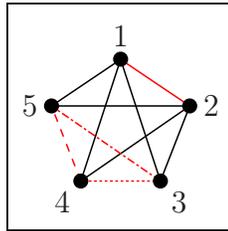


Abbildung 6: Zu einer fest gewählten Kante im K_5 gibt es immer 3 Möglichkeiten, eine zweite Kante so zu wählen, dass die Kanten unabhängig sind: Die Kante $\{1, 2\}$ bildet mit den Kanten $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$ und $\{4, 5\}$ jeweils unabhängige Kantenpaare.

Allgemein gilt für den K_n :

Satz 3.3 Die Anzahl der Möglichkeiten, eine bereits aus $j < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ Kanten bestehende unabhängige Kantenmenge des K_n zu einer maximalen unabhängigen Kantenmenge zu erweitern, ist

$$\prod_{i=j+1}^{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n_i \quad \text{wobei } n_i := (n - 2(i - 1)) \frac{n - (2(i - 1) + 1)}{2}. \quad (11)$$

Die Anzahl verschiedener unabhängiger Kantenmengen im K_n , die eine schon aus $j < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ Kanten bestehende unabhängige Kantenmenge enthalten, ist

$$\prod_{i=j+1}^{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n_i}{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - j)!}. \quad (12)$$

Beweis:

Zu (11): Alle maximalen unabhängigen Kantenmengen des K_n enthalten $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ Kanten. Nachdem wir die erste Kante für eine solche maximale Kantenmenge gewählt haben, verbleiben genau $n - 2$ Knoten, die nicht inzident zu dieser Kante sind. Der von diesen $n - 2$ Knoten induzierte Teilgraph ist isomorph zum K_{n-2} und alle seine $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$

Kanten sind unabhängig zu der bereits gewählten Kante. Man hat also $n_2 := \frac{(n-2)(n-3)}{2}$ Möglichkeiten eine zur ersten gefärbten Kante unabhängige Kante zu wählen. Wählt man nun eine dieser Kanten und entfernt auch ihre Endknoten aus der Knotenmenge des K_n , so verbleiben $n - 4$ Knoten, die zu keiner der beiden bereits gefärbten Kanten inzident sind. Diese $n-4$ Knoten induzieren einen zum K_{n-4} isomorphen Teilgraphen und jede seiner $\frac{(n-4)(n-5)}{2}$ Kanten bildet jeweils mit den beiden schon gefärbten Kanten eine unabhängige Kantenmenge. Auf diese Weise fortfahrend hat man für die Wahl der i -ten unabhängigen Kante für $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ jeweils $n_i := (n-2(i-1)) \frac{n-(2(i-1)+1)}{2}$ Möglichkeiten. Sind bereits j Kanten gefärbt, so gibt es also insgesamt $\prod_{i=j+1}^{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n_i$ Möglichkeiten, eine maximale unabhängige Kantenmenge zu bilden, welche die j bereits gefärbten Kanten enthält.

Zu (12): Um die Gesamtzahl verschiedener unabhängiger Kantenmengen zu erhalten, müssen wir die Zahl der Wahlmöglichkeiten noch durch $(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - j)!$ teilen, denn es kommt nicht darauf an, in welcher Reihenfolge die Kanten gewählt werden. Dies ergibt die zweite Gleichung.

Es gibt also genau $\prod_{i=j+1}^{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n_i}{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - j)!}$ verschiedene unabhängige Kantenmengen, welche die $j < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ bereits gewählten Farben enthalten. \square

Wie man an diesen Ergebnissen sieht, wächst die Anzahl der verschiedenen unabhängigen Kantenmengen sehr schnell mit steigender Ordnung des vollständigen Graphen. Die unabhängigen Kantenmengen, die in einem zulässig mit $\chi'(K_n)$ Farben gefärbtem vollständigem Graphen der Ordnung n die Farbklassen darstellen, sind nicht mehr wie im K_4 eindeutig bestimmt. Zwar wird es beim Graphenfärbungsspiel auf dem K_n (außer zu Beginn des Spiels) weniger Auswahlmöglichkeiten für eine maximale unabhängige Kantenmenge geben als in (12) angegeben, da einige Kanten bereits vorher im Spiel gefärbt wurden und somit nicht mehr zur Verfügung stehen. Dennoch kann Bob nicht mehr ohne weiteres erzwingen, dass eine von ihm bewußt in einer unterschiedlichen Farbe gefärbte Kante die Anzahl von Kanten in einer dieser Farbklassen verringert, und damit die zur vollständigen Färbung des Graphen nötige Farbenanzahl erhöht.

3.3. Der spielchromatische Index des K_5

Dies sieht man am Beispiel der Färbung des K_5 . Die verschiedenen Möglichkeiten, eine gegebene Kante zu einer unabhängigen Kantenmenge zu erweitern, machen die Bestimmung des spielchromatischen Index des K_5 etwas schwieriger. Bob probiert wieder zu verhindern, dass die entstehenden Farbklassen ihre maximale Anzahl von 2 Elementen enthalten, kann dies aber nicht für alle Farben erreichen.

Satz 3.4 Für den spielchromatischen Index des K_5 gilt:

$$\chi'_g(K_5) = 6$$

Beweis:

Da $\chi'(K_5) = 5$ ist (vgl. (10) auf Seite 21), muss auch $\chi'_g(K_5) \geq 5$ gelten. Außerdem wissen wir, dass eine unabhängige Kantenmenge des K_5 höchstens zwei Kanten enthält.

Damit die $\|K_5\| = 10$ Kanten des K_5 mit 5 Farben gefärbt werden können, muss also jede der Farbklassen genau zwei Elemente enthalten. Diese Tatsache nutzen wir, um eine Gewinnstrategie für Bob im Kantenfärbungsspiel auf dem K_5 mit 5 Farben anzugeben.

Alice beginnt das Spiel und färbt die Kante $\{1, 2\}$. Bob färbt daraufhin eine der Kanten, die mit der von Alice gefärbten Kante eine unabhängige Kantenmenge bilden, in der gleichen Farbe, die auch Alice verwendet hat. Dies sei o.B.d.A. die Kante $\{3, 4\}$ in Abbildung 7. Alice hat nun zwei Möglichkeiten:

Im ersten Fall färbt sie eine der vier Kanten, die zu beiden bereits gefärbten Kanten benachbart sind. Dies sei (wieder o.B.d.A.) die Kante $\{2, 3\}$ in Abbildung 7. Dann färbt Bob die Kante, die adjazent zu den beiden bereits zuvor gefärbten Kanten ist und zu der von Alice gefärbten Kante unabhängig ist. Dies ist in Abbildung 7 die Kante $\{1, 4\}$. Es entsteht die folgende in Abbildung 7 gezeigte Situation:

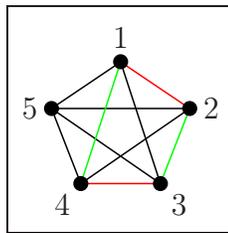


Abbildung 7: Färbung des K_5 nach 4 Zügen (1. Möglichkeit): Bob gewinnt, denn zum Färben der vier zum Knoten 5 inzidenten Kanten werden vier weitere Farben benötigt. Es sind aber nur noch drei Farben übrig.

Die vier Kanten, die mit dem Knoten 5 inzidieren, müssen in verschiedenen Kanten gefärbt werden. Da eine maximale unabhängige Kantenmenge im K_5 höchstens zwei Elemente enthält, können die beiden benutzten Farben nicht mehr zur Färbung weiterer Kanten verwendet werden. Es sind also nur noch drei Farben zur Färbung der vier adjazenten Kanten übrig, und Bob gewinnt das Spiel.

Im zweiten Fall färbt Alice eine Kante, die nur zu einer der beiden bereits gefärbten Kanten adjazent ist. Dies sei o.B.d.A. die Kante $\{1, 5\}$. Bob färbt dann wieder eine der zu dieser Kante unabhängigen Kanten in der gleichen Farbe, dies sei die Kante $\{2, 3\}$. Die entstehende Situation ist in Abbildung 8(a) dargestellt. Alle möglichen Folgezüge von Alice führen zu einem Spielstand, der zu einem der in den Abbildungen 8(b)-8(e) gezeigten Graphen mit ihren partiellen Färbungen isomorph ist³⁰. Bob kann durch seinen nächsten Zug jeweils sicherstellen, dass er das Spiel gewinnt. Seine verschiedenen Züge sind in den Abbildungen 8(f)-8(i) angegeben.

In den Situationen in den Abbildungen 8(f) und 8(i) sind alle noch ungefärbten Kanten adjazent zu der Kante $\{4, 5\}$. Es kann also keine zweite Kante mehr in der Farbe, in der die Kante $\{4, 5\}$ gefärbt ist, gefärbt werden, und Bob gewinnt.

Im Graphen aus Abbildung 8(g) verbleibt zur zulässigen Färbung der Kanten $\{2, 4\}$ und $\{4, 5\}$ nur noch die fünfte Farbe. Da aber diese beiden Kanten benachbart sind,

³⁰Siehe auch Beispiel 4.1 auf Seite 33.

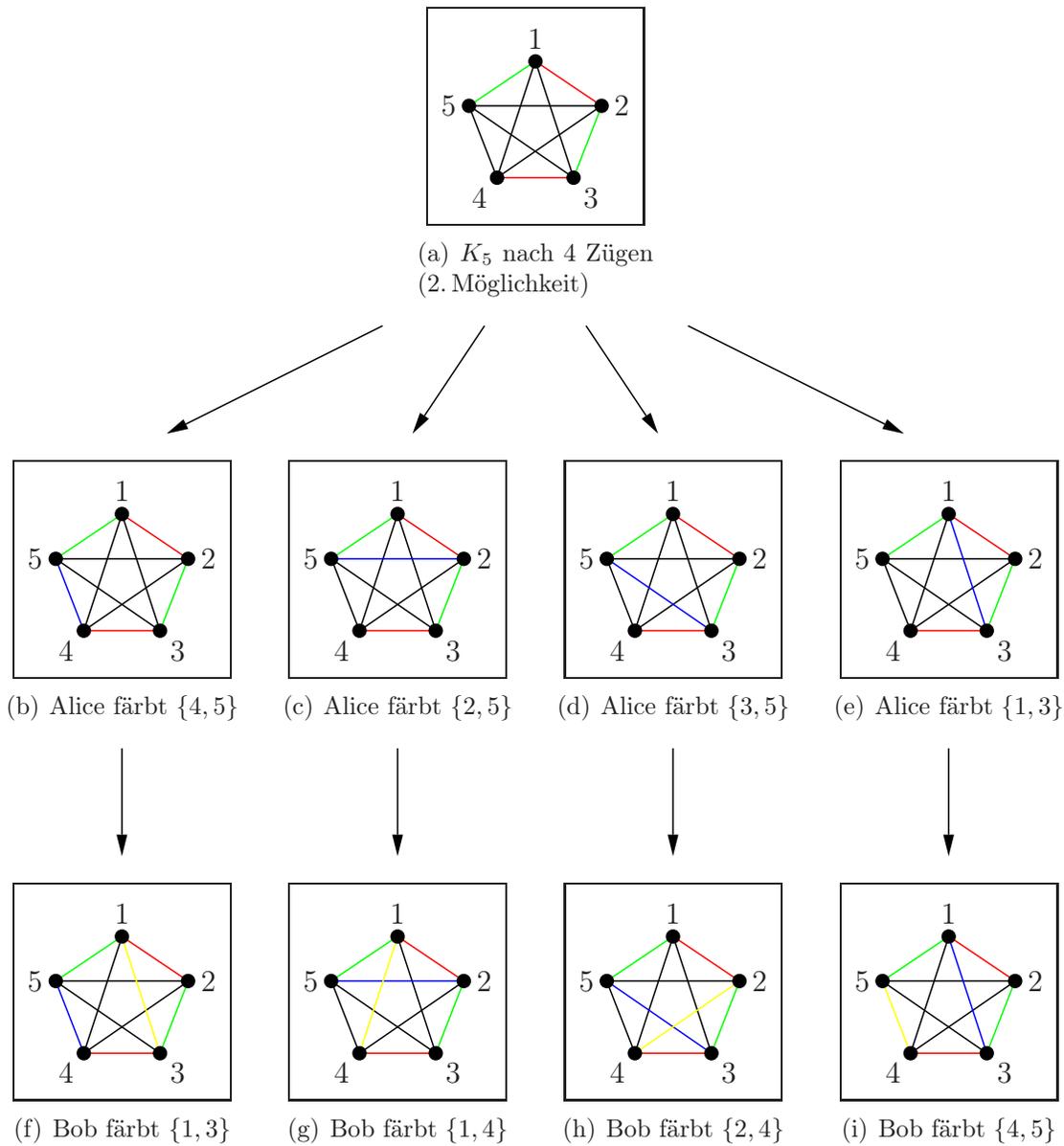


Figure 8: Färbung des K_5 (2. Möglichkeit): Bob gewinnt, denn in jeder der entstehenden Situationen 8(f) - 8(i) werden zur vollständigen Färbung des Graphen mehr als 5 Farben benötigt.

können sie nicht in derselben Farbe gefärbt werden, und Bob gewinnt auch hier.

Gleiches gilt für den Graphen in Abbildung 8(h). Auch hier bleibt zur Färbung der beiden adjazenten Kanten $\{2, 5\}$ und $\{4, 5\}$ nur noch eine Farbe übrig, das heißt Bob gewinnt.

Es gilt also $\chi'_g(K_5) \geq 6$. Um auch $\chi'_g(K_5) \leq 6$ zu zeigen, geben wir eine Gewinnstrategie für Alice für das Kantenfärbungsspiel auf dem K_5 mit 6 Farben an:

Alice färbt zu Beginn eine beliebige Kante. Angenommen, Bob habe nun gerade die Kante e mit der Farbe $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$ gefärbt. Falls es noch ungefärbte Kanten im Graphen gibt, wähle Alice eine Kante e' , die keinen gemeinsamen Endknoten mit e hat und färbe diese in der gleichen Farbe i .³¹ Auf diese Weise werden 8 Kanten des K_5 mit 4 Farben gefärbt. Also hat Alice eine Gewinnstrategie mit 6 Farben, denn zur Färbung der anderen zwei Kanten verbleiben noch zwei unbenutzte Farben. Insgesamt folgt also $\chi'_g(K_5) = 6$. \square

3.4. Abschätzung des spielchromatischen Index des K_{2n}

Satz 3.5 Für den spielchromatischen Index des K_n , n gerade, gilt:

$$\chi'_g(K_n) \geq \Delta(K_n) + 1 = n > \chi'(K_n) \quad \text{für gerades } n \quad (13)$$

Beweis:

Im folgenden sei n eine gerade Zahl. Nach (10) gilt dann $\chi'(K_n) = \Delta(K_n) = n-1$. Um den K_n mit $\chi'(K_n) = n-1$ Farben zu färben, muss jede Farbklasse die maximale Anzahl von genau $\frac{n}{2}$ Kanten enthalten. Dies kann Bob mit folgender Strategie verhindern:

Bob färbt Kanten, die zusammen eine unabhängige Kantenmenge bilden in der gleichen Farbe. Sobald die in Abbildung 9 gezeigte Situation eintritt, dass eine Farbklasse $\frac{n}{2} - 2$ Kanten enthält (hier die Klasse der roten Kanten), gibt es zwei Möglichkeiten:

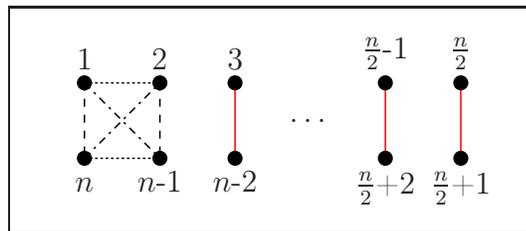


Abbildung 9: Bob kann immer verhindern, dass im K_n (n gerade) eine Farbklasse mit $\frac{n}{2}$ Elementen entsteht. Alice kann in dem von der Knotenmenge $\{1, 2, n-1, n\}$ induzierten Teilgraphen höchstens eine weitere Kante rot färben.

³¹Dies ist nur dann nicht möglich, falls Bob keine neue Farbe verwendet hat. Dann werden jedoch bereits durch Bobs Zug 2 unabhängige Kanten in der gleichen Farbe gefärbt, so dass Alice dies durch ihren Zug nicht mehr sicherstellen muss.

1. Alice färbt eine Kante in dem Teilgraphen, der von den vier nicht mit Kanten der Farbklasse inzidenten Knoten induziert wird, in der gleichen Farbe (*rot*). Die letzte zu einem maximalen Matching gehörige Kante ist dann eindeutig bestimmt, und Bob kann diese in einer anderen Farbe färben (wenn dies nicht bereits zuvor im Spiel geschehen ist). Die Farbklasse *rot* enthält dann nur $\frac{n}{2} - 1$ Kanten.
2. Jedesmal wenn Alice eine nicht zu obigem Teilgraphen gehörige Kante färbt, wählt Bob eine dieser Kanten und färbt sie in einer von *rot* verschiedenen Farbe³². Dies tut er so, dass die von ihm gefärbten Kanten zu verschiedenen unabhängigen Kantenmengen in dem Teilgraphen gehören. Spätestens nach drei Zügen hat er dann sichergestellt, dass die Farbklasse *rot* nicht die maximale Zahl von $\frac{n}{2}$ Elementen enthalten kann.

In beiden Fällen erzwingt Bob, dass es eine Farbklasse gibt, die höchstens $\frac{n}{2} - 1$ Elemente enthält und der Graph also nicht mit $n - 1$ Farben gefärbt werden kann. \square

Wir betrachten nun das Kantenfärbungsspiel auf dem K_n mit der Farbmenge $F = \{1, 2, \dots, n\}$. Angenommen es gelänge Bob $\frac{n}{2} + 1$ -mal wie oben gezeigt zu verhindern, dass in der in Abbildung gezeigten Situation eine maximale Farbklasse mit $\frac{n}{2}$ Elementen entsteht. Dann wären $(\frac{n}{2} + 1) \cdot (\frac{n}{2} - 1) = \frac{n^2}{4} - 1$ Kanten mit $\frac{n}{2} + 1$ Farben gefärbt und für die übrigen $\|K_n\| - (\frac{n^2}{4} - 1) = \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} + 1$ Kanten (von denen einige natürlich schon gefärbt sind) verblieben $\frac{n}{2} - 1$ Farben. Mit $\frac{n}{2} - 1$ Farben lassen sich im K_n aber maximal $(\frac{n}{2} - 1) \cdot \frac{n}{2}$ Kanten färben, das heißt eine Kante würde in jedem Fall ungefärbt bleiben und Bob gewinnt. Es müßte also $\chi'_g(K_n) \geq \Delta(K_n) + 1$ gelten. Das Problem ist also zu zeigen, dass Alice Bob nicht (zu oft) zwingen kann, in der Situation aus Abbildung 9 eine weitere Kante in der Farbe der Farbklasse zu färben. Dies wäre zum Beispiel dann der Fall, wenn nur noch ein Paar unabhängiger Kanten ungefärbt wäre und zur Färbung der adjazenten Kanten bereits alle anderen $n - 1$ Farben verbraucht sind. Es scheint unwahrscheinlich, dass Alice dies $\frac{n}{2}$ -mal erzwingen kann, aber aufgrund der großen Anzahl von Strategien, die sie verwenden kann, ist es schwierig, das auch zu beweisen.

3.5. Das *marking game* auf dem vollständigen Graphen K_n

Wie wir in Abschnitt 2.2 auf Seite 14 gesehen haben, wurden die besten Abschätzungen für die maximale spielchromatische Zahl und den maximalen spielchromatischen Index einer Klasse von Graphen durch die Untersuchung des *marking game* und die Bestimmung der *game coloring number* beziehungsweise des entsprechenden Parameters für Kantenfärbungsspiele bewiesen. Für die Klasse der vollständigen Graphen funktioniert dieser Ansatz nicht.

³²Dies tut er auch, falls Alice eine Kante des besagten Teilgraphen wählt, sie aber nicht *rot* färbt.

Der game coloring index des K_n

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $t : E(G) \rightarrow \mathbb{N}$ die Funktion, die für jede Kante $e \in E(G)$ den Zug angibt, indem die Kante e im *marking game* auf der Kantenmenge von G markiert wurde. Das heißt $t(e) = j$ bedeutet, dass die Kante e im j -ten Zug markiert wurde. Sei weiter

$$s(e) := |\{f \mid f \text{ ist adjazent zu } e \wedge t(f) < t(e)\}|$$

die Anzahl der zu e benachbarten Kanten, die vor e markiert wurden, und

$$s := 1 + \max_{e \in E(G)} s(e)$$

das Spielergebnis. Der *game coloring index* $col'_g(G)$ ist dann die kleinste Zahl s , für die Alice eine Strategie im *marking game* auf der Kantenmenge $E(G)$ hat, die zu einem Spielergebnis von höchstens s führt.

Für den *game coloring index* und den spielchromatischen Index zeigt der folgende Satz den gleichen Zusammenhang, der nach Satz 2.5 auch für die *game coloring number* und die spielchromatische Zahl gilt:

Satz 3.6 Der *game coloring index* ist eine obere Schranke des spielchromatischen Index. Es gilt für jeden Graphen G :

$$\chi'_g(G) \leq col'_g(G). \quad (14)$$

Beweis:

Spielen Alice und Bob das Kantenfärbungsspiel auf dem Graphen G mit $col'_g(G) = k + 1$ Farben, so ist Alices Gewinnstrategie im Kantenfärbungsspiel die gleiche, wie im *marking game* auf der Kantenmenge von G . Wählt sie die zu färbenden Kanten gemäß dieser Strategie, so ist jede ungefärbte Kante zu höchstens k gefärbten Kanten adjazent. Alice kann also die gewählte Kante mit der ersten noch zulässigen Farbe der Farbmenge $\{1, \dots, k + 1\}$ färben. \square

Satz 3.7 Für den *game coloring index* $col'_g(K_n)$ des vollständigen Graphen K_n gilt:

$$col'_g(K_n) = 2n - 3 = 2\Delta(K_n) - 1. \quad (15)$$

Beweis:

Spielen Alice und Bob das *marking game* auf der Kantenmenge $E(K_n)$ des K_n , dann gilt für die zuletzt im Spiel markierte Kante $\tilde{e} \in E(K_n)$ immer

$$s(e) = |\{f \mid f \text{ ist adjazent zu } e \wedge t(f) < t(e)\}| = 2(n - 2),$$

denn jede Kante des vollständigen Graphen K_n ist zu genau $2(n - 2)$ Kanten adjazent und wenn die letzte Kante des Graphen markiert wird, sind alle diese Kanten bereits markiert. Hieraus folgt $col'_g(K_n) = 1 + 2(n - 2) = 2n - 3 = 2(n - 1) - 1 = 2\Delta(K_n) - 1$. \square

Da der *game coloring index* eine obere Schranke des spielchromatischen Index ist ergibt dies die Abschätzung $\chi'_g(K_n) \leq col'_g(K_n) = 2\Delta(K_n) - 1$. Dies entspricht allerdings genau der Gleichung 3 auf Seite 11 und dieser Ansatz erbringt somit keine Verbesserung. Es müssen also neue Methoden benutzt werden, um möglichst gute Strategien für das Kantenfärbungsspiel auf vollständigen Graphen zu bestimmen und den Wertebereich der spielchromatischen Indizes vollständiger Graphen weiter einzuschränken.

4. Eine Potentialfunktion für Kantenfärbungsspiele

4.1. Definitionen

In den folgenden Kapiteln werden wir Graphen betrachten, die sowohl gefärbte als auch ungefärbte Kanten enthalten.

Partielle Färbungen

Einen solchen Graphen G nennen wir *partiell gefärbt*. Eine *partielle Kantenfärbung* ist also eine Abbildung $f_{E_p} : E(G) \supseteq E_p \rightarrow F$, die nur auf einer Teilmenge E_p der Kantenmenge $E(G)$ definiert ist. Wir werden wieder nur zulässige partielle Färbungen betrachten, das heißt partielle Färbungen die $f_{E_p}(e_1) \neq f_{E_p}(e_2)$ für alle benachbarten Kanten $e_1, e_2 \in E_p$ erfüllen.

Sind $f_{E_p} : E(G) \supseteq E_p \rightarrow F$ und $f_{E_q} : E(G) \supseteq E_q \rightarrow F$ zwei partielle Kantenfärbungen auf G , so bezeichnen wir f_{E_p} als *Erweiterung* der partiellen Kantenfärbung f_{E_q} wenn $E_q \subset E_p \subseteq E(G)$ ist und für alle $e \in E_q$ gilt: $f_{E_p}(e) = f_{E_q}(e)$.

Färbungsgrad und Knotenfarbmenge

Sei G ein Graph mit partieller Färbung $f_{E_p} : E(G) \supseteq E_p \rightarrow F$. Als *Färbungsgrad* g_u eines Knotens u bezeichnen wir die Anzahl der mit $u \in V(G)$ inzidenten Kanten, denen durch die partielle Kantenfärbung eine Farbe zugewiesen wird, also

$$g_u := |\{e \in E_p \mid e \text{ inzidiert mit } u\}| \quad (16)$$

Die *Knotenfarbmenge* $F_u \subset F$ eines Knotens u enthält alle Farben, die den zu u inzidenten Kanten durch die partielle Färbung f_{E_p} zugewiesen werden, das heißt

$$F_u := \{c \mid c \in F \wedge \exists v \in V(G) \Rightarrow (\{u, v\} \in E_p \wedge f_{E_p}(\{u, v\}) = c)\}. \quad (17)$$

In einem zulässig partiell gefärbten Graphen gilt also immer $g_u = |F_u|$.

Kantenfarbmenge und Kantenfarbzahl

Sei G wieder ein Graph mit partieller Färbung $f_{E_p} : E(G) \supseteq E_p \rightarrow F$ und $e \in E(G) \setminus E_p$ eine ungefärbte Kante von G . Die Menge aller Farben, mit denen zu e adjazente Kanten gefärbt sind, nennen wir die *Kantenfarbmenge* $F_k(e)$ von e . Die Mächtigkeit dieser Menge bezeichnen wir als *Kantenfarbzahl* $f(e)$ ³³. Ist $e = \{u, v\}$ und sind F_u und F_v die Knotenfarbmengen der Knoten u bzw. v , so gilt

$$F_k(e) := F_u \cup F_v \quad \text{und} \quad f(e) := |F_k(e)|.$$

³³Der Einfachheit halber und um eine Verwechslung mit dem Funktionswert der Kantenfärbung auszuschließen, bezeichnen wir die Kantenfarbzahl im folgenden nur noch mit f . Aus dem Kontext wird immer ersichtlich sein, um welche Kantenfarbzahl es sich handelt.

