FernUniversität in Hagen
Fakultät für Mathematik und Informatik

Artificial Intelligence Group

Unvollständige Argumentationsgraphen mit Mengenangriffen

Masterarbeit

zur Erlangung des Grades eines Master of Science (M.Sc.)
im Studiengang Data Science

vorgelegt von
Dominik Lewin

Erstgutachter:	Prof. Dr. Matthias Thimm Artificial Intelligence Group
Zweitgutachter:	Dr. Kai Sauerwald Artificial Intelligence Group
Betreuer:	Kenneth Skiba Artificial Intelligence Group

Erklärung

Ich erkläre, dass ich die Masterarbeit selbstständig und ohne unzulässige Inanspruchnahme Dritter verfasst habe. Ich habe dabei nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet und die aus diesen wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht. Die Versicherung selbstständiger Arbeit gilt auch für enthaltene Zeichnungen, Skizzen oder graphische Darstellungen. Die Masterarbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form weder derselben noch einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch nicht veröffentlicht. Mit der Abgabe der elektronischen Fassung der endgültigen Version der Masterarbeit nehme ich zur Kenntnis, dass diese mit Hilfe eines Plagiatserkennungsdienstes auf enthaltene Plagiate geprüft werden kann und ausschließlich für Prüfungszwecke gespeichert wird.

Der Veröffentlichung dieser Arbeit auf der Webseite des Lehrgebiets Künstliche Intelligenz und damit dem freien Zugang zu dieser Arbeit stimme ich ausdrücklich zu.

Für diese Arbeit erstellte Software wurde quelloffen verfügbar gemacht, ein entsprechender Link zu den Quellen ist in dieser Arbeit enthalten. Gleiches gilt für angefallene Forschungsdaten.

Hamburg, 26.04.2025

(Ort, Datum) (Unterschrift)

Zusammenfassung

Ziel dieser Masterarbeit war die Konzeption und formale Ausarbeitung von unvollständigen Argumentationsgraphen mit Mengenangriffen (iSetAF) als Erweiterung der herkömmlichen abstrakten Argumentationsgraphen. Diese Erweiterung sollte den Umgang sowohl mit Mengenangriffen als auch mit unsicherer Information in einem einheitlichen Modell ermöglichen, um reale Entscheidungsprozesse modellieren zu können. Ausgangspunkt dieser Arbeit waren dabei die klassischen abstrakten Argumentationsgraphen (AFs) von Dung sowie zwei Erweiterungen dieser: Argumentationsgraphen mit Mengenangriffen (SetAFs) und unvollständige Argumentationsgraphen (iAFs).

Nachdem iSetAFs im Rahmen dieser Arbeit formal definiert wurden, wurden zwei unterschiedliche Ansätze verfolgt. Dies war zum einen ein vervollständigungsbasierter Ansatz und zum anderen ein extensionsbasierter Ansatz.

Der vervollständigungsbasierte Ansatz berücksichtigt alle möglichen Konstellationen unsicheren Wissens, um mit Hilfe von Schlussfolgerungsproblemen Aussagen über die Akzeptanz von Argumenten oder Mengen von Argumenten zu treffen. Die Komplexitätsanalyse zeigte, dass sich diese Probleme auf die Probleme für iAFs reduzieren ließen, wodurch bestehende Komplexitätsergebnisse übertragbar waren.

Da die Anzahl der Vervollständigungen exponentiell anwachsen kann, wurde ergänzend ein extensionsbasierter Ansatz verfolgt. Hierbei wurden Aussagen direkt auf dem iSetAF getroffen, wofür die Semantiken neu definiert wurden. Es konnte gezeigt werden, dass diese Semantiken zentrale Eigenschaften wie Syntaxunabhängigkeit, I-Maximalität, Enthaltung, Direktionalität, Dichtheit, Konfliktsensitivität und Modularisierung weitgehend erfüllen, sofern diese auch von klassischen AFs erfüllt werden.

Insgesamt zeigt die Arbeit, dass iSetAFs eine bedeutende Erweiterung klassischer Frameworks darstellen. Sie integrieren unsichere Informationen und Mengenangriffe in einem Modell, ohne die Komplexität der Schlussfolgerungsprobleme zu erhöhen, und erhalten dabei die meisten wünschenswerten semantischen Eigenschaften.

Abstract

The aim of this Master's thesis was the conceptualization and formal development of incomplete argumentation graphs with set attacks (iSetAF) as an extension of conventional abstract argumentation frameworks. This extension is intended to enable the handling of both set-based attacks and uncertain information within a unified model, in order to facilitate the modeling of real-world decision-making processes. The starting point for this work was the classical abstract argumentation frameworks (AFs) introduced by Dung, as well as two of their extensions: argumentation frameworks with set attacks (SetAFs) and incomplete argumentation frameworks (iAFs).

After formally defining iSetAFs in this thesis, two different approaches were pursued: a completion-based approach and an extension-based approach.

The completion-based approach considers all possible configurations of uncertain knowledge in order to draw conclusions about the acceptance of arguments or sets of arguments through inference problems. The complexity analysis showed that these problems can be reduced to the problems for iAFs, making it possible to transfer existing complexity results.

Since the number of completions can grow exponentially, a complementary extension-based approach was developed. In this approach, statements are made directly on the iSetAF, for which the semantics were newly defined. It was shown that these semantics largely satisfy key properties such as syntax independence, I-maximality, allowing abstention, directionality, tightness, conflict-sensitivity, and modularity, provided that these are also fulfilled by classical AFs.

Overall, the thesis demonstrates that iSetAFs represent a significant extension of classical frameworks. They integrate uncertain information and set attacks within a single model, without increasing the complexity of inference problems, while retaining most of the desirable semantic properties.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Argumentation ist ein grundlegender und alltäglicher Bestandteil menschlicher Entscheidungsfindung. In vielen Bereichen des täglichen Lebens, wie in der Medizin, der Luftfahrt oder im Justizwesen, müssen Entscheidungen getroffen werden, die auf einer sorgfältigen Abwägung von Argumenten basieren. Dabei werden Argumente für und gegen eine Entscheidung abgewogen, um die bestmögliche Lösung zu finden.

Ein anschauliches Beispiel bietet die Luftfahrt: Bei einem Zwischenfall an Bord eines Flugzeuges muss die Cockpitbesatzung oft in Sekundenbruchteilen eine potenziell folgenschwere Entscheidung treffen. Abhängig von der Situation, welche Art Zwischenfall vorliegt, wie viel Treibstoff vorhanden ist, wie schwer die Maschine ist, wie erfahren die Besatzung ist, ob ein Ausweichflughafen erreichbar ist, usw. muss die Cockpitbesatzung die verschiedenen Handlungsoptionen abwägen, um Menschenleben zu retten. Dabei spielen je nach Schwere des Zwischenfalls auch wirtschaftliche Aspekte eine Rolle. Sollte eine Zwischenlandung durchgeführt werden, kann es passieren, dass die maximale Arbeitszeit der Besatzung erreicht wird, wodurch ein Weiterflug nicht mehr möglich wäre und Passagiere umgebucht werden müssten.

In stressigen und zeitkritischen Situationen stoßen Menschen jedoch oft an ihre kognitiven Grenzen. Die Vielzahl an Faktoren erschwert eine umfassende und fehlerfreie Abwägung aller relevanten Informationen. In solchen Fällen kann der Einsatz von unterstützenden Systemen, die auf künstlicher Intelligenz (KI) basieren, sinnvoll sein. Diese können komplexe Argumentationsstrukturen analysieren und zu Entscheidungsfindungen beitragen.

Ein zentraler Bereich der KI, der sich mit solchen Entscheidungsproblemen befasst, ist die formale Argumentation. Insbesondere die Arbeit von Dung [Dun95] aus dem Jahr 1995 spielt dabei bis heute eine Schlüsselrolle. In seiner Arbeit führte Dung sogenannte *abstrakte Argumentationsgraphen (abstract argumentation frameworks)* als formales Modell zur Strukturierung von Argumenten und Angriffsrelationen ein. Dung definierte die formale Argumentation als strukturiertes System, das aus Argumenten und Angriffsbeziehungen bestand. Auf diese Weise war es möglich, Entscheidungsprozesse zu modellieren, die maschinell verarbeitet werden konnten. Es konnten Konflikte analysiert werden, um schließlich eine logische Schlussfolgerung ziehen zu können.

In diesem einführenden Kapitel soll zunächst die Motivation für das gewählte Thema der Masterarbeit vorgestellt werden. Anschließend werden die Ziele der Arbeit sowie die methodische Vorgehensweise vorgestellt.

1.1 Motivation

Die abstrakten Argumentationsgraphen nach Dung [Dun95] modellieren Konflikte nur als 1-zu-1-Beziehungen: Ein Argument greift ein anderes Argument direkt an. Der Konflikt besteht somit nur zwischen zwei einzelnen Argumenten. Diese strikte Struktur schränkt die Modellierung realer Argumentationen jedoch stark ein, da durchaus auch komplexere Szenarien vorkommen können. In realen Szenarien ist denkbar, dass mehrere Argumente gemeinsam ein anderes Argument angreifen oder es bleibt unklar, ob ein Argument bzw. eine Angriffsbeziehung überhaupt existiert.

Für beide Problemstellungen wurden bereits eigenständige Erweiterungen entwickelt. Nielsen und Parsons führten 2006 ein Framework ein, das Mengenangriffe berücksichtigte, bei denen erst die Kombination bestimmter Argumente zu einer gemeinsamen Angriffsbeziehung führte [NP06]. Dabei greifen Argumente nicht mehr einzeln, sondern nur in bestimmten Gruppen effektiv an. Unabhängig davon wurde das Konzept unvollständiger Argumentationsgraphen entwickelt, wobei erste Ideen von Coste-Marquis [CMDK+07] aus dem Jahr 2007 stammten. Das vollständig formal definierte Argumentationsframework wurde allerdings erst 2018 von Baumeister et al. veröffentlicht [BNRS18]. Durch dieses Framework war es möglich, auch Informationen bzw. Argumente bei der Entscheidungsfindung zu berücksichtigen, deren Existenz zwar denkbar, aber nicht gesichert ist.

Ein erster Ansatz, unvollständige Argumentationsgraphen und Argumentationsgraphen mit Mengenangriffen zu kombinieren, wurde 2023 von Dimopoulos et al. vorgestellt [DDK+23]. Dieses Framework berücksichtigt jedoch nur unsichere Angriffsbeziehungen und erlaubt zudem auch Angriffe auf Mengen von Argumenten.

Bisher existiert kein formal definiertes Argumentationsframework, das sowohl unsicheres Wissen (bestehend aus unsicheren Argumenten und unsicheren Angriffen) als auch Mengenangriffe berücksichtigt. Solche Szenarien sind in der Praxis jedoch realistisch und lassen sich mit bestehenden abstrakten Argumentationsgraphen und deren Erweiterungen bisher nicht modellieren. Diese Lücke soll durch die vorliegende Masterarbeit geschlossen werden, indem ein solches Framework entwickelt und analysiert wird.

1.2 Ziele der Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung einer neuen Erweiterung für abstrakte Argumentationsgraphen, durch die sich Szenarien modellieren lassen, die sowohl unsicheres Wissen als auch Mengenangriffe enthalten. Dabei werden *unvollständige Argumentationsgraphen mit Mengenangriffen (iSetAF)* formal definiert und die Eigenschaften sowie die Komplexität untersucht. Das Ziel ist die Entwicklung einer Erweiterung der abstrakten Argumentationsgraphen, die in der Ausdrucksstärke mit Dungs ursprünglichem Modell vergleichbar ist. Idealerweise soll die Erweiterung die zentralen Eigenschaften von Dungs abstrakten Argumentationsgraphen ebenfalls erfüllen.

1.3 Vorgehensweise

In Abschnitt 2 wird zunächst Dungs abstraktes Argumentationsframework vorgestellt, das die Grundlage dieser Arbeit bildet. Dabei werden abstrakte Argumentationsgraphen, ihre Semantiken und ausgewählte Eigenschaften (Postulate) definiert. Anschließend wird übersichtlich dargestellt, inwieweit Dungs Semantiken für abstrakte Argumentationsgraphen die jeweiligen Eigenschaften erfüllen.

Darauf aufbauend werden in Abschnitt 3 die Erweiterungen für Argumentationsgraphen mit Mengenangriffen (SetAFs) und unvollständige Argumentationsgraphen (iAFs) vorgestellt. Beide Erweiterungen spielen in realen Situationen oft eine Rolle und ermöglichen es, komplexere und realistischere Argumentationsstrukturen zu modellieren. Für iAFs werden zudem zwei unterschiedliche Herangehensweisen vorgestellt: Der vervollständigungsbasierte Ansatz und der extensionsbasierte Ansatz.

Zur Veranschaulichung der verschiedenen Argumentationsframeworks wird in dieser Arbeit ein fortlaufendes Beispiel genutzt. Dabei geht es um zwei Freunde Anna und Ben. Anna möchte gerne eine Fahrradtour mit Ben unternehmen. Ben hat allerdings einige Gegenargumente, um sich der Fahrradtour mit Anna zu entziehen. Diese Gegenargumente können für sich alleinstehen, nur in Kombination mit anderen Argumenten gültig sein oder auch unsicher sein (d.h. es ist unklar, ob ein Argument überhaupt existiert).

Der Hauptteil der Arbeit erstreckt sich über Abschnitt 4, Abschnitt 5 und Abschnitt 6. In Abschnitt 4 wird die formale Definition unvollständiger Argumentationsgraphen mit Mengenangriffen (iSetAFs) vorgestellt. Dabei werden zentrale Begriffe wie Angriff und Verteidigung neu definiert. Der Abschnitt verfolgt dabei zwei methodische Ansätze:

- Der vervollständigungsbasierte Ansatz in Anlehnung an Baumeister et al. [BNRS18], bei dem es notwendig ist, die Vervollständigungen von iSetAFs neu zu definieren. Ebenso müssen die Definitionen für mögliche und notwendige σ-Extensionen sowie der Schlussfolgerungsprobleme für iSetAFs angepasst werden.

- Der extensionsbasierte Ansatz in Anlehnung an Mailly [Mai21], der neue Semantiken definiert, um mit Unsicherheiten und Mengenangriffen direkt zu arbeiten, ohne dass Vervollständigungen erzeugt werden müssen.

In Abschnitt 5 erfolgt daraufhin eine detaillierte Untersuchung der in Unterabschnitt 2.3 ausgewählten Eigenschaften, wobei sich diese Analyse lediglich auf den extensionsbasierten Ansatz bezieht. Die Postulate werden neu definiert, sodass sich diese auch auf iSetAFs übertragen lassen. Abschließend wird eine übersichtliche Darstellung präsentiert, die zeigt, welche Semantiken für iSetAFs welche Postulate erfüllen oder nicht erfüllen.

In Abschnitt 6 wird die Komplexität der Schlussfolgerungsprobleme von iSetAFs untersucht, wobei sich dieser Abschnitt lediglich auf den vervollständigungsbasierten Ansatz bezieht. Dabei wird insbesondere untersucht, ob sich die Komplexitätseigenschaften von iAFs auf die Komplexitätseigenschaften von iSetAFs übertragen lassen, indem die Schlussfolgerungsprobleme von iSetAFs auf bestehende Probleme reduziert werden.

Den Abschluss dieser Masterarbeit bilden eine Zusammenfassung der zentralen Ergebnisse, ein Fazit sowie ein Ausblick auf weiterführende Forschungsfragen, die sich aus der vorliegenden Arbeit ergeben.

2 Grundlagen der formalen Argumentation

In diesem Kapitel sollen die grundlegenden Konzepte und Definitionen der formalen Argumentation basierend auf Dungs Arbeit aus dem Jahr 1995 [Dun95] dargestellt werden. Diese Konzepte sind bis heute von zentraler Bedeutung und bilden die Grundlage dieser Arbeit. Zunächst sollen die abstrakten Argumentationsgraphen in Unterabschnitt 2.1 formal eingeführt und wichtige Begriffe definiert werden. Anschließend werden in Unterabschnitt 2.2 verschiedene relevante Semantiken für Argumentationsgraphen vorgestellt und auf zugehörige Entscheidungsprobleme eingegangen. Abschließend werden in Unterabschnitt 2.3 verschiedene Eigenschaften (sogenannte Postulate) vorgestellt, die eine Semantik bestenfalls erfüllen sollte. Diese Postulate ermöglichen es, Semantiken miteinander zu vergleichen und zu bewerten.

2.1 Abstrakte Argumentationsgraphen

Die formale Argumentation basiert auf dem Argumentationsframework, das von Dung veröffentlich wurde [Dun95]. Ziel der formalen Argumentation ist es, eine Menge von Argumenten und deren Konflikte zu analysieren, um schließlich Argumente zu finden, die gemeinsam akzeptiert werden können [CD20]. Dabei ist die innere Struktur der Argumente irrelevant.

Argumente und deren Konflikte (Angriffsbeziehung) lassen sich strukturiert in einem Argumentationsgraphen darstellen. Dieser ist wie folgt definiert:

Definition 2.1 (Abstrakte Argumentationsgraphen[1])**.** Ein abstrakter Argumentationsgraph (engl. *abstract argumentation framework)* ist ein Tupel $F = (A, R)$. Dabei bezeichnet A die Menge der Argumente und R die Menge der Angriffe zwischen diesen Argumenten, wobei $R \subseteq A \times A$.

Ein abstrakter Argumentationsgraph (AF) besteht somit aus Argumenten, die sich gegenseitig angreifen können. Auf Basis dieser Grundstruktur lässt sich nun genauer definieren, wie Argumente innerhalb eines AFs miteinander in Konflikt stehen können.

Definition 2.2 (Angriffsrelation)**.** Für ein AF $F = (A, R)$ bezeichnet R die Angriffsrelation zwischen den Argumenten. $(a, b) \in R$ mit $a, b \in A$ stellt einen Angriff des Arguments a auf das Argument b dar. Eine äquivalente Schreibweise für einen Angriff von a auf b ist aRb.

Zur Verdeutlichung soll nun ein konkretes Beispiel betrachtet werden, in dem Argumente und deren Angriffsbeziehungen veranschaulicht werden.

Beispiel 2.1. Die Freunde Anna und Ben diskutieren darüber, was sie heute unternehmen sollen. Anna möchte gerne eine Fahrradtour machen. Die Argumentationsfolge sieht wie folgt aus:

[1] Definition 2 aus [Dun95]

a_1: Lass uns eine Fahrradtour machen.

b_1: Mein Fahrrad wurde gestohlen.

a_2: Du kannst dir ein neues Fahrrad kaufen.

b_2: Ich habe nicht genug Geld.

a_3: Dann kannst du dir ein Fahrrad ausleihen.

b_3: Aber es regnet.

a_4: Ich besorge uns Regenmäntel.

Hierbei handelt es sich um Argumente, die in Angriffsbeziehungen stehen. So greifen beispielsweise b_1 oder auch b_3 das Argument a_1 an, da es sich um Gegenargumente handelt, die eine Fahrradtour verhindern könnten. Auf der anderen Seite greifen die Argumente a_2 oder auch a_3 Bens Gegenargument b_1 an. Auch wenn Bens Fahrrad gestohlen wurde, kann die Fahrradtour stattfinden, indem er sich ein neues Fahrrad kauft oder sich ein Fahrrad ausleiht. Das gesamte AF F_1 besteht somit aus der Menge $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3\}$ und den Angriffen $R = \{(b_1, a_1), (b_3, a_1), (a_2, b_1), (a_3, b_1), (b_2, a_2), (a_4, b_3)\}$.

Ein AF kann als gerichteter Graph betrachtet werden, indem die Argumente A als Knoten und die Angriffe R als gerichtete Kanten dargestellt werden. Das in Beispiel 2.1 formal beschriebene AF F_1 wird in Abbildung 1 als gerichteter Graph visualisiert.

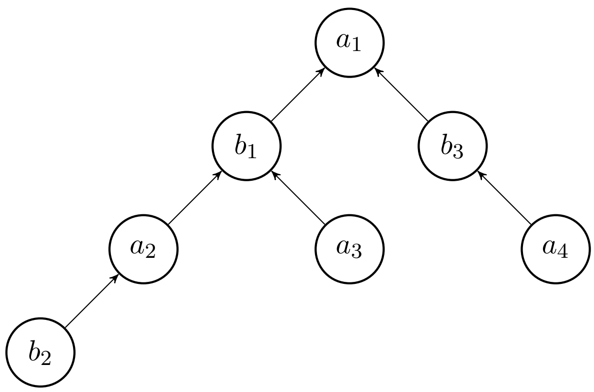

Abbildung 1: Abstrakter Argumentationsgraph F_1 zu Beispiel 2.1. Eigene Darstellung.

Um bestimmte Eigenschaften innerhalb eines AFs zu analysieren, ist es hilfreich, Mengen von Angreifern und angegriffenen Argumenten zu betrachten. Für eine Menge von Argumenten $S \subseteq A$ bezeichnet S^- die Menge aller Angreifer von S mit $S^- = \{b \in A \mid \exists a \in S : bRa\}$. Zudem bezeichnet $S^+ = \{b \in A \mid \exists a \in S : aRb\}$ die Menge der Argumente, die von S angegriffen werden. Ein kurzes Beispiel soll zeigen, wie diese Mengen konkret aussehen.

Beispiel 2.2. Für das AF F_1 aus Abbildung 1 und eine Menge $S = \{a_1, a_2\}$ ist $S^- = \{b_1, b_2, b_3\}$ und $S^+ = \{b_1\}$.

Neben der reinen Angriffsstruktur spielt auch die Fähigkeit von Argumenten, andere Argumente zu verteidigen, eine wichtige Rolle. Dies führt zur nächsten zentralen Definition der Verteidigung.

Definition 2.3 (Verteidigung)**.** Für ein AF $F = (A, R)$, $S \subseteq A$ und $a \in S$ gilt: Die Menge S verteidigt das Argument a gdw. es für alle Angreifer $b \in A$ mit $(b, a) \in R$ ein weiteres Argument $c \in S$ gibt mit $(c, b) \in R$. Analog wird eine Menge S' von S verteidigt gdw. alle Argumente $a \in S'$ von S verteidigt werden.

Auch das Konzept der Verteidigung wird anhand eines Beispiels des zuvor eingeführten AFs verdeutlicht.

Beispiel 2.3. Für das AF F_1 aus Abbildung 1 verteidigt die Menge $S = \{a_3, a_4\}$ das Argument a_1. Ben hat insgesamt zwei Argumente, die gegen eine Fahrradtour sprechen. Zum einen, dass sein Fahrrad gestohlen wurde und zum anderen, dass es regnet. Gegen beide Gegenargumente hat Anna selbst wiederum Gegenargumente, denn Ben kann sich ein Fahrrad ausleihen und wegen des Regens kann Anna Regenmäntel für beide besorgen.

Aufbauend auf dem Begriff der Verteidigung führt Dung die sogenannte *charakteristische Funktion* ein. Diese erlaubt es, systematisch alle von einer Argumentmenge verteidigten Argumente zu bestimmen. Da dieser Begriff in unterschiedlichen Kapiteln auftauchen wird, soll dieser bereits an dieser Stelle definiert werden.

Definition 2.4 (Charakteristische Funktion[2])**.** Sei $F = (A, R)$ ein AF. Die charakteristische Funktion

$$\tau_F : 2^A \to 2^A$$

bestimmt für eine Menge $S \subseteq A$ alle Argumente, die von dieser Menge verteidigt werden. Es gilt somit

$$\tau_F(S) = \{a \in A \mid \{a\}^- \subseteq S^+\}.$$

Insbesondere werden von einer Menge S zusätzlich auch immer genau die Argumente verteidigt, die keine Angreifer besitzen.

Beispiel 2.4. Für das AF F_1 aus Abbildung 1 und eine Menge $S = \{a_3, a_4\}$ gilt $\tau_F(S) = \{a_1, a_3, a_4, b_2\}$.

Neben der Frage, welche Argumente verteidigt werden, ist auch relevant, welche Argumente durch eine Menge direkt beeinflusst werden. Hierzu dient der Begriff der *Reichweite*. Die Reichweite ist die Vereinigung einer betrachteten Argumentmenge mit den Argumenten, die von dieser Menge angegriffen werden.

[2]Definition 16 aus [Dun95]

Definition 2.5 (Reichweite)**.** Sei $F = (A, R)$ ein AF und $S \subseteq A$. Die Reichweite $S^{\oplus}$ ist definiert durch

$$S^{\oplus} = S \cup S^{+}$$

und bezeichnet die Menge aller Argumente, die in S liegen, vereinigt mit den Argumenten, die von S angegriffen werden.

Auch hier verdeutlicht ein Beispiel, wie sich die Reichweite einer Argumentmenge bestimmen lässt.

Beispiel 2.5. Für das AF F_1 aus Abbildung 1 und eine Menge $S = \{a_3, a_4\}$ gilt $S^{\oplus} = \{a_3, a_4, b_1, b_3\}$.

In diesem Unterkapitel wurden die Grundlagen zu AFs vorgestellt. In Unterabschnitt 2.2 soll nun gezeigt werden, wie sich Argumente finden lassen, die gemeinsam akzeptiert werden können.

2.2 Semantiken

Ein abstrakter Argumentationsgraph besteht aus einer Menge von Argumenten und einer Angriffsrelation zwischen diesen Argumenten. Dargestellt werden dabei lediglich die Beziehungen zwischen den einzelnen Argumenten, ohne die spezifischen Inhalte der Argumente zu kennen oder zu berücksichtigen. Die zentrale Frage ist nun, welche dieser Argumente akzeptabel sind und welche abgelehnt werden können. Das Problem der Akzeptanz von Argumenten wurde bereits von Dung durch die Definition verschiedener sogenannter *Semantiken* formalisiert [Dun95]. Diese Semantiken beinhalten Kriterien, die zur Beurteilung der Akzeptanz oder der Ablehnung dienen. Dabei werden jeweils Mengen von Argumenten, sogenannte *Extensionen*, bestimmt, die diese Kriterien erfüllen und insgesamt als akzeptabel angesehen werden können.

Zur Einführung sollen nachfolgend zunächst zwei Beispiele gegeben werden.

Beispiel 2.6. In Beispiel 2.1 können die beiden Argumente a_1 (Lass uns eine Fahrradtour machen) und b_1 (Mein Fahrrad wurde gestohlen) offensichtlich nicht gleichzeitig akzeptiert werden, da sie sich widersprechen. Wenn das Fahrrad geklaut wurde, ist eine Fahrradtour nicht möglich. Die beiden Argumente stehen in einem Konflikt zueinander.

Beispiel 2.7. In Beispiel 2.1 bringt Ben zum Argument a_1 die Gegenargumente b_1 und b_3 vor. Es ist nachvollziehbar, dass beide Gegenargumente stichhaltig sind und gegen eine Fahrradtour sprechen. Hätte Anna keine weiteren Argumente, könnte man davon ausgehen, dass Bens Argumente akzeptiert werden und die Fahrradtour abgesagt wird. Da Anna jedoch für beide Gegenargumente jeweils eine Lösung in Form der Argumente a_3 und a_4 anbietet und Ben nichts mehr dagegen einzuwenden hat, könnte man in diesem Fall die Argumente $\{a_1, a_3, a_4\}$ als akzeptiert betrachten, und man würde schlussfolgern, dass die Fahrradtour stattfindet.

Um die beiden Beispiele nun zu formalisieren, werden die in Dungs Arbeit [Dun95] vorgestellten *konfliktfreien* und *zulässigen* Mengen sowie die dort vorgestellten Semantiken nachfolgend dargestellt. Dies sind die *vollständige, präferierte, grundierte* und *stabile* Semantik. Dabei wird nach jeder Definition ein Beispiel gegeben, das sich immer auf das AF F_2 aus Abbildung 2 beziehen wird, bei dem die Bedeutung der einzelnen Argumente nicht von Relevanz ist. Interessant sind lediglich die Beziehungen zwischen den einzelnen Argumenten.

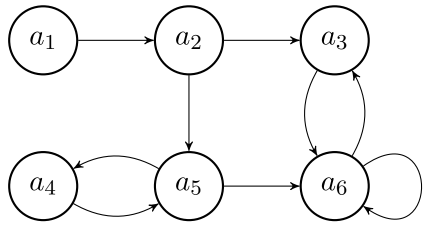

Abbildung 2: AF F_2 zu Beispiel 2.8. Eigene Darstellung.

In Beispiel 2.6 wurde bereits gezeigt, wie ein Konflikt zwischen zwei Argumenten aussehen kann. Ein solcher Konflikt soll vermieden werden, weshalb stets nach konfliktfreien Mengen gesucht wird, die gemeinsam akzeptiert werden können.

Definition 2.6 (Konfliktfreie Mengen[3]). Sei $F = (A, R)$ ein AF und $S \subseteq A$. Eine Menge S heißt konfliktfrei (engl. conflict-free) gdw. für alle $a, b \in S$ weder aRb noch bRa gelten. Innerhalb der Menge S gibt es somit keine Angriffe. Die Menge aller konfliktfreien Mengen von F bezeichnet $cf(F) = \{S \subseteq A \mid \text{S ist konfliktfrei}\}$.

Beispiel 2.8. Für das AF F_2 aus Abbildung 2 sind beispielsweise $\{a_1\}$, $\{a_4\}$, $\{a_1, a_4\}$, $\{a_2, a_4\}$ und $\{a_1, a_3, a_4\}$ konfliktfreie Mengen, da innerhalb der jeweiligen Menge keine Angriffe stattfinden. Die Menge $\{a_4, a_5\}$ ist nicht konfliktfrei, da $(a_4, a_5) \in R_2$ gilt. Auch $\{a_6\}$ ist nicht konfliktfrei, da sich das Argument selbst angreift.

Neben der Konfliktfreiheit von gemeinsam akzeptierten Argumenten ist zudem auch wünschenswert, dass eine akzeptierte Menge nicht von außen angegriffen wird. Sollte dennoch ein Angriff auf die Menge erfolgen, soll dieser Angriff von der akzeptierten Menge stets mit einem Gegenangriff verteidigt werden. Dies führt zum Begriff der zulässigen Menge.

Definition 2.7 (Zulässige Mengen[4]). Sei $F = (A, R)$ ein AF und $S \subseteq A$. Eine Menge S heißt zulässig (engl. admissible) gdw. $S \in cf(F)$ und jedes $a \in S$ von S verteidigt wird. Die Menge aller zulässigen Mengen von F bezeichnet $ad(F) = \{S \subseteq A \mid \text{S ist zulässig}\}$.

Beispiel 2.9. Für das AF F_2 aus Abbildung 2 sind beispielsweise $\{a_1\}$, $\{a_4\}$, $\{a_1, a_5\}$, oder $\{a_1, a_3\}$ zulässige Mengen. Die Menge $\{a_5\}$ allein ist nicht zulässig, da sich diese nicht vor dem Angreifer a_2 verteidigen kann.

[3] Definition 5 aus [Dun95]
[4] Definition 6 aus [Dun95]

Die beiden Begriffe der konfliktfreien und der zulässigen Menge sind bisher noch relativ schwach, da insbesondere die leere Menge immer zulässig ist und damit in jedem Fall eine akzeptable Lösung bietet. Dies ist in einer praktischen Anwendung nicht wünschenswert. Zudem kann es immer eine zulässige Menge geben, die weitere Argumente verteidigt. Wünschenswert wäre, dass auch diese verteidigten Argumente akzeptiert werden. Dies führt zum Begriff der vollständigen Extension.

Definition 2.8 (Vollständige Extensionen[5])**.** Sei $F = (A, R)$ ein AF und $S \subseteq A$. Eine Menge S heißt vollständig (engl. complete) gdw. $S \in ad(F)$ und jedes Argument $a \in A$, das von S verteidigt wird, auch in S liegt. Es gilt somit $\tau_F(S) = S$. Die Menge aller vollständigen Extensionen von F bezeichnet $co(F) = \{S \subseteq A \mid \text{S ist vollständig}\}$.

Beispiel 2.10. Für das AF F_2 aus Abbildung 2 ist beispielsweise die Menge $\{a_1\}$ bereits vollständig, da kein anderes Argument $a \in A_2$ von $\{a_1\}$ verteidigt wird. Insbesondere werden a_3 und a_5 nicht verteidigt, da sie neben a_2 noch weitere Angreifer besitzen, die nicht von $\{a_1\}$ angegriffen werden. Weitere vollständige Extensionen sind beispielsweise $\{a_1, a_3\}$ und $\{a_1, a_4\}$. Die Menge $\{a_1, a_5\}$ hingegen ist nicht vollständig, da das Argument a_3 verteidigt wird. Auch $\{a_4\}$ ist nicht vollständig, da das nicht attackierte Argument a_1 von jeder Menge verteidigt wird und somit auch von $\{a_4\}$.

Auch wenn es sich bei einer Argumentmenge bereits um eine vollständige Extension handelt, kann es möglich sein, dass weitere Argumente hinzugenommen werden können, sodass diese größere Argumentmenge ebenfalls vollständig ist. Dies führt zur präferierten Semantik, die die größtmögliche vollständige Extension darstellt.

Definition 2.9 (Präferierte Extensionen[6])**.** Sei $F = (A, R)$ ein AF und $S \subseteq A$. Eine Menge S heißt präferiert (engl. preferred) gdw. $S \in co(F)$ und S maximal ist. Es gibt somit keine größere Menge $S' \supset S$, die ebenfalls vollständig ist. Die Menge aller präferierten Extensionen von F bezeichnet $pr(F) = \{S \subseteq A \mid \text{S ist präferiert}\}$.

Beispiel 2.11. Betrachtet man die vollständige Extension $\{a_1, a_3\}$ des AFs F_2 aus Abbildung 2 (vgl. Beispiel 2.10), fällt auf, dass es noch weitere Argumente gibt, die zwar nicht von der Menge verteidigt werden, aber dennoch der Menge hinzugefügt werden können, ohne die Vollständigkeit zu verletzen. Betrachtet man nun das Argument a_4, so wird dieses zwar nicht von $\{a_1, a_3\}$ verteidigt, aber es verteidigt sich selbst gegen alle Angreifer. Somit ist $\{a_1, a_3, a_5\}$ ebenfalls vollständig und zudem maximal. Die präferierten Extensionen von F_2 sind $\{a_1, a_3, a_4\}$ und $\{a_1, a_3, a_5\}$.

Bezogen auf die präferierte Semantik kann es unterschiedliche Extensionen und damit auch unterschiedliche Argumente geben, die gemeinsam akzeptiert werden können. Es kann auch hilfreich sein, die Schnittmenge aller präferierten Extensionen zu betrachten. Dies ist somit die Menge, die in jedem Fall akzeptiert werden kann. Dies führt zur grundierten Semantik.

[5]Definition 23 aus [Dun95]
[6]Definition 7 aus [Dun95]

Definition 2.10 (Grundierte Extensionen[7]). Sei $F = (A, R)$ ein AF und $S \subseteq A$. Eine Menge S heißt grundiert (engl. grounded) gdw. $S \in co(F)$ und S minimal ist. Es gibt somit keine kleinere Menge $S' \subset S$, die ebenfalls vollständig ist. Die grundierte Extension entspricht dem Fixpunkt der iterativen Anwendung der charakteristischen Funktion, bei der als Startpunkt die leere Menge verwendet wird. Der erste Funktionsaufruf ist somit $\tau_F(\emptyset)$. Die Menge aller grundierten Extensionen von F bezeichnet $gr(F) = \{S \subseteq A \mid \text{S ist grundiert}\}$.

Beispiel 2.12. Für das AF F_2 aus Abbildung 2 ist die Menge $\{a_1\}$ die einzige grundierte Extension, da diese Menge vollständig und minimal ist. Der Fixpunkt der iterativen Anwendung der charakteristischen Funktion ist $\tau_F(\{a_1\}) = a_1$.

Die letzte Semantik ist die stabile Semantik. Bei dieser ist es notwendig, dass alle Argumente außerhalb der akzeptierten Argumentmenge angegriffen werden. Dies verdeutlicht die nachfolgende Definition.

Definition 2.11 (Stabile Extensionen[8]). Sei $F = (A, R)$ ein AF und $S \subseteq A$. Eine Menge S heißt stabil (engl. stable) gdw. $S \in cf(F)$ und alle Argumente außerhalb von S angegriffen werden. Für die Reichweite gilt somit $S^{\oplus} = A$. Die Menge aller stabilen Extensionen von F bezeichnet $st(F) = \{S \subseteq A \mid \text{S ist stabil}\}$.

Beispiel 2.13. Für das AF F_2 aus Abbildung 2 sind $\{a_1, a_3, a_5\}$ und $\{a_1, a_3, a_4\}$ die einzigen stabilen Extensionen. Für $S = \{a_1, a_3, a_4\} \in co(F_2)$ gilt beispielsweise $S^+ = \{a_2, a_5, a_6\}$ und $S^{\oplus} = A_2$, es gibt somit kein weiteres Argument, das weder in S liegt, noch von S angegriffen wird.

Wie zuvor beschrieben sind die von Dung eingeführten klassischen Semantiken die vollständige, die präferierte, die grundierte und die stabile Semantik. Im Rahmen dieser Arbeit werden auch konfliktfreie und zulässige Mengen zur Vereinfachung als Semantiken bezeichnet. Insbesondere werden konfliktfreie Mengen und zulässige Mengen gleichermaßen als Extensionen bezeichnen, es sei aber darauf hingewiesen, dass diese im klassischen Sinne keine echten Extensionen darstellen. Extensionen werden somit im Rahmen dieser Arbeit wie folgt definiert:

Definition 2.12 (σ-Extensionen). Sei $F = (A, R)$ ein AF und $\sigma \in \{cf, ad, co, pr, gr, st\}$. Dann bezeichnet $\sigma(F)$ die Menge der jeweiligen Extensionen.

Der Zusammenhang bzw. die Beziehung zwischen allen genannten Semantiken ist in Abbildung 3 dargestellt. Es gilt $st(F) \subseteq pr(F) \subseteq co(F) \subseteq ad(F) \subseteq cf(F)$. Weiter gilt $gr(F) \subseteq co(F)$. In Ergänzung zur Abbildung 3 sei erwähnt, dass es für ein AF F genau eine grundierte Extension gibt, die per Definition immer vollständig ist. Die grundierte Extension kann somit, abhängig vom AF, auch gleichzeitig präferiert oder stabil sein.

Weitere bekannte Semantiken, die auf der Veröffentlichung von Dung [Dun95] basieren, sind beispielsweise die semi-stabile Semantik, die Stage-Semantik und die ideale

[7] Definition 20 aus [Dun95]
[8] Definition 13 aus [Dun95]

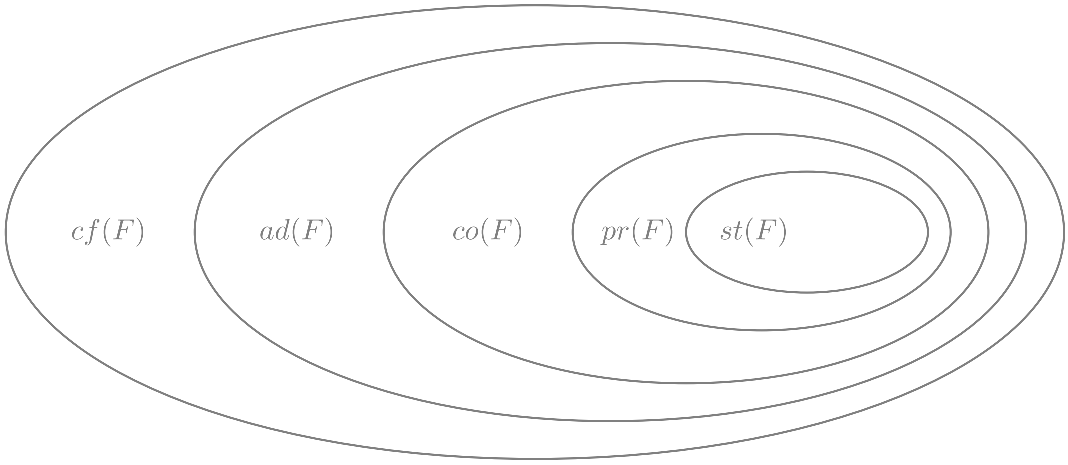

Abbildung 3: Mengendarstellung der verschiedenen Mengen von Extensionen $cf(F)$, $ad(F)$, $co(F)$, $pr(F)$ und $st(F)$. Die grundierte Extension $gr(F)$ ist zur besseren Übersicht nicht dargestellt, würde aber entweder in $st(F)$, in $pr(F) \setminus st(F)$ oder in $co(F) \setminus pr(F)$ liegen. In jedem Fall gilt aber $gr(F) \subseteq co(F)$. Eigene Darstellung.

Semantik. Für einen vollständigen Überblick über die aktuellen Semantiken wird auf Baroni, Caminada und Giacomin [BCG18] verwiesen. Diese werden im Rahmen dieser Arbeit nicht betrachtet.

Für einige Fragestellungen ist nur ein einzelnes Argument von Interesse, für das entschieden werden soll, ob dieses Argument in mindestens einer Situation oder möglicherweise sogar in allen Situationen akzeptiert werden kann. Beispielsweise kann für das AF aus Abbildung 2 interessant sein, ob a_1 in jeder Situation (bzw. in jeder Extension) akzeptiert werden kann und somit sicher davon auszugehen ist, dass a_1, unabhängig von der Akzeptanz anderer Argumente, akzeptiert wird.

Um nun entscheiden zu können, ob ein Argument in mindestens einer oder in allen Situationen akzeptiert werden kann, wird zwischen leichtgläubigen und skeptischen Schlussfolgerungen unterschieden [VP00], die nachfolgend definiert werden.

Definition 2.13 (Leichtgläubige σ-Schlussfolgerung)**.** Sei $F = (A, R)$ ein AF und $a \in A$ ein Argument. a ist eine leichtgläubige σ-Schlussfolgerung für eine Semantik $\sigma \in \{cf, ad, co, pr, gr, st\}$ gdw. es eine Extension $S \in \sigma(F)$ gibt, sodass $a \in S$.

Für eine leichtgläubige σ-Schlussfolgerung muss ein Argument a somit in mindestens einer σ-Extension vorkommen und damit akzeptiert sein.

Beispiel 2.14. Für das AF F_2 aus Abbildung 2 ist das Argument a_4 eine leichtgläubige co-Schlussfolgerung, da die Menge $\{a_1, a_4\} \in co(F)$ eine vollständige Extension ist und $a_4 \in \{a_1, a_4\}$. Auch die Argumente a_1 und a_3 sind leichtgläubige co-Schlussfolgerungen (vgl. Beispiel 2.10).

Für eine skeptische σ-Schlussfolgerung muss ein Argument a hingegen in allen möglichen σ-Extensionen vorkommen und damit in diesen akzeptiert sein.

Definition 2.14 (Skeptische σ-Schlussfolgerung)**.** Sei $F = (A, R)$ ein AF und $a \in A$ ein Argument. Das Argument a ist eine skeptische σ-Schlussfolgerung für eine Semantik $\sigma \in \{cf, ad, co, pr, gr, st\}$ gdw. für alle Extensionen $S \in \sigma(F)$ gilt, dass $a \in S$.