Isomorphie von Graphen mit (partiellen) Kantenfärbungen

Seien $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ zwei isomorphe Graphen mit (partiellen) Kantenfärbungen $f_{E_p} : E \supseteq E_p \rightarrow F$ und $f'_{E'_q} : E' \supseteq E'_q \rightarrow F'$. Die Graphen mit ihren (partiellen) Färbungen heißen *isomorph*, wenn es einen Graphenisomorphismus $\varphi : V \rightarrow V'$ und eine bijektive Abbildung $\psi : F \rightarrow F'$ gibt, so dass gilt

$$\{u, v\} \in E_p \iff \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E'_q \quad (18)$$

und

$$\psi(f(\{u, v\})) = f'(\{\varphi(u), \varphi(v)\}) \quad \forall \{u, v\} \in E_p. \quad (19)$$

Sind die Graphen G und G' mit ihren (partiellen) Färbungen isomorph, so können wir sie in Bezug auf alle Graphenfärbungsprobleme als im Wesentlichen gleich betrachten. Durch den Graphenisomorphismus φ werden alle Adjazenz- und Inzidenzbeziehungen von Knoten und Kanten in G auf entsprechende Beziehungen in G' abgebildet. Außerdem bleibt die Farbverteilung erhalten:

Satz 4.1 Seien G und G' zwei (partiell) gefärbte isomorphe Graphen mit den Kantenfärbungen $f_{E_p} : E \supseteq E_p \rightarrow F$ und $f'_{E'_q} : E' \supseteq E'_q \rightarrow F'$ und den Isomorphiabbildungen $\varphi : V \rightarrow V'$ und $\psi : F \rightarrow F'$. Sind dann $e_1 = \{u_1, v_1\}, e_2 = \{u_2, v_2\} \in E(G)$ zwei Kanten des Graphen G , die in der gleichen Farbe gefärbt sind, so sind auch die Kanten $e'_1 = \{\varphi(u_1), \varphi(v_1)\}, e'_2 = \{\varphi(u_2), \varphi(v_2)\} \in E(G')$ in G' in der gleichen Farbe gefärbt, und umgekehrt.

Beweis:

Seien $e_1, e_2 \in E(G)$ in der gleichen Farbe $\tilde{f} \in F$ gefärbt, also $f(e_1) = f(e_2) = \tilde{f}$. Dann gilt $f'(e'_1) = \psi(f(e_1)) = \psi(\tilde{f}) = \psi(f(e_2)) = f'(e'_2)$. Da die Funktion ψ bijektiv ist, folgt auch umgekehrt aus $f'(e'_1) = f'(e'_2)$ wieder $f(e_1) = f(e_2)$. \square

Die Kanten beider Graphen G und G' sind also in die gleiche Anzahl Farbklassen der jeweils gleichen Mächtigkeit partitioniert. Ist G zulässig gefärbt, so ist auch G' zulässig gefärbt. Für alle Knoten $u \in V(G)$ gilt, dass die Knoten $u \in V(G)$ und $\varphi(u) \in V(G')$ jeweils den gleichen Färbungsgrad und eine Knotenfarbmengende der gleichen Mächtigkeit haben. Ebenso haben die Kanten $\{u, v\} \in E(G)$ und $\{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E(G')$ die gleiche Kantenfarbzahl.

Für das Kantenfärbungsspiel auf den isomorphen (partiell gefärbten) Graphen bedeutet dies: Besitzt einer der Spieler eine Gewinnstrategie für das Kantenfärbungsspiel auf dem Graphen G , so hat er immer auch eine Gewinnstrategie für das Kantenfärbungsspiel auf dem Graphen G' . Müßte er dieser Strategie folgend im Spiel auf G die Kante $e = \{u, v\} \in E$ in der Farbe $\tilde{f} \in F$ färben, so führt das Färben der Kante $e' = \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E'$ in der Farbe $\psi(\tilde{f}) \in F'$ beim Färbungsspiel auf G' zum gleichen Spielergebnis.

Beispiel 4.1 Im Beweis zu Satz 3.4 haben wir behauptet, alle Graphen mit ihren partiellen Färbungen, die aus der in Abbildung 8(a) gezeigten Ausgangssituation durch Alices Folgezüge entstehen können, seien isomorph zu einem der in den Abbildungen

8(b)-8(e) dargestellten Graphen. Dies wollen wir nun an einem Beispiel exemplarisch zeigen. Hierzu nehmen wir an, Alice färbe in ihrem Zug die Kante $\{1,4\}$ in *türkis*, so dass der Graph G in Abbildung 10(a) entsteht.

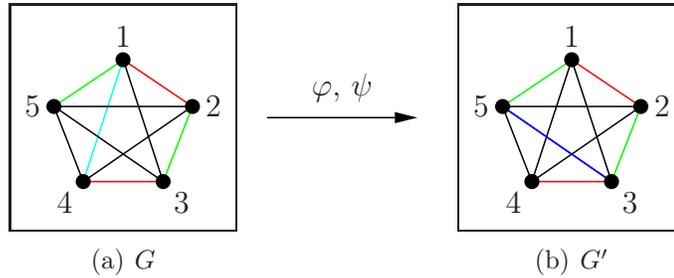


Figure 10: Die Isomorphismen φ und ψ bilden den partiell gefärbten Graphen G auf den isomorphen partiell gefärbten Graphen G' ab.

Die Isomorphismen

$$\varphi : V(G) \rightarrow V(G'), \quad \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

und

$$\psi : F \rightarrow F', \quad \psi = \begin{pmatrix} \text{rot} & \text{grün} & \text{türkis} \\ \text{grün} & \text{rot} & \text{blau} \end{pmatrix}$$

bilden diesen Graphen G auf den Graphen G' aus Abbildung 8(c) ab, der auch in Abbildung 10(b) nochmals dargestellt ist. Die beiden Graphen G und G' sind also isomorph.

4.2. Die Potentialfunktion

Die folgende Potentialfunktion wurde von Dominique Andres und Winfried Hochstättler in [3] eingeführt. Sei G ein zulässig partiell gefärbter Graph und $e = \{u,v\}$ eine ungefärbte Kante. Sei g_u der Färbungsgrad von u , also die Anzahl der gefärbten Kanten, die mit u inzidieren, und g_v der Färbungsgrad von v . Sei $f = |F_u \cup F_v|$ wieder die Anzahl aller Farben, mit denen zu e adjazente Kanten gefärbt sind, also die Kantenfarbzahl von e . Das *Potential* $\phi(e)$ der Kante e ist dann definiert als

$$\phi(e) := \frac{2(g_u^2 + g_v^2)}{f^2}. \quad (20)$$

Im Folgenden nehmen wir an, dass alle ungefärbten Kanten, für die ein Potentialwert berechnet wird, mindestens zu einer bereits gefärbten Kante adjazent sind. Es gelte also immer $g_u \geq 1$ oder $g_v \geq 1$. Das Potential einer Kante, die zu keiner gefärbten Kante des Graphen adjazent ist, ist gleich Null.

Potentialwert und lokale Färbung des Graphen

Der Wert $\phi(e)$ dieser Potentialfunktion gibt Auskunft über die lokale Färbung des Graphen an der Kante e . Inzidieren mit den Endknoten der Kante jeweils gleich viele Kanten, die in den gleichen Farben gefärbt sind, so hat das Potential einen Wert von 4.

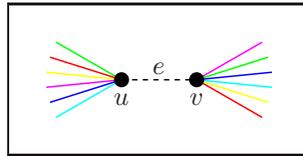


Abbildung 11: Eine Kante e mit Potentialwert $\Phi(e) = 4$

Diese Situation ist offensichtlich günstig für Alice, denn wenn die Farben in dieser Art verteilt sind, kann sie erreichen, dass nur eine möglichst geringe Anzahl von Farben zur Färbung des Graphen verwendet wird. Um zum Beispiel den K_n (n gerade) mit minimaler Farbenanzahl $\chi'(K_n) = n - 1$ zu färben, muss im vollständig gefärbten Graphen für jede Kante $e \in K_n$ $\Phi(e) = 4$ gelten³⁴. An beiden Endknoten inzidieren jeweils $n - 2$ mit den gleichen Farben gefärbte Kanten und die noch unbenutzte $(n - 1)$ -te Farbe verbleibt zur Färbung der von uns betrachteten Kante. Auch wenn Alice nur alle Kanten einer maximalen unabhängigen Kantenmenge in der gleichen Farbe färbt, so inzidieren an beiden Endknoten aller nicht zu dieser Menge gehöriger Kanten jeweils Kanten, die in dieser Farbe gefärbt sind, wodurch sich die Potentialwerte dieser Kanten erhöhen³⁵.

Sind hingegen jeweils gleich viele der Kanten, die mit den Endknoten von e inzidieren, in verschiedenen Farben gefärbt, so gilt $d_u = d_v = \frac{1}{2}f$ und die Kante hat einen Potentialwert von $\frac{2((\frac{f}{2})^2 + (\frac{f}{2})^2)}{f^2} = 1$. Diesen Fall wird Bob zu erreichen suchen. Denn dadurch, dass er möglichst viele verschiedene Farben an den zu den beiden Endknoten inzidenten Kanten verbraucht, kann Bob eine Gewinnsituation für sich herbeiführen bzw. verhindern, dass es Alice gelingt, maximale unabhängige Kantenmengen in der gleichen Farbe zu färben, und dadurch die Anzahl der zum Färben des Graphen notwendigen Farben erhöhen.

Gelingt es Bob, alle im Kantenfärbungsspiel verfügbaren Farben zur Färbung der zu einer Kante e benachbarten Kanten zu benutzen, so erzeugt er eine *kritische Kante* e , die nicht mehr mit den vorhandenen Farben gefärbt werden kann, und er gewinnt das Spiel (siehe Abbildung 12).

Im Fall, dass nur mit einem der Endknoten von e Kanten inzidieren, die bereits gefärbt sind, hat das Potential der Kante e den Wert 2.

³⁴Da wir die Potentialfunktion nur für ungefärbte Kanten definiert haben, betrachte man die jeweilige Kante als nicht gefärbt.

³⁵Zur Änderung der Potentialwerte durch das Färben adjazenter Kanten siehe Abschnitt 6.2.

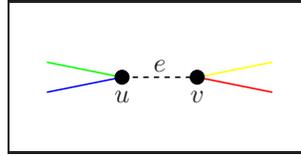


Abbildung 12: Eine kritische Kante e im K_4 beim Färbungsspiel mit 4 Farben³⁶. Die Kante hat den Potentialwert $\Phi(e) = 1$

4.3. Potentialstrategien

Diese Überlegungen zeigen, dass Alice im Kantenfärbungsspiel probieren wird, in ihrem Zug Kanten so zu färben, dass das Potential der noch ungefärbten Kanten möglichst groß ist, im besten Fall gleich 4. Bob dagegen wird versuchen, einen möglichst geringen Potentialwert zu erreichen. Wir definieren die folgenden Strategien:

Potentialminimierungsstrategie

Als *Potentialminimierungsstrategie* wollen wir die Strategie bezeichnen, bei der der Spieler, wenn er am Zug ist, derart eine ungefärbte Kante \tilde{e} färbt, dass das mittlere Potential aller nach dem Zug noch ungefärbten Kanten minimiert wird.

Sei G ein Graph mit partieller Kantenfärbung f_{E_p} ³⁷. Bezeichne $\bar{\Phi}(G, f_{E_p})$ den Mittelwert der Potentiale aller ungefärbten Kanten von G , die zu mindestens einer der Kanten von E_p benachbart sind. Dies sind die Kanten der Menge $E' := \{\{u.v\} \mid \{u.v\} \in E(G) \setminus E_p \text{ und } (g_u \geq 1 \vee g_v \geq 1)\}$ und damit folgt

$$\bar{\Phi}(G, f_{E_p}) := \frac{\sum_{e \in E'} \phi(e)}{|E'|}.$$

Benutzt der Spieler im Kantenfärbungsspiel auf G mit der Farbmenge F die Potentialminimierungsstrategie, so erweitert er die partielle Färbung f_{E_p} in seinem Zug durch die Färbung einer weiteren Kante \tilde{e} so zu einer (partiellen) Kantenfärbung $f_{E_p \cup \{\tilde{e}\}}$, dass gilt:

$$\bar{\Phi}(G, f_{E_p \cup \{\tilde{e}\}}) = \min\{\bar{\Phi}(G, f_{E_p \cup \{e\}}) \mid e \in E(G) \setminus E_p\}. \quad (21)$$

Potentialmaximierungsstrategie

Ebenso definieren wir die *Potentialmaximierungsstrategie* als die Strategie, bei der der Spieler, wenn er am Zug ist, diejenige Kante färbt, durch deren Färbung das mittlere Potential der ungefärbten Kanten maximiert wird.

Sei wiederum G ein Graph mit partieller Kantenfärbung f_{E_p} und $\bar{\Phi}(G, f_{E_p})$ der Mittelwert der Potentiale aller Kanten der Menge $E' = \{\{u.v\} \mid \{u.v\} \in E(G) \setminus E_p \text{ und } (g_u \geq 1$

³⁶Vgl. Abbildung 5 auf Seite 23.

³⁷ E_p ist die Menge der Kanten, denen durch die partielle Färbung eine Farbe zugewiesen wird.

$\vee g_v \geq 1)$. Beim Spiel gemäß der Potentialmaximierungsstrategie färbt der Spieler in seinem Zug eine Kante \tilde{e} , so dass für die erweiterte partielle Kantenfärbung $F_{E_p \cup \{\tilde{e}\}}$ gilt:

$$\bar{\Phi}(G, f_{E_p \cup \{\tilde{e}\}}) = \max\{\bar{\Phi}(G, f_{E_p \cup \{e\}}) \mid e \in E(G) \setminus E_p\} \quad (22)$$

Benutzt ein Spieler einer dieser gerade definierten Potentialstrategien, um bei seinem Zug zu entscheiden, welche Kante er in welcher Farbe färbt, so ist diese Kante und Farbe im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Es kann mehrere Kanten geben, durch deren Färbung der Mittelwert der Potentialwerte der ungefärbten Kanten einen Extremalwert erreicht, oder dies kann durch die Färbung derselben Kante in unterschiedlichen Farben erreicht werden. Dies erläutert das folgende Beispiel:

Beispiel 4.2 Betrachten wir den Graphen in Abbildung 13. Bob benutzt im Kantenfärbungsspiel auf dem K_6 mit 6 Farben die Potentialminimierungsstrategie. Er ist am Zug und färbt die Kante $\{4, 5\}$ in der Farbe *blau*. Dies ergibt einen für diese Situation minimalen mittleren Potentialwert. Der gleiche Potentialwert würde jedoch auch erreicht, wählte Bob eine der Kante $\{1, 5\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 5\}$, $\{1, 6\}$, $\{2, 6\}$, $\{3, 6\}$ oder $\{4, 6\}$ und färbte diese in einer der drei weiteren noch nicht verwendeten Farben.

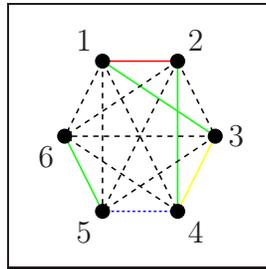


Abbildung 13: Mehrdeutigkeiten beim Spiel mit Potentialstrategien. Wie in in diesem Beispiel ist die Kante, die das mittlere Potential minimiert oder maximiert, meistens nicht eindeutig bestimmt.

In obigem Beispiel sieht man leicht, dass die Wahl der Kante und der benutzten Farbe keinen wesentlichen Unterschied für die Färbung des Graphen macht. Alle entstehenden Graphen mit ihren partiellen Färbungen sind isomorph. Ist das immer der Fall? Oder gibt es Situationen, in denen die Wahl verschiedener Kanten und Farben zu wesentlich verschieden gefärbten Graphen führt, die nicht mehr durch einen Isomorphismus aufeinander abgebildet werden können? Diese Fragen werden durch die Untersuchungen in Abschnitt 5.2 auf Seite 40 beantwortet.

5. Die Färbung vollständiger Graphen mit Potentialstrategien

5.1. Experimentelle Ergebnisse

Im Folgenden wollen wir untersuchen, wie sich die Potentialstrategien beim Kantenfärbungsspiel auf den vollständigen Graphen in der Praxis bewähren. Wie viele Farben benötigt Alice, um mit der Maximierungsstrategie zu gewinnen? Bei welcher Anzahl von Farben gelingt es Bob noch, eine kritische Kante zu erzeugen?

Hierzu haben wir Computerspieler für Alice und Bob programmiert, die das Kantenfärbungsspiel auf dem vollständigen Graphen K_n mit verschiedenen großen Farbmengen spielen. Alice verwendet die Potentialmaximierungsstrategie und Bob verwendet die Potentialminimierungsstrategie.

Wie wir in Abschnitt 4.3 gesehen haben, sind die Kanten, deren Färbung das mittlere Potential maximieren bzw. minimieren, nicht eindeutig bestimmt. Wir müssen also zusätzliche Angaben machen, um genau zu definieren, welche Kante und Farbe durch die Strategie gewählt wird, falls mehrere Kanten zur Auswahl stehen, deren Färbung den gleichen mittleren Potentialwert liefern.

Die Computerspieler benutzen jeweils zwei Varianten der Potentialstrategien, die beide auf dem gleichen Berechnungsschema basieren. In der ersten Version wählt der Spieler, der am Zug ist, die zu färbende Kante und die zu verwendende Farbe auf folgende Weise: In einer Schleife werden zuerst alle Kanten jeweils in der gleichen Reihenfolge durchlaufen. Ist eine Kante noch nicht gefärbt, so startet eine weitere Schleife die alle vorhandenen Farben durchläuft. Für jede Farbe, in der eine Kante noch zulässig gefärbt werden kann, wird das mittlere Potential der ungefärbten Kanten des Graphen mit dieser Färbung berechnet, und mit dem bisherigen Minimum bzw. Maximum des mittleren Potentialwertes verglichen. Ist dieser Wert echt kleiner bzw. echt größer als der bisherige Extremwert, so werden die jeweilige Kante und die verwendete Farbe in einer Variablen gespeichert, die Färbung dieser Kante rückgängig gemacht und der Schleifendurchlauf fortgeführt. Sind alle Schleifen beendet und damit alle Kanten mit allen möglichen Färbungen betrachtet worden, ist diejenige Kante und Farbe, die eine der Maximierungs- bzw. Minimierungsstrategie entsprechend optimale Färbung erzeugt in der Variablen gespeichert und der Spieler kann den entsprechenden Zug ausführen. Bei dieser Version wählt der Spieler also immer die erste Kante und die erste Farbe (in der Reihenfolge des Schleifendurchlaufes), durch deren Färbung das mittlere Potential der ungefärbten Kanten sein Maximum bzw. Minimum erreicht. Da beim Vergleich geprüft wird, ob der nach der Färbung einer Kante entstehende mittlere Potentialwert der ungefärbten Kanten echt größer bzw. echt kleiner als der gespeicherte Extremwert ist, werden Kantenfärbungen, durch die der Wert nicht verbessert wird, nicht berücksichtigt. Diese Potentialstrategien bezeichnen wir mit ' $<$ ' bzw. ' $>$ '.

Benutzt man zum Vergleich hingegen die Relationen ' \geq ' bzw. ' \leq ', so wird, falls die Färbung verschiedener Kanten zum gleichen extremalen mittleren Potentialwert führt, immer die letzte Kante und die letztmögliche Farbe gewählt, durch deren Färbung dieser

maximale bzw. minimale mittlere Potentialwert entsteht. Die so definierten Potentialstrategien bezeichnen wir entsprechend mit ' \geq ' bzw. ' \leq '.

In der Tabelle in Abbildung 2 ist für das Kantenfärbungsspiel auf dem K_n , $3 \leq n \leq 20$, jeweils die größte Farbenanzahl angegeben, bei der Bob das Spiel noch gewinnt, wenn Alice und Bob die angegebenen Potentialstrategien verwenden. Der Eintrag 5 in Zeile ' K_6 ' und Spalte ' $Bob <, Alice \geq$ ' bedeutet also, dass Bob das Kantenfärbungsspiel auf dem K_6 gewinnt, falls er die Potentialminimierungsstrategie '<' gegen Alices Potentialmaximierungsstrategie ' \geq ' benutzt und 5 Farben zur Verfügung stehen. Mit 6 Farben hingegen würde bei Verwendung der gleichen Strategien Alice gewinnen.

K_n	Bob '<' Alice '>'	Bob ' \leq ' Alice '>'	Bob '<' Alice ' \geq '	Bob ' \leq ' Alice ' \geq '
K_3	2	2	2	2
K_4	4	4	4	4
K_5	5	5	5	5
K_6	5	6	5	5
K_7	7	7	7	7
K_8	10	8	8	9
K_9	9	11	11	11
K_{10}	12	11	10 Bob 11 Alice 12 Bob	10
K_{11}	12	13	13	12
K_{12}	14	13 Bob 14 Alice 15 Bob	15	13
K_{13}	15	15	16	15
K_{14}	16	17	17	16
K_{15}	18	17	18	18
K_{16}	20	20	18	20
K_{17}	21	19	21	22
K_{18}	21	21	21	21
K_{19}	23	23	22 Bob 23 Alice 24 Bob	23
K_{20}	23	24	24	24

Tabelle 2: Spiele mit Potentialstrategien

Anhand dieser Ergebnisse lassen sich mehrere interessante Beobachtungen machen. Als erstes sieht man, dass die Anzahl Farben, die Alice mindestens benötigt, um das Kantenfärbungsspiel auf dem K_n mit der Potentialstrategie zu gewinnen, immer größer als der chromatische Index des entsprechenden Graphen ist.

5.2. Relevanz der Kantenwahl

Die maximale Anzahl der Farben, bei deren Verwendung Bob das Spiel noch gewinnen kann, ist auch beim Spiel auf dem gleichen Graphen unterschiedlich, je nachdem welche Potentialstrategien Alice und Bob verwenden. Dies bedeutet, dass in Situationen, in denen das gleiche maximale bzw. minimale mittlere Potential durch die Färbung verschiedener Kanten erreicht werden kann, die Wahl der Kante einen Einfluß auf das Ergebnis hat. Die entstehenden Graphen mit ihren (partiellen) Färbungen sind nicht immer isomorph wie im Beispiel aus Abbildung 13, sondern die Wahl verschiedener Kanten kann auch zu wesentlich verschiedenen Färbungen und unterschiedlichem Spielausgang führen. Betrachten wir hierzu den Graphen K_6 in der folgenden Situation in Abbildung 14:

Beispiel 5.1 Alice und Bob spielen das Kantenfärbungsspiel auf dem K_6 mit 6 Farben. Bis einschließlich des 9. Zuges führen alle in Tabelle 2 betrachteten Strategiekombinationen zu isomorphen Kantenfärbungen. Die Situation nach dem 9. Zug ist in Abbildung 14(a) dargestellt, in der Bob am Zug ist. Er kann in seinem Zug eine der Kanten $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{1, 6\}$ oder $\{2, 3\}$ in der neuen Farbe *gelb* färben. Er erreicht damit jeweils einen minimalen mittleren Potentialwert von $\bar{\Phi} = \frac{43}{20}$. Zwei dieser Möglichkeiten werden wir weiterverfolgen:

1. Bob färbt die Kante $\{1, 6\}$:

Dies ist der Fall, wenn Bob die Potentialminimierungsstrategie ‘ \leq ’ benutzt³⁸. Dann wählt er die Kante $\{1, 6\}$ und färbt diese *gelb*. Der daraus folgende Spielstand ist in Abbildung 14(b) dargestellt. Alice hat jetzt zwei Kanten zur Auswahl, durch deren Färbung der mittlere Potentialwert maximiert wird. Entweder sie färbt die Kante $\{2, 3\}$ in *blau* oder sie färbt die Kante $\{1, 5\}$ in *türkis*. Es ergeben sich die Spielstände in Abbildung 14(d) bzw. 14(e). In beiden Graphen entsteht durch Alices Zug jeweils eine kritische Kante, die Kante $\{3, 6\}$ in Abbildung 14(d) bzw. die Kante $\{1, 4\}$ in Abbildung 14(e), und Alice verliert das Spiel³⁹.

2. Bob färbt die Kante $\{1, 5\}$:

Diese Kante wählt Bob, wenn er die Potentialminimierungsstrategie ‘ $<$ ’ verwendet. Der dadurch entstehende Spielstand ist in Abbildung 14(c) abgebildet. Alice bleibt nur eine Kante zur Auswahl, falls sie eine der Potentialmaximierungsstrategien verwendet. Sie färbt dann die Kante $\{1, 6\}$ in *magenta* und wie man leicht sieht kann Bob nicht mehr verhindern, dass Alice das Spiel gewinnt.

Obwohl also durch beide Züge von Bob der gleiche minimale mittlere Potentialwert

³⁸Die Kanten und Farben müssen hierbei natürlich in der gleichen Reihenfolge wie in den Schleifendurchläufen des Programmquelltextes durchlaufen werden.

³⁹Alice verliert das Spiel in jedem Fall, auch wenn sie eine Kante färbt, durch deren Färbung das mittlere Potential nicht maximiert wird. Es gibt in beiden Graphen jeweils 2 Kanten, durch deren Färbung eine kritische Kante entsteht, das heißt selbst wenn Alice selbst keine kritische Kante erzeugt, kann sie nicht verhindern, dass Bob dies in seinem nächsten Zug tun wird.

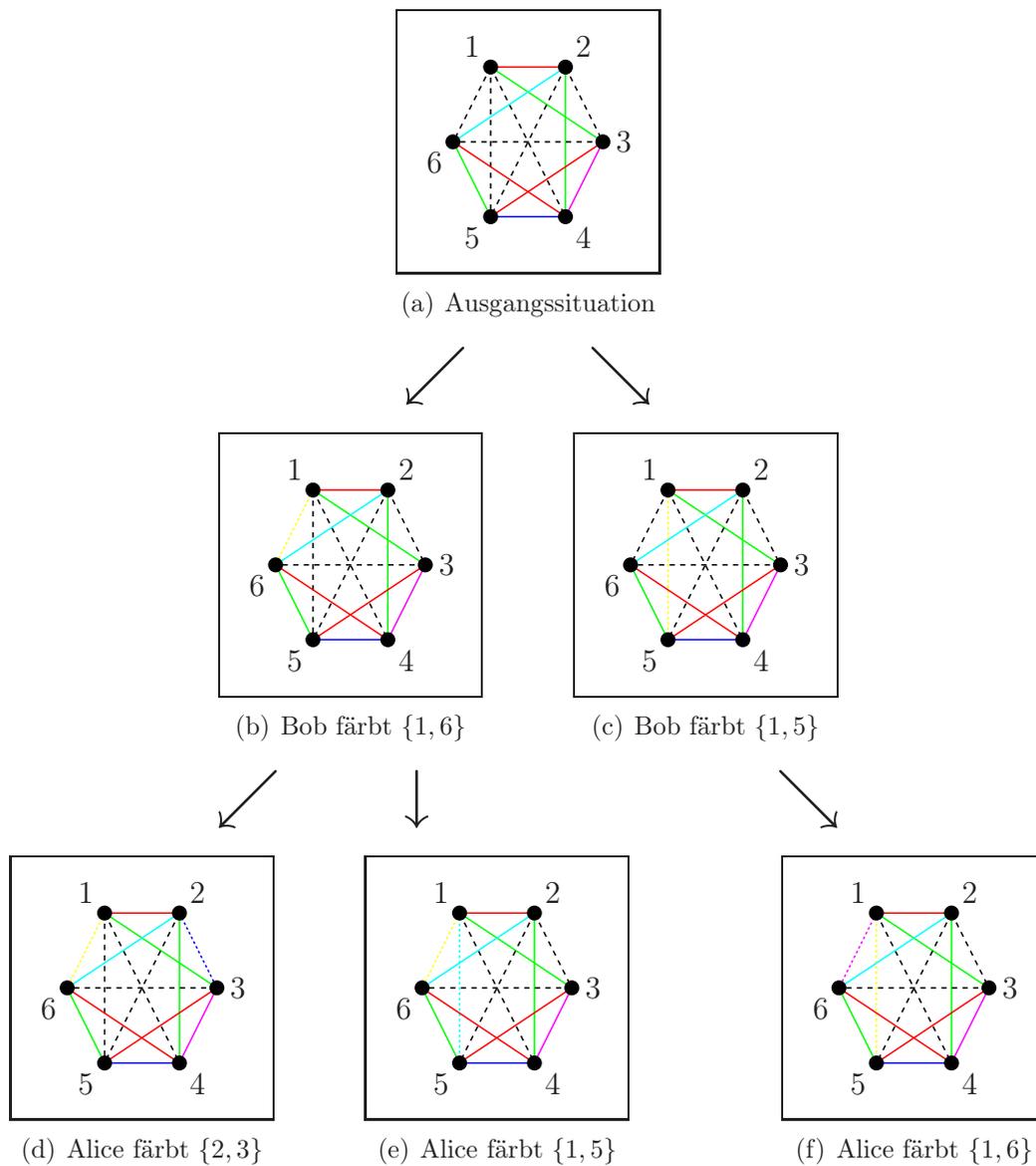


Abbildung 14: Färbung des K_6 mit Potentialstrategien: Obwohl durch die beiden Züge (b) und (c) von Bob der gleiche minimale mittlere Potentialwert erreicht wird, führen sie zu unterschiedlichen Ausgängen des Spiels. Im Fall (b) gewinnt Bob, im Fall (c) hingegen gewinnt Alice.

entsteht, führen sie zu einem gegensätzlichen Ausgang des Spiels. Wir müssen also zusätzliche Kriterien bei der Zugauswahl berücksichtigen, um sicherzustellen, dass bei mehreren möglichen Zügen, die durch die Potentialstrategie gegeben sind, die jeweils „beste“ Zugmöglichkeit für den Spieler gewählt wird.

5.3. Schöne Spiele

Xuding Zhu stellt in [44] folgende Frage⁴⁰:

Angenommen die spielchromatische Zahl eines Graphen G ist $\chi_g(G) = k$. Ist es wahr, dass Alice für jedes $k' > k$ eine Gewinnstrategie für das Knotenfärbungsspiel auf G mit der Farbmenge F besitzt, wenn diese Farbmenge die Mächtigkeit k' hat?

Die gleiche Frage lässt sich natürlich auch für den spielchromatischen Index und das Kantenfärbungsspiel auf einem Graphen G stellen:

Angenommen es gilt $\chi'_g(G) = k$. Hat Alice dann auch für jedes $k' > k$ eine Gewinnstrategie für das Kantenfärbungsspiel auf G mit der Farbmenge $\{1, \dots, k'\}$?

Man würde annehmen, dass die Antwort ‘ja’ lautet, denn Alice scheint einen Vorteil zu haben, wenn mehr Farben zur Färbung verfügbar sind. Dennoch ist dem Autor dieser Arbeit keine Lösung dieses Problems bekannt. Um diese Frage zu beantworten, müsste man nicht nur den spielchromatischen Index des Graphen G bestimmen, sondern zusätzlich noch zeigen, dass Alice auch für alle Zahlen $\chi'_g(G) < k < 2\Delta(G) - 1$ eine Gewinnstrategie für das Kantenfärbungsspiel auf dem Graphen G mit der Farbmenge $\{1, \dots, k\}$ besitzt.

Das Problem ist offenbar folgendes: Angenommen Alice hat eine Gewinnstrategie für das Kantenfärbungsspiel auf dem Graphen G mit der Farbmenge F . Spielen Alice und Bob das gleiche Spiel jetzt mit der Farbmenge $F \cup \{a\}$, so ändert sich nichts, solange Bob nur Farben der ursprünglichen Farbmenge F benutzt. Alice kann immer den Zug ausführen, der ihr durch ihre alte Gewinnstrategie vorgegeben wird. Wenn Bob erstmals eine Kante e in der Farbe a färbt, so hätte er hierfür auch eine andere Farbe $b \in F$ benutzen können. Denn da bisher nur Farben der alten Farbmenge F verwendet wurden, und Alice eine Gewinnstrategie für diese Farbmenge besitzt und verwendet, muss noch jede Kante des Graphen mit Farben dieser Menge zulässig färbbar sein. Alice kann also zunächst annehmen, Bob habe diese Kante in der Farbe b gefärbt und mit dem entsprechenden Zug ihrer Gewinnstrategie antworten. Was aber passiert, wenn Bob daraufhin eine zu e adjazente Kante in b färbt? Dann ist der Graph in Alices Vorstellung unzulässig gefärbt (zwei adjazente Kanten sind in der gleichen Farbe gefärbt), so dass sie ihre Gewinnstrategie nicht mehr anwenden kann. Dies schließt natürlich nicht aus, dass

⁴⁰„Suppose $\chi_g(G) = k$. Is it true that for any $k' > k$, if the color set has cardinality k' , then Alice has a winning strategy for the coloring game played on G ?“

Alice eine andere Gewinnstrategie für dieses Kantenfärbungsspiel mit der Farbmenge $F \cup \{a\}$ besitzt.

Graphenfärbungsspiele, für die die obige Frage mit ‘ja’ beantwortet werden kann, werden *schöne Spiele*⁴¹ genannt. Ist unser Kantenfärbungsspiel ein solches schönes Spiel?

Betrachten wir erneut Tabelle 2. Die Spielergebnisse zeigen, dass es für einige Kombinationen der Potentialstrategien Zahlen k gibt, so dass Alice das Kantenfärbungsspiel mit einer Farbmenge der Mächtigkeit k gewinnt, es jedoch mit einer Farbmenge der Mächtigkeit $k' > k$ wieder verliert, wenn die Spieler jeweils die gleiche Strategie beim Spiel auf dem Graphen benutzen. Verwendet zum Beispiel Alice die Potentialmaximierungsstrategie ‘ \geq ’ und Bob die Potentialminimierungsstrategie ‘ $<$ ’ beim Kantenfärbungsspiel auf dem K_{10} , so gilt: Alice gewinnt beim Spiel mit 11 Farben, aber Bob gewinnt wieder beim Spiel mit 12 Farben.

Bei den hier benutzten Strategien handelt es sich zwar nicht um Gewinnstrategien, trotzdem zeigen diese Beobachtungen nochmals, dass die obige Frage keineswegs trivial ist und Graphenfärbungsspiele unerwartete Eigenschaften haben können.

⁴¹Vgl. auch [1].

6. Das Verhalten der Potentialfunktion bei lokalen Änderungen im Graphen

In diesem Kapitel wollen wir das lokale Verhalten der Potentialfunktion näher untersuchen. Wie ändert sich das Potential einer Kante \tilde{e} im Graphenfärbungsspiel, wenn im Verlauf des Spiels weitere Kanten gefärbt werden? Man beachte, dass sich das Potential einer Kante \tilde{e} durch die Färbung einer anderen Kante e nur dann ändert, wenn \tilde{e} und e einen gemeinsamen Endknoten haben.

6.1. Potentialänderung nach Zugpaaren

Sei eine Kante \tilde{e} eines Graphen gegeben. Wir betrachten anhand von Paaren von Zügen von Alice und Bob, wie sich das Potential $\phi(\tilde{e})$ der Kante \tilde{e} durch die Erweiterung der Färbung des Graphen ändert. Hierzu berechnen wir den Potentialwert $\phi_{alt}(\tilde{e})$ vor der Färbung weiterer Kanten und den Potentialwert $\phi_{neu}(\tilde{e})$ nach der Färbung weiterer Kanten und berechnen daraus dann die Potentialdifferenz $\phi_{alt}(\tilde{e}) - \phi_{neu}(\tilde{e})$ an der Kante \tilde{e} . Die verschiedenen Fälle, die vorkommen können, sind in Abhängigkeit von der Anzahl Farben, die neu in die Kantenfarbmengung $F_k(\tilde{e})$ der Kante \tilde{e} hinzukommen, geordnet. Folgende Situationen können auftreten:

1. Die Anzahl der Farben erhöht sich nicht.
 - a) Es kommt keine zur Kante \tilde{e} adjazente neu gefärbte Kante hinzu. Das Potential ändert sich folglich nicht, es gilt $\phi_{alt}(\tilde{e}) = \phi_{neu}(\tilde{e})$.
 - b) Eine zu der Kante \tilde{e} adjazente neu gefärbte Kante kommt hinzu. O.b.d.A. nehmen wir an sie inzidiert mit dem Knoten u und es erhöht sich folglich der Färbungsgrad g_u . Dann erhöht sich das Potential:

$$\begin{aligned}\phi_{alt}(\tilde{e}) - \phi_{neu}(\tilde{e}) &= \frac{2(g_u + 1)^2 + 2g_w^2}{f^2} - \frac{2g_u^2 + 2g_w^2}{f^2} \\ &= \frac{4g_u + 2}{f^2}.\end{aligned}$$

- c) Zwei zur Kante \tilde{e} adjazente neu gefärbte Kanten kommen hinzu.
 - i. Die neu gefärbten Kanten inzidieren mit dem gleichen Knoten. Wir nehmen an dies ist der Knoten u und g_u erhöht sich also um 2. Die Potentialdifferenz beträgt dann:

$$\begin{aligned}\phi_{alt}(\tilde{e}) - \phi_{neu}(\tilde{e}) &= \frac{2(g_u + 2)^2 + 2g_w^2}{f^2} - \frac{2g_u^2 + 2g_w^2}{f^2} \\ &= \frac{8g_u + 8}{f^2}.\end{aligned}$$

- ii. Die neu gefärbten Kanten inzidieren mit verschiedenen Knoten. Es erhöhen sich also für beide Knoten die Färbungsgrade g_u und g_v jeweils um 1. Dies ergibt eine Potentialdifferenz von:

$$\begin{aligned}\phi_{alt}(\tilde{e}) - \phi_{neu}(\tilde{e}) &= \frac{2(g_u + 1)^2 + 2(g_w + 1)^2}{f^2} - \frac{2g_u^2 + 2g_w^2}{f^2} \\ &= \frac{4g_u + 4g_w + 4}{f^2}.\end{aligned}$$

2. Die Anzahl der Farben in der Kantenfarbmenge erhöht sich um 1.

- a) Eine zu der Kante \tilde{e} adjazente neu gefärbte Kante kommt hinzu. O.B.d.A. nehmen wir an, dass diese Kante mit dem Knoten u inzidiert. Es erhöht sich also g_u . Dies ergibt:

$$\begin{aligned}\phi_{alt}(\tilde{e}) - \phi_{neu}(\tilde{e}) &= \frac{2(g_u + 1)^2 + 2g_w^2}{(f + 1)^2} - \frac{2g_u^2 + 2g_w^2}{f^2} \\ &= \frac{f^2(4g_u + 2) - (2g_u^2 + 2g_w^2)(2f + 1)}{(f + 1)^2 f^2} \\ &= \frac{4g_u + 2}{(f + 1)^2} - \phi_{alt}(\tilde{e}) \frac{2f + 1}{(f + 1)^2} \\ &= \frac{1}{(f + 1)^2} (4g_u + 2 - \phi_{alt}(\tilde{e}) (2f + 1)).\end{aligned}$$

- b) Zwei zu \tilde{e} adjazente neu gefärbte Kanten kommen hinzu.

- i. Die neu gefärbten Kanten inzidieren mit dem gleichen Knoten. Dies sei wieder der Knoten u und g_u erhöhe sich folglich um 2:

$$\begin{aligned}\phi_{alt}(\tilde{e}) - \phi_{neu}(\tilde{e}) &= \frac{2(g_u + 2)^2 + 2g_w^2}{(f + 1)^2} - \frac{2g_u^2 + 2g_w^2}{f^2} \\ &= \frac{f^2(8g_u + 8) - (2g_u^2 + 2g_w^2)(2f + 1)}{(f + 1)^2 f^2} \\ &= \frac{8g_u + 8}{(f + 1)^2} - \phi_{alt}(\tilde{e}) \frac{2f + 1}{(f + 1)^2} \\ &= \frac{1}{(f + 1)^2} (8g_u + 8 - \phi_{alt}(\tilde{e}) (2f + 1)).\end{aligned}$$

- ii. Die neu gefärbten Kanten inzidieren mit verschiedenen Knoten. Es erhöhen sich also die Färbungsgrade g_u und g_w beider Knoten jeweils um 1.

$$\begin{aligned}
\phi_{alt}(\tilde{e}) - \phi_{neu}(\tilde{e}) &= \frac{2(g_u + 1)^2 + 2(g_w + 1)^2}{(f + 1)^2} - \frac{2g_u^2 + 2g_w^2}{f^2} \\
&= \frac{f^2(4g_u + 4g_w + 4) - (2g_u^2 + 2g_w^2)(2f + 1)}{(f + 1)^2 f^2} \\
&= \frac{4g_u + 4g_w + 4}{(f + 1)^2} - \phi_{alt}(\tilde{e}) \frac{2f + 1}{(f + 1)^2} \\
&= \frac{1}{(f + 1)^2} (4g_u + 4g_w + 4 - \phi_{alt}(\tilde{e}) (2f + 1)).
\end{aligned}$$

3. Die Farbenanzahl erhöht sich um 2.

Es müssen also durch Alices und Bobs Zug zwei zu der Kante \tilde{e} adjazente Kanten gefärbt worden sein.

- a) Im Fall, dass die neu gefärbten Kanten mit dem gleichen Knoten inzidieren, nehmen wir wieder an, dass dies der Knoten u ist. Der Färbungsgrad g_u erhöht sich also um 2.

$$\begin{aligned}
\phi_{alt}(\tilde{e}) - \phi_{neu}(\tilde{e}) &= \frac{2(g_u + 2)^2 + 2g_w^2}{(f + 2)^2} - \frac{2g_u^2 + 2g_w^2}{f^2} \\
&= \frac{f^2(8g_u + 8) - (2g_u^2 + 2g_w^2)(4f + 4)}{(f + 2)^2 f^2} \\
&= \frac{8g_u + 8}{(f + 2)^2} - \phi_{alt}(\tilde{e}) \frac{4f + 4}{(f + 2)^2} \\
&= \frac{1}{(f + 2)^2} (8g_u + 8 - \phi_{alt}(\tilde{e}) (4f + 4)).
\end{aligned}$$

- b) Die neu gefärbten Kanten inzidieren mit verschiedenen Knoten. Dann erhöhen sich g_u und g_w jeweils um 1. Die Potentialdifferenz beträgt dann:

$$\begin{aligned}
\phi_{alt}(\tilde{e}) - \phi_{neu}(\tilde{e}) &= \frac{2(g_u + 1)^2 + 2(g_w + 1)^2}{(f + 2)^2} - \frac{2g_u^2 + 2g_w^2}{f^2} \\
&= \frac{f^2(4g_u + 4g_w + 4) - (2g_u^2 + 2g_w^2)(4f + 4)}{(f + 1)^2 f^2} \\
&= \frac{4g_u + 4g_w + 4}{(f + 2)^2} - \phi_{alt}(\tilde{e}) \frac{4f + 4}{(f + 2)^2} \\
&= \frac{1}{(f + 2)^2} (4g_u + 4g_w + 4 - \phi_{alt}(\tilde{e}) (4f + 4)).
\end{aligned}$$

6.2. Abschätzung der Potentialänderungen

Welche Zahlenwerte ergeben die im letzten Abschnitt berechneten Potentialdifferenzen? Um welchen Betrag erhöht bzw. erniedrigt sich das Potential der Kante $\tilde{e} = \{u, v\}$, wenn weitere benachbarte Kanten gefärbt werden?

Folgerungen aus dem Potentialwert ϕ_{alt}

Diese Veränderungen hängen auch davon ab, welchen Wert das Potential der Kante vor der Färbung weiterer Kanten besaß. Wir nehmen an, dass zumindest eine der benachbarten Kanten von e schon gefärbt ist, so dass immer $\phi_{alt}(\tilde{e}) > 0$ gilt.

Satz 6.1 Sei also $\tilde{e} = \{u, v\}$ eine ungefärbte Kante mit $\phi_{alt}(\tilde{e}) > 0$. In Abhängigkeit von diesem vorherigen Potentialwert ϕ_{alt} gelten für die Knotenfärbungsgrade g_u und g_v sowie für die Kantenfarbzahl f folgende Bedingungen:

$\phi_{alt} < 2$: Aus $\phi_{alt} < 2$ folgt: $0 < g_u, g_v \leq f - 1$ und $f \geq 2$.

$\phi_{alt} = 2$: Es sind drei Fälle möglich:

1. $g_u = f \wedge g_v = 0$.
2. $g_u = 0 \wedge g_v = f$.
3. g_u, g_v und f bilden ein pythagoreisches Tripel. Dann gilt:
 $((g_u \leq (f - 1) \wedge g_v \leq (f - 2)) \vee (g_u \leq (f - 2) \wedge g_v \leq (f - 1)))$ und $f \geq 5$.

$\phi_{alt} > 2$: Laut Definition des Potentials muss gelten $0 < g_u, g_v \leq f$ und $f \geq 1$.

Beweis:

Zu $\phi_{alt} < 2$: Im Fall $\phi_{alt}(\tilde{e}) < 2$ gilt

$$\frac{2g_u^2 + 2g_v^2}{f^2} < 2 \iff g_u^2 + g_v^2 < f^2.$$

Daraus folgt direkt $g_u, g_v \leq f - 1$ und es muss also f mindestens gleich 2 sein, da laut Annahme das Potential immer größer als Null ist, also mindestens eine zu \tilde{e} adjazente Kante gefärbt ist.

Zu $\phi_{alt} = 2$: Aus $\phi_{alt}(\tilde{e}) = 2$ folgt

$$\frac{2g_u^2 + 2g_v^2}{f^2} = 2 \iff g_u^2 + g_v^2 = f^2.$$

In allen drei Fällen erfüllen die Zahlen g_u, g_v und f offensichtlich diese Gleichung. Die Bedingungen im 3. Fall ergeben sich wie folgt: Bilden die drei Zahlen ein pythagoreisches Tripel, so nehmen wir an, dies sei ein primitives Tripel, das heißt, g_u, g_v und f haben keinen gemeinsamen Teiler. Aus $g_u^2 + g_v^2 = f^2$ folgt außerdem, dass jeder gemeinsame Teiler von g_u und g_v auch ein Teiler von f ist. Ebenso muss wegen $g_u^2 = f^2 - g_v^2$ und

$g_v^2 = f^2 - g_u^2$ aber auch jeder gemeinsame Teiler von f und g_v bzw. von f und g_u ein gemeinsamer Teiler aller drei Zahlen sein. Wir können also annehmen, dass je zwei der drei Zahlen teilerfremd sind. Insbesondere sind also keine zwei der drei Zahlen gerade. Wären g_u und g_v beide ungerade, so folgte

$$g_u^2 + g_v^2 = (2n + 1)^2 + (2m + 1)^2 = 4(n^2 + m^2 + n + m) + 2 = f^2$$

und f^2 ließe bei der Division durch 4 den Rest 2. Das kann nicht sein, denn das Quadrat einer geraden Zahl ist ohne Rest durch 4 teilbar, und das Quadrat einer ungeraden Zahl läßt bei der Division durch 4 den Rest 1. Es muss also eine der Zahlen g_u oder g_v gerade sein und wegen der Teilerfremdheit je zweier Zahlen muss dann wiederum f ungerade sein. Da außerdem $g_u, g_v < f$ gelten muss und da die Zahlen 3, 4 und 5 das kleinste pythagoreische Tripel bilden, also $f \geq 5$ gelten muss, folgt die Behauptung. \square

Die einzelnen Fälle

Für die verschiedenen in Abschnitt 6.1 betrachteten Fälle geben wir nun numerische Werte für den Potentialzuwachs an. Wir betrachten jeweils die Potentialdifferenz in Abhängigkeit vom vorherigen Potentialwert ϕ_{alt} für die drei Wertebereiche $0 < \phi_{alt} < 2^{42}$, $\phi_{alt} = 2$ und $\phi_{alt} > 2$. Eine Übersicht gibt die folgende Tabelle 3. Die Tabelleneinträge geben jeweils den größtmöglichen Potentialwert an, der durch die Färbung weiterer Kanten in den einzelnen Situationen entstehen kann. In den mit * markierten Fällen kann das Potential in wenigen Ausnahmefällen auch bis auf 4 ansteigen.

Fall	$0 < \phi_{alt} < 2$	$\phi_{alt} = 2$			$\phi_{alt} > 2$
		Fall 1	Fall 2	Fall 3	
1.a.	$= \phi_{alt}$	$= \phi_{alt}$	$= \phi_{alt}$	$= \phi_{alt}$	$= \phi_{alt}$
1.b.	$< \frac{7}{2}$	-	$\leq \frac{5}{2}^*$	$\leq \frac{68}{25}$	≤ 4
1.c.i.	$< \frac{34}{9}$	-	$\leq \frac{26}{9}^*$	$\leq \frac{82}{25}$	≤ 4
1.c.ii.	$\leq \frac{25}{8}^*$	-	-	$\leq \frac{82}{25}$	≤ 4
2.a.	< 2	2	< 2	< 2	$< \phi_{alt}$
2.b.i.	$< \frac{8}{3}$	-	$\leq \frac{5}{2}$	$\leq \frac{5}{2}$	< 4
2.b.ii.	$< \frac{12}{5}$	$\leq \frac{5}{2}$	$\leq \frac{5}{2}$	$\leq \frac{16}{7}$	≤ 4
3.a.	< 2	2	< 2	< 2	$< \phi_{alt}$
3.b.	< 2	< 2	< 2	< 2	$< \phi_{alt}$

Tabelle 3: Abschätzung der maximalen Potentialwerte

⁴²Hat eine Kante \tilde{e} vor der Färbung adjazenter Kanten den Potentialwert $\phi_{alt}(\tilde{e}) = 0$, so nimmt der Potentialwert $\phi_{neu}(\tilde{e})$ nach der Färbung von zu \tilde{e} benachbarten Kanten genau einen der Werte 1, 2 oder 4 an.

1. a) Das Potential ändert sich offensichtlich nicht.
- b) Da sich g_u erhöht, ohne dass eine Farbe hinzukommt, muss $g_u < f$ gelten. Damit gilt in Abhängigkeit vom vorherigen Potentialwert ϕ_{alt} :

$\phi_{alt} < 2$: Die Potentialänderung beträgt

$$\frac{4g_u + 2}{f^2} \leq \frac{4(f-1) + 2}{f^2}.$$

Die Folge $\left(\frac{4(f-1)+2}{f^2}\right)_{(f \geq 2)}$ ist monoton fallend. Daher gilt:

$$\begin{aligned} \phi_{neu} &= \phi_{alt} + \frac{4g_u + 2}{f^2} \leq \phi_{alt} + \frac{4(f-1) + 2}{f^2} \\ &\leq \phi_{alt} + \left(\frac{4(f-1) + 2}{f^2}\right)_{(f=2)} = \phi_{alt} + \frac{3}{2} \\ &< \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

$\phi_{alt} = 2$: Wegen $g_u < f$ können nur die Fälle 2) und 3) auftreten.

Im Fall 2) gilt:

$$\phi_{neu} = \phi_{alt} + \frac{2}{f^2} = \begin{cases} 4, & \text{wenn } f = 1; \\ \leq \frac{5}{2}, & \text{wenn } f \geq 2. \end{cases}$$

Im Fall 3) gilt:

$$\phi_{neu} = \phi_{alt} + \frac{4g_u + 2}{f^2} \leq 2 + \frac{18}{25} = \frac{68}{25}.$$

Beweis:

Wir bestimmen den Extremwert der Funktion

$$p: M \rightarrow \mathbb{R}, p(g_u, f) = \frac{4g_u + 2}{f^2}$$

auf der Menge $M = \{(g_u, f) \in \mathbb{R}^2 \mid (f \geq 5) \wedge (g_u \leq (f-1))\} \subset \mathbb{R}^2$. p ist auf M stetig differenzierbar mit $\text{grad } p = \left(\frac{4}{f^2}, \frac{-4(2g_u+1)}{f^3}\right)$. Da $\text{grad } p \neq 0$ auf der Menge M gilt, hat p keinen inneren Extrempunkt und nimmt seine Extremwerte folglich auf den Rändern des Definitionsbereiches an. Da die partielle Ableitung von p nach f immer negativ ist, $p(g_u, f)$ also für festes g_u mit wachsendem f immer kleiner wird, und die partielle Ableitung von p nach g_u immer positiv ist, nimmt die Funktion p ihren Maximalwert auf M an der Stelle $(4, 5)$ an. Es ist $p(4, 5) = \frac{18}{25}$. \square

$\phi_{alt} > 2$: Das Potential kann sich bis auf $\phi_{neu} = 4$ erhöhen. Dies ist immer dann der Fall, wenn vor der Färbung $g_u = f - 1$ und $g_v = f$ gilt. In allen anderen Fällen gilt also vor der Färbung $0 < g_u \leq f - 2$, und für den neuen Potentialwert gilt:

$$\begin{aligned}\phi_{neu} &= \phi_{alt} + \frac{4g_u + 2}{f^2} = \frac{2(g_u^2 + g_v^2)}{f^2} + \frac{4g_u + 2}{f^2} \\ &< \frac{2((f-2)^2 + f^2)}{f^2} + \frac{4(f-2)^2 + 2}{f^2} = \frac{4f^2 - 4f + 2}{f^2} < 4.\end{aligned}$$

- c) i. g_u erhöht sich um 2, ohne dass eine Farbe hinzukommt $\implies g_u \leq f - 2$.
 $\phi_{alt} < 2$: Aus $\phi_{alt} < 2$ folgt $g_u \geq 1$ und zusammen mit $g_u \leq f - 2$ ergibt sich $f \geq 3$. Für die Potentialdifferenz gilt damit

$$\frac{8g_u + 8}{f^2} \leq \frac{8(f-2) + 8}{f^2}.$$

Als Folge betrachtet ist $\left(\frac{8(f-2)+8}{f^2}\right)_{f \geq 3}$ monoton fallend und es folgt:

$$\begin{aligned}\phi_{neu} &= \phi_{alt} + \frac{8g_u + 8}{f^2} \leq \phi_{alt} + \frac{8(f-2) + 8}{f^2} \\ &\leq \phi_{alt} + \left(\frac{8(f-2) + 8}{f^2}\right)_{f=3} = \phi_{alt} + \frac{16}{9} \\ &< \frac{34}{9}.\end{aligned}$$

$\phi_{alt} = 2$: Wegen $g_u < f$ können nur die Fälle 2) und 3) eintreten.

Im Fall 2) gilt:

$$\phi_{neu} = \phi_{alt} + \frac{8}{f^2} = \begin{cases} 4, & \text{wenn } f = 2; \\ \leq \frac{26}{9}, & \text{wenn } f \geq 3. \end{cases}$$

Im Fall 3) gilt:

$$\phi_{neu} = \phi_{alt} + \frac{8g_u + 8}{f^2} \leq 2 + \frac{32}{25} = \frac{82}{25}.$$

Beweis:

Wir berechnen wieder das Maximum der Funktion

$$p : M \rightarrow \mathbb{R}, p(g_u, f) = \frac{8g_u + 8}{f^2}$$

auf der Menge $M = \{(g_u, f) \in \mathbb{R}^2 \mid (f \geq 5) \wedge (g \leq (f - 2))\} \subset \mathbb{R}^2$.

Wegen $\text{grad } p = \left(\frac{8}{f^2}, \frac{-16(g_u+1)}{f^3}\right) \neq (0, 0)$ für alle $(g_u, f) \in M$ nimmt p seine Extremwerte wieder auf dem Rand des Definitionsbereiches M an. Anhand des Gradienten von p sehen wir, dass der Maximalwert an der Stelle $(3, 5)$ erreicht wird, und es gilt $p(3, 5) = \frac{32}{25}$. \square

$\phi_{alt} > 2$: Im Fall, dass vor dem Zug $g_u = f - 2$ und $g_v = f$ gilt, kann sich das Potential bis auf $\phi_{neu} = 4$ erhöhen. Da aus $\phi_{alt} > 2$ folgt, dass $g_u \geq 1$ ist, gilt für die Kantenfarbzahl immer $f \geq 3$.