Beispiel 2.15. Für das AF F_2 aus Abbildung 2 ist das Argument a_1 eine skeptische co-Schlussfolgerung, da a_1 Teil jeder möglichen vollständigen Extension ist. Grund dafür ist, dass a_1 nicht angegriffen wird und somit von jeder anderen Menge $S \subseteq A$ verteidigt wird. Per Definition muss a_1 somit in jeder vollständigen Extension enthalten sein (vgl. Definition 2.8).

Nachdem in diesem Unterkapitel vorgestellt wurde, wie sich Argumentmengen finden lassen, die gemeinsam akzeptiert werden können, soll im nachfolgenden Unterabschnitt 2.3 auf wünschenswerte Eigenschaften dieser Semantiken eingegangen werden.

2.3 Eigenschaften (Postulate)

Um eine passende Semantik für ein gegebenes Problem auswählen zu können und um verschiedene Semantiken vergleichbar zu machen, haben van der Torre und Vesic unterschiedliche Eigenschaften, sogenannte *Postulate*, eingeführt [vdTV17] (erstmals wurden diese bereits 2007 von Baroni und Giacomin vorgestellt [BG07]). Davon sollen die wichtigsten Grundsätze in diesem Unterkapitel dargestellt werden. Dies stellt lediglich eine Auswahl dar, für eine vollständige Übersicht sei auf die Arbeiten von van der Torre und Vesic bzw. von Baroni und Giacomin verwiesen [vdTV17, BG07].

Für die nachfolgenden Definitionen dieses Unterkapitels sei, sofern nicht anders erwähnt, stets $F = (A, R)$ ein beliebiges AF und, da die Eigenschaften auf beliebige Semantiken anwendbar sind, sei $\sigma \in \{cf, ad, co, pr, gr, st\}$.

Für die erste Eigenschaft der Syntaxunabhängigkeit ist zunächst zu definieren, wann zwei AFs isomorph sind.

Definition 2.15 (Isomorphe AFs)**.** Seien $F = (A, R)$ und $F' = (A', R')$ zwei AFs. Die beiden AFs F und F' heißen isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $\rho : A \to A'$ gibt, sodass für alle $a, b \in A$ gilt:

$$(a, b) \in R \quad \text{gdw.} \quad (\rho(a), \rho(b)) \in R'.$$

Mit Hilfe dieser Definition lässt sich nun die gewünschte Eigenschaft der Syntaxunabhängigkeit definieren, bei der es darum geht, dass sich die σ-Extensionen unabhängig von deren Bezeichnung bestimmen lassen sollen.

Definition 2.16 (Syntaxunabhängigkeit[9])**.** Eine Semantik σ erfüllt Syntaxunabhängigkeit gdw. für alle AFs F und F' gilt: Falls F und F' isomorph mit einer bijektiven Abbildung ρ sind (es gilt somit $\rho(F) = F'$), dann folgt:

$$\sigma(\rho(F)) = \rho(\sigma(F)).$$

[9] Principle 1 aus [vdTV17]

Die zweite Eigenschaft ist die I-Maximalität. Ist I-Maximalität erfüllt, gibt es keine unterschiedlichen Extensionen eines AFs, die in einer echten Teilmengenbeziehung zueinanderstehen.

Definition 2.17 (I-Maximalität[10]). Seien $S, S' \in \sigma(F)$. Eine Semantik σ erfüllt I-Maximalität gdw. für alle AFs gilt: Wenn $S \subseteq S'$, dann gilt $S = S'$.

Die dritte Eigenschaft ist die Enthaltung. Gibt es zwei unterschiedliche Extensionen S und S', so dass ein Argument a in S akzeptiert und in S' abgelehnt wird, dann erfüllt eine Semantik diese Eigenschaft nur, sofern es eine dritte Extension S'' gibt, die das Argument a weder akzeptiert noch ablehnt.

Definition 2.18 (Enthaltung[11]). Seien $S_1, S_2 \in \sigma(F)$ zwei Extensionen von F. Eine Semantik σ erfüllt Enthaltung gdw. für alle Argumente $a \in A$ gilt: Ist $a \in S_1$ und zudem auch $a \in S_2^+$, dann gibt es eine weitere Extension $S_3 \in \sigma(F)$, sodass weder $a \in S_3$ noch $a \in S_3^+$ gilt.

Als Vorbereitung auf das nächste Postulat muss an dieser Stelle zunächst der Begriff der *Projektion* eingeführt werden. Als Projektion werden alle Argumente aus einer Menge S und deren Angriffe untereinander, die im AF existieren, betrachtet.

Definition 2.19 (Projektion eines AFs). Für eine Menge $S \subseteq A$ ist die Projektion $F_{\downarrow S}$ (F projiziert auf S) gegeben durch $F_{\downarrow S} = (S, R \cap (S \times S))$.

Die vierte wünschenswerte Eigenschaft ist die Direktionalität. Diese Eigenschaft ist erfüllt, wenn für jede Schnittmenge einer unattackierten Menge S und einer Extension S' gilt, dass diese Schnittmenge in der Projektion des AFs auf S ebenfalls eine Extension darstellt. Dies formalisiert die nachfolgende Definition.

Definition 2.20 (Direktionalität[12]). Sei $S \subseteq A$ eine in F unattackierte Menge, d.h. S wird von keinem Argument $a \in \{A \setminus S\}$ angegriffen. Sei zudem $S' \in \sigma(F)$ eine σ-Extension in F. Eine Semantik σ erfüllt Direktionalität gdw. $\sigma(F_{\downarrow S}) = \{S' \cap S \mid S' \in \sigma(F)\}$ für jedes AF gilt.

Die fünfte Eigenschaft ist die Dichtheit, die wie folgt definiert ist:

Definition 2.21 (Dichtheit[13]). Eine Menge von Extensionen $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $S_1, \ldots, S_n \in \sigma(F)$ heißt dicht gdw. gilt: Sei $S \in \mathcal{S}$ und $S \cup \{a\} \notin \mathcal{S}$ mit $a \in A \setminus S$, dann folgt, dass es ein $b \in S$ gibt, das nicht gemeinsam mit a in einer beliebigen Extension aus $\mathcal{S}$ vorkommen kann. Die Argumente a und b sind auf eine Art inkompatibel miteinander, beispielsweise durch eine Angriffsbeziehung.

Eine Semantik σ erfüllt Dichtheit gdw. die Menge $\sigma(F)$ für jedes AF dicht ist.

[10] Principle 11 aus [vdTV17]
[11] Principle 12 aus [vdTV17]
[12] Principle 15 aus [vdTV17]
[13] Principle 21 aus [vdTV17]

Die sechste wünschenswerte Eigenschaft ist die Konfliktsensitivität.

Definition 2.22 (Konfliktsensitivität[14])**.** Eine Menge von Extensionen $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $S_1, \ldots, S_n \in \sigma(F)$ heißt konfliktsensitiv gdw. für alle Paare $S_i, S_j \in \mathcal{S}$ mit $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt: Wenn $S_i \cup S_j \notin \mathcal{S}$, dann folgt, dass es ein $a \in S_i$ und ein $b \in S_j$ gibt, die inkompatibel sind und nicht gemeinsam in einer Extension in $\mathcal{S}$ vorkommen.

Eine Semantik σ erfüllt Konfliktsensitivität gdw. die Menge $\sigma(F)$ für jedes AF konfliktsensitiv ist.

Ergänzend zu den Postulaten von van der Torre und Vesic [vdTV17] soll an dieser Stelle noch eine weitere letzte Eigenschaft, die Modularisierung, dargestellt werden, die von Baumann et al. publiziert wurde [BBU22]. Zuvor muss noch der Begriff des *Redukts* eingeführt werden.

Definition 2.23 (Redukt[15])**.** Das Redukt F^S eines AFs F bzgl. einer Menge $S \subseteq A$ ist wie folgt definiert:

$$F^S = (A', R \cap (A' \times A')),$$

wobei $A' = A \setminus S^{\oplus}$.

Eine alternative Definition des Redukts lässt sich mit Hilfe der Projektion (vgl. Definition 2.19) formulieren mit

$$F^S = F_{\downarrow A \setminus S^{\oplus}}.$$

Das heißt, es wird nur der Teilgraph von F betrachtet, aus dem alle Argumente aus S und alle Argumente, die von S angegriffen werden, entfernt wurden.

Nachdem das Redukt nun definiert wurde, lässt sich die letzte wünschenswerte Eigenschaft definieren. Dies ist die Modularisierung. Wird diese Eigenschaft erfüllt, lässt sich für eine Extension S aus einem AF F und eine Extension S' aus dem Redukt F^S schließen, dass auch die Vereinigung $S \cup S'$ eine Extension im originalen Graphen F darstellt.

Definition 2.24 (Modularisierung[16])**.** Eine Semantik σ erfüllt Modularisierung gdw. für alle AFs F gilt: Wenn $S \in \sigma(F)$ und $S' \in \sigma(F^S)$, dann gilt $S \cup S' \in \sigma(F)$.

Nachdem nun alle wünschenswerten Eigenschaften vorgestellt wurden, soll Tabelle 1 einen Überblick darüber geben, welche der zuvor genannten Postulate von den verschiedenen Semantiken erfüllt werden und welche nicht erfüllt werden [DDLW15, DKUW24]. Anzumerken ist an dieser Stelle, dass es für Semantiken, die ein Postulat im Allgemeinen nicht erfüllen, dennoch einzelne AFs geben kann, die dieses Postulat erfüllen. Für die Erfüllung im Allgemeinen ist allerdings per Definition gefordert, dass alle beliebigen AFs das Postulat erfüllen.

[14] Principle 22 aus [vdTV17]
[15] Definition 3.1 aus [BBU22]
[16] Definition 6.1 aus [BBU22]

	cf	ad	co	pr	gr	st
Syntaxunabhängigkeit	✓	✓	✓	✓	✓	✓
I-Maximalität	✗	✗	✗	✓	✓	✓
Enthaltung	✓	✓	✓	✗	✓	✗
Direktionalität	✓	✓	✓	✓	✓	✗
Dichtheit	✓	✗	✗	✗	✓	✓
Konfliktsensitivität	✓	✓	✗	✓	✓	✓
Modularisierung	✗	✓	✓	✓	✓	✓

Tabelle 1: Übersicht der Erfüllung von Postulaten durch verschiedene Semantiken. Eigene Darstellung in Anlehnung an Dunne et al. und Dvořák et al. [DDLW15, DKUW24].

3 Erweiterungen abstrakter Argumentationsgraphen

Wie bereits im vorherigen Abschnitt 2 beschrieben, wurden die von Dung veröffentlichen Semantiken [Dun95] im Laufe der Jahre immer wieder erweitert und es wurden neue Semantiken veröffentlicht. Zudem gab es aber auch Erweiterungen der ursprünglichen abstrakten Argumentationsgraphen (AFs).

Die AFs von Dung waren darauf beschränkt, dass nur ein einzelnes Argument ein anderes Argument angreifen kann. In der Realität gibt es allerdings auch Argumentationen, in denen beispielsweise nicht nur Gegenargumente, sondern auch unterstützende Argumente hervorgebracht werden können. Es ist auch denkbar, dass erst mehrere Argumente in Kombination zu einem Angriff führen oder dass das Wissen über Angriffsbeziehungen oder über die Existenz von Argumenten unsicher ist. Um dieses Abstraktionsniveau von Dung abzuschwächen, wurden sogenannte *semi-abstrakte Argumentationsgraphen* eingeführt, die weitere Aspekte der Realität berücksichtigen sollten. Zwei solcher semi-abstrakten Argumentationsgraphen sollen in den nachfolgenden Unterabschnitten vorgestellt werden.

3.1 Argumentationsgraphen mit Mengenangriffen

Wie bereits einleitend erwähnt, ist es in realen Argumentationen denkbar, dass ein Argument von einer Menge mehrerer Argumente angegriffen wird. Das heißt, es kann ein Argument a geben, das allein nicht ausreichend ist, um ein Argument c anzugreifen. Ist aber neben a auch ein weiteres Argument b akzeptabel, können beide Argumente in Kombination das Argument c angreifen. Eine solche Erweiterung der abstrakten Argumentationsgraphen wurde von Nielsen und Parsons [NP06] erarbeitet.

Beispiel 3.1. Das Beispiel 2.1, in dem Anna und Ben über eine geplante Fahrradtour diskutieren, wird abgeändert. Die Argumentation sieht nun wie folgt aus:

a_1: Lass uns eine Fahrradtour machen.

b_1: Die Sonne scheint.

b_2: Ich habe eine Sonnenallergie.

Offensichtlich ist Bens Argument b_1 allein kein aussagekräftiges Argument gegen eine Fahrradtour. Dass die Sonne scheint, wäre tatsächlich eher ein Grund für eine Fahrradtour. Aber auch das zweite Argument b_2 allein betrachtet stellt kein Gegenargument dar. Da über das Wetter nichts bekannt ist, stellt die Sonnenallergie von Ben nicht automatisch ein Hinderungsgrund für eine Fahrradtour dar.

Erst beide Argumente b_1 und b_2 in Kombination stellen ein Gegenargument für a_1 dar, sofern diese akzeptiert werden können. Da die Sonne scheint und Ben eine Sonnenallergie hat, ist eine Fahrradtour an diesem Tag nicht möglich.

Um solche Szenarien modellieren zu können, wurden Argumentationsgraphen mit Mengenangriffen (SetAFs) eingeführt. SetAFs bieten die Möglichkeit, dass auch mehrere Argumente gemeinsam ein anderes Argument angreifen können.

Definition 3.1 (Argumentationsgraph mit Mengenangriffen[17]). Ein Argumentationsgraph mit Mengenangriffen (SetAF) ist ein Tupel $M = (A, \mathcal{R})$. Dabei bezeichnet A die Menge der Argumente und $\mathcal{R}$ die Menge der Angriffe zwischen diesen Argumenten, wobei $\mathcal{R} \subseteq (2^A \setminus \{\emptyset\}) \times A$.

Für ein SetAF erfolgt ein Angriff auf ein Argument somit durch eine nichtleere Menge von Argumenten aus A. Insbesondere kann die Menge auch nur ein einziges Argument enthalten, wodurch alle in AFs modellierbaren Angriffe auch im SetAF modelliert werden können. Für SetAFs muss zudem die Angriffsrelation neu definiert werden, da nun mehrere Argumente in Kombination angreifen können.

Definition 3.2 (Angriffsrelation mit Mengenangriffen). Für ein SetAF $M = (A, \mathcal{R})$ stellt $(S, b) \in \mathcal{R}$ mit $S \subseteq 2^A \setminus \{\emptyset\}$ und $b \in A$ einen Mengenangriff der Menge S auf das Argument b dar. Eine äquivalente Schreibweise für einen Angriff von der Menge S auf b ist $S\mathcal{R}b$.

Beispiel 3.2. Das zu Beispiel 3.1 gehörende SetAF $M_1 = (A_1, \mathcal{R}_1)$ mit $A_1 = \{a_1, b_1, b_2\}$ und $\mathcal{R}_1 = \{(\{b_1, b_2\}, a_1)\}$ ist in Abbildung 4 dargestellt. Ein Angriff auf a_1 kann nur in Kombination aus den Argumenten b_1 und b_2 erfolgen.

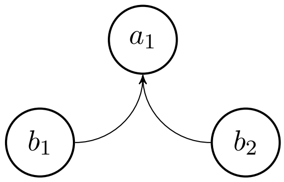

Abbildung 4: SetAF M_1 aus Beispiel 3.2. Eigene Darstellung.

Die in Unterabschnitt 2.1 eingeführten Bezeichnungen für S^- und S^+ gelten analog für SetAFs mit $S \subseteq A$. Insbesondere sind die einzelnen Argumente eines Mengenangriffs auf ein $a \in S$ in S^- enthalten. Ein Mengenangriff der Menge S' auf ein Argument $b \in A$ ist in S^+ enthalten gdw. $S' \subseteq S$, d.h. wenn alle Argumente des Mengenangriffs auch in S liegen.

Auch in SetAFs können Argumente von anderen Argumenten oder Argumentmengen verteidigt werden. Damit ein Argument in einem SetAF verteidigt wird, muss mindestens ein Argument der angreifenden Menge angegriffen werden. Für eine erfolgreiche Verteidigung müssen allerdings nicht notwendigerweise alle Argumente der angreifenden Menge angegriffen werden.

Definition 3.3 (Verteidigung). Für ein SetAF $M = (A, \mathcal{R})$, $S \subseteq A$ und $a \in S$ gilt: Die Menge S verteidigt das Argument a gdw. es für alle Angreifer $B \subseteq A$ mit $(B, a) \in \mathcal{R}$ eine weitere Menge $C \subseteq S$ gibt, wobei für mindestens ein $b \in B$ gilt: $(C, b) \in \mathcal{R}$. Analog wird eine Menge S' von S verteidigt gdw. alle Argumente $a \in S'$ von S verteidigt werden.

[17] Definition 1 aus [NP06]

Die Definitionen für die charakteristische Funktion (Definition 2.4) und die Reichweite (Definition 2.5) gelten gleichermaßen für SetAFs, wobei die geänderte Definition des Angriffs und der Verteidigung Anwendung findet.

Die in Unterabschnitt 2.2 vorgestellten Semantiken sollen nachfolgend in Kürze auf SetAFs übertragen werden, wobei für die ausführlichen Definitionen auf Nielsen und Parsons [NP06] bzw. Bikakis et al. [BCD$^+$21] verwiesen wird.

Definition 3.4 (Semantiken für SetAFs)**.** Sei $M = (A, \mathcal{R})$ ein SetAF und $S \subseteq A$. Die Mengen aller σ-Extensionen wird für SetAFs mit $\sigma(M)$ bezeichnet, wobei für $\sigma \in \{cf, ad, co, pr, gr, st\}$ gilt. Die Semantiken sind wie folgt definiert:

- Eine Menge S heißt **konfliktfrei** gdw. es keinen Mengenangriff $(B, a) \in \mathcal{R}$ gibt mit $B \subseteq S$ und $a \in S$.
- Eine konfliktfreie Menge $S \in cf(M)$ heißt **zulässig** gdw. alle $a \in S$ von S verteidigt werden. Von den angreifenden Mengen wird mindestens ein Argument von S angegriffen.
- Eine zulässige Menge $S \in ad(M)$ heißt **vollständig** gdw. für jedes Argument $a \in A$, das von S verteidigt wird, auch $a \in S$ gilt.
- Eine vollständige Menge $S \in co(M)$ heißt **präferiert** gdw. S maximal ist. Es gibt somit keine weitere vollständige Menge S' mit $S \subset S'$.
- Eine vollständige Menge $S \in co(M)$ heißt **grundiert** gdw. S minimal ist. Es gibt somit keine weitere vollständige Menge S' mit $S' \subset S$.
- Eine vollständige Menge $S \in co(M)$ heißt **stabil** gdw. $S \cup S^+ = A$.

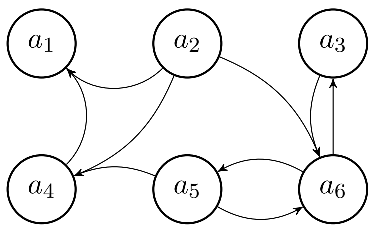

Abbildung 5: SetAF M_2. Eigene Darstellung.

Zum besseren Verständnis sollen nachfolgend anhand des SetAFs aus Abbildung 5 Beispiele für alle Semantiken gegeben werden.

Beispiel 3.3. In diesem Beispiel soll für jede Semantik anhand des SetAFs aus Abbildung 5 eine beispielhafte Extension und ein Gegenbeispiel angegeben werden. Das SetAF aus Abbildung 5 ist $M_2 = (A_2, R_2)$ mit $A_2 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ und $\mathcal{R}_2 = \{(\{a_2, a_4\}, a_1), (\{a_2, a_5\}, a_4), (\{a_5\}, a_6), (\{a_6\}, a_5), (\{a_2, a_3\}, a_6), (\{a_6\}, a_3)\}$. Die Semantiken sollen nun einzeln betrachtet werden:

- Konfliktfrei: Die Menge $\{a_1, a_5\}$ ist konfliktfrei, da sich die beiden Argumente nicht gegenseitig angreifen. Die Menge $\{a_1, a_2, a_4\}$ hingegen ist nicht konfliktfrei, da $(\{a_2, a_4\}, a_1) \in \mathcal{R}_2$ und somit ein Angriff innerhalb der Menge stattfindet.

- Zulässig: Die konfliktfreie Menge $\{a_6\}$ ist zulässig, da sich die Menge zum einen gegen die angreifende Menge $\{a_5\}$ durch einen Gegenangriff und zum anderen gegen den Angreifer $\{a_2, a_3\}$ durch einen Angriff auf a_3 verteidigt. Die Menge $\{a_4\}$ hingegen ist nicht zulässig, da $(\{a_2, a_5\}, a_4) \in R_2$ und keines der Argumente von $\{a_4\}$ angegriffen wird.

- Vollständig: Die zulässige Menge $S_1 = \{a_2, a_4, a_6\}$ ist vollständig, da jedes Argument, das von S_1 verteidigt wird, auch in S_1 liegt. Die Menge $S_2 = \{a_2, a_6\}$ ist nicht vollständig, da S_2 das Argument a_4 durch den Angriff $(\{a_6\}, a_5)$ verteidigt.

- Präferiert: Die vollständige Menge $\{a_1, a_2, a_3, a_5\}$ ist präferiert, da es keine echte Obermenge gibt, die ebenfalls vollständig ist. Die Menge $\{a_2, a_5\}$ hingegen ist nicht präferiert, da weitere Argumente hinzugefügt werden können, sodass die Menge ebenfalls vollständig ist.