- ii. Die Knotenfärbungsgrade g_u und g_v erhöhen sich, ohne dass eine Farbe hinzukommt. Daraus folgt $1 \leq g_u, g_v \leq f - 1$, denn mit beiden Knoten muss jeweils mindestens eine Kante inzidieren, die in einer Farbe gefärbt ist, die in der Knotenfarbmenge des anderen Knotens noch nicht vorkommt, und damit sich die Kantenfarbzahl f durch die Färbung weiterer Kanten nicht erhöht, dürfen noch nicht alle diese f Farben in den Knotenfarbmengen der beiden Knoten u und v vorkommen.

$\phi_{alt} < 2$: Das Potential kann sich bis auf $\phi_{neu} = 4$ erhöhen. Dies ist dann der Fall, wenn vor dem Zug $g_u = g_v = f - 1$ und $2 \leq f \leq 3$ gilt. Für größere Werte von f wäre der Potentialwert ϕ_{alt} größer als 2. In den übrigen Fällen, müssen also die Knotenfärbungsgrade g_u und g_v unterschiedliche Werte haben. Sei also o.B.d.A. $g_u < g_v \leq f - 1$. Dann ist $f \geq 3$ und es folgt für die Potentialdifferenz:

$$\frac{4g_u + 4g_v + 4}{f^2} \leq \frac{4(f-2) + 4(f-1) + 4}{f^2} = \frac{8(f-1)}{f^2}.$$

Für eine Kantenfarbzahl $f \geq 7$ ist dieser Potentialzuwachs ≤ 1 , das heißt in diesen Fällen ist

$$\phi_{neu} = \phi_{alt} + \frac{8(f-1)}{f^2} < 3.$$

Aber auch in den übrigen Fällen mit $3 \leq f \leq 6$ ist das neue Potential nur in einem Fall, nämlich wenn vor der Färbung $g_u = 2, g_v = 3$ und $f = 4$ gilt, mit dem Wert $\phi_{neu} = \frac{25}{8}$ größer als 3.

$\phi_{alt} = 2$: Es kann nur der Fall 3) eintreten. Für die Potentialdifferenz gilt wieder

$$\frac{4g_u + 4g_v + 4}{f^2} \leq \frac{4(f-2) + 4(f-1) + 4}{f^2} = \frac{8(f-1)}{f^2},$$

das heißt für eine Kantenfarbzahl $f \geq 7$ ist dieser Zuwachs < 1 . Es gibt aber nur ein pythagoreisches Tripel (g_u, g_v, f) , nämlich $(3, 4, 5)$ für das $f < 7$ ist. In diesem Fall gilt $\phi_{neu} = \phi_{alt} + \frac{32}{25} = \frac{82}{25}$. Ansonsten gilt: $\phi_{neu} \leq \phi_{alt} + \frac{8(f-1)}{f^2} < 3$.

$\phi_{alt} > 2$: Das Potential kann sich bis auf $\phi_{neu} = 4$ erhöhen. Dies ist dann der Fall, wenn vor dem Zug $g_u = g_v = f - 1$ und $f \geq 4$ gilt. In allen anderen Fällen muss für die Kantenfarbzahl $f > 5$ gelten, da sonst das Potential nicht größer als 2 sein kann.

2. a) $\phi_{alt} < 2$: Der Potentialzuwachs kann sowohl positiv als auch negativ sein:

$$\begin{aligned} 4g_u + 2 - \phi_{alt}(2f + 1) &\leq 4(f - 1) + 2 - \phi_{alt}(2f + 1) \\ &= (2 - \phi_{alt})2f - (2 + \phi_{alt}). \end{aligned}$$

Für den neuen Potentialwert ϕ_{neu} gilt aber:

$$\begin{aligned} \phi_{neu} &= \phi_{alt} + \frac{1}{(f + 1)^2}(4g_u + 2 - \phi_{alt}(2f + 1)) \\ &\leq \phi_{alt} + \frac{1}{(f + 1)^2}((2 - \phi_{alt})2f - (2 + \phi_{alt})) \\ &< \phi_{alt} + \frac{1}{(f + 1)^2}((2 - \phi_{alt})2f) \\ &< \phi_{alt} + \frac{2}{3}(2 - \phi_{alt}) < 2. \end{aligned}$$

Der neue Potentialwert von \tilde{e} ist also in jedem Fall wieder kleiner als 2.

$\phi_{alt} = 2$: Das Potential bleibt gleich falls $g_u = f$ gilt (Fall 1), andernfalls verringert es sich:

$$4g_u + 2 - \phi_{alt}(2f + 1) = 4g_u + 2 - 2 \cdot (2f + 1) \leq 4f + 2 - (4f + 2) = 0.$$

$\phi_{alt} > 2$: Das Potential wird kleiner, denn mit $\phi_{alt} > 2$ und $g_u \leq f$ folgt:

$$\begin{aligned} 4g_u + 2 - \phi_{alt}(2f + 1) &\leq 4f + 2 - \phi_{alt}(2f + 1) \\ &= (2 - \phi_{alt})(2f + 1) \\ &< 0. \end{aligned}$$

- b) i. g_u erhöht sich um 2, aber es kommt nur eine Farbe hinzu $\implies g_u \leq f - 1$.

$\phi_{alt} < 2$:

$$\begin{aligned} \phi_{neu} &= \phi_{alt} + \frac{1}{(f + 1)^2}(8g_u + 8 - \phi_{alt}(2f + 1)) \\ &\leq \phi_{alt} + \frac{1}{(f + 1)^2}(8f - \phi_{alt}(2f + 1)) \\ &< \frac{8}{3} \quad \text{für } 1 \leq \phi_{alt} < 2 \text{ und } f \geq 2. \end{aligned}$$

Beweis:

Die Funktion

$$p : M \rightarrow \mathbb{R}, p(\phi, f) := \phi + \frac{1}{(f + 1)^2}(8f - \phi(2f + 1))$$

hat auf ihrem Definitionsbereich $M = \{(\phi, f) \in \mathbb{R}^2 \mid (1 \leq \phi < 2) \wedge (f \geq 2)\}$ keinen inneren Extrempunkt, denn es gilt für alle $(\phi, f) \in M$

$$\frac{\delta p(\phi, f)}{\delta \phi} = 1 + \frac{-2f - 1}{(f + 1)^2} > 0$$

und

$$\frac{\delta p(\phi, f)}{\delta f} = \frac{8 - 2\phi}{(f + 1)^2} - \frac{2(8f - 2\phi f - \phi)}{(f + 1)^3} \leq 0.$$

Die Funktion p nimmt ihren Maximalwert also auf dem Rand von M an und da sie mit wachsendem ϕ steigt und für wachsendes f fällt, wird dieser Maximalwert für $\phi \rightarrow 2$ und $f = 2$ erreicht. Wegen $p(2, 2) = \frac{2}{3}$ gilt also $p(\phi, f) < \frac{2}{3}$ für alle $(\phi, f) \in M$. \square

$\phi_{alt} = 2$: Wegen $g_u < f$ können nur die Fälle 2) und 3) eintreten.

Im Fall 2) gilt:

$$\phi_{neu} = \phi_{alt} + \frac{6 - 4f}{(f + 1)^2} = \begin{cases} \frac{5}{2}, & \text{wenn } f = 1; \\ < 2, & \text{wenn } f \geq 2. \end{cases}$$

Im Fall 3) gilt:

$$\begin{aligned} \phi_{neu} &\leq \phi_{alt} + \frac{1}{(f + 1)^2}(8(f - 1) + 8 - \phi_{alt}(2f + 1)) \\ &= 2 + \frac{1}{(f + 1)^2}(4f - 2) \\ &\leq \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

$\phi_{alt} > 2$: Das Potential bleibt in jedem Fall kleiner als 4, denn sowohl vor der Färbung als auch nachher gibt es mindestens eine Farbe, die nur in der Knotenfarbmengene einer der Knoten u oder v enthalten ist.

ii. $\phi_{alt} < 2$:

$$\begin{aligned} \phi_{neu} &= \phi_{alt} + \frac{1}{(f + 1)^2}(4g_u + 4g_w + 4 - \phi_{alt}(2f + 1)) \\ &\leq \phi_{alt} + \frac{1}{(f + 1)^2}(8f - 4 - \phi_{alt}(2f + 1)) \\ &< \frac{12}{5} \quad \text{für } 1 \leq \phi_{alt} < 2 \text{ und } f \geq 2. \end{aligned}$$

Beweis:

Wir bestimmen wieder das Maximum der Funktion

$$p : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad p(\phi, f) := \phi + \frac{1}{(f + 1)^2}(8f - 4 - \phi(2f + 1))$$

auf dem Definitionsbereich $M = \{(\phi, f) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \phi < 2 \wedge f \geq 2\}$.

Es ist

$$\frac{\delta p(\phi, f)}{\delta \phi} = 1 - \frac{2f + 1}{(f + 1)^2}$$

und

$$\frac{\delta p(\phi, f)}{\delta f} = \frac{8 - 2\phi}{(f + 1)^2} - \frac{2(8f - 2f\phi - \phi - 4)}{(f + 1)^3}.$$

Weiter gilt $\frac{\delta p(\phi, f)}{\delta \phi} > 0$ für alle $(\phi, f) \in M$, das heißt der Funktionswert von p wird mit wachsendem ϕ größer. $\frac{\delta p(\phi, f)}{\delta f}|_{\phi=2}$ ist positiv für $f < 4$, hat bei $f = 4$ eine Nullstelle und ist negativ für $f > 4$. Das heißt insgesamt, dass die Funktion p auf M für $\phi \rightarrow 2$ und $f = 4$ ihren Maximalwert erreicht. Wegen $p(2, 4) = \frac{2}{5}$ gilt für alle $(\phi, f) \in M$ $p(\phi, f) < \frac{2}{5}$. \square

$\phi_{alt} = 2$: Im Fall 1) und 2) gilt:

$$\begin{aligned}\phi_{neu} &= \phi_{alt} + \frac{1}{(f+1)^2}(4f+4 - \phi_{alt}(2f+1)) \\ &= \phi_{alt} + \frac{2}{(f+1)^2} \leq \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Im Fall 3) gilt:

$$\begin{aligned}\phi_{neu} &= \phi_{alt} + \frac{1}{(f+1)^2}(4g_u + 4g_v + 4 - \phi_{alt}(2f+1)) \\ &\leq 2 + \frac{1}{(f+1)^2}(4(f-1) + 4(f-2) + 4 - 2(2f+1)) \\ &= 2 + \frac{4f-10}{(f+1)^2} \leq \frac{16}{7}.\end{aligned}$$

Beweis:

Die Funktion $p : N \rightarrow \mathbb{R}$, $p(f) := \frac{4f-10}{(f+1)^2}$ mit $N = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 5\}$ hat bei $f = 6$ ein Maximum und es ist $p(6) = \frac{2}{7}$. \square

$\phi_{alt} > 2$: Das Potential bleibt kleiner als 4, wenn es vorher kleiner als 4 war. War hingegen $\phi_{alt} = 4$, so gilt auch $\phi_{neu} = 4$, denn in diesem Fall gilt $g_u = g_v = f$ und

$$\begin{aligned}\phi_{neu} &= \phi_{alt} + \frac{1}{(f+1)^2}(4g_u + 4g_v + 4 - \phi_{alt}(2f+1)) \\ &= \phi_{alt}.\end{aligned}$$

3. a) $\phi_{alt} < 2$: Der Potentialzuwachs kann sowohl positiv als auch negativ sein.

Der neue Potentialwert ist aber in jedem Fall wieder kleiner als 2:

$$\begin{aligned}
 \phi_{neu} &= \phi_{alt} + \frac{1}{(f+2)^2}(8g_u + 8 - \phi_{alt}(4f+4)) \\
 &\leq \phi_{alt} + \frac{1}{(f+2)^2}(8(f-1) + 8 - \phi_{alt}(4f+4)) \\
 &= \phi_{alt} + \frac{1}{(f+2)^2}((2 - \phi_{alt})4f - 4\phi_{alt}) \\
 &< \phi_{alt} + \frac{1}{(f+2)^2}((2 - \phi_{alt})4f) \\
 &= \phi_{alt} + \frac{4f}{(f+2)^2}((2 - \phi_{alt})) \\
 &\leq \phi_{alt} + \frac{1}{2}(2 - \phi_{alt}) < 2.
 \end{aligned}$$

$\phi_{alt} = 2$: Das Potential bleibt gleich, falls $g_u = f$ gilt (Fall 1), ansonsten erniedrigt es sich.

Beweis:

Im Fall 2 und Fall 3 ist der Potentialzuwachs negativ, denn es gilt:

$$\frac{1}{(f+2)^2}(8g_u + 8 - \phi_{alt}(4f+4)) = \begin{cases} \frac{-8f}{(f+2)^2} & \text{im Fall 2;} \\ \frac{-8}{(f+2)^2} & \text{im Fall 3.} \end{cases}$$

□

$\phi_{alt} > 2$: Das Potential erniedrigt sich, denn es gilt für $\phi_{alt} > 2$:

$$\frac{1}{(f+2)^2}(8g_u + 8 - \phi_{alt}(4f+4)) = \frac{1}{(f+2)^2}(2 - \phi_{alt})(4f+4) < 0.$$

b) $\phi_{alt} < 2$: Der Potentialzuwachs kann sowohl positiv als auch negativ sein. Der neue Potentialwert ist in jedem Fall wieder kleiner als 2:

$$\begin{aligned}
 \phi_{neu} &= \phi_{alt} + \frac{1}{(f+2)^2}(4g_u + 4g_w + 4 - \phi_{alt}(4f+4)) \\
 &< \phi_{alt} + \frac{1}{(f+2)^2}((2 - \phi_{alt})4f - (4 + 4\phi_{alt})) \\
 &< \phi_{alt} + \frac{4f}{(f+2)^2}((2 - \phi_{alt})) \\
 &\leq \phi_{alt} + \frac{1}{2}(2 - \phi_{alt}) < 2.
 \end{aligned}$$

$\phi_{alt} = 2$: Der Potentialzuwachs ist in jedem Fall negativ.

Im Fall 1) und 2) gilt:

$$\begin{aligned} \frac{4g_u + 4g_w + 4 - \phi_{alt}(4f + 4)}{(f + 2)^2} &= \frac{1}{(f + 2)^2}(4f - 2(4f + 4)) \\ &= -\frac{4f + 8}{(f + 2)^2} < 0. \end{aligned}$$

Im Fall 3) gilt:

$$\frac{1}{(f + 2)^2}(4g_u + 4g_w + 4 - \phi_{alt}(4f + 4)) \leq \frac{-20}{(f + 2)^2} < 0.$$

$\phi_{alt} > 2$: Das Potential erniedrigt sich. Für die Potentialdifferenz gilt:

$$\begin{aligned} \frac{4g_u + 4g_w + 4 - \phi_{alt}(4f + 4)}{(f + 2)^2} &\leq \frac{1}{(f + 2)^2}(8f + 4 - \phi_{alt}(4f + 4)) \\ &< \frac{4f + 4}{(f + 2)^2}(2 - \phi_{alt}) < 0. \end{aligned}$$

6.3. Potentialwert und Farbenanzahl

Die Potentialfunktion wurde ursprünglich in der Hoffnung eingeführt, mit ihrer Hilfe untere Schranken für den spielchromatischen Index der vollständigen Graphen angeben zu können und die folgende Frage zu beantworten:

Gibt es einen festen Zusammenhang zwischen der Ordnung n oder dem Maximalgrad $\Delta(K_n) = n - 1$ eines vollständigen Graphen K_n und seinem spielchromatischen Index $\chi'_g(K_n)$, zum Beispiel eine Relation $\chi'_g(K_n) > \Delta(K_n) \cdot (1 + \varepsilon)$, für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}$? Wenn ja, wie groß ist dieses ε ?

Hierzu müsste man (mit Hilfe des Potentialwertes) zeigen, dass Bob für alle Farbmengen F mit höchstens $\lfloor \Delta(K_n) \cdot (1 + \varepsilon) \rfloor$ Elementen eine Gewinnstrategie für das Kantenfärbungsspiel auf dem K_n mit der Farbmenge F besitzt, Alice also mindestens eine weitere Farbe braucht, um gewinnen zu können.

Bob gewinnt das Kantenfärbungsspiel auf einem Graphen K_n mit der Farbmenge $F = \{1, 2, \dots, \bar{f}\}$ ($\bar{f} \geq n$) genau dann, wenn es ihm gelingt, im Spiel eine *kritische Kante* $\tilde{e} = \{u, v\}$ zu erzeugen, also eine Kante, die nicht mehr zulässig gefärbt werden kann, da bereits alle \bar{f} im Färbungsspiel verfügbaren Farben zur Färbung der zu \tilde{e} benachbarten Kanten verwendet wurden. Im Zusammenhang mit der Potentialfunktion stellt sich hier die Frage:

Kann man anhand des Potentialwertes einer ungefärbten Kante oder dem mittleren Potentialwert der ungefärbten Kanten eine solche Gewinnsituation von Bob erkennen?

Die Kantenfarbmenge $F_k(\tilde{e})$ einer kritischen Kante \tilde{e} ist gleich der Farbmenge F und für die Knotenfärbungsgrade g_u, g_v der Endknoten u und v der Kante folgt daraus $g_u + g_v \geq \bar{f}$, wobei $1 \leq g_u, g_v \leq n - 2$. Damit gilt für den Potentialwert einer kritischen Kante \tilde{e}

$$1 \leq \left\{ \begin{array}{ll} \frac{4(\frac{\bar{f}}{2})^2}{\bar{f}^2} & \text{für } \bar{f} \text{ gerade} \\ \frac{2(\frac{\bar{f}-1}{2})^2 + 2(\frac{\bar{f}-1}{2} + 1)^2}{\bar{f}^2} & \text{für } \bar{f} \text{ ungerade} \end{array} \right\} \leq \phi(\tilde{e}) \leq \frac{4(n-2)^2}{\bar{f}^2} < 4.$$

Der Potentialwert einer kritischen Kante kann also fast alle möglichen Potentialwerte annehmen, und es wird daher im Allgemeinen nicht möglich sein, die Entstehung einer kritischen Kante mit Hilfe des Potentialwertes festzustellen. Den gleichen Potentialwert können ja auch ungefärbte Kanten haben, die nicht kritisch sind. Gleiches gilt erst recht für den Potentialmittelwert.

Umgekehrt kann man jedoch mit dem Potentialwert eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angeben, dass Alice das Spiel gewinnt. Sollen alle Kanten des Graphen zulässig gefärbt werden, darf es keine kritischen Kanten geben und es muss also für jede ungefärbte Kante e immer $|F_k(e)| \leq \bar{f} - 1$ gelten. Für die letzte ungefärbte Kante $\tilde{e} = \{u, v\}$ gilt, da alle benachbarten Kanten bereits gefärbt sind, zusätzlich $g_u = g_v = n - 2$. Der Potentialwert $\phi(\tilde{e})$ dieser Kante muss also folgende Ungleichung erfüllen:

$$\phi(\tilde{e}) = \frac{2g_u^2 + 2g_v^2}{f^2} \geq \frac{4(n-2)^2}{(\bar{f}-1)^2} =: \bar{\Phi}_{\min}(\bar{f}, n). \quad (23)$$

Wenn es also gelingt, eine Strategie für Bob anzugeben, mit deren Hilfe sich der mittlere Potentialwert der ungefärbten Kanten so abschätzen lässt, dass er bei Spielende immer unter diesem Grenzwert $\bar{\Phi}_{min}(\bar{f}, n)$ liegt, dann kann der vollständige Graph K_n nicht mit der Anzahl von \bar{f} Farben gefärbt werden.

Da auch der mittlere Potentialwert der ungefärbten Kanten, den Bob bei Spielende erzwingen kann, von der Mächtigkeit der Farbmenge abhängen wird, könnte man auf die unten beschriebene Weise iterativ eine untere Schranke für die minimale Farbanzahl bestimmen, mit der Alice eine Gewinnstrategie für das Kantenfärbungsspiel auf dem gegebenen Graphen besitzt:

1. Beginne mit der Farbanzahl $\bar{f} = n$.
2. Berechne die untere Schranke $\bar{\Phi}_{min}(\bar{f}, n) = \frac{4(n-2)^2}{(\bar{f}-1)^2}$ für das minimale Potential der letzten ungefärbten Kante.
3. Berechne eine Abschätzung der oberen Schranke $\tilde{\Phi}$ für den Potentialwert der letzten ungefärbten Kante⁴³, und prüfe, welcher der folgenden Fälle vorliegt:
 - a) $\tilde{\Phi} < \bar{\Phi}_{min}(\bar{f}, n)$: Setze $\bar{f} := \bar{f} + 1$ und beginne erneut bei Schritt 2.
 - b) $\tilde{\Phi} \geq \bar{\Phi}_{min}(\bar{f}, n)$: Iterationsende: Der aktuelle Wert \bar{f} ist eine untere Schranke für den spielchromatischen Index $\chi'_g(K_n)$ des vollständigen Graphen K_n .

Mit diesem Ansatz ließe sich also die Potentialfunktion nutzen, um eine untere Schranke für den spielchromatischen Index der vollständigen Graphen zu bestimmen.

Einige Werte der Schranke $\bar{\Phi}_{min}(\bar{f}, n)$ sind in der nachfolgenden Tabelle 4 für vollständige Graphen K_n kleiner Ordnungen n angegeben. Man beachte, dass für die Farbanzahl \bar{f} beim Kantenfärbungsspiel auf dem K_n nur Werte zwischen n und $2\Delta(K_n) - 1$ in Frage kommen, da nach den Sätzen 3.1, 3.5 und 2.3 immer $n \leq \chi'_g(K_n) \leq 2\Delta(K_n) - 1$ gilt.

Das Problem ist also möglichst gute Abschätzungen für den Potentialwert der letzten ungefärbten Kante zu finden. Im Abschnitt 6.2 dieses Kapitels auf Seite 47 haben wir dazu untersucht, wie sich der Potentialwert einer ungefärbten Kante ändert, wenn weitere Kanten des Graphen gefärbt werden, und Abschätzungen für den neuen Potentialwert berechnen.

Vergleicht man diese Werte der oberen Schranke für die neuen Potentialwerte aus Tabelle 3 mit den Werten der unteren Schranke $\bar{\Phi}_{min}(\bar{f}, n)$ in Tabelle 4, so sieht man, dass es nur geringe Unterschiede zwischen diesen Werten gibt.

Je mehr Farben man zulässt, desto kleiner wird die untere Schranke für den Potentialwert der letzten ungefärbten Kante, und desto schwieriger wird es folglich auch zu zeigen, dass Bob sicherstellen kann, dass der Potentialwert der letzten ungefärbten Kante unter diesem Wert liegt.

⁴³Zum Beispiel indem man zeigt, dass der mittlere Potentialwert der ungefärbten Kanten immer, also auch bei Spielende, unter einem bestimmten Grenzwert bleibt.

$\bar{f} \setminus n$	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	2,56	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7	1,78	2,78	-	-	-	-	-	-	-	-
8	1,31	2,04	2,93	-	-	-	-	-	-	-
9	1	1,56	2,25	3,06	-	-	-	-	-	-
10	-	1,23	1,78	2,42	3,16	-	-	-	-	-
11	-	1	1,44	1,96	2,56	3,24	-	-	-	-
12	-	-	1,19	1,62	2,12	2,68	3,31	-	-	-
13	-	-	1	1,36	1,78	2,25	2,78	3,36	-	-
14	-	-	-	1,16	1,51	1,92	2,37	2,86	3,41	-
15	-	-	-	1	1,31	1,65	2,04	2,47	2,93	3,45
16	-	-	-	-	1,14	1,44	1,78	2,15	2,56	3
17	-	-	-	-	1	1,27	1,56	1,89	2,25	2,64
18	-	-	-	-	-	1,12	1,38	1,67	1,99	2,34
19	-	-	-	-	-	1	1,23	1,49	1,78	2,09
20	-	-	-	-	-	-	1,11	1,34	1,60	1,87
21	-	-	-	-	-	-	1	1,21	1,44	1,69
22	-	-	-	-	-	-	-	1,10	1,31	1,53
23	-	-	-	-	-	-	-	1	1,19	1,40
24	-	-	-	-	-	-	-	-	1,09	1,28
25	-	-	-	-	-	-	-	-	1	1,17
26	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1,08
27	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1

Tabelle 4: Die Werte der unteren Schranke $\bar{\Phi}_{min}(\bar{f}, n)$ für den Potentialwert der letzten ungefärbten Kante im Kantenfärbungsspiel auf dem K_n mit \bar{f} Farben für $6 \leq n \leq 15$ und $n \leq \bar{f} \leq 2\Delta(K_n) - 1$

6.4. Probleme beim Abschätzen der Potentialwerte

Bestimmung einer oberen Schranke des mittleren Potentialwertes

Um eine obere Schranke des mittleren Potentialwertes der ungefärbten Kanten nach einer bestimmten Anzahl von Zügen zu bestimmen, muss man alle bis dahin möglichen Zugkombinationen der Spieler bei den Berechnungen berücksichtigen.

Für kleine Zugzahlen braucht man nicht ganz so viele Möglichkeiten zu betrachten. Hier sind nur die verschiedenen, also durch nicht isomorphe Graphenfärbungen repräsentierte, Spielsituationen zu berücksichtigen. Deren Anzahl ist, wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, viel geringer als die Anzahl der Zugmöglichkeiten der Spieler. Denn für die Berechnung des Potentialwertes spielt nur die Färbung des Graphen eine Rolle, und nicht, wie man zu dieser Färbung gelangt ist. Man muss also für eine Abschätzung nicht unbedingt eine explizite Strategie von Bob beziehungsweise Alice angeben, durch die dieser Schätzwert immer erreicht wird, sondern es reicht, gewisse auf alle Fälle für die Spieler ungünstige Färbungen des Graphen auszuschließen, um die möglichen Potentialwerte einzuschränken.

Will man zum Beispiel eine obere Schranke für das mittlere Potential der ungefärbten Kanten im Kantenfärbungsspiel auf dem K_n nach n Zügen angeben, so kann man unter der Bedingung, dass Alice versucht, die mittleren Potentialwerte zu maximieren, und Bob versucht, sie zu minimieren, davon ausgehen, dass nach den ersten n Zügen nur genau $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ Farben benutzt worden sind. Denn egal welche Kanten des Graphen nach den n Zügen gefärbt sind, ist es für Bob immer günstiger, möglichst viele verschiedene Farben zu verwenden, weil dadurch der Nenner im Ausdruck für das Potential einer ungefärbten Kanten größer und der Potentialwert somit kleiner wird. Für Alice hingegen ist das Gegenteil der Fall. Sie wird ihre Kanten immer mit einer der bereits verwendeten Farben färben, um so größere Potentialwerte zu erreichen.

Eine obere Schranke für den mittleren Potentialwert erhält man dann, indem man diejenigen n Kanten des K_n und ihre zulässige Färbung mit nur $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ Farben bestimmt, so dass der mittlere Potentialwert der ungefärbten Kanten den größtmöglichen Wert annimmt. Ob diese partielle Färbung wirklich entstehen kann, wenn Alice und Bob „vernünftige“ Strategien zur Maximierung beziehungsweise Minimierung des mittleren Potentialwertes verwenden, ist dabei nicht wichtig. Der maximale mittlere Potentialwert, der bei einem solchen „vernünftigen“ Spiel erreicht werden kann, liegt in jedem Fall unter diesem oberen Schrankenwert.