- Grundiert: Die vollständige Menge $\{a_2\}$ ist grundiert, da es keine echte Teilmenge gibt, die ebenfalls vollständig ist. Insbesondere ist die Menge vollständig, weil $\{a_2\}$ kein weiteres Argument verteidigt. Die Menge $\{a_2, a_5\}$ hingegen ist nicht grundiert, da es die eben gezeigte echte Teilmenge $\{a_2\}$ gibt, die ebenfalls vollständig ist.

- Stabil: Die vollständige Menge $\{a_1, a_2, a_3, a_5\}$ ist stabil, da alle weiteren Argumente aus A_2 angegriffen werden. Die Menge $\{a_2, a_3, a_5\}$ hingegen ist nicht stabil, da das Argument a_1 weder in der Menge liegt, noch von der Menge angegriffen wird.

Die in Definition 2.13 und Definition 2.14 eingeführten Definitionen der leichtgläubigen und der skeptischen Schlussfolgerung lassen sich gleichermaßen auch auf SetAFs übertragen. Dabei werden die Definitionen wie folgt abgeändert:

Definition 3.5 (Leichtgläubige σ-Schlussfolgerung für SetAFs)**.** Sei $M = (A, \mathcal{R})$ ein SetAF und $a \in A$ ein Argument. a ist eine leichtgläubige σ-Schlussfolgerung für eine Semantik $\sigma \in \{cf, ad, co, pr, gr, st\}$ gdw. es eine Extension $S \in \sigma(M)$ gibt, sodass $a \in S$.

Definition 3.6 (Skeptische σ-Schlussfolgerung für SetAFs)**.** Sei $M = (A, \mathcal{R})$ ein SetAF und $a \in A$ ein Argument. a ist eine skeptische σ-Schlussfolgerung für eine Semantik $\sigma \in \{cf, ad, co, pr, gr, st\}$ gdw. für alle Extensionen $S \in \sigma(M)$ gilt, dass $a \in S$.

In diesem Unterkapitel das Framework SetAF als Erweiterung von AFs vorgestellt. Zudem wurden die Semantiken auf SetAFs übertragen und die Schlussfolgerungsprobleme angepasst. Im nächsten Unterabschnitt 3.2 soll nun ein weiteres Framework, das iAF, vorgestellt werden.

3.2 Unvollständige Argumentationsgraphen

Bei den von Dung [Dun95] eingeführten abstrakten Argumentationsgraphen wird davon ausgegangen, dass alle Argumente und Angriffe mit Sicherheit zutreffen. In der Realität kann dies jedoch nicht immer gewährleistet werden, da es Argumente geben kann, die unsicher sind oder über deren Existenz nicht genügend Informationen vorliegen. Genauso kann es auch für zwei Argumente a und b einen Angriff aRb geben, für den aber nicht mit Sicherheit gesagt werden kann, dass a das Argument b angreift. Dies kann zwar in einer bestimmten Situation sein, muss es aber nicht zwangsläufig.

Eine Erweiterung der abstrakten Argumentationsgraphen um unvollständiges Wissen über Argumente und Angriffe wurde von Baumeister et al. [BNRS18] veröffentlicht, wobei die ersten Ideen einer solchen Erweiterung von Coste-Marquis veröffentlich wurden [CMDK$^+$07]. Die Notwendigkeit eines solchen Frameworks soll das nachfolgende Beispiel verdeutlichen.

Beispiel 3.4. Das Beispiel 2.1, in dem Anna und Ben über eine geplante Fahrradtour diskutieren, wird abgeändert. Die Argumentation sieht nun wie folgt aus:

a_1: Lass uns eine Fahrradtour machen.

b_1: Laut Wetterbericht soll es mit einer Wahrscheinlichkeit von 30% regnen.

b_2: Ich habe einen platten Reifen.

b_3: Meine Fahrradkette könnte rausspringen.

In dieser Situation gibt es nun zum einen das sichere Argument a_1 von Anna und drei weitere Argumente von Ben, deren Existenz bzw. Sicherheit des Eintreffens überprüft werden soll. Das Argument b_1 ist unsicher, denn der Wetterbericht ist oft unzuverlässig und es ist lediglich eine Regenwahrscheinlichkeit von 30% angegeben. Es ist somit ungewiss, ob es überhaupt regnen wird. Wenn es allerdings tatsächlich regnen sollte, dann stellt dieses Argument einen Angriff auf a_1 dar, da die Fahrradtour bei Regen ausfällt.

Das Argument b_2 hingegen ist ein sicheres Argument. Es ist Fakt, dass Bens Reifen platt ist. Allerdings ist fraglich, ob dieses Argument a_1 angreift. Es ist möglich, dass der Reifen lediglich Luft verloren hat und mit einer Luftpumpe wieder aufgepumpt werden kann. Es würde sich somit nicht um einen Angriff auf a_1 handeln, da die Fahrradtour dennoch möglich wäre. Es besteht aber auch die Möglichkeit, dass Ben ein Loch im Reifen hat. In diesem Fall wäre die Fahrradtour nicht möglich und es würde sich um einen Angriff auf a_1 handeln.

Das Argument b_3 ist ein unsicheres Argument. Das Fahrrad funktioniert zum aktuellen Zeitpunkt, Ben hat lediglich Bedenken, dass die Fahrradkette rausspringen könnte. Sofern dies tatsächlich passieren sollte, wäre weiterhin unklar, ob dieses Argument überhaupt einen Angriff auf a_1 darstellt. Es ist möglich, dass Ben sich mit Fahrrädern auskennt und die Fahrradkette selbst wieder einsetzen kann. Die Fahrradtour könnte fortgesetzt werden und ein Angriff findet nicht statt. Allerdings kann es auch sein, dass Ben nicht weiß, wie man die Fahrradkette repariert und das Argument würde a_1 angreifen.

Das eben gezeigte Beispiel lässt sich mittels klassischer AFs nicht darstellen. Eine Darstellung ist allerdings mit der Erweiterung der unvollständigen Argumentationsgraphen (iAFs) möglich, das wie folgt definiert ist:

Definition 3.7 (Unvollständige Argumentationsgraphen[18])**.** Ein unvollständiger Argumentationsgraph (iAF) ist ein Tupel $I = (\mathscr{A}, \mathscr{A}^?, \mathscr{R}, \mathscr{R}^?)$. Dabei bezeichnet $\mathscr{A}$ die Menge der sicheren Argumente, $\mathscr{A}^?$ die Menge der unsicheren Argumente, $\mathscr{R}$ die Menge der bedingt sicheren Angriffe und $\mathscr{R}^?$ die Menge der unsicheren Angriffe, wobei $\mathscr{A} \cap \mathscr{A}^? = \emptyset$ und $\mathscr{R}, \mathscr{R}^? \subseteq (\mathscr{A} \cup \mathscr{A}^?) \times (\mathscr{A} \cup \mathscr{A}^?)$.

Ein iAF kann sowohl bedingt sichere als auch unsichere Angriffe enthalten. Bedingt sichere Angriffe sind dabei genau solche Angriffe, bei denen der Angreifer akzeptiert ist. Formal lässt sich dies folgendermaßen definieren:

Definition 3.8 (Bedingt sichere Angriffsrelation)**.** Für ein iAF $I = (\mathscr{A}, \mathscr{A}^?, \mathscr{R}, \mathscr{R}^?)$ bezeichnet $\mathscr{R}$ die bedingt sichere Angriffsrelation zwischen den Argumenten. Für einen bedingt sicheren Angriff $(a, b) \in \mathscr{R}$ mit $a, b \in \mathscr{A} \cup \mathscr{A}^?$ gilt: Wenn die Argumente a und b gültig sind, dann greift das Argument a das Argument b an. Eine äquivalente Schreibweise für einen bedingt sicheren Angriff von a auf b ist $a\mathscr{R}b$.

Bedingt sichere Angriffe eines iAFs beinhalten somit auch Angriffe, an denen unsichere Argumente beteiligt sein können. Angriffe dieser Art sind nur gültig, sofern diese unsicheren Argumente akzeptiert sind. Unsichere Angriffe hingegen sind unabhängig von den Argumenten, die am Angriff beteiligt sind. Auch wenn der Angreifer akzeptiert ist, muss ein unsicherer Angriff nicht zwingend erfolgen.

Definition 3.9 (Unsichere Angriffsrelation)**.** Für ein iAF $I = (\mathscr{A}, \mathscr{A}^?, \mathscr{R}, \mathscr{R}^?)$ bezeichnet $\mathscr{R}^?$ die unsichere Angriffsrelation zwischen den Argumenten. Für einen unsicheren Angriff $(a, b) \in \mathscr{R}^?$ mit $a, b \in \mathscr{A} \cup \mathscr{A}^?$ gilt: Wenn die Argumente a und b gültig sind, kann ein Angriff von a auf b erfolgen. Dieser Angriff muss nicht zwingend erfolgen. Eine äquivalente Schreibweise für einen unsicheren Angriff von a auf b ist $a\mathscr{R}^?b$.

Das nachfolgende Beispiel soll das Konzept von iAFs verdeutlichen, wobei auch die Unterschiede zwischen bedingt sicheren und unsicheren Angriffen hervorgehoben werden. Unsichere Argumente und unsichere Angriffe werden grundsätzlich durch gestrichelte Linien dargestellt.

Beispiel 3.5. Das zu Beispiel 3.4 gehörende iAF ist in Abbildung 6 dargestellt. Der in Abbildung 6 dargestellte Argumentationsgraph lautet $I_1 = \{\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_1^?, \mathscr{R}_1, \mathscr{R}_1^?\}$ mit $\mathscr{A}_1 = \{a_1, b_2\}$, $\mathscr{A}_1^? = \{b_1, b_3\}$, $\mathscr{R}_1 = \{(b_1, a_1)\}$, $\mathscr{R}_1^? = \{(b_2, a_1), (b_3, a_1)\}$. Der Angriff $(b_1, a_1) \in \mathscr{R}_1$ ist bedingt sicher, da dieser nur gültig ist, sofern auch das Argument b_1 akzeptiert ist. Der Angriff $(b_2, a_1) \in \mathscr{R}_1^?$ gilt hingegen als unsicher.

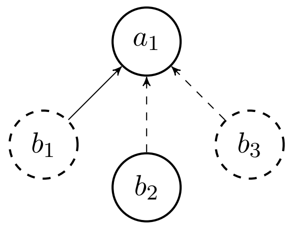

Abbildung 6: iAF I_1 aus Beispiel 3.4. Eigene Darstellung.

Um nun Aussagen über die Akzeptanz und Ablehnung von Argumenten in iAFs treffen zu können, gibt es in der Literatur zwei verschiedene Ansätze. Dies ist zum einen der von Baumeister et al. [BNRS18] vorgestellte vervollständigungsbasierte Ansatz und zum anderen der von Mailly [Mai21] veröffentlichte extensionsbasierte Ansatz. Beide Ansätze sollen im Rahmen dieser Arbeit untersucht werden. Aus diesem Grund werden nachfolgend zunächst die Grundlagen beider Ansätze vorgestellt.

3.2.1 Vervollständigungsbasierter Ansatz

Die Idee des vervollständigungsbasierten Ansatzes ist es, alle möglichen Konstellationen von AFs zu berücksichtigen und unter Berücksichtigung dieser Möglichkeiten Schlussfolgerungen über die Akzeptanz von Argumenten zu ziehen. Da ein iAF aus sicheren und unsicheren Komponenten besteht, lassen sich aus diesem iAF eine Vielzahl von AFs ableiten, bei denen alle enthaltenen Komponenten als sicher angesehen werden können. Dem iAF können somit alle möglichen Situationen (mögliche Kombinationen) entnommen werden. Auf diese Weise können die einzelnen AFs dann entsprechend der Erläuterungen aus Unterabschnitt 2.1 behandelt werden.

Ein solches AF, das aus einem iAF abgeleitet wird, nennt sich *Vervollständigung*. Diese Vervollständigung enthält selbst kein unsicheres Wissen mehr und ist wie folgt definiert:

Definition 3.10 (Vervollständigungen von iAFs[19])**.** Sei $I = (\mathscr{A}, \mathscr{A}^?, \mathscr{R}, \mathscr{R}^?)$ ein iAF und $Comp(I)$ die Menge aller Vervollständigungen. Für alle Vervollständigungen $I^* \in Comp(I)$ mit $I^* = (A^*, R^*)$ gilt: $\mathscr{A} \subseteq A^* \subseteq (\mathscr{A} \cup \mathscr{A}^?)$ und $\mathscr{R} \cap (A^* \times A^*) \subseteq R^* \subseteq (\mathscr{R} \cup \mathscr{R}^?) \cap (A^* \times A^*)$.

Beispiel 3.6. Für das in Abbildung 7 dargestellte iAF $I_2 = \{\mathscr{A}_2, \mathscr{A}_2^?, \mathscr{R}_2, \mathscr{R}_2^?\}$ mit $\mathscr{A}_2 = \{a_1, a_2, a_4\}$, $\mathscr{A}_2^? = \{a_3\}$, $\mathscr{R}_2 = \{(a_1, a_2), (a_2, a_3)\}$, $\mathscr{R}_2^? = \{(a_2, a_4)\}$ können insgesamt vier Vervollständigungen abgeleitet werden. Die Menge der Vervollständigungen $Comp(I_2)$ kann Abbildung 8 entnommen werden.

Für die einzelnen Vervollständigungen von iAFs gelten die Begriffe des Angriffs und der Verteidigung aus Unterabschnitt 2.1 gleichermaßen. Ebenso gelten für die einzelnen

[18]Definition 16 aus [BNRS18]
[19]Definition 19 aus [BNRS18]

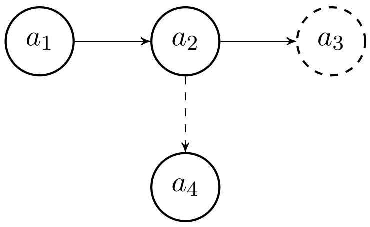

Abbildung 7: iAF I_2 aus Beispiel 3.6. Eigene Darstellung.

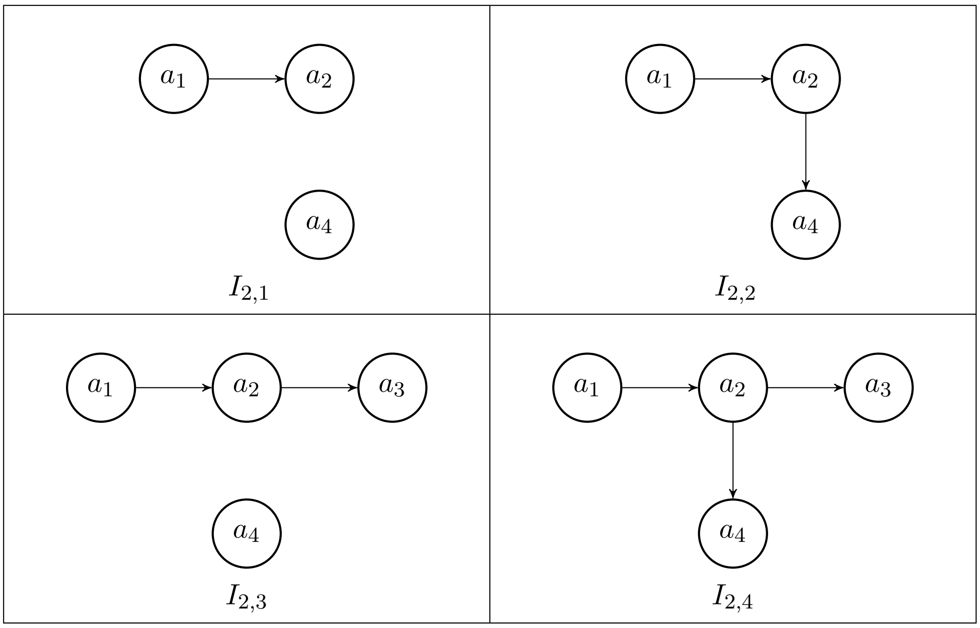

Abbildung 8: Menge aller Vervollständigungen des iAF I_2 aus Abbildung 7. Eigene Darstellung zu Beispiel 3.6.

Vervollständigungen auch die Semantiken aus Unterabschnitt 2.2, da es sich bei den Vervollständigungen um übliche AFs nach Dung handelt.

Um nun Aussagen über das iAF selbst treffen zu können, werden die Semantiken und deren Extensionen um die Begriffe der möglichen und der notwendigen σ-Extension wie folgt erweitert.

Definition 3.11 (Mögliche σ-Extension)**.** Für ein iAF $I = (\mathscr{A}, \mathscr{A}^?, \mathscr{R}, \mathscr{R}^?)$ und eine Semantik $\sigma \in \{cf, ad, co, pr, gr, st\}$ ist $S \subseteq (\mathscr{A} \cup \mathscr{A}^?)$ eine mögliche σ-Extension für I gdw. $S \in \sigma(I^*)$ für mindestens eine Vervollständigung $I^* \in Comp(I)$.

Beispiel 3.7. Für das in Abbildung 7 dargestellte iAF ist die Menge $\{a_1, a_4\}$ eine mögliche gr-Extension, da es in Abbildung 8 mindestens eine Vervollständigung gibt, für die $\{a_1, a_4\}$ eine grundierte Extension ist.

Ebenso lässt sich auch die notwendige σ-Extension auf iAFs übertragen:

Definition 3.12 (Notwendige σ-Extension)**.** Für ein iAF $I = (\mathscr{A}, \mathscr{A}^?, \mathscr{R}, \mathscr{R}^?)$ und eine Semantik $\sigma \in \{cf, ad, co, pr, gr, st\}$ ist $S \subseteq \mathscr{A}$ eine notwendige σ-Extension für I gdw. $S \in \sigma(I^*)$ für alle Vervollständigungen $I^* \in Comp(I)$.

Beispiel 3.8. Für das in Abbildung 7 dargestellte iAF ist die Menge $\{a_1, a_4\}$ eine notwendige ad-Extension, da diese für alle Vervollständigungen aus Abbildung 8 jeweils eine zulässige Menge ist.

Die in Definition 2.13 und Definition 2.14 eingeführten Definitionen der leichtgläubigen und der skeptischen Schlussfolgerung müssen für iAFs abgeändert werden, da nun eine Vielzahl unterschiedlicher Argumentationsgraphen (die Vervollständigungen) berücksichtigt werden müssen.

Definition 3.13 (Schlussfolgerungsprobleme für iAFs)**.** Sei $I = (\mathscr{A}, \mathscr{A}^?, \mathscr{R}, \mathscr{R}^?)$ ein iAF mit den Vervollständigungen $I^* \in Comp(I)$. Für ein Argument $a \in (\mathscr{A} \cup \mathscr{A}^?)$ und eine Semantik $\sigma \in \{cf, ad, co, pr, gr, st\}$ gilt:

1. a ist eine **mögliche leichtgläubige** σ-Schlussfolgerung von I gdw. es mindestens eine Vervollständigung I^* gibt, für die a eine leichtgläubige σ-Schlussfolgerung ist.

2. a ist eine **mögliche skeptische** σ-Schlussfolgerung von I gdw. es mindestens eine Vervollständigung I^* gibt, für die a eine skeptische σ-Schlussfolgerung ist.

3. a ist eine **notwendige leichtgläubige** σ-Schlussfolgerung von I gdw. für alle Vervollständigungen I^* gilt, dass a eine leichtgläubige σ-Schlussfolgerung ist.

4. a ist eine **notwendige skeptische** σ-Schlussfolgerung von I gdw. für alle Vervollständigungen I^* gilt, dass a eine skeptische σ-Schlussfolgerung ist.

Beispiel 3.9. Für das in Abbildung 7 dargestellte iAF sollen die verschiedenen Schlussfolgerungen an einem beispielhaften Argument aufgezeigt werden.

1. a_3 ist eine mögliche leichtgläubige ad-Schlussfolgerung.

2. a_4 ist eine mögliche skeptische co-Schlussfolgerung.

3. a_4 ist eine notwendige leichtgläubige ad-Schlussfolgerung.

4. a_1 ist eine notwendige skeptische gr-Schlussfolgerung.

Durch diese Schlussfolgerungsprobleme ist es nun möglich, trotz unvollständiger Information über Argumente oder Angriffe Aussagen über die Akzeptanz von Argumenten zu treffen. Insbesondere ist die notwendige skeptische σ-Schlussfolgerung eine sehr strikte Schlussfolgerung, da die Akzeptanz eines Argumentes trotz fehlender Informationen mit Sicherheit angenommen werden kann.

3.2.2 Extensionsbasierter Ansatz

Der zweite Ansatz, um Aussagen über iAFs treffen zu können, ist der extensionsbasierte Ansatz. Während beim vervollständigungsbasierten Ansatz zunächst alle Vervollständigungen berücksichtigt werden müssen, um anschließend unter Berücksichtigung aller Konstellationen der Unsicherheit Aussagen über die Akzeptanz von Argumenten treffen zu können, ist die Idee des extensionsbasierten Ansatzes das direkte Schlussfolgern von Akzeptanz von Argumenten. Dies erfolgt durch angepasste Definitionen der konfliktfreien und zulässigen Menge sowie der bereits in Unterabschnitt 2.2 vorgestellten Semantiken.

Beim extensionsbasierten Ansatz werden dabei zwei unterschiedliche Sichtweisen für jede der neuen Definitionen vertreten. Bei der optimistischen Sichtweise wird angenommen, dass Angriffe von unsicheren Argumenten und generell unsichere Angriffe keine Gefährdung darstellen. Bei der pessimistischen Sichtweise hingegen wird jeder Angriff als Gefährdung eingestuft, wobei nicht von Bedeutung ist, ob das angreifende Argument sicher oder unsicher ist und ob der Angriff sicher oder unsicher ist.

Bevor die veränderten Definitionen für den extensionsbasierten Ansatz vorgestellt werden, ist es notwendig, zunächst den Begriff der Verteidigung neu zu definieren. Dies liegt daran, dass auch hier die optimistische bzw. die pessimistische Sichtweise verfolgt wird, die sich durch eine schwache bzw. starke Verteidigung äußert.

Definition 3.14 (Verteidigung in iAFs[20])**.** Für ein iAF $I = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$, eine Menge $S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ und ein Argument $a \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ gilt:

- Die Menge S verteidigt das Argument a schwach gdw. es für alle sicheren Angreifer $b \in \mathcal{A}$ mit $(b, a) \in \mathcal{R}$ ein weiteres sicheres Argument $c \in S$ gibt mit $(c, b) \in \mathcal{R}$.
- Die Menge S verteidigt das Argument a stark gdw. es für alle Angreifer $b \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ mit $(b, a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^?$ ein sicheres Argument $c \in S$ gibt mit $(c, b) \in \mathcal{R}$.

Analog wird eine Menge $S' \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ von S schwach bzw. stark verteidigt gdw. alle Argumente $a \in S'$ von S schwach bzw. stark verteidigt werden.

Beispiel 3.10. Für das iAF $I_3 = (\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_3^?, \mathcal{R}_3, \mathcal{R}_3^?)$ aus Abbildung 9 gilt beispielsweise:

- Die Menge $\{a_4\}$ verteidigt das Argument a_2 schwach, da der sichere Angriff vom sicheren Argument a_3 selbst wiederrum von a_4 sicher angegriffen wird. Der Angriff von a_1 ist für die schwache Verteidigung nicht zu beachten.
- Die Menge $\{a_5\}$ verteidigt das Argument a_2 stark, da alle Angreifer von a_2 wiederrum von a_5 sicher angegriffen werden. In diesem Fall muss auch a_1 angegriffen werden.

Nachdem die Verteidigung neu definiert wurde, lassen sich auch die schwach bzw. stark konfliktfreien Mengen für iAFs definieren.

[20] Definition 8 aus [Mai21]

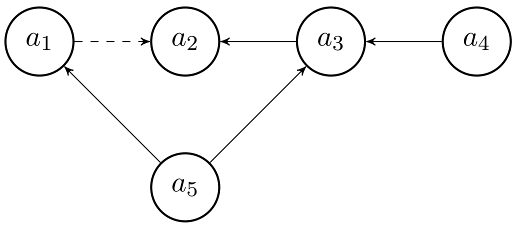

Abbildung 9: iAF I_3 aus Beispiel 3.10. Eigene Darstellung.

Definition 3.15 (Konfliktfreie Mengen für iAFs[21])**.** Sei $I = (\mathscr{A}, \mathscr{A}^?, \mathscr{R}, \mathscr{R}^?)$ ein iAF und $S \subseteq \mathscr{A} \cup \mathscr{A}^?$. Eine Menge S heißt

- schwach konfliktfrei gdw. für alle $a, b \in S \cap \mathscr{A}$ nicht $a\mathscr{R}b$ gilt. Die Menge aller schwach konfliktfreien Mengen von I bezeichnet $cf_w(I) = \{S \subseteq \mathscr{A} \cup \mathscr{A}^? \mid \text{S ist schwach konfliktfrei}\}$.
- stark konfliktfrei gdw. für alle $a, b \in S$ weder $a\mathscr{R}b$ noch $a\mathscr{R}^?b$ gilt. Die Menge aller stark konfliktfreien Mengen von I bezeichnet $cf_s(I) = \{S \subseteq \mathscr{A} \cup \mathscr{A}^? \mid \text{S ist stark konfliktfrei}\}$.

Erfüllt eine Menge S die schwache Konfliktfreiheit für iAFs, gibt es keine sicheren Angriffe zwischen sicheren Argumenten. Bei der starken Konfliktfreiheit hingegen gibt es zudem auch keine unsicheren Angriffe zwischen den Argumenten aus S, wobei hier auch keine Unterscheidung zwischen sicheren und unsicheren Argumenten vorgenommen wird.

Beispiel 3.11. Für das iAF $I_4(\mathscr{A}_4, \mathscr{A}_4^?, \mathscr{R}_4, \mathscr{R}_4^?)$ aus Abbildung 10 ist beispielsweise $\{a_5, a_6, a_7\}$ eine schwach konfliktfreie Menge und $\{a_2, a_4\}$ eine stark konfliktfreie Menge. Die Menge $\{a_1, a_2, a_3\}$ hingegen ist nicht schwach konfliktfrei und $\{a_6, a_7\}$ ist nicht stark konfliktfrei.

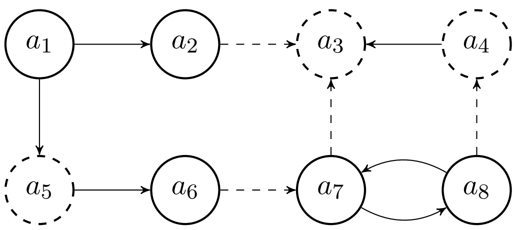

Abbildung 10: Unvollständiger Argumentationsgraph I_4 aus Beispiel 3.11. Eigene Darstellung.

Auch die Zulässigkeit lässt sich bezogen auf iAFs in der schwachen und der starken Variante definieren, wobei bei der Zulässigkeit nocht eine gemischte Variante gibt, um alle Konstellationen abzudecken, wie die folgende Definition verdeutlicht.

[21] Definition 7 aus [Mai21]

Definition 3.16 (Zulässige Mengen für iAFs[22]). Sei $I = (\mathscr{A}, \mathscr{A}^?, \mathscr{R}, \mathscr{R}^?)$ ein iAF und $S \subseteq \mathscr{A} \cup \mathscr{A}^?$. Eine Menge S heißt

- schwach zulässig gdw. $S \in cf_w(I)$ und alle $a \in S$ von S schwach verteidigt werden. Die Menge aller schwach zulässigen Mengen von I bezeichnet $ad_w(I) = \{S \subseteq \mathscr{A} \cup \mathscr{A}^? \mid \text{S ist schwach zulässig}\}$.
- gemischt zulässig gdw. $S \in cf_s(I)$ und alle $a \in S$ von S schwach verteidigt werden. Die Menge aller gemischt zulässigen Mengen von I bezeichnet $ad_m(I) = \{S \subseteq \mathscr{A} \cup \mathscr{A}^? \mid \text{S ist gemischt zulässig}\}$.
- stark zulässig gdw. $S \in cf_s(I)$ und alle $a \in S$ von S stark verteidigt werden. Die Menge aller stark zulässigen Mengen von I bezeichnet $ad_s(I) = \{S \subseteq \mathscr{A} \cup \mathscr{A}^? \mid \text{S ist stark zulässig}\}$.

Beispiel 3.12. Für das iAF I_4 aus Abbildung 10 soll für jede der drei Arten der Zulässigkeit ein Beispiel angegeben werden:

- Die Menge $\{a_3, a_4, a_8\}$ ist schwach zulässig. Es gibt keine sicheren Angriffe zwischen sicheren Argumenten innerhalb der Menge. Außerdem wird die Menge von außen von a_7 angegriffen, verteidigt sich jedoch durch das Argument a_8 gegen diesen Angriff.
- Die Menge $\{a_4, a_6\}$ ist gemischt zulässig. Es gibt keine Angriffe zwischen Argumenten und die Menge wird nicht durch einen sicheren Angriff attackiert.
- Die Menge $\{a_1, a_6\}$ ist stark zulässig. Es gibt keine Angriffe zwischen Argumenten der Menge. Alle Argumente, die sicher oder unsicher angegriffen werden, werden von der Menge stark verteidigt.

Die nächste Semantik, die neu definiert werden soll, ist die vollständige Semantik.

Definition 3.17 (Vollständige Extensionen für iAFs[23]). Sei $I = (\mathscr{A}, \mathscr{A}^?, \mathscr{R}, \mathscr{R}^?)$ ein iAF und $S \subseteq \mathscr{A} \cup \mathscr{A}^?$. Eine Menge S heißt

- schwach vollständig gdw. $S \in ad_w(I)$ und jedes Argument $a \in \mathscr{A} \cup \mathscr{A}^?$, das von S schwach verteidigt wird, auch in S liegt. Die Menge aller schwach vollständigen Mengen von I bezeichnet $co_w(I) = \{S \subseteq \mathscr{A} \cup \mathscr{A}^? \mid \text{S ist schwach vollständig}\}$.
- stark vollständig gdw. $S \in ad_s(I)$ und jedes Argument $a \in \mathscr{A} \cup \mathscr{A}^?$, das von S stark verteidigt wird, auch in S liegt. Die Menge aller stark vollständigen Mengen von I bezeichnet $co_s(I) = \{S \subseteq \mathscr{A} \cup \mathscr{A}^? \mid \text{S ist stark vollständig}\}$.

[22] Definition 9 aus [Mai21]
[23] Definition 10 aus [Mai21]

Beispiel 3.13. Für das iAF I_4 aus Abbildung 10 soll für jede der zwei Arten der Vollständigkeit ein Beispiel angegeben werden:

- Die Menge $\{a_1, a_3, a_4, a_6\}$ ist schwach vollständig, da die Menge schwach zulässig ist und kein weiteres Argument $a \in \mathscr{A} \cup \mathscr{A}^?$ schwach verteidigt wird.
- Die Menge $\{a_1, a_6\}$ ist bereits stark vollständig. Diese Menge ist stark zulässig und es gibt keine weiteren Argumente $a \in \mathscr{A} \cup \mathscr{A}^?$, die von der Menge stark verteidigt werden.

Wie bereits für AFs gezeigt wurde, können auch schwach vollständige und stark vollständige Extensionen maximal bzw. minimal sein. Eine maximal schwach bzw. stark vollständige Extension stellt die schwach bzw. stark präferierte Extension dar.

Definition 3.18 (Präferierte Extensionen für iAFs[24]). Sei $I = (\mathscr{A}, \mathscr{A}^?, \mathscr{R}, \mathscr{R}^?)$ ein iAF und $S \subseteq \mathscr{A} \cup \mathscr{A}^?$. Eine Menge S heißt

- schwach präferiert gdw. $S \in ad_w(I)$ und S maximal ist. Es gibt somit keine größere Menge $S' \supset S$, die ebenfalls schwach zulässig ist. Die Menge aller schwach präferierten Mengen von I bezeichnet $pr_w(I) = \{S \subseteq \mathscr{A} \cup \mathscr{A}^? \mid \text{S ist schwach präferiert}\}$.
- stark präferiert gdw. $S \in ad_s(I)$ und S maximal ist. Es gibt somit keine größere Menge $S' \supset S$, die ebenfalls stark zulässig ist. Die Menge aller stark präferierten Mengen von I bezeichnet $pr_s(I) = \{S \subseteq \mathscr{A} \cup \mathscr{A}^? \mid \text{S ist stark präferiert}\}$.

Beispiel 3.14. Für das iAF I_4 aus Abbildung 10 soll für jede der zwei Arten der Präferiertheit ein Beispiel angegeben werden:

- Die Menge $\{a_1, a_3, a_4, a_6, a_7\}$ ist schwach präferiert, da die Menge schwach zulässig ist und es keine Obermenge gibt, die ebenfalls schwach zulässig ist.
- Die Menge $\{a_1, a_6, a_8\}$ ist stark präferiert. Diese Menge ist stark zulässig und es handelt sich bereits um eine maximale stark zulässige Menge. Insbesondere kann das Argument a_3 nicht stark verteidigt werden, da dieses von a_4 angegriffen wird und a_4 von a_8 lediglich unsicher angegriffen wird, was laut Definition nicht für eine starke Verteidigung ausreicht.

Für die formale Definition der grundierten Semantik für iAFs wird erneut die in Definition 2.4 vorgestellte charakteristische Funktion benötigt, die an dieser Stelle allerdings für das iAF angepasst werden muss.

[24] Definition 10 aus [Mai21]

Definition 3.19 (x-charakteristische Funktion für iAFs[25]). Sei $I = (\mathscr{A}, \mathscr{A}^?, \mathscr{R}, \mathscr{R}^?)$ ein iAF und es bezeichne $x \in \{w, s\}$ die Unterscheidung zwischen der schwachen (w) und der starken (s) charakteristischen Funktion. Die x-charakteristische Funktion $\tau_{I,x} : 2^{\mathscr{A} \cup \mathscr{A}^?} \to 2^{\mathscr{A} \cup \mathscr{A}^?}$ bestimmt für eine Menge $S \subseteq \mathscr{A} \cup \mathscr{A}^?$ alle Argumente, die von dieser Menge

- schwach verteidigt werden (für den Fall $x = w$) bzw.
- stark verteidigt werden (für den Fall $x = s$).

Beispiel 3.15. Für das iAF I_4 aus Abbildung 10 und eine Menge $S = \{a_1\}$ gilt $\tau_{I_4,w}(S) = \{a_1, a_3, a_4, a_6\}$. Dies ist genau die Menge, die von a_1 schwach verteidigt wird. Außerdem gilt $\tau_{I_4,s}(S) = \{a_1, a_6\}$, was genau der Menge entspricht, die von a_1 stark verteidigt wird.

Mit Hilfe der neu definierten charakteristischen Funktion lässt sich nun auch die grundierte Semantik für iAFs definieren.

Definition 3.20 (Grundierte Extensionen für iAFs[26]). Sei $I = (\mathscr{A}, \mathscr{A}^?, \mathscr{R}, \mathscr{R}^?)$ ein iAF und $S \subseteq \mathscr{A} \cup \mathscr{A}^?$. Eine Menge S heißt

- schwach grundiert gdw. diese dem Fixpunkt der iterativen Anwendung der w-charakteristischen Funktion entspricht. Die Menge aller schwach grundierten Mengen von I bezeichnet $gr_w(I) = \{S \subseteq \mathscr{A} \cup \mathscr{A}^? \mid \text{S ist schwach grundiert}\}$.
- stark grundiert gdw. diese dem Fixpunkt der iterativen Anwendung der s-charakteristischen Funktion entspricht. Die Menge aller stark grundierten Mengen von I bezeichnet $gr_s(I) = \{S \subseteq \mathscr{A} \cup \mathscr{A}^? \mid \text{S ist stark grundiert}\}$.

Beispiel 3.16. Für das iAF I_4 aus Abbildung 10 soll für jede der zwei Arten der Grundiertheit ein Beispiel angegeben werden:

- Die Menge $\{a_1, a_3, a_4, a_6\}$ ist schwach grundiert. Es gilt $\tau_{I_4,w}(\emptyset) = \{a_1, a_3, a_4\}$, da diese Argumente nicht sicher von sicheren Argumenten attackiert werden und dadurch von der leeren Menge verteidigt werden. Weiter gelten $\tau_{I_4,w}(\{a_1, a_3, a_4\}) = \{a_1, a_3, a_4, a_6\}$ und $\tau_{I_4,w}(\{a_1, a_3, a_4, a_6\}) = \{a_1, a_3, a_4, a_6\}$, was dem Fixpunkt und damit auch genau der schwach grundierten Extension entspricht.
- Die Menge $\{a_1, a_6\}$ ist stark grundiert. Es gilt $\tau_{I_4,w}(\emptyset) = \{a_1\}$, da dieses Argument nicht angegriffen wird. Weiter gelten $\tau_{I_4,w}(\{a_1\}) = \{a_1, a_6\}$ und $\tau_{I_4,w}(\{a_1, a_6\}) = \{a_1, a_6\}$. Letzteres entspricht dem Fixpunkt und damit der stark grundierten Extension.

[25] Definition 7 aus [Mai23]
[26] Definition 8 aus [Mai23]

Die letzte verbleibende Semantik ist die stabile Semantik. Auch diese lässt sich in einer schwachen und einer starken Ausprägung an iAFs anpassen.

Definition 3.21 (Stabile Extensionen für iAFs[27]). Sei $I = (\mathscr{A}, \mathscr{A}^?, \mathscr{R}, \mathscr{R}^?)$ ein iAF und $S \subseteq \mathscr{A} \cup \mathscr{A}^?$. Eine Menge S heißt

- schwach stabil gdw. $S \in cf_w(I)$ und alle $a \in \mathscr{A} \setminus S$ sicher von S angegriffen werden, es gibt somit ein $b \in S \cap \mathscr{A}$ mit $b\mathscr{R}a$. Die Menge aller schwach stabilen Mengen von I bezeichnet $st_w(I) = \{S \subseteq \mathscr{A} \cup \mathscr{A}^? \mid \text{S ist schwach stabil}\}$.
- stark stabil gdw. $S \in cf_s(I)$ und alle $a \in (\mathscr{A} \cup \mathscr{A}^?) \setminus S$ sicher von S angegriffen werden, es gibt somit ein $b \in S \cap \mathscr{A}$ mit $b\mathscr{R}a$. Die Menge aller stark stabilen Mengen von I bezeichnet $st_s(I) = \{S \subseteq \mathscr{A} \cup \mathscr{A}^? \mid \text{S ist stark stabil}\}$.

Beispiel 3.17. Für das iAF I_4 aus Abbildung 10 soll für jede der zwei Arten der Stabilität ein Beispiel angegeben werden:

- Die Menge $\{a_1, a_6, a_7\}$ ist schwach stabil, da die Menge schwach konfliktfrei ist und das einzige verbleibende sichere Argument a_8 sicher von a_7 attackiert wird.
- Für das iAF I_4 gibt es keine stark stabile Extension. Die Argumente a_3 und a_4 werden beide nicht sicher von einem sicheren Argument angegriffen. Für eine stabile Extension müssten somit beide Argumente in der Extension enthalten sein, was aber aufgrund der notwendigen Bedingung der starken Konfliktfreiheit nicht möglich ist. Mit einer kleinen Anpassung des iAFs lässt sich allerdings dennoch ein Beispiel angeben. Angenommen, für I_4 gelte $(a_8, a_4) \in \mathscr{R}_4$ statt $(a_8, a_4) \in \mathscr{R}_4^?$, dann wäre $\{a_1, a_3, a_6, a_8\}$ eine stabile Extension, da alle weiteren Argumente sicher angegriffen werden.

In diesem Unterkapitel wurde das Framework iAF als Erweiterung von AFs vorgestellt. Zudem wurden zwei unterschiedliche Ansätze für iAFs verfolgt. Der vervollständigungsbasierte Ansatz verfolgt das Ziel, Aussagen über Argumente oder Argumentmenten anhand von Vervollständigungen zu treffen. Der extensionsbasierte Ansatz hingegen verfolgt das Ziel, direkte Aussagen über iAFs treffen zu können, indem die Semantiken neu definiert wurden, wobei zwischen einer schwachen und einer starken Ausprägung der jeweiligen Semantik unterschieden wird.

[27] Definition 11 aus [Mai21]

4 Entwicklung des Argumentationsframeworks iSetAF

Im vorherigen Abschnitt 3 wurden zwei Erweiterungen von abstrakten Argumentationsgraphen dargestellt, die Argumentationsgraphen mit Mengenangriffen und unvollständige Argumentationsgraphen. In realen Argumentationen ist nun aber auch denkbar, dass es Mengenangriffe gibt, bei denen das Wissen über die Argumente oder über die Angriffe unsicher ist. Diese Situation soll das nachfolgende Beispiel zeigen.

Beispiel 4.1. Das Beispiel 2.1, in dem Anna und Ben über eine geplante Fahrradtour diskutieren, wird abgeändert. Die Argumentation sieht nun wie folgt aus:

> a_1: Lass uns eine Fahrradtour machen.
>
> b_1: Ich habe eine Sonnenallergie.
>
> b_2: Laut Wetterbericht soll es mit einer Wahrscheinlichkeit von 30% wolkenlos sein.

In dieser Situation ist das Argument, dass Ben eine Sonnenallergie hat, ein sicheres Argument, das aber allein genommen kein Argument gegen eine Fahrradtour ist (vgl. auch Beispiel 3.1). Bens zweites Argument b_2 ist unsicher, da der Wetterbericht nur eine Vermutung ist und es evtl. auch bewölkt sein könnte. Auch dieses unsichere Argument stellt allein kein Gegenargument dar.

Lediglich für den Fall, dass das unsichere Argument akzeptiert werden kann, würde ein Mengenangriff von $\{b_1, b_2\}$ auf a_1 erfolgen. Da Ben eine Sonnenallergie hat, ist eine Fahrradtour nicht möglich, sollte die Sonne tatsächlich scheinen.

In diesem Kapitel sollen unvollständige Argumentationsgraphen mit Mengenangriffen (iSetAFs) eingeführt und zunächst formal definiert werden, wobei insbesondere auch der Begriff des Angriffs neu definiert wird. Anschließend soll zur Auswertung von iSetAFs zunächst ein vervollständigungsbasierter und anschließend ein extensionsbasierter Ansatz verfolgt werden. Beide Ansätze wurden bereits in Unterabschnitt 3.2 für iAFs vorgestellt und sollen in diesem Kapitel auf die neu definierten iSetAFs angepasst werden.

4.1 Formale Definition

In diesem Unterkapitel wird die formale Definition für iSetAFs vorgestellt, die sich an der Definition für iAFs orientiert und sowohl für den vervollständigungsbasierten Ansatz aus Unterabschnitt 4.2 als auch für den extensionsbasierten Ansatz aus Unterabschnitt 4.3 gültig ist.

Definition 4.1 (Unvollständige Argumentationsgraphen mit Mengenangriffen)**.** Ein unvollständiger Argumentationsgraph mit Mengenangriffen (iSetAF) ist ein Tupel $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$. Dabei bezeichnet $\mathcal{A}$ die Menge der sicheren Argumente, $\mathcal{A}^?$ die

Menge der unsicheren Argumente, $\mathcal{R}$ die Menge der bedingt sicheren Mengenangriffe und $\mathcal{R}^?$ die Menge der unsicheren Mengenangriffe, wobei $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^? = \emptyset$ und $\mathcal{R}, \mathcal{R}^? \subseteq (2^{\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?} \setminus \{\emptyset\}) \times (\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?)$.