Bei diesem Beispiel wird durch die Voraussetzung, dass die Spieler die mittleren Potentialwerte zu maximieren bzw. zu minimieren versuchen, die Wahl der Farben eingeschränkt und viele Färbungen im voraus ausgeschlossen, wodurch die Anzahl der zu überprüfenden Spielsituationen stark reduziert wird. Nach einer genügend großen Anzahl von Zügen kann man diese Einschränkung an die Farbmenge nicht mehr machen. Dadurch geht dann aber auch die Annahme über die Spielweise der Spieler verloren, die sich in obigem Beispiel in der Einschränkung der Farbmenge widerspiegelt. Ohne weitere Bedingungen an die Färbung des Graphen, die man aus den Annahmen über die Spielweise der Spieler ableiten kann, wird der höchste mittlere Potentialwert aber immer

dann erreicht, wenn die Kanten unabhängiger Kantenmengen sukzessive in der gleichen Farbe gefärbt werden. Dies wird Bob im realen Spiel nicht zulassen (vgl. Abschnitt 3.4), da der Graph auf diese Weise mit der minimalen Anzahl von Farben gefärbt werden kann.

Es lässt sich also ohne Zusatzbedingungen an die Färbung des Graphen nicht vermeiden, alle möglichen Züge schrittweise abzuschätzen. Wie wir gesehen haben, kann man aus den Potentialwerten der ungefärbten Kanten außer beim Spielende keine direkten Rückschlüsse auf die aktuelle Färbung und damit auf die zulässige Färbbarkeit des Graphen ziehen. Daher scheint die Potentialfunktion nicht geeignet zu sein, solche Bedingungen an die Färbung des Graphen zu liefern, wenn man nur annimmt, dass einer der Spieler versucht die mittleren Potentialwerte zu maximieren, während der andere versucht, diese Werte zu maximieren.

Weitere Probleme bei der Abschätzung des Potentialwertes

Generell ergeben sich bei der schrittweisen Abschätzung des mittleren Potentialwertes folgende Probleme:

1. Durch das Färben einer Kante im Graphen verändert man den Potentialwert von bis zu $2(n - 2)$ Kanten, denn jede Kante des vollständigen Graphen K_n ist zu jeweils $2(n - 2)$ Kanten benachbart. Es werden also auch an einigen Kanten die Fälle 1.b) – 1.c) aus Abschnitt 6.1 eintreten, in denen der Potentialwert der Kanten auf einen Wert größer als 2 anwachsen kann. Ist dies einmal einmal geschehen, so liefern die Abschätzungen in fast allen Fällen keine aussagekräftigen Werte mehr.
2. Es ist nicht ohne weiteres möglich, die verschiedenen Potentialänderungen dieser maximal $2(n - 2)$ Kanten miteinander zu verrechnen. Hierzu müsste man wissen, wie oft die einzelnen betrachteten Fälle auftreten, und benötigt Informationen über die Färbung des Graphen, die über die Kenntnis des vorherigen Potentialmittelwertes hinausgehen.
3. Anhand ihres Potentialwertes wird eine kritische Kanten erst bei Spielende erkannt. Beim schrittweisen Abschätzen der Potentialwerte bis zum Spielende akkumulieren sich die Abschätzungsfehler der einzelnen Züge und verschlechtern somit das Endergebnis. Dadurch wird eine Gewinnsituation von Bob eventuell nicht mehr erkannt.

Während also die Potentialfunktion mit den Potentialstrategien ein gutes Werkzeug bereitstellt, mit dem sich im Spielverlauf durch den Vergleich der Potentialmittelwerte von verschiedenen möglichen Spielpositionen günstige Züge für beide Spieler berechnen lassen, ist sie bei der Analyse einer fest vorgegebenen Spielsituation nicht sehr aussagekräftig. Bis auf die Situation bei Spielende, lassen sich keine direkten Rückschlüsse vom Potentialwert einer ungefärbten Kante auf die zulässige Färbbarkeit des Graphen ziehen.

7. Die ersten Züge im Kantenfärbungsspiel

7.1. Mögliche Spielpositionen in den ersten Zügen

In diesem Abschnitt betrachten wir die ersten Züge im Kantenfärbungsspiel auf dem K_n und geben alle nicht isomorphen Spielpositionen, die in den ersten 4 Zügen entstehen können, mit den entsprechenden mittleren Potentialwerten der ungefärbten Kanten an. Die verschiedenen Spielpositionen, die durch Alices und Bobs Züge jeweils entstehen, sind dabei nach der Anzahl der Komponenten, aus denen der von den gefärbten Kanten induzierte Teilgraph besteht, und der Anzahl der verwendeten Farben sortiert.

Der von einer Kantenmenge $E' \subseteq E$ eines Graphen $G = (V, E)$ induzierte Teilgraph sei hier der Teilgraph G' von G , der alle Kanten der Menge E' sowie die Endknoten der Kanten dieser Menge enthält, also $G' = (V', E')$ mit $V' = \{v \mid \{u, v\} \in E'\}$ und $E' = E'$.

Man beachte, dass nur für vollständige Graphen K_n ausreichend großer Ordnung n alle hier betrachteten Spielpositionen auftreten können, das heißt der vollständige Graph muss mindestens genauso viele Knoten wie die Graphen in den jeweiligen Abbildungen haben.

Die große Zahl verschiedener Spielpositionen und die noch größere Anzahl an Möglichkeiten diese Spielpositionen durch das Färben verschiedener Kanten im Graphen zu erreichen, geben einen guten Eindruck von der Komplexität des Kantenfärbungsspiels auf vollständigen Graphen. Außerdem zeigen die Beispiele nochmals, wie sich die Verteilung der gefärbten Kanten im Graphen und die Wahl der zum Färben verwendeten Farben auf den mittleren Potentialwert $\bar{\Phi}$ der ungefärbten Kanten auswirkt.

1. Zug: Alice beginnt

1 Komponente, 1 Farbe - Weg P_1 : Alice färbt eine beliebige Kante. Mit jedem ihrer beiden Endknoten inzidieren $n - 2$ ungefärbte Kanten. Jede dieser Kanten hat den Potentialwert $P = 2$, so dass nach dem ersten Zug für den Potentialmittelwert gilt:

$$\bar{\Phi} = 2.$$

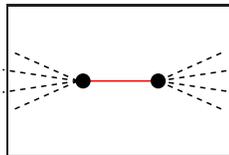


Abbildung 15: Graph nach dem 1. Zug

2. Zug: Bob ist am Zug

Bob hat 3 Möglichkeiten:

2.1 **1 Komponente, 2 Farben - Weg P_2** : Bob färbt eine Kante, die adjazent zu der von Alice gefärbten Kante ist.

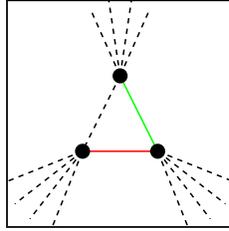


Figure 16: Graph nach Zug 2.1

Die zu beiden gefärbten Kanten adjazente Kante hat den Potentialwert 1. Mit jedem der drei Endknoten der gefärbten Kanten inzidieren $n-3$ weitere ungefärbte Kanten. Sie haben jeweils den Potentialwert 2. Insgesamt ergibt sich also für das mittlere Potential in dieser Situation:

$$\bar{\Phi} = \frac{3 \cdot (n-3) \cdot 2 + 1}{3 \cdot (n-3) + 1} = 2 \cdot \frac{n - \frac{17}{6}}{n - \frac{8}{3}}.$$

2.2 **2 Komponenten (Weg P_1 - Weg P_1), 1 Farbe**: Bob färbt eine Kante, die nicht zu der bereits gefärbten Kante benachbart ist. Er benutzt die gleiche Farbe wie Alice.

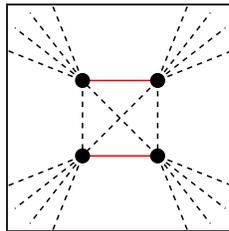


Figure 17: Graph nach Zug 2.2

Die vier Kanten, die zu beiden bereits gefärbten Kanten benachbart sind, haben jeweils den Potentialwert 4. Die Endknoten der gefärbten Kanten inzidieren mit jeweils $n-4$ weiteren Kanten. Diese haben den Potentialwert 2. Das mittlere Potential ist also

$$\bar{\Phi} = \frac{4 \cdot (n-4) \cdot 2 + 4 \cdot 4}{4 \cdot (n-4) + 4} = 2 \cdot \frac{n-2}{n-3}.$$

2.3 **2 Komponenten (Weg P_1 - Weg P_1), 2 Farben**: Bob färbt eine Kante, die nicht zu der bereits gefärbten Kante adjazent ist. Er benutzt eine neue Farbe.

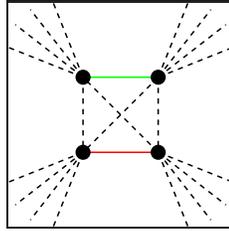


Figure 18: Graph nach Zug 2.3

Die vier Kanten, die zu beiden bereits gefärbten Kanten adjazent sind, haben den Potentialwert 1. Die $4 \cdot (n - 4)$ zu jeweils einer der gefärbten Kanten benachbarten Kanten haben den Potentialwert 2. Das mittlere Potential ist also

$$\bar{\Phi} = \frac{4 \cdot (n - 4) \cdot 2 + 4 \cdot 1}{4 \cdot (n - 4) + 4} = 2 \cdot \frac{n - \frac{7}{2}}{n - 3}.$$

3. Zug: Alice

Je nachdem welchen Zug Bob gewählt hat, ergeben sich für Alice die folgenden Möglichkeiten:

3.1 Hat Bob Zug 2.1 (1 Komponente, 2 Farben - Weg P_2) gewählt, ergeben sich für Alice 6 mögliche Züge:

3.1.1 **1 Komponente, 3 Farben - Kreis C_3** : Alice färbt die Kante, deren Endpunkte beide mit einer der bereits gefärbten Kanten inzidieren.

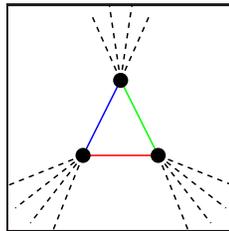


Figure 19: Graph nach Zug 3.1.1

Alle Kanten, die zu einer der gefärbten Kanten benachbart sind, haben das Potential 2. Also gilt:

$$\bar{\Phi} = 2.$$

3.1.2 **1 Komponente, 3 Farben - Stern**: Alice färbt eine der Kanten, die einen Endpunkt hat, der mit beiden gefärbten Kanten inzidiert.

$$\bar{\Phi} = \frac{4 \cdot (n - 4) \cdot 2 + 3 \cdot 1}{4 \cdot (n - 4) + 3} = \frac{8 \cdot (n - 4) + 3}{4 \cdot (n - 4) + 3}$$

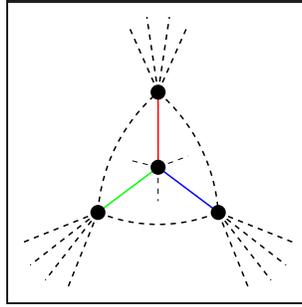


Figure 20: Graph nach Zug 3.1.2

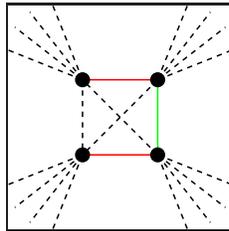


Figure 21: Graph nach Zug 3.1.3

3.1.3 **1 Komponente, 2 Farben - Weg P_3** : Alice färbt eine Kante, die zu genau einer der gefärbten Kanten adjazent ist.

$$\overline{\Phi} = \frac{4 \cdot (n-4) \cdot 2 + 2 \cdot \frac{10}{4} + 1 \cdot 4}{4 \cdot (n-2) + 2 + 1} = \frac{8 \cdot (n-4) + 9}{4 \cdot (n-4) + 3}$$

3.1.4 **1 Komponente, 3 Farben - Weg P_3** : Alice färbt eine Kante, die zu genau einer der gefärbten Kanten adjazent ist, in einer neuen Farbe.

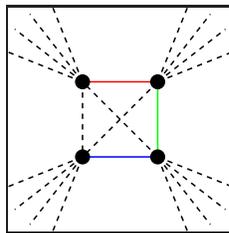


Figure 22: Graph nach Zug 3.1.4

$$\overline{\Phi} = \frac{4 \cdot (n-4) \cdot 2 + 2 \cdot \frac{10}{9} + 1 \cdot 1}{4 \cdot (n-2) + 2 + 1} = \frac{8 \cdot (n-4) + \frac{29}{9}}{4 \cdot (n-4) + 3}$$

3.1.5 **2 Komponenten (Weg P_1 - Weg P_2), 2 Farben**: Alice färbt eine Kante, die zu keiner der gefärbten Kanten adjazent ist. Es entsteht eine neue Weg-Komponente P_1 .

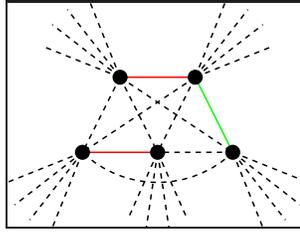


Figure 23: Graph nach Zug 3.1.5

$$\overline{\Phi} = \frac{5 \cdot (n-2) \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot \frac{10}{4}}{5 \cdot (n-2) + 3 + 2 + 2} = \frac{10 \cdot (n-5) + 16}{5 \cdot n - 5 + 7}$$

3.1.6 **2 Komponenten (Weg P_1 - Weg P_2), 3 Farben:** Alice färbt eine Kante, die zu keiner der gefärbten Kanten adjazent ist, in einer neuen Farbe.

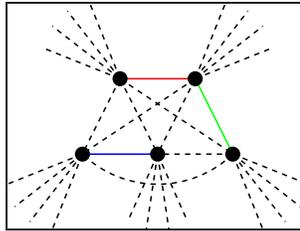


Figure 24: Graph nach Zug 3.1.6

$$\overline{\Phi} = \frac{5 \cdot (n-5) \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{10}{9}}{5 \cdot (n-2) + 5 + 2} = \frac{10 \cdot (n-5) + \frac{65}{9}}{5 \cdot (n-5) + 7}$$

3.2 Im Fall, dass Bob Zug 2.2 (2 Komponenten (Weg P_1 - Weg P_1), 1 Farbe) wählt, hat Alice folgende 4 Möglichkeiten:

3.2.1 **1 Komponente, 2 Farben - Weg P_3 :** Alice färbt eine der beiden Kanten, die adjazent zu beiden bereits gefärbten Kanten sind.

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 3.1.3.

3.2.2 **2 Komponenten (Weg P_1 - Weg P_2), 2 Farben:** Alice färbt eine Kante, die nur zu einer der bereits gefärbten Kanten adjazent ist.

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 3.1.5.

3.2.3 **3 Komponenten (P_1 - P_1 - P_1), 1 Farbe:**

$$\overline{\Phi} = \frac{6 \cdot (n-6) \cdot 2 + 12 \cdot 4}{6 \cdot (n-6) + 12} = 2 \cdot \frac{n-2}{n-4}$$

3.2.4 **3 Komponenten (P_1 - P_1 - P_1), 2 Farben:**

$$\overline{\Phi} = \frac{6 \cdot (n-6) \cdot 2 + 8 \cdot 1 + 4 \cdot 4}{6 \cdot (n-6) + 8 + 4} = \frac{12 \cdot (n-6) + 24}{6 \cdot (n-6) + 12} = 2$$

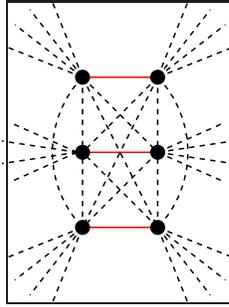


Abbildung 25: Graph nach Zug 3.2.3

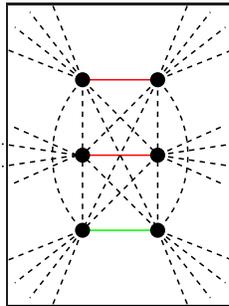


Abbildung 26: Graph nach Zug 3.2.4

3.3 Hat Bob Zug 2.3 (2 Komponenten (Weg P_1 - Weg P_1), 2 Farben) gewählt, gibt es 5 Zugmöglichkeiten für Alice:

3.3.1 **1 Komponente, 3 Farben - Weg P_3** : Alice färbt eine der beiden Kanten, die zu beiden bereits gefärbten Kanten adjazent sind.

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 3.1.4.

3.3.2 **2 Komponenten (Weg P_1 - Weg P_2), 2 Farben**: Alice färbt eine Kante, die zu nur einer der bereits gefärbten Kanten benachbart ist.

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 3.1.5.

3.3.3 **2 Komponenten (Weg P_1 - Weg P_2), 3 Farben**: Alice färbt eine Kante, die zu nur einer der gefärbten Kanten benachbart ist, in einer neuen Farbe.

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 3.1.6.

3.3.4 **3 Komponenten (P_1 - P_1 - P_1), 2 Farben**: Alice färbt eine Kante, die zu keiner der gefärbten Kanten adjazent ist.

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 3.2.4.

3.3.5 **3 Komponenten (P_1 - P_1 - P_1), 3 Farben**:

$$\bar{\Phi} = \frac{6 \cdot (n - 6) \cdot 2 + 12 \cdot 1}{6 \cdot (n - 6) + 12} = 2 \cdot \frac{n - 5}{n - 4}$$

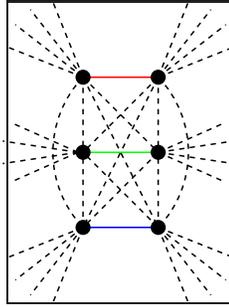


Abbildung 27: Graph nach Zug 3.3.5

4. Zug: Bob ist am Zug

Bob hat folgende Möglichkeiten auf den vorherigen Zug von Alice zu reagieren:

- 4.1 Im Fall, dass Alice den Zug 3.1.1 (1 Komponente, 3 Farben - Kreis C_3) ausgeführt hat, ergeben sich für Bob 4 mögliche Züge:

4.1.1 1 Komponente, 3 Farben:

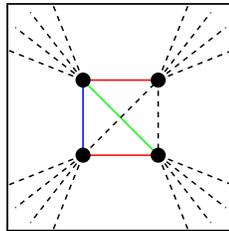


Figure 28: Graph nach Zug 4.1.1

$$\bar{\Phi} = \frac{4 \cdot (n - 4) \cdot 2 + 2 \cdot \frac{10}{4}}{4 \cdot (n - 4) + 2} = 2 \cdot \frac{2n - \frac{27}{4}}{2n - 7}$$

4.1.2 1 Komponente, 4 Farben:

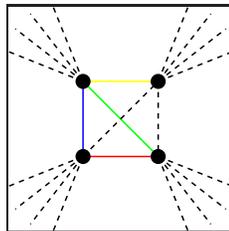


Figure 29: Graph nach Zug 4.1.2

$$\bar{\Phi} = \frac{4 \cdot (n - 4) \cdot 2 + 2 \cdot \frac{10}{9}}{4 \cdot (n - 4) + 2} = 2 \cdot \frac{2n - \frac{67}{9}}{2n - 7}$$

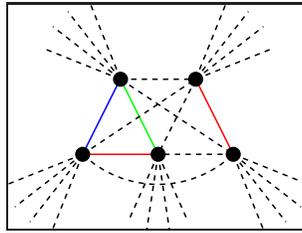


Figure 30: Graph nach Zug 4.1.3

4.1.3 2 Komponenten (Kreis C_3 - Weg P_1), 3 Farben:

$$\bar{\Phi} = \frac{5 \cdot (n-5) \cdot 2 + 4 \cdot \frac{10}{4} + 2 \cdot \frac{10}{9}}{5 \cdot (n-5) + 4 + 2} = \frac{10 \cdot (n-5) + \frac{110}{9}}{5 \cdot (n-5) + 6} = 2 \cdot \frac{n - \frac{34}{9}}{n - \frac{19}{5}}$$

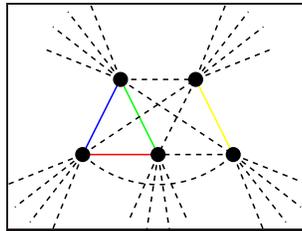
4.1.4 2 Komponenten (Kreis C_3 - Weg P_1), 4 Farben:

Figure 31: Graph nach Zug 4.1.4

$$\bar{\Phi} = \frac{5 \cdot (n-5) \cdot 2 + 6 \cdot \frac{10}{9}}{5 \cdot (n-5) + 6} = \frac{10 \cdot (n-5) + \frac{60}{9}}{5 \cdot (n-5) + 6} = 2 \cdot \frac{n - \frac{13}{3}}{n - \frac{19}{5}}$$

4.2 Hat Alice Zug 3.1.2 (1 Komponente, 3 Farben - Stern) ausgeführt, kann Bob einen der folgenden 5 Züge wählen:

4.2.1 1 Komponente, 4 Farben - Stern:

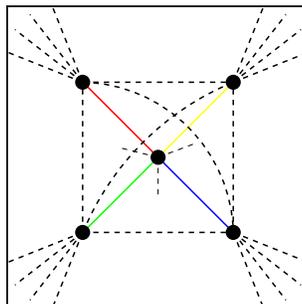


Figure 32: Graph nach Zug 4.2.1

$$\bar{\Phi} = \frac{5 \cdot (n-5) \cdot 2 + 6}{5 \cdot (n-5) + 6} = 2 \cdot \frac{n - \frac{22}{5}}{n - \frac{19}{5}}$$

4.2.2 **1 Komponente, 3 Farben:** Bob färbt eine der Kanten, deren Endknoten jeweils mit genau einer der gefärbten Kanten inzidieren.

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.1.1.

4.2.3 **1 Komponente, 4 Farben:** Bob färbt eine der Kanten, deren Endknoten jeweils mit genau einer der gefärbten Kanten inzidieren, in einer neuen Farbe.

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.1.2.

4.2.4 **1 Komponente, 3 Farben - Baum:** Bob färbt eine Kante, die zu genau einer der gefärbten Kanten benachbart ist.

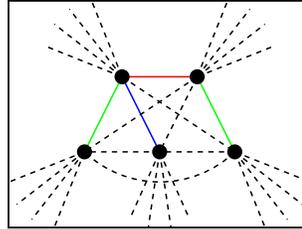


Figure 33: Graph nach Zug 4.2.4

$$\begin{aligned}\bar{\Phi} &= \frac{5 \cdot (n-5) \cdot 2 + 1 \cdot \frac{20}{9} + 1 \cdot \frac{5}{2} + 1 \cdot \frac{10}{9} + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4}{5 \cdot (n-5) + 6} \\ &= \frac{10 \cdot (n-5) + 6 + \frac{35}{6}}{5 \cdot (n-5) + 6}\end{aligned}$$

4.2.5 **1 Komponente, 4 Farben - Baum:** Bob färbt eine Kante, die zu genau einer der gefärbten Kanten benachbart ist, in einer neuen Farbe.

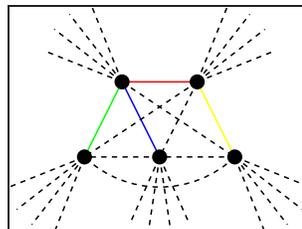


Figure 34: Graph nach Zug 4.2.5

$$\bar{\Phi} = \frac{5 \cdot (n-5) \cdot 2 + 1 \cdot \frac{5}{4} + 2 \cdot \frac{10}{9} + 3 \cdot 1}{5 \cdot (n-5) + 6} = \frac{10 \cdot (n-5) + 3 + \frac{125}{36}}{5 \cdot (n-5) + 6}$$

4.2.6 **2 Komponenten (Stern - Weg), 3 Farben:**

$$\bar{\Phi} = \frac{6 \cdot (n-6) \cdot 2 + 7 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{20}{9} + 2 \cdot 4}{6 \cdot (n-6) + 11} = \frac{12 \cdot (n-6) + 20 + \frac{40}{9}}{6 \cdot (n-6) + 11}$$

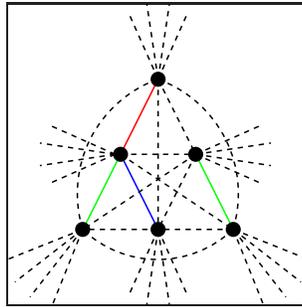


Figure 35: Graph nach Zug 4.2.6

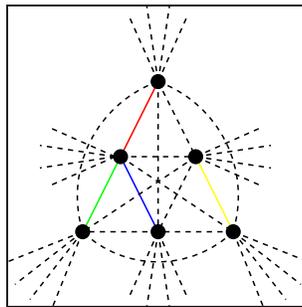


Figure 36: Graph nach Zug 4.2.7

4.2.7 2 Komponenten (Stern - Weg), 4 Farben:

$$\bar{\Phi} = \frac{6 \cdot (n - 6) \cdot 2 + 9 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{5}{4}}{6 \cdot (n - 6) + 11} = 2 \cdot \frac{n - \frac{121}{24}}{n - \frac{25}{6}}$$

4.3 Hat Alice Zug 3.1.3 (1 Komponente, 2 Farben - Weg P_3) ausgeführt, so hat Bob folgende 9 Möglichkeiten:

4.3.1 1 Komponente, 2 Farben - Kreis C_4 :

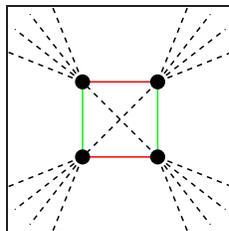


Figure 37: Graph nach Zug 4.3.1

$$\bar{\Phi} = \frac{4 \cdot (n - 4) \cdot 2 + 2 \cdot 4}{4 \cdot (n - 4) + 2} = 2 \cdot \frac{n - 3}{n - \frac{7}{2}}$$

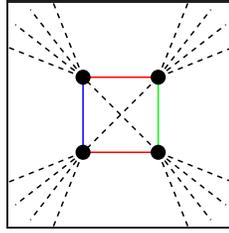


Figure 38: Graph nach Zug 4.3.2

4.3.2 1 Komponente, 3 Farben - Kreis C_4 :

$$\bar{\Phi} = \frac{4 \cdot (n-4) \cdot 2 + 2 \cdot \frac{16}{9}}{4 \cdot (n-4) + 2} = 2 \cdot \frac{n - \frac{29}{9}}{n - \frac{7}{2}}$$

4.3.3 1 Komponente, 3 Farben: Bob färbt eine Kante, die adjazent zu allen drei gefärbten Kanten ist.

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.1.1.

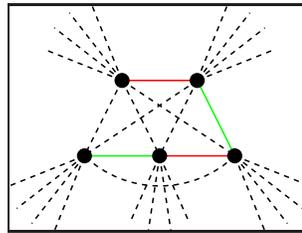
4.3.4 1 Komponente, 2 Farben - Weg P_4 :

Figure 39: Graph nach Zug 4.3.4

$$\bar{\Phi} = \frac{5 \cdot (n-5) \cdot 2 + 4 \cdot \frac{5}{2} + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1}{5 \cdot (n-5) + 6} = \frac{10 \cdot (n-5) + 15}{5 \cdot (n-5) + 6} = 2 \cdot \frac{n - \frac{7}{2}}{n - \frac{19}{5}}$$

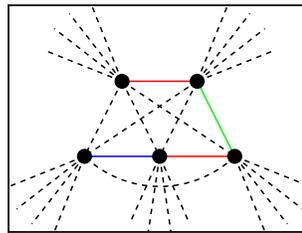
4.3.5 1 Komponente, 3 Farben - Weg P_4 :

Figure 40: Graph nach Zug 4.3.5

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= \frac{5 \cdot (n-5) \cdot 2 + 2 \cdot \frac{5}{2} + 2 \cdot \frac{10}{9} + 1 \cdot \frac{16}{9} + 1 \cdot 1}{5 \cdot (n-5) + 6} = \frac{10 \cdot (n-5) + 10}{5 \cdot (n-5) + 6} \\ &= 2 \cdot \frac{n-4}{n - \frac{19}{5}} \end{aligned}$$

4.3.6 1 Komponente, 3 Farben - Baum:

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.2.4.