Für ein iSetAF erfolgt ein Angriff auf ein Argument somit durch eine nichtleere Menge von Argumenten aus $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$. Insbesondere kann die Menge auch nur ein einziges Argument enthalten, wodurch alle in AFs modellierbaren Angriffe auch im iSetAF modelliert werden können, bei dem die Menge der unsicheren Argumente und die Menge der unsicheren Angriffe leer ist.

Bei der Angriffsrelation kann zwischen sicheren, bedingt sicheren und unsicheren Angriffen unterschieden werden. Bedingt sichere Mengenangriffe eines iSetAFs beinhalten auch Mengenangriffe, an denen unsichere Argumente beteiligt sein können. Sofern aber alle am Mengenangriff beteiligten Argumente tatsächlich gelten und somit als sicher angenommen werden können, ist auch der Mengenangriff sicher und damit gültig.

Definition 4.2 (Bedingt sichere und sichere Angriffsrelation in iSetAFs)**.** Für ein iSetAF $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ stellt $(G, b) \in \mathcal{R}$ mit $G \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^? \setminus \emptyset$ und $b \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ einen bedingt sicheren Mengenangriff der Menge G auf das Argument b dar. Eine äquivalente Schreibweise für einen bedingt sicheren Angriff von der Menge G auf b ist $G\mathcal{R}b$. Ein Mengenangriff heißt sicher, sofern alle beteiligten Argumente sicher sind und somit die Eingrenzung $G \subseteq \mathcal{A} \setminus \emptyset$ und $b \in \mathcal{A}$ gilt.

Im Gegensatz zu einem bedingt sicheren Angriff, der immer gültig ist, sofern alle beteiligten Argumente gültig sind, bleibt bei einem unsicheren Mengenangriff unklar, ob dieser tatsächlich stattfindet oder nicht. Selbst wenn alle beteiligten Argumente sicher und somit gültig sind, muss der unsichere Mengenangriff nicht zwingend gültig sein.

Definition 4.3 (Unsichere Angriffsrelation in iSetAFs)**.** Für ein iSetAF $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ stellt $(G', b') \in \mathcal{R}^?$ mit $G' \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^? \setminus \emptyset$ und $b' \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ einen unsicheren Mengenangriff der Menge S' auf das Argument b' dar. Eine äquivalente Schreibweise für einen unsicheren Angriff von der Menge G' auf b' ist $G'\mathcal{R}^?b'$.

Beispiel 4.2. Der zu Beispiel 4.1 gehörende unvollständige Argumentationsgraph mit Mengenangriffen ist

$$U_1 = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1^?, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1^?)$$

mit

$$\mathcal{A}_1 = \{a_1, b_1\},$$

$$\mathcal{A}_1^? = \{b_2\},$$

$$\mathcal{R}_1 = \{(\{b_1, b_2\}, a_1)\}$$

und

$$\mathcal{R}_1^? = \emptyset$$

ist in Abbildung 11 dargestellt. Ein Angriff auf a_1 kann nur in Kombination aus den Argumenten b_1 und b_2 erfolgen. Der Mengenangriff $\{(\{b_1, b_2\}, a_1)\}$ stellt einen bedingt sicheren Angriff dar. Sollte das Argument b_2 nicht gültig sein, kann auch der Mengenangriff nicht gültig sein. Ist das Argument b_2 allerdings gültig, muss auch der Mengenangriff zwingend gültig sein.

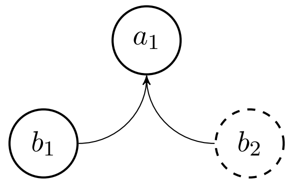

Abbildung 11: iSetAF U_1 aus Beispiel 4.2. Eigene Darstellung.

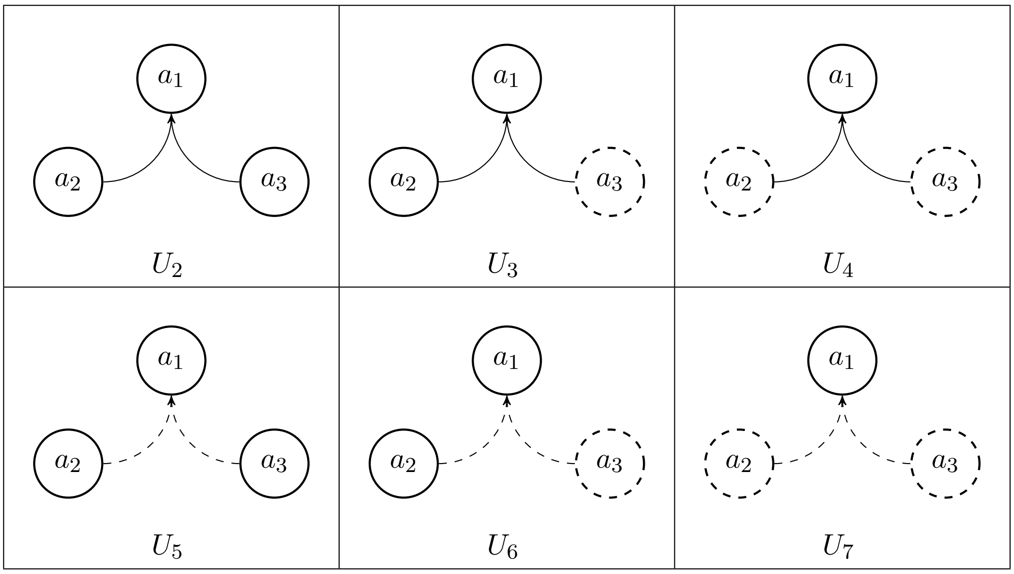

Abbildung 12: Mögliche Mengenangriffe mit unvollständiger Information über Argumente oder Angriffe. Dargestellt sind sechs iSetAFs U_2 bis U_7, die jeweils unterschiedliche unvollständige Teilkomponenten besitzen. Eigene Darstellung.

Bei einem Mengenangriff mit unvollständiger Information können unterschiedliche Teilkomponenten unsicher sein. Es ist möglich, dass nur ein Argument des Mengenangriffs unsicher ist, dass mehrere Argumente des Mengenangriffs unsicher sind, oder dass der Mengenangriff selbst unsicher ist. Möglich sind zudem auch Kombinationen von unsicheren Teilkomponenten, sodass sich insgesamt sechs Unterscheidungen ergeben, die in Abbildung 12 dargestellt sind. Die Unsicherheit des angegriffenen Arguments wird dabei außer Acht gelassen, da die Nichtgültigkeit von a_1 dazu führen würde, dass ein Angriff auf a_1 generell nicht mehr möglich ist. Genauer gibt es folgende Unterscheidungen:

- Alle Argumente des Mengenangriffs und auch der Angriff selbst sind sicher (Abbildung 12, iSetAF U_2).
- Es gibt sichere und unsichere Argumente der angreifenden Menge, der Angriff selbst ist sicher (Abbildung 12, iSetAF U_3).
- Alle Argumente des Mengenangriffs sind unsicher, der Angriff selbst ist sicher (Abbildung 12, iSetAF U_4).
- Alle Argumente des Mengenangriffs sind sicher, der Angriff selbst ist unsicher (Abbildung 12, iSetAF U_5).
- Es gibt sichere und unsichere Argumente der angreifenden Menge, der Angriff selbst ist unsicher (Abbildung 12, iSetAF U_6).
- Alle Argumente des Mengenangriffs und auch der Angriff selbst sind unsicher (Abbildung 12, iSetAF U_7).

Eine Möglichkeit, wie mit diesen unterschiedlichen Teilkomponenten unsicherer Information umgegangen werden kann, bietet der vervollständigungsbasierte Ansatz, der nachfolgend in Unterabschnitt 4.2 vorgestellt wird.

4.2 Vervollständigungsbasierter Ansatz

Wie in Unterabschnitt 3.2 (Unvollständige Argumentationsgraphen) gezeigt wurde, wird mit unvollständiger Information bei unvollständigen Argumentationsgraphen in der Art umgegangen, dass alle möglichen Vervollständigungen eines iAFs betrachtet und ausgewertet werden. Diese Möglichkeit der Vervollständigungen lässt sich auch auf iSetAFs übertragen, indem eine Vielzahl von SetAFs aus dem iSetAF abgeleitet werden. Bei diesen abgeleiteten Argumentationsgraphen handelt es sich um SetAFs, in denen alle enthaltenen Komponenten als sicher angesehen werden können. Die entstandenen abgeleiteten SetAFs können anschließend entsprechend der Erläuterungen aus Unterabschnitt 3.1 (Argumentationsgraphen mit Mengenangriffen) behandelt werden. Vervollständigungen von iSetAFs lassen sich wie folgt definieren:

Definition 4.4 (Vervollständigungen von iSetAFs)**.** Sei $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ ein iSetAF und $Comp(U)$ die Menge aller Vervollständigungen von U. Für alle Vervollständigungen $U^* \in Comp(U)$ mit $U^* = (A^*, \mathcal{R}^*)$ gilt:

$$\mathcal{A} \subseteq A^* \subseteq (\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?)$$

und

$$\mathcal{R} \cap (2^{A^*} \times A^*) \subseteq \mathcal{R}^* \subseteq (\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^?) \cap (2^{A^*} \times A^*).$$

Eine Vervollständigung enthält somit immer mindestens alle sicheren Argumente, kann jedoch auch einige unsichere Argumente umfassen. Von den bedingt sicheren Angriffen sind genau diejenigen in der Vervollständigung enthalten, deren beteiligte Argumente ebenfalls darin vorkommen. Zusätzlich können auch einige unsichere Angriffe enthalten sein. Insbesondere handelt es sich bei jeder Vervollständigung $U^* \in Comp(U)$ um ein SetAF.

Zur besseren Unterscheidbarkeit werden die Vervollständigungen eines iSetAFs im Rahmen dieser Arbeit wie folgt bezeichnet: Sei U_i ein iSetAF mit $i \in \mathbb{N}$, dann bezeichnet $Comp(U_i)$ die Menge der Vervollständigungen und $U_{i,j} \in Comp(U_i)$ mit $j \in \{1, \ldots, |Comp(U_i)|\}$ bezeichnet die j-te Vervollständigung von U_i. Dies verdeutlicht das nachfolgende Beispiel.

Beispiel 4.3. Für den in Abbildung 11 dargestellten unvollständigen Argumentationsgraphen U_1 aus Beispiel 4.2 können insgesamt zwei Vervollständigungen abgeleitet werden. Die Menge der Vervollständigungen $Comp(U_1)$ kann Abbildung 13 entnommen werden.

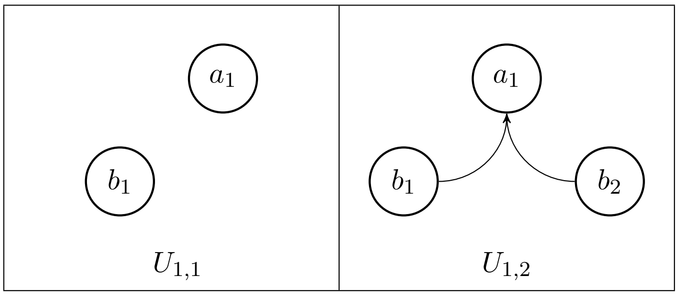

Abbildung 13: Die Menge $Comp(U_1)$ der Vervollständigungen des iSetAFs U_1 aus Beispiel 4.2. Eigene Darstellung.

In Abbildung 12 wurden bereits mögliche Unterscheidungen bzgl. der Unsicherheit von Teilkomponenten aufgezeigt. Für diese lassen sich die in Abbildung 14 dargestellten Vervollständigungen ableiten. Dabei wird deutlich, dass die Anzahl der Vervollständigungen eines einzelnen Angriffs schnell extrem hohe Werte annehmen kann, da diese in Abhängigkeit von der Anzahl der unsicheren Argumente des Mengenangriffs sowie der unsicheren Angriffe exponentiell steigt. Dies zeigt die folgende Proposition.

Proposition 4.1. Sei $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ ein iSetAF und sei $\mathcal{R}_i \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^?$ mit $\mathcal{R}_i = (S_i, a_i)$ ein beliebiger Mengenangriff in U mit $i \in \{1, \ldots, |\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^?|\}$, wobei $S_i \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ und $a_i \in \mathcal{A}$ gilt.

Weiter sei $m = |S_i \cap \mathcal{A}^?|$ die Anzahl der unsicheren Argumente von S_i und $p \in \{0, 1\}$ definiert durch:

- $p = 0$ gdw. $\mathcal{R}_i \in \mathcal{R}$ (der Mengenangriff ist bedingt sicher),
- $p = 1$ gdw. $\mathcal{R}_i \in \mathcal{R}^?$ (der Mengenangriff ist unsicher).

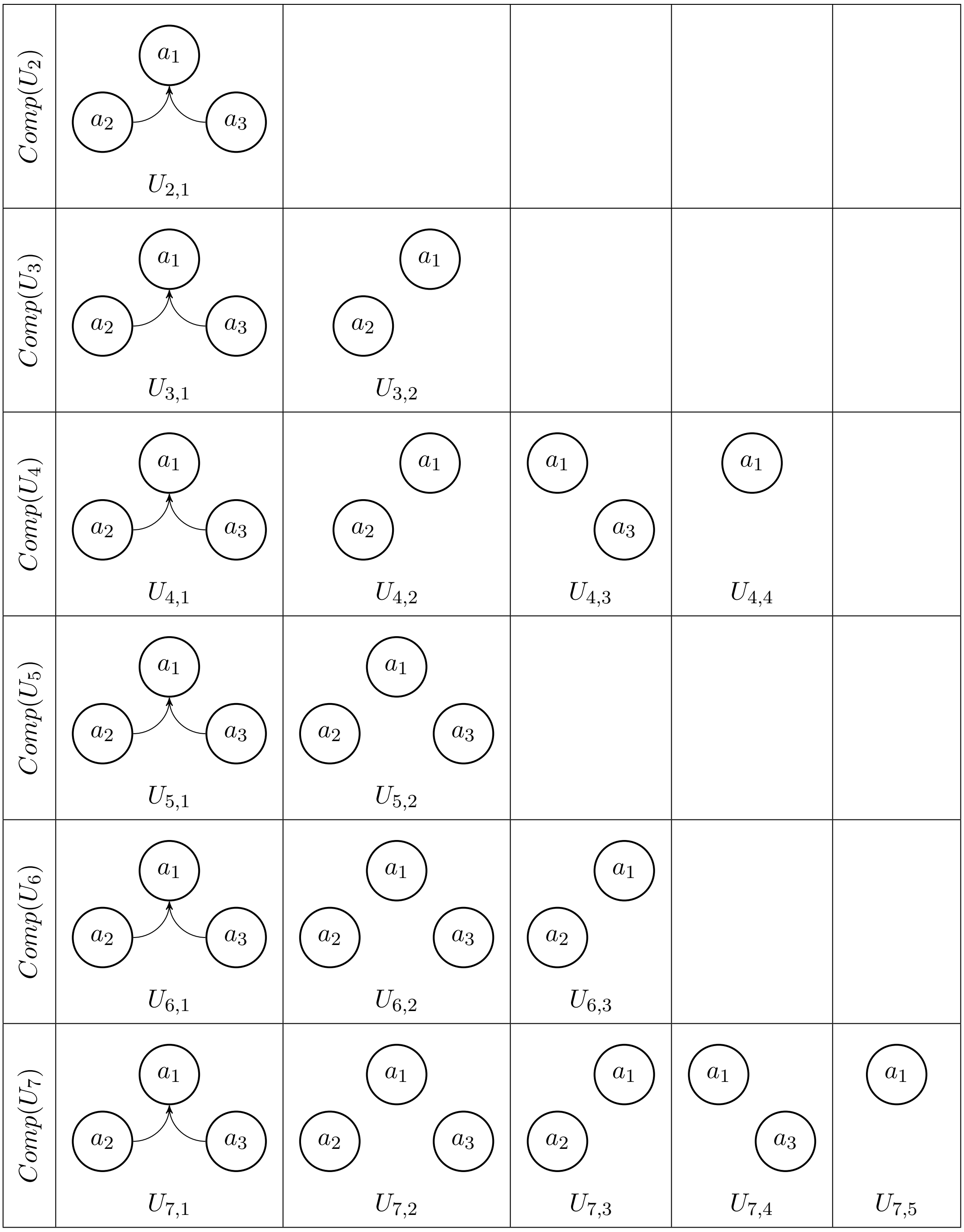

Abbildung 14: Vervollständigungen für die in Abbildung 12 dargestellten iSetAFs U_2 bis U_7. Eigene Darstellung.

Dann lässt sich die Anzahl der Vervollständigungen, bezogen auf diesen einen Mengenangriff, durch $|Comp_{\mathfrak{R}_i}(U)| = 2^m + p$ berechnen.

Beweis. Die Proposition lässt sich durch vollständige Induktion beweisen. Dabei wird ein einzelner Mengenangriff eines iSetAFs betrachtet. Es soll gezeigt werden, dass sich die Anzahl der Vervollständigungen für diesen Mengenangriff durch $n = 2^m + p$ berechnen lässt.

- Induktionsanfang $m = 0$: Sind keine unsicheren Argumente am Mengenangriff beteiligt, hängt die Anzahl lediglich davon ab, ob der Angriff selbst sicher oder unsicher ist.
  - Bei einem sicheren Angriff gibt es genau eine Vervollständigung (vgl. Abbildung 14, $U_{2,1}$). Dies ist durch $n = 2^0 + 0 = 1$ gegeben.
  - Bei einem unsicheren Angriff gibt es zwei Vervollständigungen (vgl. Abbildung 14, $U_{5,1}$ und $U_{5,2}$). Dies ist durch $n = 2^0 + 1 = 2$ gegeben.

  Damit gilt der Induktionsanfang.
- Induktionsannahme: Für k unsichere Argumente gelte $n = 2^k + p$.
- Induktionsschritt: Es ist zu zeigen, dass die Formel auch für $m = k+1$ gilt. Per Induktionsannahme beträgt die Anzahl der Vervollständigungen für $m = k$ genau $2^k + p$. An dieser Stelle folgt eine Fallunterscheidung für p:
  - Fall $p = 0$: Wird ein weiteres unsicheres Argument zum Mengenangriff hinzugefügt (es gilt somit $m = k + 1$), verdoppelt sich die Anzahl der Möglichkeiten, da jede bisherige Vervollständigung bestehen bleibt und um das weitere unsichere Argument erweitert werden kann. Daher gilt: $n = 2 \cdot (2^k + p) = 2^{k+1} + 2p$. Wegen $p = 0$ folgt $n = 2^{k+1} + 0$ und damit gilt die zu zeigende Aussage.
  - Fall $p = 1$: Mit $m = k$ gibt es genau 2^k Vervollständigungen ohne Angriff sowie eine zusätzliche Vervollständigung mit tatsächlichem Angriff. Wird ein weiteres unsicheres Argument zum Mengenangriff hinzugefügt (es gilt somit $m = k + 1$), verdoppeln sich lediglich die Vervollständigungen ohne Angriff. Hinzu kommt schließlich die Vervollständigung, die den Angriff beinhaltet. Daher gilt: $n = 2 \cdot (2^k + p - 1) + 1 = 2^{k+1} + 2p - 1$. Wegen $p = 1$ folgt $n = 2^{k+1} + 1$ und damit gilt die zu zeigende Aussage.

□

Mit Hilfe von Proposition 4.1 lässt sich schließlich auch die Gesamtzahl der Vervollständigungen eines iSetAFs bestimmen, indem die Anzahl der möglichen Kombinationen jedes Angriffs multipliziert werden. Bei dieser Berechnung ist allerdings zu beachten, dass alle Mengenangriffe unabhängig voneinander sein müssen, das heißt, kein Argument ist Teil mehrerer Mengenangriffe.

Beispiel 4.4. Für das iSetAF U_8 aus Abbildung 15 sind die beiden Mengenangriffe unabhängig voneinander. Für den unsicheren Angriff $(\{a_5, a_6\}, a_1)$ gibt es entsprechend Proposition 4.1 genau $2^1 + 1 = 3$ Möglichkeiten. Für den sicheren Angriff $(\{a_2, a_3, a_4\}, a_7)$ gibt es hingegen $2^3 + 0 = 8$ Möglichkeiten. Insgesamt gilt somit $|Comp(U_8)| = 3 \cdot 8 = 24$. Aus dem iSetAF U_8, das lediglich aus zwei Angriffen besteht, lassen sich somit bereits 24 Vervollständigungen ableiten.

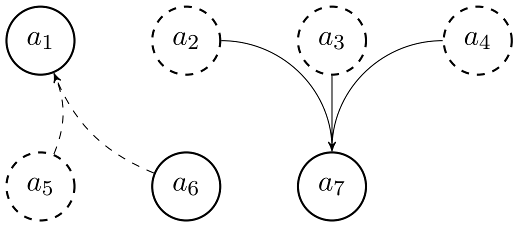

Abbildung 15: iSetAF U_8 zu Beispiel 4.4. Eigene Darstellung.

Ziel der formalen Argumentation ist es, Argumente zu finden, die gemeinsam akzeptiert werden können. Dies wurde durch die Definition unterschiedlicher Semantiken formalisiert (vgl. Abschnitt 2). Wie bereits für iAFs in Unterabschnitt 3.2 (Unvollständige Argumentationsgraphen) beschrieben wurde, lassen sich aufgrund der unvollständigen Information allerdings keine direkten Extensionen aus dem Argumentationsgraphen ableiten. Um aber dennoch Aussagen über die Akzeptanz und die Ablehnung von Mengen von Argumenten treffen zu können, kann auch für iSetAFs auf mögliche und notwendige σ-Extensionen zurückgegriffen werden. Die Definition 3.11 und Definition 3.12 für mögliche und notwendige σ-Extensionen für iAFs können gleichermaßen auf iSetAFs übertragen werden.