4.3.7 2 Komponenten (Weg P_1 - Weg P_3), 2 Farben: Bob färbt die neue Kante in der Farbe, in der bereits zwei der Kanten gefärbt sind.

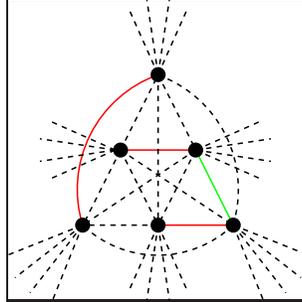


Figure 41: Graph nach Zug 4.3.7

$$\bar{\Phi} = \frac{6 \cdot (n-6) \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot \frac{5}{2}}{6 \cdot (n-6) + 11} = \frac{12 \cdot (n-6) + 35}{6 \cdot (n-6) + 11} = 2 \cdot \frac{n - \frac{37}{12}}{n - \frac{25}{6}}$$

4.3.8 2 Komponenten (P_1 - P_3), 2 Farben: Bob färbt die neue Kante in der Farbe, in der bereits genau eine der Kanten gefärbt ist.

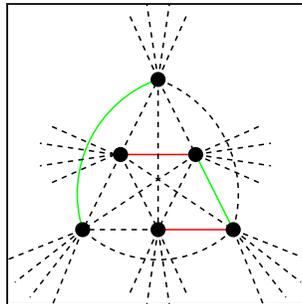


Figure 42: Graph nach Zug 4.3.8

$$\bar{\Phi} = \frac{6 \cdot (n-6) \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot \frac{5}{4} + 1 \cdot 4}{6 \cdot (n-6) + 11} = \frac{12 \cdot (n-6) + 23}{6 \cdot (n-6) + 11} = 2 \cdot \frac{n - \frac{49}{12}}{n - \frac{25}{6}}$$

4.3.9 2 Komponenten (P_1 - P_3), 3 Farben: Bob benutzt eine neue Farbe.

$$\bar{\Phi} = \frac{6 \cdot (n-6) \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{10}{9} + 2 \cdot \frac{5}{2} + 1 \cdot 4}{6 \cdot (n-6) + 11} = \frac{12 \cdot (n-6) + \frac{121}{9}}{6 \cdot (n-6) + 11}$$

4.4 Hat Alice Zug 3.1.4 (1 Komponente, 3 Farben - Weg) ausgeführt, so hat Bob folgende 11 Möglichkeiten:

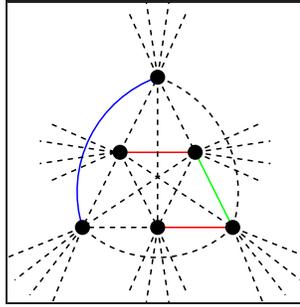


Figure 43: Graph nach Zug 4.3.9

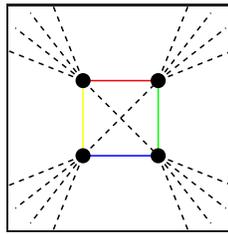


Figure 44: Graph nach Zug 4.4.2

4.4.1 1 Komponente, 3 Farben - Kreis C_4 :

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.3.2.

4.4.2 1 Komponente, 4 Farben - Kreis C_4 :

$$\bar{\Phi} = \frac{4 \cdot (n-4) \cdot 2 + 2 \cdot 1}{4 \cdot (n-4) + 2} = 2 \cdot \frac{n - \frac{15}{4}}{n - \frac{7}{2}}$$

4.4.3 1 Komponente, 3 Farben - Weg P_4 :

Bob färbt eine Kante, so dass ein Weg der Länge 4 entsteht. Er färbt die neue Endkante in der Farbe der „mittleren“ Kante des alten Weges P_3 .

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.3.5.

4.4.4 1 Komponente, 3 Farben - Weg P_4 :

Bob färbt eine Kante, so dass ein Weg der Länge 4 entsteht. Er benutzt für die Färbung der neuen Endkante die Farbe der anderen Endkante des ursprünglichen Weges P_3 .

$$\bar{\Phi} = \frac{5 \cdot (n-5) \cdot 2 + 2 \cdot \frac{5}{4} + 2 \cdot \frac{10}{9} + 1 \cdot \frac{16}{9} + 1 \cdot 4}{5 \cdot (n-5) + 6} = \frac{10 \cdot (n-5) + 13}{5 \cdot (n-5) + 6} = 2 \cdot \frac{n - \frac{37}{10}}{n - \frac{19}{5}}$$

4.4.5 1 Komponente, 4 Farben - Weg P_4 :

Bob färbt eine Kante, so dass ein Weg der Länge 4 entsteht. Er färbt die neue Endkante in einer neuen Farbe.

$$\bar{\Phi} = \frac{5 \cdot (n-5) \cdot 2 + 4 \cdot \frac{10}{9} + 2 \cdot 1}{5 \cdot (n-5) + 6} = \frac{10 \cdot (n-5) + \frac{58}{9}}{5 \cdot (n-5) + 6} = 2 \cdot \frac{n - \frac{196}{45}}{n - \frac{19}{5}}$$

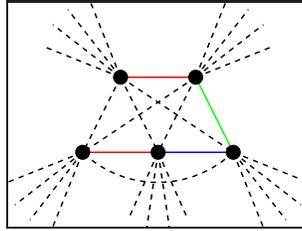


Figure 45: Graph nach Zug 4.4.4

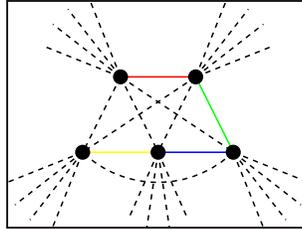


Figure 46: Graph nach Zug 4.4.5

4.4.6 1 Komponente, 3 Farben - Baum:

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.2.4.

4.4.7 1 Komponente, 4 Farben - Baum:

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.2.5.

4.4.8 1 Komponente, 3 Farben: Bob färbt eine Kante die adjazent zu allen drei gefärbten Kanten ist.

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.1.2.

4.4.9 2 Komponente ($P_1 - P_3$), 3 Farben: Bob benutzt für die neue Komponente die Farbe der „mittleren“ Kante des ursprünglichen Weges P_3 .

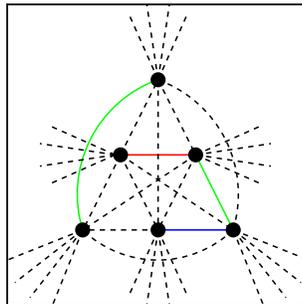


Figure 47: Graph nach Zug 4.4.9

$$\overline{\Phi} = \frac{6 \cdot (n - 6) \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{5}{2} + 2 \cdot \frac{10}{9}}{6 \cdot (n - 6) + 11} = \frac{12 \cdot (n - 6) + 15 + \frac{20}{9}}{6 \cdot (n - 6) + 11}$$

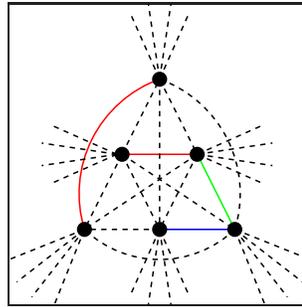


Figure 48: Graph nach Zug 4.4.10

4.4.10 **2 Komponente ($P_1 - P_3$), 3 Farben:** Bob benutzt für die neue Komponente die Farbe einer der Endkanten des alten Weges P_3 .

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= \frac{6 \cdot (n-6) \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{10}{9} + 2 \cdot 4 + 2 \cdot \frac{5}{2}}{6 \cdot (n-6) + 11} = \frac{12 \cdot (n-6) + 16 + \frac{49}{9}}{6 \cdot (n-6) + 11} \\ &= 2 \cdot \frac{n - \frac{116}{27}}{n - \frac{25}{6}} \end{aligned}$$

4.4.11 **2 Komponente ($P_1 - P_3$), 4 Farben:** Bob benutzt für die neue Komponente eine neue Farbe.

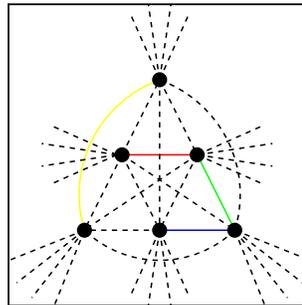


Abbildung 49: Graph nach Zug 4.4.11

$$\bar{\Phi} = \frac{6 \cdot (n-6) \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot \frac{10}{9}}{6 \cdot (n-6) + 11} = 2 \cdot \frac{n - \frac{181}{36}}{n - \frac{25}{6}}$$

4.5 Hat Alice Zug 3.1.5 (2 Komponenten (Weg P_1 - Weg P_2) 2 Farben) ausgeführt, so kann Bob einen der folgenden 14 Züge wählen:

4.5.1 **1 Komponente, 2 Farben - Weg P_4 :**

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.3.4.

4.5.2 **1 Komponente, 3 Farben - Weg P_4 :** Die Endkanten des Weges sind in der gleichen Farbe gefärbt.

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.4.4.

4.5.3 **1 Komponente, 3 Farben - Weg P_4 :** Die Endkanten des Weges sind in unterschiedlichen Farben gefärbt.

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.3.5.

4.5.4 **1 Komponente, 3 Farben - Baum:**

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.2.4.

4.5.5 **2 Komponenten (Stern - Weg), 3 Farben:**

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.2.6.

4.5.6 **2 Komponenten ($P_2 - P_2$), 2 Farben:**

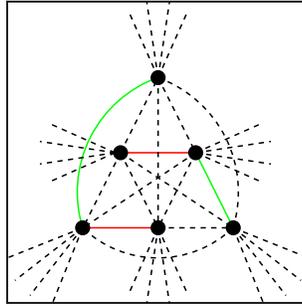


Figure 50: Graph nach Zug 4.5.6

$$\bar{\Phi} = \frac{6 \cdot (n-6) \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{5}{2} + 3 \cdot 4}{6 \cdot (n-6) + 11} = \frac{12 \cdot (n-6) + 26}{6 \cdot (n-6) + 11} = 2 \cdot \frac{n - \frac{23}{6}}{n - \frac{25}{6}}$$

4.5.7 **2 Komponenten ($P_2 - P_2$), 3 Farben:**

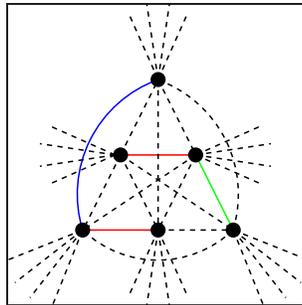


Figure 51: Graph nach Zug 4.5.7

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= \frac{6 \cdot (n-6) \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{10}{9} + 1 \cdot \frac{16}{9} + 2 \cdot \frac{5}{2} + 1 \cdot 4}{6 \cdot (n-6) + 11} = \frac{12 \cdot (n-6) + 18}{6 \cdot (n-6) + 11} \\ &= 2 \cdot \frac{n - \frac{9}{2}}{n - \frac{25}{6}} \end{aligned}$$

4.5.8 **2 Komponenten** ($P_1 - P_3$), **2 Farben**: Bob färbt eine neue Kante, so dass ein Weg P_3 der Länge 3 entsteht, dessen Endkanten in der gleichen Farbe gefärbt sind.

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.3.8.

4.5.9 **2 Komponenten** ($P_1 - P_3$), **2 Farben**: Bob färbt eine neue Kante, so dass ein Weg P_3 der Länge 3 entsteht, und Bob benutzt die Farbe des Weges P_1 .

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.3.7.

4.5.10 **2 Komponenten** ($P_1 - P_3$), **3 Farben**: Die mittlere Kante des Weges P_3 ist in der mehrfach benutzten Farbe gefärbt .

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.4.9.

4.5.11 **2 Komponenten** ($P_1 - P_3$), **3 Farben**: Eine der Endkanten des Weges P_3 ist in der mehrfach benutzten Farbe gefärbt.

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.4.10.

4.5.12 **3 Komponenten** ($P_1 - P_1 - P_2$), **2 Farben**: Die beiden Wege der Länge 1 sind in der gleichen Farbe gefärbt.

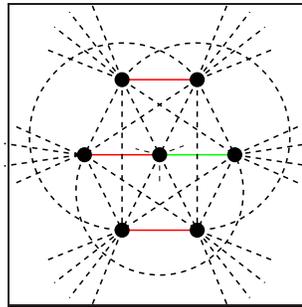


Figure 52: Graph nach Zug 4.5.12

$$\bar{\Phi} = \frac{7 \cdot (n-7) \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{5}{2} + 8 \cdot 4}{7 \cdot (n-7) + 17} = \frac{14 \cdot (n-7) + 47}{7 \cdot (n-7) + 17}$$

4.5.13 **3 Komponenten** ($P_1 - P_1 - P_2$), **2 Farben**: Die beiden Wege der Länge 1 sind in unterschiedlichen Farben gefärbt.

$$\bar{P} = \frac{7 \cdot (n-7) \cdot 2 + 9 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{5}{2} + 4 \cdot 4}{7 \cdot (n-7) + 17} = \frac{14 \cdot (n-7) + 35}{7 \cdot (n-7) + 17}$$

4.5.14 **3 Komponenten** ($P_1 - P_1 - P_2$), **3 Farben**: Die neue Komponente P_1 wird in einer neuen Farbe gefärbt.

$$\bar{\Phi} = \frac{7 \cdot (n-7) \cdot 2 + 11 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{10}{9} + 2 \cdot \frac{5}{4} + 2 \cdot 4}{7 \cdot (n-7) + 17} = \frac{14 \cdot (n-7) + 24 + \frac{20}{9}}{7 \cdot (n-7) + 17}$$

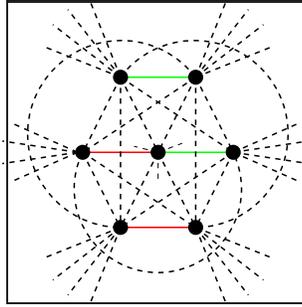


Figure 53: Graph nach Zug 4.5.13

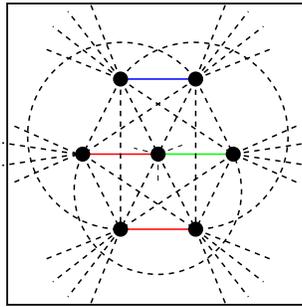


Figure 54: Graph nach Zug 4.5.14

4.6 Hat Alice Zug 3.1.6 (Komponenten $(P_1 - P_2)$, 3 Farben) ausgeführt, so hat Bob die folgenden 13 Möglichkeiten:

4.6.1 1 Komponente, 3 Farben - Weg P_4 :

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.3.5.

4.6.2 1 Komponente, 4 Farben - Weg P_4 :

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.4.5.

4.6.3 1 Komponente, 4 Farben - Baum:

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.2.5.

4.6.4 2 Komponenten (Stern - P_1), 3 Farben:

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.2.6.

4.6.5 2 Komponenten (Stern - P_1), 4 Farben:

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.2.7.

4.6.6 2 Komponenten ($P_2 - P_2$), 3 Farben:

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.5.7.

4.6.7 2 Komponenten ($P_2 - P_2$), 4 Farben:

$$\overline{\Phi} = \frac{6 \cdot (n-6) \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 5 \cdot \frac{10}{9}}{6 \cdot (n-6) + 11} = \frac{12 \cdot (n-6) + \frac{104}{9}}{6 \cdot (n-6) + 11} = 2 \cdot \frac{n - \frac{136}{27}}{n - \frac{25}{6}}$$

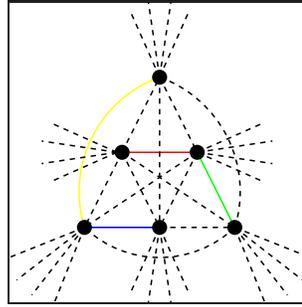


Figure 55: Graph nach Zug 4.6.7

4.6.8 **2 Komponenten** ($P_1 - P_3$), **3 Farben:** Alle Kanten des Weges P_3 sind unterschiedlich gefärbt.

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.4.10.

4.6.9 **2 Komponenten** ($P_1 - P_3$), **3 Farben:** Die Endkanten des Weges P_3 sind in der gleichen Farbe gefärbt.

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.3.9.

4.6.10 **2 Komponenten** ($P_1 - P_3$), **4 Farben:**

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.4.11.

4.6.11 **3 Komponenten** ($P_1 - P_1 - P_2$), **3 Farben:** Bob benutzt die Farbe der Komponente P_1 zum Färben der neuen Kante.

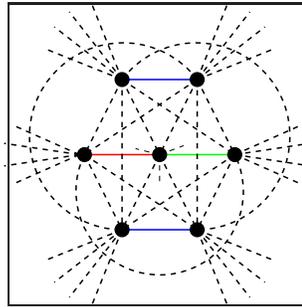


Figure 56: Graph nach Zug 4.6.11

$$\bar{\Phi} = \frac{7 \cdot (n-7) \cdot 2 + 9 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{10}{9} + 4 \cdot 4}{7 \cdot (n-7) + 17} = \frac{14 \cdot (n-7) + 25 + \frac{40}{9}}{7 \cdot (n-7) + 17}$$

4.6.12 **3 Komponenten** ($P_1 - P_1 - P_2$), **3 Farben:** Bob benutzt eine Farbe der Komponente P_2 zum Färben der neuen Kante.

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen aus 4.5.14.

4.6.13 **3 Komponenten** ($P_1 - P_1 - P_2$), **3 Farben:** Bob benutzt eine neue Farbe zum Färben der neuen Kante.

$$\bar{\Phi} = \frac{7 \cdot (n-7) \cdot 2 + 13 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{10}{9}}{7 \cdot (n-7) + 17} = \frac{14 \cdot (n-7) + 13 + \frac{40}{9}}{7 \cdot (n-7) + 17}$$

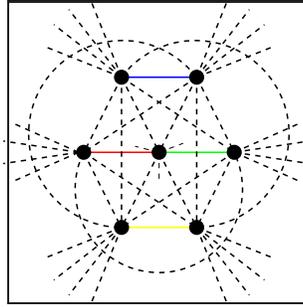


Figure 57: Graph nach Zug 4.6.13

4.7 Hat Alice Zug 3.2.3 (3 Komponenten $(P_1 - P_1 - P_1)$, 1 Farbe) ausgeführt, so hat Bob die folgenden 4 Möglichkeiten:

4.7.1 **2 Komponenten $(P_1 - P_3)$, 2 Farben:** Bob färbt eine Kante, die zwei der Wege P_1 zu einem Weg P_3 verbindet.

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.3.7.

4.7.2 **3 Komponenten $(P_1 - P_1 - P_2)$, 2 Farben:** Bob färbt eine Kante, die nur zu genau einer der gefärbten Kanten benachbart ist.

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.5.12.

4.7.3 **4 Komponenten $(P_1 - P_1 - P_1 - P_1)$, 1 Farbe:**

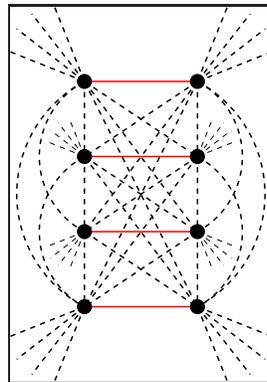


Figure 58: Graph nach Zug 4.7.3

$$\bar{\Phi} = \frac{8 \cdot (n-8) \cdot 2 + 24 \cdot 4}{8 \cdot (n-8) + 24} = 2 \cdot \frac{n-2}{n-5}$$

4.7.4 **4 Komponenten $(P_1 - P_1 - P_1 - P_1)$, 2 Farben:**

$$\bar{\Phi} = \frac{8 \cdot (n-8) \cdot 2 + 12 \cdot 1 + 12 \cdot 4}{8 \cdot (n-8) + 24} = \frac{16(n-8) + 60}{8 \cdot (n-8) + 24} = 2 \cdot \frac{n - \frac{17}{4}}{n-5}$$

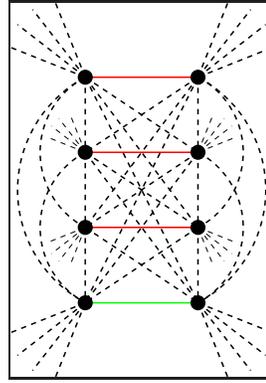


Figure 59: Graph nach Zug 4.7.4

- 4.8 Hat Alice Zug 3.2.4 (3 Komponenten ($P_1 - P_1 - P_1$), 2 Farben) ausgeführt, so hat Bob die folgenden 10 Möglichkeiten:
- 4.8.1 **2 Komponenten ($P_1 - P_3$), 2 Farben:** Bob färbt eine der Verbindungskanten zwischen den farbgleichen Kanten in der zweiten benutzten Farbe.
Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.3.8.
- 4.8.2 **2 Komponenten ($P_1 - P_3$), 3 Farben:** Bob färbt eine Verbindungskante zwischen den farbgleichen Kanten in einer neuen Farbe.
Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.3.9.
- 4.8.3 **2 Komponenten ($P_1 - P_3$), 3 Farben:** Bob färbt eine Verbindungskante zwischen Kanten, die in verschiedenen Farben gefärbt sind.
Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.4.10.
- 4.8.4 **3 Komponenten ($P_1 - P_1 - P_2$), 2 Farben:** Bob färbt eine Kante, die zu genau einer der farbgleichen Kanten adjazent ist.
Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.5.13.
- 4.8.5 **3 Komponenten ($P_1 - P_1 - P_2$), 3 Farben:** Bob färbt eine Kante, die zu genau einer der farbgleichen Kanten adjazent ist, in einer neuen Farbe.
Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.5.14.
- 4.8.6 **3 Komponenten ($P_1 - P_1 - P_2$), 2 Farben:** Bob färbt eine Kante, die zu der Kante benachbart ist, die in der nur einmal benutzten Farbe gefärbt ist, in der bereits mehrfach verwendeten Farbe.
Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.5.12.
- 4.8.7 **3 Komponenten ($P_1 - P_1 - P_2$), 3 Farben:** Bob färbt eine Kante, die zu der Kante benachbart ist, die in der nur einmal benutzten Farbe gefärbt ist, in einer neuen Farbe.
Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.6.11.
- 4.8.8 **4 Komponenten ($P_1 - P_1 - P_1 - P_1$), 2 Farben:** Bob färbt eine Kante, die zu keiner der gefärbten Kanten adjazent ist, so dass drei der Kanten in der gleichen Farbe gefärbt sind.

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.7.4.

4.8.9 **4 Komponenten** ($P_1 - P_1 - P_1 - P_1$), **2 Farben**: Bob färbt eine Kante, die zu keiner der gefärbten Kanten adjazent ist, so dass jeweils zwei der Kanten in der gleichen Farbe gefärbt sind.

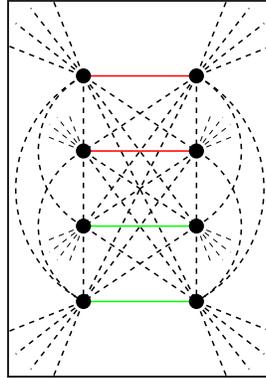


Figure 60: Graph nach Zug 4.8.9

$$\bar{\Phi} = \frac{8 \cdot (n-8) \cdot 2 + 16 \cdot 1 + 8 \cdot 4}{8 \cdot (n-8) + 24} = \frac{16(n-8) + 48}{8 \cdot (n-8) + 24} = 2$$

4.8.10 **4 Komponenten** ($P_1 - P_1 - P_1 - P_1$), **3 Farben**: Bob färbt eine Kante, die zu keiner der gefärbten Kanten adjazent ist, und benutzt eine neue Farbe.

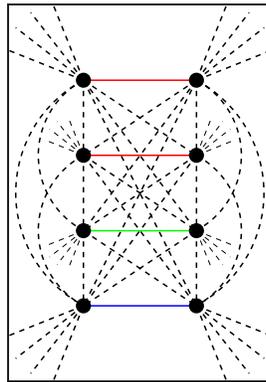


Figure 61: Graph nach Zug 4.8.10

$$\bar{\Phi} = \frac{8 \cdot (n-8) \cdot 2 + 20 \cdot 1 + 4 \cdot 4}{8 \cdot (n-8) + 24} = \frac{16(n-8) + 36}{8 \cdot (n-8) + 24} = 2 \cdot \frac{n - \frac{23}{4}}{n-5}$$

4.9 Hat Alice Zug 3.3.5 (3 Komponenten ($P_1 - P_1 - P_1$), 3 Farben) ausgeführt, so hat Bob die folgenden 6 Möglichkeiten:

4.9.1 **2 Komponenten** ($P_1 - P_3$), **3 Farben**: Bob färbt eine Verbindungskante zwischen zwei der gefärbten Kanten und benutzt dazu die Farbe der dritten bereits gefärbten Kante.

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.4.9.

4.9.2 **2 Komponenten** ($P_1 - P_3$), **4 Farben**: Bob färbt eine Verbindungskante zwischen zwei der gefärbten Kanten in einer neuen Farbe.

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.4.11.

4.9.3 **3 Komponenten** ($P_1 - P_1 - P_2$), **3 Farben**: Bob färbt eine Kante, die zu genau einer der gefärbten Kanten adjazent ist, in der Farbe einer anderen bereits gefärbten Kante.

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.5.14.

4.9.4 **3 Komponenten** ($P_1 - P_1 - P_2$), **4 Farben**: Bob färbt eine Kante, die zu genau einer der gefärbten Kanten adjazent ist, in einer neuen Farbe.

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.6.13.

4.9.5 **4 Komponenten** ($P_1 - P_1 - P_1 - P_1$), **3 Farben**: Bob färbt eine Kante, die zu keiner der gefärbten Kanten adjazent ist.

Der entstehende Graph ist isomorph zum Graphen nach Zug 4.8.10.

4.9.6 **4 Komponenten** ($P_1 - P_1 - P_1 - P_1$), **4 Farben**: Bob färbt eine Kante, die zu keiner der gefärbten Kanten adjazent ist, in einer neuen Farbe.

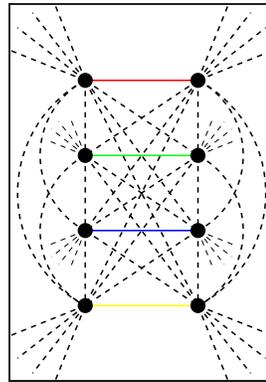


Figure 62: Graph nach Zug 4.9.6

$$\bar{\Phi} = \frac{8 \cdot (n - 8) \cdot 2 + 24 \cdot 1}{8 \cdot (n - 8) + 24} = 2 \cdot \frac{n - \frac{13}{2}}{n - 5}$$

7.2. Bemerkungen zur Komplexität des Kantenfärbungsspiels

Wie man sieht steigt die Anzahl der möglichen Spielpositionen, die aus den Zügen der Spieler resultieren, schnell mit der Anzahl der Spielzüge an. Spielen Alice und Bob das Kantenfärbungsspiel auf dem K_n mit der Farbmenge $F = \{1, \dots, k\}$, so hat Alice im ersten Zug $\|K_n\| = \frac{n(n-1)}{2}$ Kanten zur Auswahl, die sie in jeweils k Farben färben kann. Dies ergibt $\frac{n(n-1)}{2} * k$ Zugmöglichkeiten. Bob kann daraufhin im zweiten Zug die $2(n-2)$ Kanten, die zu der von Alice gefärbten Kante benachbart sind, in jeweils $k-1$ Farben färben, und für die übrigen $\|K_n\| - (2(n-2)+1)$ Kanten hat er alle k Farben zur Auswahl. Das ergibt insgesamt $(\|K_n\| - (2(n-2)+1)) * k + 2(n-2)(k-1)$ Möglichkeiten seinen Zug zu wählen. Während zu Spielbeginn alle Züge von Alice zu isomorphen Färbungen führen, können durch die Färbung weiterer Kanten verschiedene nicht isomorphe Graphenfärbungen entstehen. Für Bobs anschließenden Zug sind das zum Beispiel die Fälle 2.1-2.3 im Abschnitt 7.1, so dass die Anzahl der möglichen Folgezüge und der durch sie entstehenden nicht isomorphen Graphenfärbungen dann jeweils von der aktuellen Spielposition abhängt. Für die nächsten $\|K_n\| - 2$ Züge läßt sich also nur die minimale Anzahl von Zugmöglichkeiten, über die die Spieler verfügen, angeben.

Satz 7.1 Spielen Alice und Bob das Kantenfärbungsspiel auf dem K_n mit der Farbmenge $F = \{1, \dots, k\}$, so haben die Spieler beim j -ten Zug ($j \leq \frac{n}{2}$) mindestens

$$m_j := \|K_{n-2j}\| \cdot k + 2j(n-2j) \cdot (k-1) + (\|K_{2j}\| - j) \cdot (k-2)$$

Möglichkeiten einen Folgezug zu wählen.

Beweis:

In den ersten $\frac{n}{2}$ Zügen kann immer eine neue Farbe zur Färbung verwendet werden, und durch die Wahl von Kanten aus einer unabhängigen Kantenmenge kann immer eine Kante gefärbt werden, die zu keiner der anderen gefärbten Kanten adjazent ist. Dadurch wird die Auswahl an Farben zur Färbung der übrigen Kanten am stärksten eingeschränkt, denn je mehr Knoten mit gefärbten Kanten inzidieren, desto weniger Möglichkeiten verbleiben zur Färbung der übrigen ungefärbten Kanten. Nach dem j -ten Zug gibt es dann $n-2j$ Knoten, die nicht inzident zu gefärbten Kanten sind, und die $\|K_{n-2j}\|$ Kanten zwischen diesen Knoten können in allen k verfügbaren Farben gefärbt werden. Die j gefärbten Kanten inzidieren mit $2j$ Knoten. Alle $\|K_{2j}\| - j$ ungefärbten Kanten, die diese Knoten verbinden, sind adjazent zu zwei verschiedenen gefärbten Kanten. Zu ihrer Färbung stehen daher nur jeweils $k-2$ Farben zur Verfügung. Die übrigen $2j(n-2j)$ Kanten sind zu genau einer gefärbten Kante benachbart und können daher jeweils in $k-1$ Farben gefärbt werden. Dies ergibt zusammen $\|K_{n-2j}\| \cdot k + 2j \cdot (n-2j) \cdot (k-1) + (\|K_{2j}\| - j) \cdot (k-2)$ Möglichkeiten. \square

Betrachten wir nun den Spielbaum des Graphenfärbungsspieles. Dann ist die Anzahl der Strategien (vgl. Abschnitt 1.3 auf Seite 8) des Spielers i gleich dem Produkt $\prod_{j=1}^{j=k_i} m_j$. Der Parameter k_i ist die Anzahl der Informationsmengen, also hier die Anzahl aller möglichen Spielpositionen, in denen sich der Spieler i befinden kann⁴⁴, und m_j ist für

⁴⁴Spielsituationen, denen isomorphe Graphenfärbungen entsprechen werden hier mehrfach gezählt.

jede dieser Spielsituationen die Anzahl der möglichen Züge. Selbst wenn Alice und Bob in jeder Spielsituation nur $m_j = 2$ mögliche Züge zur Auswahl hätten, ergäbe dies beim Spiel auf dem K_n für Alice eine Anzahl von

$$2^{k_A} \quad \text{mit} \quad k_A = \sum_{\substack{0 < j \leq \|K_n\| \\ j \text{ gerade}}} 2^j + 1$$

Strategien und für Bob eine Anzahl von

$$2^{k_B} \quad \text{mit} \quad k_B = \sum_{\substack{0 < j \leq \|K_n\| \\ j \text{ ungerade}}} 2^j$$

Strategien. Um zu überprüfen, welche dieser Strategien Gewinnstrategien darstellen, müsste man also für alle $k_A * k_B = 2^{\sum_{j=0}^{\|K_n\|} 2^j}$ Paarungen der Strategien der beiden Spieler den jeweiligen Gewinner des Spiels bestimmen. Das ist offensichtlich selbst für vollständige Graphen kleiner Ordnung nicht mehr ohne Computerhilfe möglich, und zudem haben die Spieler bei vielen Zügen nach Satz 7.1 weit mehr als zwei Alternativen zur Auswahl, wodurch die Anzahl der verschiedenen Strategien weiter erhöht wird. Dadurch wird die Bestimmung der Gewinnstrategien durch das Ausprobieren aller Möglichkeiten für Graphen größerer Ordnung auch mit dem Computer unmöglich.

Die Anzahl tatsächlicher (partieller) Färbungen des Graphen ist weitaus geringer. Insgesamt sind $\|K_n\|^k$ verschiedene Färbungen des vollständigen Graphen K_n mit k Farben möglich, wobei einige dieser Färbungen nicht zulässig sind und einige der zulässigen Färbungen wiederum isomorphe Färbungen darstellen⁴⁵.

⁴⁵Die Anzahl der nicht isomorphen Färbungen ist geringer als die Anzahl der Zugmöglichkeiten, nicht nur, weil die Färbung verschiedener Kanten in verschiedenen Farben eventuell zu isomorphen Färbungen führt, sondern auch, weil es nicht auf die Reihenfolge ankommt, in der die Kanten gefärbt werden.

8. Ausblick

In diesem Abschnitt sollen nochmals zusammenfassend die Ergebnisse dieser Arbeit sowie die bei der Bearbeitung der Fragestellung auftretenden Probleme dargestellt werden.

8.1. Übersicht über die Ergebnisse dieser Arbeit

Der Hauptteil dieser Arbeit beschäftigt sich mit einer Potentialfunktion, die wir auf den ungefärbten Kanten eines Graphen definieren. Der Potentialwert einer Kante gibt Auskunft darüber, für welchen der Spieler im Kantenfärbungsspiel die Färbung des Graphen in der „Umgebung“ der betrachteten Kante günstiger ist. Diese Tatsache haben wir benutzt, um mit Hilfe dieser Potentialfunktion Strategien für die beiden Spieler zu definieren.

Dies geschah mit dem Ziel, das Kantenfärbungsspiel auf der Klasse der vollständigen Graphen näher zu untersuchen. Denn für diese Graphen führen die bisher zur Bestimmung der spielchromatischen Indizes eines Graphen verwendeten Methoden zu keinen gegenüber allgemeinen Abschätzungen verbesserten Resultaten.

Computereperimente, mit denen wir das Kantenfärbungsspiel auf den vollständigen Graphen mit den neuen Strategien simuliert haben, führten zu guten Ergebnissen. Gut in dem Sinne, dass es Bob mit seiner Potentialminimierungsstrategie gelingt, die Anzahl der Farben, die zur vollständigen zulässigen Färbung des Graphen im Spiel benötigt werden, gegenüber dem chromatischen Index des Graphen zu erhöhen.

Daher haben wir in den nächsten Kapiteln untersucht, ob sich die Existenz von erhöhten unteren Schranken für die spielchromatischen Indizes der vollständigen Graphen mit Hilfe des Ansatzes der Potentialminimierung auch theoretisch zeigen lässt. Dieser Ansatz beruht auf der Idee zu zeigen, dass Bob durch die Wahl der zu färbenden Kanten und der zu verwendenden Farben den mittleren Potentialwert der ungefärbten Kanten unter einer gewissen Schranke halten kann, und aus diesem Wert wiederum Rückschlüsse auf die Anzahl der zur Färbung des Graphen benötigten Farben zu ziehen.

Als ersten Schritt zur Abschätzung der Potentialwerte haben wir alle möglichen Änderungen des Potentialwertes einer einzelnen Kante, die durch ein Zugpaar von Alice und Bob auftreten können, bestimmt, und in Abhängigkeit vom alten Potentialwert Abschätzungen für den neuen Potentialwert dieser Kante berechnet.

Das Problem bei diesen Berechnungen liegt darin, dass man für die Abschätzungen des Potentialwertes einer ungefärbten Kante nach einer gewissen Anzahl von Zügen alle zulässigen Verteilungen der gefärbten Kanten und der benutzten Farben, die durch die vorangegangenen Züge entstanden sein können, berücksichtigen muss: Welche bzw. wie viele der zu einer Kante benachbarten Kanten können bereits gefärbt sein und welche bzw. wie viele Farben wurden zu deren Färbung verwendet? Aufgrund der großen Anzahl der Zugmöglichkeiten ist es äußerst schwierig, alle diese Möglichkeiten in einer Abschätzung des Potentialwertes zu berücksichtigen.

Die Vorteile der Potentialfunktion liegen daher klar im praktischen Spiel. Hier führen die mit ihrer Hilfe definierten Potentialstrategien zu guten Ergebnissen, da man beim Vergleich zwischen verschiedenen möglichen Folgespielständen durch die Berechnung des

mittleren Potentialwertes der ungefärbten Kanten ein gutes Maß dafür erhält, wie günstig der jeweilige Zug relativ zu den anderen möglichen Zügen für die Spieler ist. Der mittlere Potentialwert der ungefärbten Kanten einer einzelnen Spielsituation ist dagegen nicht sehr aussagekräftig. Im Allgemeinen lassen sich keine Rückschlüsse aus dem mittleren Potentialwert der ungefärbten Kanten eines Graphen auf die jeweilige Färbung des Graphen oder die Existenz von kritischen Kanten ziehen.

Probleme mit der Potentialfunktion

Je nachdem, ob man die Potentialfunktion bei theoretischen Überlegungen, oder im praktischen Spiel verwendet, zeigen sich verschiedene Probleme, die eventuell durch die Definition einer modifizierten Potentialfunktion behoben werden können.

Kritische Kanten und Färbbarkeit des Graphen Die hier definierte Potentialfunktion lässt im Allgemeinen keine Rückschlüsse vom Potentialwert auf die zulässige Färbbarkeit einer Kante zu. Allgemein sagt der Potentialwert einer ungefärbten Kante wenig darüber aus, wie viele der adjazenten Kanten bereits gefärbt sind. Zwei Kanten können die gleichen Potentialwerte haben, obwohl eine unterschiedliche Anzahl benachbarter Kanten mit mehr oder weniger Farben gefärbt sind.

Nichteindeutigkeit der Potentialstrategien In einer gegebenen Spielsituation liefert der Potentialmittelwert der ungefärbten Kanten keine Gewichtung der möglichen Züge, die diese hinsichtlich der direkten Wirkung auf das Spielergebnis bewertet, sondern sie bewertet einen möglichen Folgezug nur in Relation zu den anderen Zugmöglichkeiten. Das Ergebnis dieses Vergleichs ist jedoch nicht immer eindeutig. Es gibt Situationen, in denen die zu färbende Kante und die hierzu zu verwendende Farbe nicht eindeutig durch die Bedingung der Maximierung bzw. Minimierung des mittleren Potentialwertes der ungefärbten Kanten bestimmt ist.

Während die im ersten Punkt angesprochene Problematik vor allem bei theoretischen Überlegungen zu Schwierigkeiten führt, wirkt sich der zweite Punkt auf das praktische Spiel aus. Hierzu stellt sich die folgende Frage:

Frage 1: Welche Zusatzbedingungen sichern beim Kantenfärbungsspiel mit Potentialstrategien (auf den vollständigen Graphen) die Wahl der für den jeweiligen Spieler besten Farbe und Kante?

Da nach einer Zusatzbedingung gefragt ist, handelt es sich hier nicht um die im Sinne einer Gewinnstrategie optimale Farbe und Kante, sondern nur um die beste Wahl, die unter Einhaltung der Bedingung der Potentialmaximierung bzw. -minimierung möglich ist. Mögliche Zusatzbedingungen bei der Farb- und Kantenwahl könnten zum Beispiel die Gesamtzahl der bereits in einer möglichen Farbe gefärbten Kanten berücksichtigen, sowie deren Verteilung, das heißt die jeweiligen Färbungsgrade und Knotenfarbmengen. Das könnte man tun, indem man auch die Potentialwerte gefärbter Kanten definiert und als weiteres Kriterium bei der Zugwahl benutzt.

8.2. Weitere offene Fragen

In Beispiel 2.2 haben wir anhand eines Gegenbeispiels gezeigt, dass die spielchromatische Zahl χ_g kein monotoner Parameter ist. Gilt dies auch für den spielchromatischen Index?

Frage 2: Ist der spielchromatische Index χ'_g ein *monotoner Parameter*?
 Beziehungsweise für welche Graphen G gilt: Ist $H \subset G$ ein Teilgraph von G , dann folgt $\chi_g(H) \leq \chi_g(G)$? Für welche Graphen(klassen) gilt dies nicht?

Man könnte meinen diese Frage erübrige sich, da wie wir ja gezeigt haben, dass die Kantenfärbungsspiele ein Spezialfall der Knotenfärbungsspiele sind. Dies ist jedoch nicht der Fall, da die Knotenfärbungsspiele eine echte Verallgemeinerung der Kantenfärbungsspiele sind und die Graphen $K_{r,r}$ ($r \geq 3$) aus dem gewählten Gegenbeispiel genau zu der Menge von Graphen gehören, die nicht Liniengraph eines anderen Graphen sind. Dies verdeutlicht nochmals das folgende Beispiel.

Beispiel 8.1 Für den Teilgraphen $H_3 \subset K_{3,3}$ des vollständig bipartiten Graphen $K_{3,3}$ gilt: $H_3 = \mathcal{L}(C_6)$. Zu dem Graphen $K_{3,3}$ hingegen gibt es keinen Graphen G , so dass $\mathcal{L}(G) = K_{3,3}$ gilt. Denn gäbe es einen solchen Graphen G , so müsste jede seiner Kanten adjazent zu drei anderen Kanten sein, die aber paarweise nicht benachbart sein dürfen. Dies ist offensichtlich nicht möglich und die Menge $\mathcal{L}^{-1}(K_{3,3})$ ist also leer.

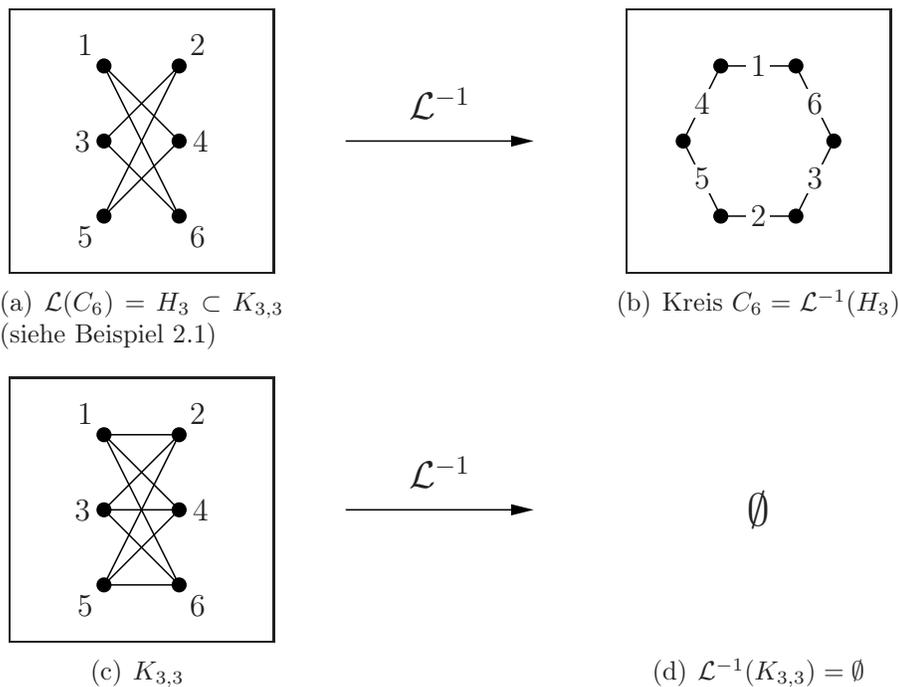


Abbildung 63: Nicht jeder Graph ist Liniengraph eines anderen Graphen

Lam, Shiu und Xu stellen in [34] die Frage (vgl. auch Seite 13) nach der Existenz einer Konstante $c \in \mathbb{N}$, so dass für jeden Graphen G $\chi'_g(G) \leq \chi'(G) + c$ gilt. Die

Computorexperimente in Kapitel 5 auf Seite 38 lassen vermuten, dass es keine solche Konstante gibt. Es scheint vielmehr bei den vollständigen Graphen -wenn überhaupt- einen linearen Zusammenhang zwischen diesen Größen zu geben. Deshalb stellen wir die modifizierte Frage:

Frage 3: Gibt es Konstanten $c, d \in \mathbb{R}$, so dass für jeden Graphen G gilt:

$$\chi'_g(G) \leq c \cdot \chi(G) + d?$$

Wir wiederholen auch die Frage aus Abschnitt 5.3 auf Seite 42:

Frage 4: Angenommen es gilt $\chi'_g(G) = k$ für einen Graphen G . Hat Alice dann auch für jedes $k' > k$ eine Gewinnstrategie für das Kantenfärbungsspiel auf G mit der Farbmenge $\{1, \dots, k'\}$. In anderen Worten: Ist das hier betrachtete Kantenfärbungsspiel schönes Spiel?

Im Falle, dass unser Kantenfärbungsspiel kein schönes Spiel ist, stellt sich die Frage nach der größten Zahl $k \in \mathbb{N}$, so dass Bob eine Gewinnstrategie für das Kantenfärbungsspiel auf dem Graphen G mit k Farben besitzt. Dieses k nennt man den *oberen spielchromatischen Index* $\overline{\chi'_g(G)}$ von G . Existiert kein solches k setzen wir $\overline{\chi'_g(G)} = -1$. Es gilt also immer $\chi'_g(G) \leq \overline{\chi'_g(G)} + 1$ und im Falle der schönen Spiele steht hier das Gleichheitszeichen⁴⁶. Vielleicht hängt es aber auch allgemein von dem zu färbenden Graphen G ab, ob das Kantenfärbungsspiel auf G ein schönes Spiel ist oder nicht. Wir können also auch fragen:

Frage 5: Für welche Graphen G gilt $\chi'_g(G) = \overline{\chi'_g(G)} + 1$, für welche Graphen gilt dies nicht? Welchen Wert haben dann $\overline{\chi'_g(G)}$ und $\chi'_g(G)$?

Weitere offene Probleme sind natürlich die Verbesserung der im Abschnitt 2.2 auf Seite 14 beschriebenen bisherigen Ergebnisse und die genaue Bestimmung der spielchromatischen Zahlen und Indizes weiterer komplizierterer Graphenklassen. Besondere Bedeutung hat hierbei sicher die Klasse der planaren Graphen, für die es nach und nach gelungen ist, immer bessere Abschätzungen der spielchromatischen Zahl zu zeigen.

Ein weiteres interessantes und sehr komplexes Problem ist die Umkehrung der Fragestellung: Anstatt eine Graphenklasse vorzugeben und nach ihrer spielchromatischen Zahl zu fragen, könnte man auch umgekehrt vorgehen und eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ vorgeben, um dann alle Graphen zu bestimmen, deren spielchromatische Zahlen bzw. Indizes genau gleich n sind.

Auch die Untersuchung des Graphenfärbungsspieles unter anderen Zulässigkeitsbedingungen an die Färbung ergibt interessante Fragestellungen. Als Beispiele seien hier die bereits auf Seite 18 beschriebenen relaxierten und asymmetrischen Graphenfärbungsspiele erwähnt, oder das Graphenfärbungsspiel unter der Bedingung der Listenfärbung.

⁴⁶Vgl. auch Abschnitt 3.3 in [1].

A. Programmcode der Spielsimulation mit Potentialstrategien

In diesem Anhang befindet sich der Java-Quellcode des Programms, welches zur Simulation des Kantenfärbungsspiels mit Potentialstrategien in dieser Arbeit benutzt wurde. Die Ergebnisse in Tabelle 2 auf Seite 39 wurden mit diesem Programm ermittelt, wobei zur Änderung der von Alice und Bob benutzten Potentialstrategien kleine Änderungen im Quelltext des Programms vorgenommen werden müssen.

A.1. Verwendete Klassen

Das Programm ist im Paket `completeGraphColoring` enthalten und besteht aus den drei öffentlichen Klassen `completeGraphColoring`, `TextWriter` und `Set`. Die Klassen haben folgende Aufgaben:

`completeGraphColoring` enthält die `main`-Methode des Programms, implementiert die Potentialstrategien der beiden Spieler und regelt den gesamten Spielablauf. Hierzu instantiiert sie für die entsprechenden Hilfsfunktionen auch Objekte der anderen beiden Klassen.

`TextWriter` ist für die Ausgabe der berechneten mittleren Potentialwerte nach den einzelnen Zügen der Spieler zuständig. Sie schreibt diese in Tabellenform in eine Datei im \LaTeX -Format. Der Name der Ausgabedatei, in die geschrieben werden soll, muss dem Konstruktor der Klasse übergeben werden.

`Set` implementiert die Datenstruktur einer Menge und stellt einfache Mengenoperationen auf dieser Datenstruktur bereit. Sie wird benutzt, um die Knoten- und Kantenfarbmengen darzustellen.

Außerdem werden Klassen der Java-Standardbibliothek verwendet. Neben den Klassen im Paket `java.lang` benutzt die Klasse `TextWriter` einige Klassen des Pakets `java.io`, die Methoden zum Schreiben in eine Ausgabedatei bereitstellen.

A.2. Programmablauf

Das Programm startet in der `main`-Methode der Klasse `completeGraphColoring`. Diese instantiiert neue Objekte der Klasse `completeGraphColoring` und `TextWriter`, und ruft dann die Methode `starten(int startwert, int endwert)` auf. Die beiden der Methode übergebenen Parameter bestimmen den Grad der vollständigen Graphen, auf denen das Spiel durchgeführt werden soll. In zwei Schleifen wird dann das Graphenfärbungsspiel auf dem vollständigen Graphen K_n mit $\text{startwert} \leq n \leq \text{endwert}$ mit den Farbmengen $F = \{1, \dots, f\}$ für $n - 1 \leq f \leq \lfloor \frac{3}{2}n \rfloor$ ausgeführt. Die Methode `initialisieren(int order, int farbenZahl)` initialisiert dabei jeweils alle Spieleinstellungen für ein neues Spiel, während die Methode `kantenFaerben()` den eigentlichen Spielablauf regelt. Je nachdem welcher Spieler `spieler` am Zug ist, ruft sie eine der

Methoden `maximierendeKante()` oder `minimierendeKante()` auf, welche den nächsten Zug des Spielers gemäß der Potentialmaximierungs- beziehungsweise der Potentialminimierungsstrategie berechnen.

Man beachte, dass dieser Zug im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt ist, da es mehrere Züge geben kann, die zum gleichen maximalen beziehungsweise minimalen mittleren Potentialwert führen. Welche Kante der Spieler jeweils färbt ist also durch die jeweilige Implementierung der Methode bestimmt, das heißt hier, die Reihenfolge, in welcher die Kanten untersucht werden und welche der Kanten, die zu gleichen mittleren Potentialwerten führen, in der Ordnung ihres Auftretens gewählt wird (vgl. auch Abschnitt 4.3). Um zwischen den in Tabelle 2 benutzten Potentialmaximierungsstrategien ‘>’ und ‘≥’ beziehungsweise den Potentialminimierungsstrategien ‘<’ und ‘≤’ zu wechseln, müssen an den angegebenen Stellen im Quelltext der Methoden `maximierendeKante()` beziehungsweise `minimierendeKante()` jeweils die entsprechenden Vergleichsoperatoren eingesetzt werden.

Der berechnete Zug wird anschließend ausgeführt und der mittlere Potentialwert wird von der Methode `TextWriter.writePotential(int spieler, double potential)` als Zwischenergebnis in die Ausgabedatei geschrieben. Anschließend ruft sich die Methode rekursiv erneut auf, wobei zuvor die beiden Kriterien für das Spielende überprüft werden:

- Sind durch die weitere Färbung des Graphen kritische Kanten entstanden?
- Ist der Graph vollständig zulässig gefärbt?

Trifft eines der Kriterien zu, wird das aktuelle Spiel beendet, der Gewinner des Spiels durch die Methode `TextWriter.endTable(int spieler)` in die Ausgabedatei geschrieben, und das nächste Spiel mit den von der Methode `starten(int startwert, int endwert)` bestimmten Parametern gestartet.

Die genaue Arbeitsweise der verschiedenen Methoden entnehme der interessierte Leser bitte dem beigefügten Quelltext des Programms. Dieser ist durch weitere Kommentare ergänzt, welche die Funktion und das Verhalten der Variablen und Methoden erklären.

A.3. Quelltext des Pakets `completeGraphColoring`

Die folgenden Unterkapitel enthalten den Quelltext des Pakets `completeGraphColoring` mit den drei im Programm verwendeten Klassen.