Bevor die möglichen und notwendigen σ-Extensionen für iSetAFs definiert werden, sei an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen, dass es sich bei allen Vervollständigungen eines iSetAFs jeweils um einen Argumentationsgraphen mit Mengenangriffen (SetAF) handelt. Diese Vervollständigungen enthalten keine unvollständige Information mehr, weshalb sich alle in Unterabschnitt 3.1 (Argumentationsgraphen mit Mengenangriffen) eingeführten Definitionen auf die Vervollständigungen anwenden lassen. Insbesondere gelten auch die in Definition 3.4 beschriebenen Semantiken.

Definition 4.5 (Mögliche σ-Extension für iSetAFs)**.** Für ein iSetAF $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ und eine Semantik $\sigma \in \{cf, ad, co, pr, gr, st\}$ ist $S \subseteq (\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?)$ eine mögliche σ-Extension für U gdw. $S \in \sigma(U^*)$ für mindestens eine Vervollständigung $U^* \in Comp(U)$ gilt, wobei $\sigma(U^*)$ die Menge aller σ-Extensionen für das SetAF U^* bezeichnet (vgl. Definition 3.4).

Beispiel 4.5. Für das in Abbildung 16 dargestellte iSetAF U_9 ist die Menge $S = \{a_2, a_5, a_6\}$ eine mögliche co-Extension, da es eine Vervollständigung $U_{9,1}$ (siehe Abbildung 17) gibt, in der die Menge S vollständig ist. Für S lässt sich aber zudem auch eine Vervollständigung $U_{9,2}$ (siehe Abbildung 17) finden, in der diese Menge grundiert ist. Daher ist S auch eine mögliche gr-Extension.

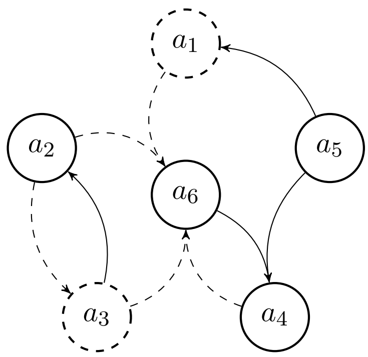

Abbildung 16: iSetAF U_9 zu Beispiel 4.5. Eigene Darstellung.

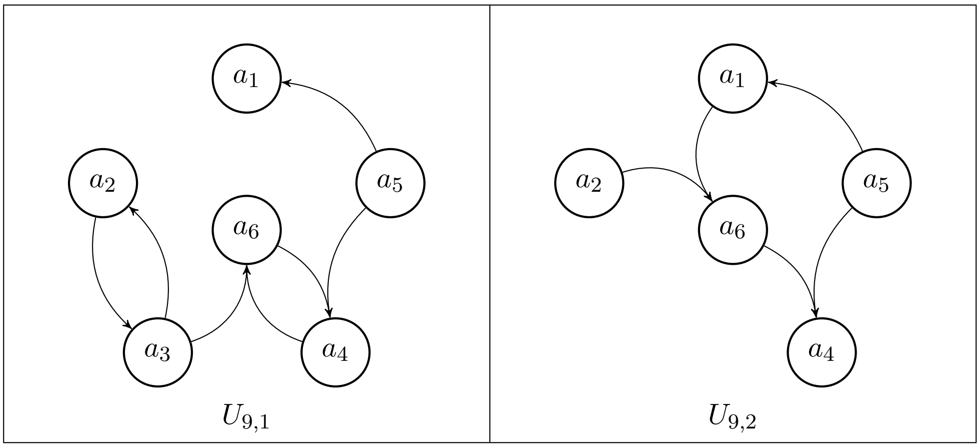

Abbildung 17: Eine Teilmenge von $Comp(U_9)$ der Vervollständigungen des iSetAFs U_9 aus Beispiel 4.5. Eigene Darstellung.

Definition 4.6 (Notwendige σ-Extension für iSetAFs)**.** Für ein iSetAF $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ und eine Semantik $\sigma \in \{cf, ad, co, pr, gr, st\}$ ist $S \subseteq \mathcal{A}$ eine notwendige σ-Extension für U gdw. $S \in \sigma(U^*)$ für alle Vervollständigungen $U^* \in Comp(U)$ gilt, wobei $\sigma(U^*)$ die Menge aller σ-Extensionen für das SetAF U^* bezeichnet (vgl. Definition 3.4).

Beispiel 4.6. Für das in Abbildung 16 dargestellte iSetAF U_9 ist die Menge $S = \{a_5\}$ eine notwendige ad-Extension. Da $S^- = \emptyset$ gilt, besitzt die Menge S keine Angreifer und ist somit in jeder beliebigen Vervollständigung zulässig. Je nach betrachteter Vervollständigung verteidigt S aber noch weitere Argumente, weshalb es sich nicht um eine notwendige co-Extension handeln kann.

Ein weiteres Beispiel ist die Menge $S' = \{a_5, a_6\}$, bei der es sich um eine notwendige cf-Extension handelt. Die Menge S' ist in jeder Vervollständigung konfliktfrei, da es weder sichere noch unsichere Angriffe zwischen a_5 und a_6 gibt.

Um nun auch Aussagen über die Akzeptanz oder Ablehnung einzelner Argumente treffen zu können, lassen sich auch die Schlussfolgerungsprobleme auf iSetAFs übertragen. Dabei werden erneut die einzelnen Vervollständigungen betrachtet, weshalb die in Definition 3.5 und Definition 3.6 eingeführten Definitionen der leichtgläubigen und der skeptischen Schlussfolgerung gelten.

Definition 4.7 (Schlussfolgerungsprobleme für iSetAFs)**.** Sei $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ ein iSetAF mit den Vervollständigungen $U^* \in Comp(U)$. Für ein Argument $a \in (\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?)$ und eine Semantik $\sigma \in \{cf, ad, co, pr, gr, st\}$ gilt:

1. a ist eine **mögliche leichtgläubige** σ-Schlussfolgerung von U gdw. es mindestens eine Vervollständigung U^* gibt, für die a eine leichtgläubige σ-Schlussfolgerung für SetAFs ist.

2. a ist eine **mögliche skeptische** σ-Schlussfolgerung von U gdw. es mindestens eine Vervollständigung U^* gibt, für die a eine skeptische σ-Schlussfolgerung für SetAFs ist.

3. a ist eine **notwendige leichtgläubige** σ-Schlussfolgerung von U gdw. für alle Vervollständigungen U^* gilt, dass a eine leichtgläubige σ-Schlussfolgerung für SetAFs ist.

4. a ist eine **notwendige skeptische** σ-Schlussfolgerung von U gdw. für alle Vervollständigungen U^* gilt, dass a eine skeptische σ-Schlussfolgerung für SetAFs ist.

Beispiel 4.7. Für das in Abbildung 16 dargestellte iSetAF U_9 sollen die verschiedenen Schlussfolgerungen an jeweils einem beispielhaften Argument aufgezeigt werden.

1. a_6 ist eine mögliche leichtgläubige co-Schlussfolgerung, da es eine Vervollständigung $U_{9,3}$ (siehe Abbildung 18) gibt, in der a_6 Teil einer vollständigen Extension ist.

2. a_3 ist eine mögliche skeptische st-Schlussfolgerung, da es eine Vervollständigung $U_{9,3}$ (siehe Abbildung 18) gibt, in der a_3 Teil aller stabilen Extensionen ist.

3. a_6 ist eine notwendige leichtgläubige ad-Schlussfolgerung, da sich für jede beliebige Vervollständigung eine zulässige Extension finden lässt, die a_6 enthält.

4. a_5 ist eine notwendige skeptische gr-Schlussfolgerung. Da das Argument a_5 sicher ist und zudem nicht angegriffen wird (weder sicher noch unsicher), muss es für jede Vervollständigung Teil aller grundierten Extensionen sein.

Durch diese Schlussfolgerungsprobleme ist es nun möglich, trotz unvollständiger Information über Argumente oder Mengenangriffe, Aussagen über die Akzeptanz von Argumenten zu treffen. Für eine mögliche leichtgläubige σ-Schlussfolgerung lässt sich

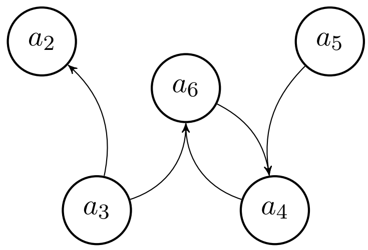

Abbildung 18: Eine weitere mögliche Vervollständigung $U_{9,3} \in Comp(U_9)$ des iSetAFs U_9 aus Abbildung 16. Eigene Darstellung zu Beispiel 4.7.

für ein Argument schließen, dass es wenigstens eine Situation gibt, in der das Argument akzeptiert werden kann. Die notwendige skeptische σ-Schlussfolgerung ist hingegen eine sehr strikte Schlussfolgerung, da die Akzeptanz eines Arguments trotz fehlender Informationen mit Sicherheit angenommen werden kann. Für das soeben betrachtete Beispiel kann für das Argument a_5 gefolgert werden, dass es in jeder beliebigen Vervollständigung Teil jeder grundierten Extension ist und somit in jedem Fall akzeptiert werden kann.

Dieses Unterkapitel hat verdeutlicht, wie die Akzeptanz von Argumenten in iSetAFs mit Hilfe des vervollständigungsbasierten Ansatzes untersucht werden kann. Eine weitere, davon unabhängige Möglichkeit ist der extensionsbasierte Ansatz, der im nächsten Unterabschnitt 4.3 vorgestellt wird.

4.3 Extensionsbasierter Ansatz

Ein Nachteil des zuvor beschriebenen extensionsbasierten Ansatzes ist die exponentiell steigende Anzahl von Vervollständigungen. Je mehr unsichere Teilkomponenten enthalten sind, umso größer wird die Anzahl der Vervollständigungen, die betrachtet und ausgewertet werden müssen. Um dies zu vereinfachen, kann auch ein extensionsbasierter Ansatz verfolgt werden, anhand dessen direkte Aussagen für iSetAFs bzw. deren Argumente getroffen werden können. Die in Unterunterabschnitt 3.2.2 vorgestellten Grundlagen sollen in diesem Unterkapitel nun auf iSetAFs angewendet werden, indem die Definitionen für die Semantiken entsprechend angepasst werden. Darauf aufbauend sollen anschließend in Abschnitt 5 die Eigenschaften von iSetAFs untersucht werden.

Wie bereits in Unterunterabschnitt 3.2.2 beschrieben wurde, wird auch für iSetAFs sowohl eine optimistische als auch eine pessimistische Sichtweise vertreten. Das heißt, während einer optimistischen Sichtweise werden sichere bzw. unsichere Mengenangriffe, an denen unsichere Argumente beteiligt sind, als ungefährlich für die Akzeptanz von Argumenten angesehen. Bei der pessimistischen Sichtweise hingegen werden alle Mengenangriffe als gefährlich eingestuft.

Bevor Dungs Semantiken neu definiert werden können, damit diese auch für iSetAFs Anwendung finden, muss zunächst der Begriff der Verteidigung definiert werden. Ähnlich wie für den extensionsbasierten Ansatz für iAFs wird hier eine schwache und eine starke Verteidigung definiert.

Definition 4.8 (Verteidigung in iSetAFs)**.** Für einen unvollständigen Argumentationsgraphen mit Mengenangriffen $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$, eine Menge $S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ und ein Argument $a \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ gilt:

- Die Menge S verteidigt das Argument a schwach gdw. für jeden sicheren Mengenangriff $(G, a) \in \mathcal{R}$ mit $G \subseteq 2^{\mathcal{A}} \setminus \emptyset$ eine nichtleere Teilmenge $G' \subseteq S \cap \mathcal{A}$ existiert, sodass $(G', g) \in \mathcal{R}$ für mindestens ein $g \in G$ gilt.
- Die Menge S verteidigt das Argument a stark gdw. für jeden Mengenangriff $(G, a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^?$ mit $G \subseteq 2^{\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?} \setminus \emptyset$ eine nichtleere Teilmenge $G' \subseteq S \cap \mathcal{A}$ existiert, sodass $(G', g) \in \mathcal{R}$ für mindestens ein $g \in G$ gilt.

Analog wird eine Menge von Argumenten $S' \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ von S schwach bzw. stark verteidigt gdw. alle Argumente $a \in S'$ von S schwach bzw. stark verteidigt werden.

Insbesondere ist es für die Verteidigung eines Arguments ausreichend, wenn nur ein einziges am Mengenangriff beteiligtes Argument angegriffen wird. Der Angriff auf ein einzelnes Argument sorgt für die Unwirksamkeit des gesamten Mengenangriffs.

Beispiel 4.8. Für das iSetAF $U_{10} = (\mathcal{A}_{10}, \mathcal{A}^?_{10}, \mathcal{R}_{10}, \mathcal{R}^?_{10})$ aus Abbildung 19 kann Folgendes beobachtet werden:

- Die Menge $B = \{b_1, b_2\}$ greift das Argument a unsicher an.
- Die Menge $C = \{c_1, c_2\}$ greift das Argument a bedingt sicher an. Sofern das unsichere Argument c_2 akzeptiert wird, ist auch der Angriff $(C, a) \in \mathcal{R}_{10}$ gültig.
- Die Menge $G = \{g_1, g_2, g_3\}$ greift das Argument a sicher an, wobei insbesondere auch alle Argumente aus G sicher sind.
- Die Menge $S = \{s_1\}$ greift das Argument g_1 sicher an.

Beispiel 4.9. In Fortsetzung zu Beispiel 4.8 sollen die Begriffe der schwachen und starken Verteidigung beispielhaft für das iSetAF U_{10} aus Abbildung 19 verdeutlicht werden:

- Die Menge $S = \{s_1\}$ verteidigt das Argument a schwach. Zu den sicheren Mengenangriffen gehört in diesem Fall nur die Menge G, dessen Angriff verteidigt werden muss. Dies erfolgt durch die Menge S, insbesondere durch den sicheren Angriff von s_1 auf g_1. Die Mengen B und C müssen per Definition der schwachen Verteidigung nicht angegriffen werden.
- Damit die Menge $S = \{s_1\}$ das Argument a nun auch stark verteidigt, müssen auch die Mengen B und C von S angegriffen werden. Per Definition müssen auch unsichere Mengenangriffe verteidigt werden. Würde die Menge der bedingt sicheren Mengenangriffe um zwei Mengenangriffe erweitert werden, es gelte somit $\mathcal{R}_{10} = \mathcal{R}_{10} \cup \{(S, b_1), (S, c_1)\}$, würde a von S stark verteidigt werden.

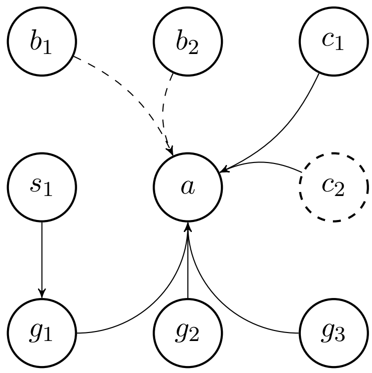

Abbildung 19: iSetAF U_{10} zu Beispiel 4.8. Eigene Darstellung.

Nachdem die Begriffe der schwachen und starken Verteidigung definiert sind, lassen sich nun auch die üblichen Semantiken entsprechend definieren, wobei jeweils auch Beispiele für alle Semantiken angegeben werden sollen.

Die schwache Konfliktfreiheit zeichnet sich dadurch aus, dass zwischen sicheren Argumenten keine sicheren Mengenangriffe stattfinden dürfen. Auch darf ein sicheres Argument kein unsicheres Argument sicher angreifen, da eine gemeinsame Akzeptanz (sofern das unsichere Argument akzeptiert ist) zwingend zu einem Konflikt führt. Bei der starken Konfliktfreiheit sind hingegen keine Mengenangriffe zwischen Argumenten aus S erlaubt, wobei irrelevant ist, ob der jeweilige Mengenangriff sicher oder unsicher ist und ob die beteiligten Argumente sicher oder unsicher sind.

Definition 4.9 (Konfliktfreie Mengen für iSetAFs)**.** Sei $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ ein iSetAF und $S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$. Eine Menge S heißt

- schwach konfliktfrei gdw. es in U keinen sicheren Mengenangriff $(B, a) \in \mathcal{R}$ gibt mit $B \subseteq S \cap \mathcal{A}$ und $a \in S$. Die Menge aller schwach konfliktfreien Mengen von U bezeichnet $cf_w(U) = \{S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^? \mid \text{S ist schwach konfliktfrei}\}$.
- stark konfliktfrei gdw. es in U keinen Mengenangriff $(B, a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^?$ gibt mit $B \subseteq S$ und $a \in S$. Die Menge aller stark konfliktfreien Mengen von U bezeichnet $cf_s(U) = \{S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^? \mid \text{S ist stark konfliktfrei}\}$.

Beispiel 4.10. Für das iSetAF $U_{11} = (\mathcal{A}_{11}, \mathcal{A}^?_{11}, \mathcal{R}_{11}, \mathcal{R}^?_{11})$ aus Abbildung 20 gilt:

- Die Menge $S = \{a_3, a_7, a_8\}$ ist schwach konfliktfrei, da innerhalb von S kein sicherer Mengenangriff vorhanden ist. Diese Menge ist aber nicht stark konfliktfrei.
- Die Menge $S = \{a_1, a_2, a_5\}$ ist weder schwach noch stark konfliktfrei, da es einen sicheren Mengenangriff auf das Argument a_2 gibt.
- Die Menge $S = \{a_1, a_5, a_3\}$ ist sowohl schwach als auch stark konfliktfrei, da es keinen Mengenangriff innerhalb dieser Menge gibt.

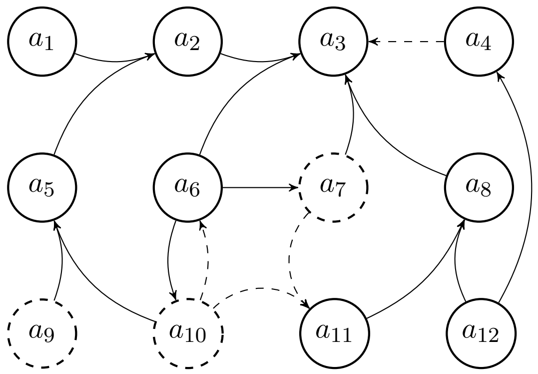

Abbildung 20: iSetAF U_{11} zu Beispiel 4.10. Eigene Darstellung.

- Die Menge $S = \{a_1, a_6\}$ ist stark konfliktfrei, da kein Mengenangriff stattfindet.

Die zweite Semantik ist die zulässige Semantik. Entsprechend der Definition für AFs ist neben der Konfliktfreiheit nötig, dass alle Argumente innerhalb einer Extension von dieser Extension verteidigt werden.

Definition 4.10 (Zulässige Mengen für iSetAFs)**.** Sei $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ ein iSetAF und $S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$. Eine Menge S heißt

- schwach zulässig gdw. $S \in cf_w(U)$ und alle $a \in S$ werden von S schwach verteidigt. Die Menge aller schwach zulässigen Mengen von U bezeichnet $ad_w(U) = \{S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^? \mid \text{S ist schwach zulässig}\}$.
- gemischt zulässig gdw. $S \in cf_s(U)$ und alle $a \in S$ werden von S schwach verteidigt. Die Menge aller gemischt zulässigen Mengen von U bezeichnet $ad_m(U) = \{S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^? \mid \text{S ist gemischt zulässig}\}$.
- stark zulässig gdw. $S \in cf_s(U)$ und alle $a \in S$ werden von S stark verteidigt. Die Menge aller stark zulässigen Mengen von U bezeichnet $ad_s(U) = \{S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^? \mid \text{S ist stark zulässig}\}$.

Für die erfolgreiche Verteidigung eines Arguments vor einem Mengenangriff ist es ausreichend, dass mindestens ein einzelnes Argument des Mengenangriffs sicher attackiert wird. Dies verdeutlicht das nachfolgende Beispiel.

Beispiel 4.11. Für das iSetAF U_{11} aus Abbildung 20 soll für jede der drei Arten der Zulässigkeit ein Beispiel angegeben werden:

- Die Menge $\{a_1, a_3, a_5\}$ ist schwach zulässig. Es gibt keine sicheren Angriffe zwischen sicheren Argumenten innerhalb der Menge, weshalb diese schwach konfliktfrei ist. Außerdem wird die Menge von außen nur von dem Mengenangriff $(\{a_2, a_6\}, a_3)$ sicher angegriffen, verteidigt sich jedoch durch den Mengenangriff $(\{a_1, a_5\}, a_2)$ gegen diesen Angriff. Die weiteren unsicheren Angriffe auf a_3 sowie auf a_5 müssen nicht verteidigt werden.

- Das eben genannte Beispiel ist zudem stark konfliktfrei und damit auch gemischt zulässig.

- Die Menge $\{a_1, a_3, a_5, a_6, a_{12}\}$ ist stark zulässig. Es gibt keine sicheren oder unsicheren Angriffe zwischen Argumenten innerhalb der Menge, weshalb diese stark konfliktfrei ist. Es gibt sowohl sichere als auch unsichere Mengenangriffe auf diese Menge, die aber alle stark verteidigt werden. Das heißt, es gibt immer einen sicheren Gegenangriff. Beispielsweise wird der unsichere Angriff $(\{a_7, a_8\}, a_3)$ durch den sicheren Mengenangriff $(\{a_6\}, a_7)$ verteidigt. Der unsichere Angriff $(\{a_9, a_{10}\}, a_5)$ wird durch den sicheren Mengenangriff $(\{a_6\}, a_{10})$ verteidigt.