A.3.1. Die Klasse `completeGraphColoring`

```
package completeGraphColoring;

/**
 * Diese Klasse implementiert das Kantenfärbungsspiel auf
 * vollständigen Graphen. Alice und Bob benutzen jeweils
 * Potentialstrategien.
 */
```

```
public class CompleteGraphColoring {
/**
 * Ordnung des vollständigen Graphen
 */
int order;

/**
 * Anzahl der zur Verfügung stehenden Farben
 */
int farbenZahl;

/**
 * Repräsentation des vollständigen Graphen mit (partieller)
 * Färbung. Der Eintrag (i,j) entspricht der Kante mit den Endknoten
 * i und j. Ist der Eintrag negativ, so ist die Kante ungefärbt.
 * Ansonsten gibt die Zahl die Farbe an, in der die Kante gefärbt
 * ist.
 */
int[][] graph;

/**
 * Variable gibt an, welcher Spieler am Zug ist: 1 entspricht Alice,
 * -1 Bob
 */
byte spieler;

/**
 * Variable, für die Anzahl der Kanten des vollständigen Graphen
 */
int kantenzahl;

/**
 * Der Wert gibt an, wie viele Kanten bereits gefärbt sind und dient
 * dazu, das Spiel nach "zug"="kantenzahl" Zügen zu beenden.
 */
int zug;

/**
 * In dieser Variable wird die von der Potentialstrategie ermittelte
 * Kante gespeichert, deren Färbung zum größten (bisherigen)
 * mittleren Potentialwert führt.
 */
int[] maxKante = new int[2];
```

```
/**
 * In dieser Variable wird die von der Potentialstrategie ermittelte
 * Kante gespeichert, deren Färbung zum kleinsten (bisherigen)
 * mittleren Potentialwert führt.
 */
int[] minKante = new int[2];

/**
 * In dieser Variable wird die von der Potentialstrategie ermittelte
 * Farbe gespeichert, die zur Färbung der maximierenden bzw.
 * minimierenden Kante verwendet wird.
 */
int farbe;

/**
 * (bisheriger) Wert des minimalen mittleren Potentials
 */
double minPotential;

/**
 * (bisheriger) Wert des maximalen mittleren Potentials
 */
double maxPotential;

/**
 * Objekt der Klasse TexWriter zur Ausgabe der Zwischenergebnisse
 */
TexWriter writer;

/**
 * Erzeugt eine neue Klasse CompleteGraphColoring und startet die
 * Ausgabe der durch die Potentialstrategien berechneten mittleren
 * Potentiale im LaTeX-Format in der Ausgabedatei "Ausgabe"
 */
public CompleteGraphColoring() {
    writer = new TexWriter("Ausgabe");
}

/**
 * Initialisiert das Färbungsspiel auf dem vollständigen Graphen
 *
 * @param order
 *           Ordnung des vollständigen Graphen
 * @param farbenZahl
```

```
*           Anzahl der im Spiel zu verwendenden Farben
*/
void initialisieren(int order, int farbenZahl) {
    this.order = order;
    this.farbenZahl = farbenZahl;
    graph = new int[order][order];
    for (int i = 0; i < order; i++) {
        for (int j = 0; j < order; j++) {
            graph[i][j] = -1; // alle Kanten sind bei Spielbeginn
                               // ungefaerbt
        }
    }
    kantenzahl = (order * (order - 1)) / 2;
    spieler = 1; // Alice beginnt
    zug = 1;
}

/**
 * Bestimmt die Knotenfarbmenge des Knotens a, also die Farben,
 * welche an zum Knoten inzidenten Kanten bereits verwendet werden
 *
 * @param a
 *       Nummer des Knotens
 * @return Menge der verwendeten Farben
 */
Set farben(int a) {
    Set farben = new Set(farbenZahl);
    for (int i = 0; i < order; i++) {
        if (graph[a][i] >= 0) {
            farben.add(graph[a][i]);
        }
    }
    return farben;
}

/**
 * Berechnet das Potential der Kante mit den Endknoten i und j
 *
 * @param i
 * @param j
 * @return Potentialwert
 */
double potential(int i, int j) {
    if (farben(i).size() > 0 || farben(j).size() > 0) {
```

```

        return 2
            * (Math.pow(farben(i).size(), 2) + Math
                .pow(farben(j).size(), 2))
            / Math.pow((Set.union(farben(i), farben(j))).size(), 2);
    } else
        return 0;
}

/**
 * Berechnet das mittlere Potential der ungefärbten Kanten, wobei
 * zur Mittelwertbildung nur das Potential von ungefärbten Kanten
 * berücksichtigt wird, die zu mindestens einer gefärbten Kante
 * benachbart sind. (Nur wenn das Potential einer Kante ungleich
 * Null ist, also inzidente Kanten bereits gefärbt sind, wird die
 * Anzahl der Kanten, durch die bei der Mittelwertbildung dividiert
 * wird, erhöht.)
 *
 * @return Mittlerer Potentialwert
 */
double potentialMittel() {
    double ergebnis = 0;
    int anzahl = 0;
    for (int i = 0; i < order; i++) {
        for (int j = 0; j < i; j++) {
            if (graph[i][j] < 0) { // es wird der Potentialmittelwert der
                // ungefärbten Kanten berechnet
                ergebnis = ergebnis + potential(i, j);
                if (potential(i, j) != 0) {
                    anzahl++;
                }
            }
        }
    }
    return ergebnis / anzahl;
}

/**
 * Methode bestimmt den Spielablauf und dokumentiert den
 * Spielverlauf durch Schreiben in die Ausgabedatei und auf die
 * Konsole
 */
void kantenFaerben() {
    if (zug > kantenzahl) { // alle Kanten sind gefaerbt und das
        // Spiel wird beendet

```

```
        writer.endTable(1);
    } else if (spieler == 1) { // Alice ist am Zug
        System.out.println("Alice zieht");
        maximierendeKante();
        graph[maxKante[0]][maxKante[1]] = farbe;
        graph[maxKante[1]][maxKante[0]] = farbe;
        if (zug < kantenanzahl) {
            writer.writePotential(1, maxPotential);
        } else {
            writer.writePotential(1, 0); // Ende des Spiels, es gibt
            // keine ungefärbten Kanten mehr
        }
        System.out.println("kante " + maxKante[0] + " - " + maxKante[1]
            + " mit Farbe " + farbe);
        spieler = -1;
        zug++;
        if (kritischeKante()) {
            writer.endTable(-1);
        } else {
            kantenFaerben();
        }
    } else if (spieler == -1) { // Bob ist am Zug
        System.out.println("Bob zieht");
        minimierendeKante();
        graph[minKante[0]][minKante[1]] = farbe;
        graph[minKante[1]][minKante[0]] = farbe;
        if (zug < kantenanzahl) {
            writer.writePotential(-1, minPotential);
        } else {
            writer.writePotential(-1, 0); // Ende des Spiels, es
            // gibt keine ungefärbten Kanten mehr
        }
        System.out.println("kante " + minKante[0] + " - " + minKante[1]
            + " mit Farbe " + farbe);
        spieler = 1;
        zug++;
        if (kritischeKante()) {
            writer.endTable(-1);
        } else {
            kantenFaerben();
        }
    }
}
```

```

/**
 * Diese Methode implementiert Bobs Potentialminimierungsstrategie.
 * Alle Kanten werden nacheinander durchlaufen, indem in zwei
 * schleifen alle möglichen Kombinationen von Endknoten betrachtet
 * werden. Ist eine Kante ungefärbt und dieser Zug nicht der letzte,
 * so wird für alle zulässigen Farben der mittlere Potentialwert
 * berechnet. Ist dieser Wert kleiner als das bisherige Minimum, so
 * werden die gefärbte Kante und die verwendete Farbe in den
 * Variablen "minKante" und "farbe" gespeichert. Handelt es sich
 * dagegen um den letzten Zug, so wird die letzte ungefärbte Kante
 * in der ersten zulässigen Farbe gefärbt.
 */
void minimierendeKante() {
    minPotential = 5;
    for (int i = 0; i < order; i++) {
        for (int j = 0; j < i; j++) {
            if (graph[i][j] < 0) { // die Kante ist ungefärbt
                if (zug < kantenzahl) { // es ist nicht der letzte
                    // Zug
                    for (int k = 0; k < farbenZahl; k++) {
                        if (!(unzulaessigeFarbe(i, j).contains(k))) {
                            graph[i][j] = k;
                            graph[j][i] = k;
                            if (potentialMittel() < minPotential) {
                                /*
                                 * benutzt man hier "<=" anstelle
                                 * von "<" kann dies zur Wahl einer
                                 * anderen minimierenden Kante
                                 * führen
                                 */
                                minPotential = potentialMittel();
                                minKante[0] = i;
                                minKante[1] = j;
                                farbe = k;
                            }
                        }
                    }
                }
            }
        }
    }
    graph[i][j] = -1;
    graph[j][i] = -1;
} else { // dieser Zug faerbt die letzte ungefärbte
    // Kante des Graphen
    for (int k = 0; k < farbenZahl; k++) {
        if (!(unzulaessigeFarbe(i, j).contains(k))) {
            minKante[0] = i;

```

```

        minKante[1] = j;
        farbe = k;// die erste passende Farbe
        // wird verwendet
        break;
    }
}
}
}
}
}
}
}
}
}

/**
 * Diese Methode implementiert Alices
 * Potentialmaximierungsstrategie. Alle Kanten werden nacheinander
 * durchlaufen, indem in zwei schleifen alle möglichen Kombinationen
 * von Endknoten betrachtet werden. Ist eine Kante ungefärbt und
 * dieser Zug nicht der letzte, so wird für alle zulässigen Farben
 * der mittlere Potentialwert berechnet. Ist dieser Wert größer als
 * das bisherige Maximum, so werden die gefärbte Kante und die
 * verwendete Farbe in den Variablen "maxKante" und "farbe"
 * gespeichert. Handelt es sich dagegen um den letzten Zug, so wird
 * die letzte ungefärbte Kante in der ersten zulässigen Farbe
 * gefärbt.
 */
void maximierendeKante() {
    maxPotential = 0;
    for (int i = 0; i < order; i++) {
        for (int j = 0; j < i; j++) {
            if (graph[i][j] < 0) {
                if (zug < kantenzahl) {
                    for (int k = 0; k < farbenZahl; k++) {
                        if (!(unzulaessigeFarbe(i, j).contains(k))) {
                            graph[i][j] = k;
                            graph[j][i] = k;
                            if (potentialMittel() > maxPotential) {
                                /*
                                 * hier kann wieder durch die
                                 * Verwendung von ">=" anstelle von
                                 * ">" eine weitere
                                 * Potentialmaximierungsstrategie
                                 * erzeugt werden
                                 */
                                maxPotential = potentialMittel();
                            }
                        }
                    }
                }
            }
        }
    }
}

```



```
*
* @return true, falls eine kritische Kante existiert
*/
boolean kritischeKante() {
    boolean kritisch = false;
    loop: for (int i = 0; i < order; i++) {
        for (int j = 0; j < i; j++) {
            if (graph[i][j] < 0) {
                if (unzulaessigeFarbe(i, j).size() == farbenZahl) {
                    // Bob hat gewonnen
                    System.out.println("kritische Kante");
                    kritisch = true;
                    break loop;
                }
            }
        }
    }
    return kritisch;
}

/**
 * Methode startet das Spiel. Beginnend mit dem vollständigen
 * Graphen der Ordnung "startwert" und endend mit dem vollständigen
 * Graphen der Ordnung "endwert" wird das Spiel auf den
 * entsprechenden Graphen mit verschiedenen großen Farbmengen
 * gestartet.
 *
 * @param startwert
 *         kleinste Ordnung der Graphen, auf denen gespielt wird
 * @param endwert
 *         größte Ordnung der Graphen, auf denen gespielt wird
 */
void starten(int startwert, int endwert) {
    for (int n = startwert; n <= endwert; n++) {
        for (int f = n - 1; f <= Math.floor(1.5 * n); f++) {
            writer.beginTable(n, f);
            System.out.println("K " + n + " mit " + f + " Farben");
            initialisieren(n, f);
            kantenFaerben();
        }
    }
    writer.endDocument();
}
```

```

/**
 * Mainmethode. Erzeugt eine Klasse des Graphenfärbungsspiels
 * "CompleteGraphColoring" und startet dieses.
 *
 * @param args
 */
public static void main(String[] args) {
    CompleteGraphColoring cgc = new CompleteGraphColoring();
    cgc.starten(3, 4);
}
}

```

A.3.2. Die Klasse TexWriter

```

package completeGraphColoring;

import java.io.BufferedWriter;
import java.io.FileWriter;
import java.io.IOException;

/**
 * Klasse erzeugt Objekte, die im TeX-Format Potentialwerte in eine
 * Ausgabedatei schreiben
 */
public class TexWriter {
/**
 * Writer-Objekt der Klasse
 */
    BufferedWriter out;

/**
 * Konstruktor erzeugt ein Objekt der Klasse TexWriter, welches in
 * die Datei "filename.tex" schreibt
 *
 * @param filename
 *           Name der Datei, in die die Ausgabe erfolgt
 */
    public TexWriter(String filename) {
        try {
            out = new BufferedWriter(new FileWriter(filename.concat(".tex")));
            out.write("\\documentclass[12pt]{article}\r\n");
            out.write("\\usepackage{ngerman,longtable}\r\n");
            out.write("\\begin{document}\r\n");
            out.flush();
        }
    }
}

```

```

    } catch (IOException e) {
        e.printStackTrace();
    }
}

/**
 * Beginnt die Tabelle, in der die Potentialwerte der
 * Zwischenspielstände gespeichert werden
 *
 * @param order
 *         Ordnung des vollständigen Graphen (erscheint in der
 *         Überschrift)
 * @param farbenZahl
 *         Anzahl der im Spiel verwendeten Farben (erscheint in
 *         der Überschrift)
 */
void beginTable(int order, int farbenZahl) {
    try {
        out.write("{\\Large $K_{" + order + "}$: Farbzahl$=$"
            + farbenZahl + "}")";
        out.write("\\vspace{1cm}\\r\\n\\begin{longtable}{l|c|}"
            + "\\r\\nSpieler&Potential\\\\\\r\\n\\hline\\hline\\r\\n");
        out.flush();
    } catch (IOException e) {
        e.printStackTrace();
    }
}

/**
 * Beendet die Tabelle der Zwischenergebnisse
 *
 * @param spieler
 *         Spieler der als Gewinner in der Tabelle ausgegeben
 *         wird
 */
void endTable(int spieler) {
    try {
        if (spieler == 1) {
            out.write("\\end{longtable}\\r\\nAlice gewinnt\\r\\n\\newpage");
            out.flush();
        } else {
            out.write("\\end{longtable}\\r\\nBob gewinnt\\r\\n\\newpage");
            out.flush();
        }
    }
}

```

```
    } catch (IOException e) {
        e.printStackTrace();
    }
}

/**
 * Fügt der Tabelle der Zwischenergebnisse einen weiteres Wertepaar
 * (Spieler und Potentialwert) hinzu
 *
 * @param spieler
 *         Spieler 1 entspricht Alice, -1 Bob
 * @param potential
 *         Wert des Potentials, welcher in der Tabelle ausgegeben
 *         wird
 */
void writePotential(int spieler, double potential) {
    try {
        if (spieler == 1) {
            out.write("Alice&" + potential + "\\\\r\n\\hline\r\n");
        } else {
            out.write("Bob&" + potential + "\\\\r\n\\hline\r\n");
        }

    } catch (IOException e) {
        e.printStackTrace();
    }
}

/**
 * Beendet das TeX-Dokument in der Ausgabedatei und schließt diese
 */
void endDocument() {
    try {
        out.write("\\end{document}");
        out.flush();
        out.close();
    } catch (IOException e) {
        e.printStackTrace();
    }
}
}
```

A.3.3. Die Klasse Set

```
package completeGraphColoring;

/**
 * Diese Klasse implementiert eine Datenstruktur, die Zahlenmengen
 * darstellt und Operationen auf diesen Mengen ermöglicht.
 */
public class Set {
/**
 * Gibt die aktuelle Mächtigkeit der Menge an
 */
private int size;

/**
 * Vektor für die interne Darstellung der Menge
 */
private boolean[] elements;

/**
 * Maximale Mächtigkeit der Menge
 */
private int length;

/**
 * Konstruktor für ein neues leeres Mengenobjekt der maximalen
 * Mächtigkeit a, in der Zahlen zwischen 0 und (a-1) als Elemente
 * enthalten sein können.
 *
 * @param a
 *         gibt die maximale Mächtigkeit der erzeugten Menge an
 */
public Set(int a) {
    size = 0;
    elements = new boolean[a];
    for (int i = 0; i < a; i++) {
        elements[i] = false;
    }
    length = a;
}

/**
 * Fügt der Menge eine Zahl a als neues Element hinzu
 */
}
```

```
* @param a
*           Zahl, die der Menge als neues Element hinzugefügt wird
* @return "true", falls die Zahl bereits in der Menge enthalten
*         ist, sonst "false"
*/
boolean add(int a) {
    if (elements[a])
        return true;
    else {
        elements[a] = true;
        size++;
        return false;
    }
}

/**
 * Löscht das Element b aus der Menge
 *
 * @param b
 *         zu löschendes Element
 */
void remove(int b) {
    if (elements[b]) {
        elements[b] = false;
        size--;
    }
}

/**
 * Methode, welche die aktuelle Mächtigkeit der Menge zurückliefert
 *
 * @return Mächtigkeit der Menge
 */
int size() {
    return size;
}

/**
 * Methode, welche die maximale Mächtigkeit der Menge liefert
 *
 * @return maximale Mächtigkeit der Menge
 */
int length() {
    return length;
}
```

```
}

/**
 * Methode zur Überprüfung, ob die Menge ein bestimmtes Element a
 * enthält
 *
 * @param a
 *         Element, dessen Zugehörigkeit zur Menge überprüft wird
 * @return "true", falls die Menge das Element a enthält, sonst
 *         "false"
 */
boolean contains(int a) {
    if (a < length)
        return elements[a];
    else
        return false;
}

/**
 * Methode zur Bildung der Vereinigung zweier Mengen setA und setB
 *
 * @param setA
 * @param setB
 * @return Die Vereinigung der Mengen setA und setB
 */
static Set union(Set setA, Set setB) {
    int len = Math.max(setA.length(), setB.length());
    Set ergebnis = new Set(len);
    for (int i = 0; i < len; i++) {
        if (setA.contains(i) || setB.contains(i)) {
            ergebnis.add(i);
        }
    }
    return ergebnis;
}

/**
 * Methode, die die Differenz zweier Mengen setA und setB bildet
 *
 * @param setA
 * @param setB
 * @return Die Elemente der Menge setA, die nicht in der Menge setB
 *         enthalten sind
 */
```

```
static Set difference(Set setA, Set setB) {
    for (int i = 0; i < setA.length(); i++) {
        if (setB.contains(i)) {
            setA.remove(i);
        }
    }
    return setA;
}
}
```

Literatur

- [1] Andres, Dominique: *Spieltheoretische Kantenfärbungsprobleme auf Wäldern und verwandte Strukturen*. Diplomarbeit, Universität zu Köln, 2003.
- [2] Andres, Dominique: *The game chromatic index of forests of maximum degree $\Delta \geq 5$* . *Discrete Applied Mathematics*, 154(9):1317–1323, 2006.
- [3] Andres, Dominique und Winfried Hochstättler: *Notes on the chromatic index of the complete graph*. Unveröffentlicht, February 2007.
- [4] Appel, K. und W. Haken: *Every planar map is four-colorable. Part I: Discharging*. *Illinois Journal of Mathematics*, 21:429–490, 1977.
- [5] Appel, K. und W. Haken: *Every planar map is four-colorable. Part II: Reducibility*. *Illinois Journal of Mathematics*, 21:491–567, 1977.
- [6] Behzad, M., G. Chartrand und Jr. Cooper, J. K.: *The Colour Numbers of Complete Graphs*. *J. London Math. Soc.*, 42(1):226–228, 1967.
- [7] Bodlaender, Hans L.: *On the complexity of some coloring games*. In: Möhring, R. H. (Herausgeber): *Graph Theoretic Concepts in Computer Science*, Band 484 der Reihe *Lecture Notes in Computer Science*, Seiten 30–40. Springer-Verlag, Berlin/New York, 1991.
- [8] Borodin, O.: *On acyclic colorings of planar graphs*. *Discrete Mathematics*, 25:211–236, 1979.
- [9] Borowiecki, M., Elżbieta Sidorowicz und Z. Tuza: *Game list colouring of graphs*. *The electronic journal of combinatorics*, 14, 2007.
- [10] Cai, Leizhen und Xuding Zhu: *The game chromatic index of k -degenerate graphs*. *Journal of Graph Theory*, 36:144–155, 2001.
- [11] Chou, Chun Yen, Wei Fan Wang und Xuding Zhu: *Relaxed game chromatic number of graphs*. *Discrete Mathematics*, 262:89–98, 2003.
- [12] Diestel, Reinhard: *Graph Theory*. Springer-Verlag, Heidelberg/New York, 2005.
- [13] Dinski, Thomas und Xuding Zhu: *An upper bound for the game chromatic number of graphs*. *Discrete Mathematics*, 196:109–115, 1999.
- [14] Dunn, Charles: *Extensions of a Simple Competitive Graph Coloring Algorithm*. Dissertation, Arizona State University, 2002.
- [15] Dunn, Charles: *The relaxed game chromatic index of k -degenerate graphs*. *Discrete Mathematics*, 307:1767–1775, 2007.

- [16] Dunn, Charles und H. A. Kierstead: *The relaxed game chromatic number of outerplanar graphs*. Journal of Graph Theory, 46:69–78, 2004.
- [17] Dunn, Charles und H. A. Kierstead: *A Simple Competitive Graph Coloring Algorithm II*. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 90:93–106, 2004.
- [18] Dunn, Charles und H. A. Kierstead: *A Simple Competitive Graph Coloring Algorithm III*. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 92:137–150, 2004.
- [19] Erdős, Peter L., U. Faigle, Winfried Hochstättler und W. Kern: *Note on the game chromatic index of trees*. Theoretical Computer Science, 313(3):371–376, 2004.
- [20] Faigle, U., W. Kern, H. A. Kierstead und W. T. Trotter: *On the game chromatic number of some classes of graphs*. Ars Combin., 35:143–150, 1993.
- [21] Ferguson, Thomas S.: *Game Theory*. Vorlesungsskript, Mathematics Department, UCLA. http://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/Contents.html
- [22] Garey, M. R. und D. S. Johnson: *Computers and Intractability - A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman and Company, New York, 1979.
- [23] Guan, D. und Xuding Zhu: *The game chromatic number of outerplanar graphs*. Journal of Graph Theory, 30:67–70, 1999.
- [24] He, Wenjie, Xiaoling Hou, Jiating Shao, Weifan Wang und Xuding Zhu: *Edge-partitions of planar graphs and their game coloring number*. Journal of Graph Theory, 41(4):307–317, 2002.
- [25] Herzberg, Agnes M. und M. Ram Murty: *Sudoku Squares and Chromatic Polynomials*. Notices of the AMS, 54(6):708–717, June/July 2007.
- [26] Jensen, Tommy R. und Bjarne Toft: *Graph Coloring Problems*. John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [27] Kierstead, H. A.: *A Simple Competitive Graph Coloring Algorithm*. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 78:57–68, 2000.
- [28] Kierstead, H. A.: *Asymmetric graph coloring games*. Journal of Graph Theory, 48:169–185, 2005.
- [29] Kierstead, H. A.: *Weak acyclic coloring and asymmetric coloring games*. Discrete Mathematics, 306:673–677, 2006.
- [30] Kierstead, H. A. und W. T. Trotter: *Planar Graph Coloring with an Uncooperative Partner*. Journal of Graph Theory, 18(6):569–584, 1994.
- [31] Kierstead, H. A. und D. Yang: *Very asymmetric marking games*. Order, 22(2):93–107, Mai 2005.

- [32] Kuhn, H. W.: *Extensive Games*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 36(10):570–576, 1950.
- [33] Kuhn, H. W.: *Extensive Games and the Problem of Information*. In: Kuhn, H. W. und A. W. Tucker (Herausgeber): *Contributions to the Theory of Games*, Band 2, Seiten 193–216. Princeton University Press, Princeton, 1953.
- [34] Lam, P. C. B., W. C. Shiu und B. Xu: *Edge Game Coloring of Graphs*. Graph Theory Notes of New York, XXXVII(3):17–19, 1999.
- [35] Marte, Kerstin: *Der spieltheoretische Listenfärbungsindex von Bäumen*. Diplomarbeit, FernUniversität Hagen, 2006.
- [36] Neumann, John von und Oskar Morgenstern: *The Theory of Games and Economic Behaviour*. Princeton University Press, Princeton, 1947.
- [37] Shannon, Claude E.: *Programming a Computer for Playing Chess*. Philosophical Magazine, 41(314), 1950.
- [38] Sidorowicz, Elżbieta: *The game chromatic number and the game colouring number of cactuses*. Information Processing Letters, 102(4):147–151, 2007.
- [39] Volkmann, Lutz: *Graphen an allen Ecken und Kanten*. Lutz Volkmann, Aachen, 2006. <http://www.math2.rwth-aachen.de/>
- [40] Wu, Jiaojiao: *Graph marking game and colouring game*. Dissertation, National Sun Yat-sen University, 2005.
- [41] Wu, Jiaojiao und Xuding Zhu: *Lower bounds for the game colouring number of partial k -trees and planar graphs*. Zu erscheinen in *Discrete Mathematics*, (online verfügbar) 2007.
- [42] Yang, D. und H. A. Kierstead: *Asymmetric marking games on line graphs*. Zu erscheinen in *Discrete Mathematics*, (online verfügbar) 2007.
- [43] Yang, D. und Xuding Zhu: *Activation strategy for asymmetric marking games*. Zu erscheinen in *European Journal of Combinatorics*, (online verfügbar) 2007.
- [44] Zhu, Xuding: *The Game Coloring Number of Planar Graphs*. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 75:245–258, 1999.
- [45] Zhu, Xuding: *The game coloring number of pseudo partial k -trees*. Discrete Mathematics, 215(1-3):245–262, 2000.
- [46] Zhu, Xuding: *Refined activation strategy for the marking game*. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 98:1–18, 2008.

Index

- $|G|$, 2
- $\|G\|$, 2
- $E(G)$, 1
- $V(G)$, 1
- $\Delta(G)$, 2
- $\chi_g(\mathcal{K})$, 14
- $\chi'(G)$, 5
- $\chi(G)$, 4
- $\chi'_g(G)$, 11
- $\chi_g(G)$, 10
- $\delta(G)$, 2
- $ch_g(G)$, 16
- $col'_g(G)$, 30
- $d_G(v)$, 2

- adjazent, 2
- Alternativen, 7
- Anfangsknoten, 1

- Baum, 3
- benachbart, 2
- Blätter, 3

- chromatische Zahl, 4
- chromatischer Index, 5
- Clique, 17
- Cliquenzahl, 17
- coloring construction game, 9

- Ecke, 1
- edge ordering game, 19
- Endknoten, 1, 2
- Endpunkte, 1
- Extensivform, 6

- Färbungsgrad, 32
- Färbungsproblem, 4
- Farbklasse, 21
- Farbmenge, 4, 5

- game coloring index, 30
- game coloring number, 15, 29
- gerichteter Graph, 1

- Gewinnstrategie, 8
- Größe, 2
- Graph, 1
 - außerplanar, 17
 - Baum, 18
 - cactus, 18
 - endlich, 2
 - gerichtet, 1
 - k -degeneriert, 19
 - planar, 14
 - Rad, 18
 - trianguliert, 17
 - vollständig, 21
 - Wald, 3, 14
 - wheel, 18
 - zusammenhängend, 2
- Graphenfärbung
 - isomorph, 33

- Index
 - chromatischer, 5
 - oberer spielchromatischer, 90
 - spielchromatischer, 11
- induzierter Teilgraph, 1, 62
- Information
 - perfekt, 7
- Informationsmengen, 7
- innerer Knoten, 3
- inzident, 2
- isomorph, 3
- Isomorphismus, 3

- K_n , 21
- k -Baum, 17
 - partiell, 17
- k -chromatisch, 4
- k -degenerierter Graph, 19
- k -färbbar, 4
- k -Färbung, 4
- Kante, 1
 - gerichtet, 1

- kritisch, 35
- Kantenfärbung, 5
- Kantenfärbungsspiel, 9
- Kantenfarbmenge, 32
- Kantenfarbzahl, 32
- Kantenfolge, 2
 - Länge, 2
- Kantengraph, 3
- Kantenzug, 2
- Knoten, 1
 - innerer, 3
- Knotenfärbung, 4
 - zulässig, 4
- Knotenfärbungsspiel, 9
 - asymmetrisch, 18
 - relaxiert, 18
- Knotenfarbmenge, 32
- Knotengrad, 2
- Komponente, 2
- Kreis, 2
- kritische Kante, 35, 57
- Länge
 - Kantenfolge, 2
- Liniengraph, 3
- Listenfärbungsspiel, 16
- marking game, 15, 30
 - asymmetrisch, 18
- Matching, 21
- Maximalgrad, 2
- Minimalgrad, 2
- monotoner Parameter, 11, 17
- Nullsummenspiel, 7
- oberer spielchromatischer Index, 90
- ordering game, 15
- Ordnung, 2
- Paarung, 21
- Parameter
 - monoton, 11, 17
- partiell gefärbt, 32
- partielle Kantenfärbung, 32
- perfekte Information, 7
- Potential, 34
- Potentialfunktion, 34
- Potentialmaximierungsstrategie, 36
- Potentialminimierungsstrategie, 36
- Potentialstrategie, 36
- schönes Spiel, 43
- Spiel
 - schön, 43
- Spielbaum, 6
 - spielchromatische Zahl, 10
 - Graphenklasse, 14
 - spielchromatischer Index, 11
 - oberer, 90
 - spiellistenchromatische Zahl, 16
- Teilgraph, 1
 - induziert, 1, 62
- unabhängig, 21
- Vierfarbenproblem, 3
- vollständiger Graph, 21
- Wald, 3
- Weg, 2
- Wurzel, 3
- Wurzelbaum, 3
 - gerichtet, 3
- Zahl
 - spielchromatisch, 10
 - zulässige Kantenfärbung, 5
 - zulässige Knotenfärbung, 4
 - zusammenhängend, 2