Aufbauend auf die zulässige Semantik wird nachfolgend die vollständige Semantik für iSetAFs definiert.

Definition 4.11 (Vollständige Extensionen für iSetAFs)**.** Sei $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ ein iSetAF und $S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$. Eine Menge S heißt

- schwach vollständig gdw. $S \in ad_w(U)$ und jedes Argument $a \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$, das von S schwach verteidigt wird, auch in S liegt. Die Menge aller schwach vollständigen Mengen von U bezeichnet $co_w(U) = \{S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^? \mid \text{S ist schwach vollständig}\}$.

- stark vollständig gdw. $S \in ad_s(U)$ und jedes Argument $a \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$, das von S stark verteidigt wird, auch in S liegt. Die Menge aller stark vollständigen Mengen von U bezeichnet $co_s(U) = \{S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^? \mid \text{S ist stark vollständig}\}$.

Beispiel 4.12. Für das iSetAF U_{11} aus Abbildung 20 soll für jede der zwei Arten der Vollständigkeit ein Beispiel und ein Gegenbeispiel angegeben werden:

- Die Menge $S = \{a_1, a_5\}$ ist schwach zulässig. Es gibt keine sicheren Angriffe zwischen sicheren Argumenten innerhalb der Menge, weshalb diese schwach konfliktfrei ist. Außerdem wird die Menge von außen nicht angegriffen. Allerdings ist S nicht schwach vollständig. Durch den Mengenangriff $(\{a_1, a_5\}, a_2)$ wird das Argument a_3 schwach verteidigt und muss in S aufgenommen werden. Aber auch die Menge $S' = \{a_1, a_3, a_5\}$ ist noch nicht schwach vollständig, da diese Menge auch immer genau die Argumente verteidigt, die nicht sicher angegriffen werden. Dies betrifft die Argumente a_6, a_9, a_{11} und a_{12}. Somit ist erst die Menge $S'' = \{a_1, a_3, a_5, a_6, a_9, a_{11}, a_{12}\}$ schwach vollständig.

- Die Menge $S = \{a_1\}$ ist stark zulässig, da diese stark konfliktfrei ist und nicht angegriffen wird. Diese Menge ist allerdings noch nicht stark vollständig, da die Argumente a_9 und a_{12} stark verteidigt werden. Die Menge $S' = \{a_1, a_9, a_{12}\}$ hingegen ist bereits stark vollständig, da keine weiteren Argumente von S' stark verteidigt werden.

Die nächste Semantik ist die schwach bzw. stark präferierte Semantik, bei der es sich um eine größtmögliche schwach bzw. stark vollständige Extension handel. Diese kann für iSetAFs wie folgt definiert werden:

Definition 4.12 (Präferierte Extensionen für iSetAFs)**.** Sei $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ ein iSetAF und $S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$. Eine Menge S heißt

- schwach präferiert gdw. $S \in co_w(U)$ und S ist maximal. Es gibt somit keine größere Menge $S' \supset S$, die ebenfalls schwach vollständig ist. Die Menge aller schwach präferierten Mengen von U bezeichnet $pr_w(U) = \{S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^? \mid \text{S ist schwach präferiert}\}$.

- stark präferiert gdw. $S \in co_s(U)$ und S ist maximal. Es gibt somit keine größere Menge $S' \supset S$, die ebenfalls stark vollständig ist. Die Menge aller stark präferierten Mengen von U bezeichnet $pr_s(U) = \{S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^? \mid \text{S ist stark präferiert}\}$.

Beispiel 4.13. Für das iSetAF U_{11} aus Abbildung 20 soll für jede der zwei Arten der Präferiertheit ein Beispiel angegeben werden:

- Die zuvor angegebene schwach vollständige Menge $\{a_1, a_3, a_5, a_6, a_9, a_{11}, a_{12}\}$ ist bereits maximal und damit schwach präferiert. Es kann keine weitere Menge gefunden werden, die weitere Argumente enthält und ebenfalls vollständig ist.

- Die Menge $\{a_1, a_3, a_5, a_6, a_9, a_{11}, a_{12}\}$ ist nicht nur schwach vollständig, sondern auch stark vollständig, da alle enthaltenen Argumente stark verteidigt werden.

Für die formale Definition der grundierten Semantik für iSetAFs wird erneut die in Definition 2.4 vorgestellte charakteristische Funktion benötigt, die an dieser Stelle allerdings für das iSetAF angepasst werden muss.

Definition 4.13 (x-charakteristische Funktion für iSetAFs)**.** Sei $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ ein iSetAF und es bezeichne $x \in \{w, s\}$ die Unterscheidung zwischen der schwachen (w) und der starken (s) charakteristischen Funktion. Die x-charakteristische Funktion $\tau_{U,x} : 2^{\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?} \to 2^{\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?}$ bestimmt für eine Menge $S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ alle Argumente, die von dieser Menge

- schwach verteidigt werden (für den Fall $x = w$) bzw.

- stark verteidigt werden (für den Fall $x = s$).

Beispiel 4.14. Für das iSetAF U_{11} aus Abbildung 20 und eine Menge $S = \{a_1\}$ gilt $\tau_{U_{11},w}(S) = \{a_1, a_5, a_6, a_9, a_{11}, a_{12}\}$. Dies ist genau die Menge, die von a_1 schwach verteidigt wird. Außerdem gilt $\tau_{U_{11},s}(S) = \{a_1, a_9, a_{12}\}$, was genau der Menge entspricht, die von a_1 stark verteidigt wird.

Mit Hilfe der x-charakteristischen Funktion lässt sich nun auch die grundierte Semantik für iSetAFs definieren.

Definition 4.14 (Grundierte Extensionen für iSetAFs)**.** Sei $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ ein iSetAF und $S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$. Eine Menge S heißt

- schwach grundiert gdw. diese dem Fixpunkt der iterativen Anwendung der w-charakteristischen Funktion entspricht. Die Menge aller schwach grundierten Mengen von U bezeichnet $gr_w(U) = \{S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^? \mid \text{S ist schwach grundiert}\}$.
- stark grundiert gdw. diese dem Fixpunkt der iterativen Anwendung der s-charakteristischen Funktion entspricht. Die Menge aller stark grundierten Mengen von U bezeichnet $gr_s(U) = \{S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^? \mid \text{S ist stark grundiert}\}$.

Insbesondere bildet die schwach bzw. stark grundierte Extension die minimale eindeutig bestimmte schwach bzw. stark vollständige Extension. Es gibt somit keine weitere schwach bzw. stark vollständige Extension, die Teilmenge der schwach bzw. stark grundierten Extension ist und damit kleiner ist.

Beispiel 4.15. Für das iSetAF U_{11} aus Abbildung 20 soll für jede der zwei Arten der Grundiertheit ein Beispiel angegeben werden:

- Die w-charakteristische Funktion wird iterativ wie folgt angewendet:
  - $\tau_{U_{11},w}(\emptyset) = \{a_1, a_5, a_6, a_9, a_{11}, a_{12}\}$
  - $\tau_{U_{11},w}(\{a_1, a_5, a_6, a_9, a_{11}, a_{12}\}) = \{a_1, a_3, a_5, a_6, a_9, a_{11}, a_{12}\}$
  - $\tau_{U_{11},w}(\{a_1, a_3, a_5, a_6, a_9, a_{11}, a_{12}\}) = \{a_1, a_3, a_5, a_6, a_9, a_{11}, a_{12}\}$

  Damit ist der Fixpunkt erreicht und die schwach grundierte Extension lautet $\{a_1, a_3, a_5, a_6, a_9, a_{11}, a_{12}\}$.
- Die s-charakteristische Funktion wird iterativ wie folgt angewendet:
  - $\tau_{U_{11},s}(\emptyset) = \{a_1, a_9, a_{12}\}$
  - $\tau_{U_{11},s}(\{a_1, a_9, a_{12}\}) = \{a_1, a_9, a_{12}\}$

  Damit ist der Fixpunkt erreicht und die stark grundierte Extension lautet $\{a_1, a_9, a_{12}\}$.

Die letzte Semantik, die für iSetAFs angepasst werden soll, ist die schwach bzw. stark stabile Semantik. Im Gegensatz zu Dungs Definition der stabilen Extensionen für die herkömmlichen AFs gilt für die schwache Stabilität nicht, dass jedes vorhandene Argument entweder in der Extension S liegt oder von dieser angegriffen wird. Es können auch unsichere Argumente enthalten sei, die weder in S noch in S^+ liegen. Für die starke Stabilität gilt hingegen wie üblich $S \cup S^+ = \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$.

Definition 4.15 (Stabile Extensionen für iSetAFs)**.** Sei $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ ein iSetAF und $S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$. Eine Menge S heißt

- schwach stabil gdw. $S \in cf_w(U)$ und alle $a \in \mathcal{A} \setminus S$ sicher von S angegriffen werden, es gibt somit ein $b \in S \cap \mathcal{A}$ mit $b\mathcal{R}a$. Die Menge aller schwach stabilen Mengen von U bezeichnet $st_w(U) = \{S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^? \mid \text{S ist schwach stabil}\}$.

- stark stabil gdw. $S \in cf_s(U)$ und alle $a \in (\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?) \setminus S$ sicher von S angegriffen werden. Es gibt somit ein $b \in S \cap \mathcal{A}$ mit $b\mathcal{R}a$. Die Menge aller stark stabilen Mengen von U bezeichnet $st_s(U) = \{S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^? \mid \text{S ist stark stabil}\}$.

Beispiel 4.16. Für das iSetAF U_{11} aus Abbildung 20 soll für jede der zwei Arten der Stabilität ein Beispiel angegeben werden:

- Die Menge $S = \{a_1, a_3, a_5, a_6, a_{11}, a_{12}\}$ ist eine schwach stabile Extension, da diese Menge schwach konfliktfrei ist und alle sicheren Argumente außerhalb dieser Menge sicher von S angegriffen werden. Insbesondere muss das Argument a_9 nicht in S enthalten sein und auch nicht angegriffen werden, da dieses unsicher ist.

- Die Menge $S = \{a_1, a_3, a_5, a_6, a_9, a_{11}, a_{12}\}$ ist eine stark stabile Extension, da diese Menge stark konfliktfrei ist und alle Argumente außerhalb dieser Menge sicher von S angegriffen werden.

Die leere Menge kann als mögliche Teilmenge von Argumenten auch je nach Semantik eine gültige Extension darstellen. Die leere Menge erfüllt in jedem Fall die Definitionen der schwach konfliktfreien, stark konfliktfreien, schwach zulässigen und stark zulässigen Menge jedes beliebigen iSetAFs, wie die nachfolgende Proposition zeigt.

Proposition 4.2. Für ein beliebiges iSetAF $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ gilt $\emptyset \in cf_w(U) \cap cf_s(U) \cap ad_w(U) \cap ad_s(U)$.

Beweis. Sei $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ ein iSetAF und $S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$.

- $\emptyset \in cf_w(U)$: Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge, weshalb insbesondere $S = \emptyset \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ gelten kann. Damit ist die Bedingung der schwach konfliktfreien Menge trivialerweise erfüllt, denn es gibt keine zwei Argumente in S, die sich angreifen könnten.

- $\emptyset \in cf_s(U)$: Analog Beweis für cf_w.

- $\emptyset \in ad_w(U)$: Sei ebenfalls $S = \emptyset \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$. Die leere Menge kann per Definition (vgl. Definition 4.2 und Definition 4.3) nicht sicher angegriffen werden. Wenn es keinen sicheren Angriff auf S gibt, muss keine schwache Verteidigung erfolgen und die Menge ist trivialerweise schwach zulässig.

- $\emptyset \in ad_s(U)$: Analog Beweis für ad_s. Insbesondere kann die leere Menge per Definition auch nicht bedingt sicher angegriffen werden, wodurch eine starke Verteidigung nicht notwendig ist und die Menge trivialerweise stark zulässig ist.

$\square$

Für die restlichen Semantiken für iSetAFs erfüllt die leere Menge im Allgemeinen nicht die Bedingungen der entsprechenden Definition der Semantik. Dies soll in einem abschließenden Beispiel verdeutlicht werden.

Beispiel 4.17. Für das iSetAF U_{11} aus Abbildung 20 gilt beispielsweise:

- $\emptyset \notin co_w(U_{11})$, weil $\{a_1, a_3, a_5, a_6, a_9, a_{11}, a_{12}\} \supset \emptyset$ und $\{a_1, a_3, a_5, a_6, a_9, a_{11}, a_{12}\} \in co_w(U_{11})$. Die Obermenge ist ebenfalls schwach vollständig, weshalb die leere Menge nicht schwach vollständig sein kann.

- $\emptyset \notin co_s(U_{11})$, weil $\{a_1, a_9, a_{12}\} \supset \emptyset$ und $\{a_1, a_9, a_{12}\} \in co_s(U_{11})$.

- $\emptyset \notin gr_s(U_{11})$, weil der Fixpunkt der w-charakteristischen Funktion noch nicht erreicht ist. Dieser ist eindeutig bestimmt und die stark grundierte Extension lautet $\{a_1, a_9, a_{12}\} \in gr_s(U_{11})$, weshalb die leere Menge nicht die schwach grundierte Extension sein kann.

Analog lassen sich auch für die weiteren Semantiken pr_w, pr_s, gr_w, st_w und st_s Gegenbeispiele finden.

In diesem Kapitel wurde das Argumentationsframework iSetAF formal definiert. Bezogen auf den vervollständigungsbasierten Ansatz wurden die Schlussfolgerungsprobleme auf iSetAFs übertragen und untersucht. Bezogen auf den extensionsbasierten Ansatz wurden die Semantiken neu definiert, wobei jeweils eine schwache und eine starke Ausprägung berücksichtigt wurden. Im nachfolgenden Abschnitt 5 sollen nun ausgewählte Eigenschaften dieser Semantiken untersucht werden.

5 Eigenschaften von extensionsbasierten iSetAFs

In Abschnitt 4 wurde das Argumentationsframework iSetAF formal eingeführt und erläutert, wobei sowohl ein vervollständigungsbasierter als auch ein extensionsbasierter Ansatz behandelt wurden. In diesem Kapitel steht nun der extensionsbasierte Ansatz im Fokus, da sich dieser - im Gegensatz zum vervollständigungsbasierten Ansatz - direkt und ohne Erzeugung von Vervollständigungen auf seine Eigenschaften untersuchen lässt. Die Postulate, die in diesem Kapitel untersucht werden, wurden bereits in Unterabschnitt 2.3 definiert. Diese Eigenschaften wurden für abstrakte Argumentationsgraphen (AF) definiert, lassen sich aber durch kleine Anpassungen ebenso für iSetAFs anwenden. Dabei ist zu beachten, dass für die schwache Ausprägung der Semantiken lediglich sichere Mengenangriffe als Bedrohungen betrachtet werden, während bei der starken Ausprägung sowohl unsichere als auch sichere Mengenangriffe berücksichtigt und verteidigt werden müssen.

In diesem Kapitel werden die Postulate nacheinander untersucht. Dabei wird das jeweilige Postulat, sofern notwendig, zunächst auf iSetAFs übertragen. Anschließend wird die Erfüllung dieser Eigenschaft für alle sechs Semantiken (sowohl in schwacher als auch starker Ausprägung) untersucht und bewiesen. Zum Abschluss dieses Kapitels bietet eine tabellarische Übersicht eine Zusammenfassung der Erfüllung oder Nichterfüllung der Postulate und fasst alle zentralen Ergebnisse dieses Kapitels übersichtlich zusammen.

5.1 Notation

Im Rahmen dieses Kapitels sei, sofern nicht anders erwähnt, stets

$$U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$$

ein beliebiges iSetAF. Weiterhin sei

$$\sigma \in \{cf, ad, co, pr, gr, st\}$$

eine beliebige Semantik für AFs,

$$\sigma_w \in \{cf_w, ad_w, co_w, pr_w, gr_w, st_w\}$$

eine beliebige schwache Semantik (weak) für iSetAFs,

$$\sigma_s \in \{cf_s, ad_s, co_s, pr_s, gr_s, st_s\}$$

eine beliebige starke Semantik (strong) für iSetAFs und

$$x \in \{w, s\}$$

ein Index zur Unterscheidung zwischen schwacher und starker Ausprägung von Semantiken und Extensionen.

Zur vereinfachten Unterscheidung von schwachen und starken Extensionen wird beispielsweise eine schwach vollständige Extension als *w-vollständige* Extension und eine stark vollständige Extension als *s-vollständige* Extension bezeichnet. Gilt eine Aussage für beide Ausprägungen gleichermaßen, wird eine beliebige vollständige Extension als *x-vollständig* bezeichnet. Dies gilt auch analog für die weiteren Semantiken aus σ_x.

Zudem kann auch zwischen schwach und stark attackierten Mengen unterschieden werden. Dies ist für die weitere Betrachtung der beiden Ausprägungen der Semantiken relevant und wird daher an dieser Stelle definiert.

Definition 5.1 (x-attackiert)**.** Für ein iSetAF U wird eine Menge $S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ als x-attackierte Menge bezeichnet, gdw.

- S für $x = w$ sicher angegriffen wird bzw.
- S für $x = s$ sicher und/oder unsicher angegriffen wird.

Eine schwach attackierte (w-attackierte) Menge ist dabei zwingend von einer unsicher attackierten Menge zu unterscheiden. Die gewählten Begriffe verleiten zu einer Verwechselung, da die Bedeutungen genau entgegengesetzt sind. Eine schwach attackierte Menge wird sicher angegriffen, eine unsicher attackierte Menge wird hingegen nur unsicher angegriffen. Eine stark attackierte (s-attackierte) Menge kann sowohl sicher als auch unsicher angegriffen werden, während eine sicher attackierte Menge sicher angegriffen wird.

Analog der Definition einer x-attackierten Menge kann auch ein Argument w- oder s-attackiert werden. Wird ein Argument w-attackiert, dann erfolgt ein sicherer Angriff auf dieses Argument. Bei einem s-attackierten Argument kann der Angriff auf dieses Argument sowohl sicher als auch unsicher erfolgen.

Wie bereits zu Beginn der Arbeit erwähnt, sind konfliktfreie und vollständige Mengen, sowohl in der schwachen als auch in der starken Ausprägung, streng genommen keine Extensionen einer Semantik. Zur Vereinfachung werden diese im Rahmen dieser Arbeit jedoch als solche bezeichnet.

Nachdem die Notation eingeführt wurde, sollen erste Eigenschaften von iSetAFs im nachfolgenden Unterabschnitt 5.2 betrachtet werden.

5.2 Einführende Eigenschaften

Beim Vergleich von abstrakten Argumentationsgraphen (AFs) und unvollständigen Argumentationsgraphen mit Mengenangriffen (iSetAFs) lässt sich feststellen, dass sich jedes AF auch als iSetAF darstellen lässt, was in der nachfolgenden Proposition gezeigt wird. Dies bildet die Grundlage für das Theorem 5.1, das zeigt, wie Eigenschaften von Semantiken für AFs, SetAFs (Argumentationsgraphen mit Mengenangriffen) und iAFs (unvollständige Argumentationsgraphen) direkt auf iSetAFs übertragen werden können.

Proposition 5.1. Jeder beliebige abstrakte Argumentationsgraph (AF) stellt eine Form eines iSetAFs dar.

Beweis. Sei $F = (A, R)$ ein abstrakter Argumentationsgraph mit der Relation $R \subseteq A \times A$. Definiere das entsprechende iSetAF $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ wie folgt:

- $\mathcal{A} = A$ (die Argumente von F bilden die sicheren Argumente von U),
- $\mathcal{A}^? = \emptyset$ (U enthält keine unsicheren Argumente),
- $\mathcal{R} = \{(\{a\}, b) \mid (a, b) \in R\}$ (jeder einzelne Angriff (a, b) wird als einelementiger Mengenangriff aufgefasst, bei dem lediglich ein Argument a angreift),
- $\mathcal{R}^? = \emptyset$ (U enthält keine unsicheren Angriffe).

Auf diese Weise lässt sich für jedes AF ein entsprechendes iSetAF konstruieren. □

Gleichzeitig lässt sich aber auch jedes SetAF als iSetAF und jedes iAF als iSetAFs darstellen.

Proposition 5.2. Jeder beliebige Argumentationsgraph mit Mengenangriffen (SetAF) stellt eine Form eines iSetAFs dar.

Beweis. Sei $M = (A, \boldsymbol{\mathcal{R}})$ ein SetAF mit der Relation $\boldsymbol{\mathcal{R}} \subseteq (2^A \setminus \{\emptyset\}) \times A$. Definiere das entsprechende iSetAF $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ wie folgt:

- $\mathcal{A} = A$ (die Argumente von M bilden die sicheren Argumente von U),
- $\mathcal{A}^? = \emptyset$ (U enthält keine unsicheren Argumente),
- $\mathcal{R} = \boldsymbol{\mathcal{R}}$ (die Mengenangriffe von M bilden die sicheren Mengenangriffe von U),
- $\mathcal{R}^? = \emptyset$ (U enthält keine unsicheren Angriffe).

Auf diese Weise lässt sich für jedes SetAF ein entsprechendes iSetAF konstruieren. □

Proposition 5.3. Jeder beliebige unvollständige Argumentationsgraph (iAF) stellt eine Form eines iSetAFs dar.

Beweis. Sei $I = (\mathscr{A}, \mathscr{A}^?, \mathscr{R}, \mathscr{R}^?)$ ein iAF mit Relationen $\mathscr{R}, \mathscr{R}^? \subseteq (\mathscr{A} \cup \mathscr{A}^?) \times (\mathscr{A} \cup \mathscr{A}^?)$. Definiere das entsprechende iSetAF $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ wie folgt:

- $\mathcal{A} = \mathscr{A}$ (die sicheren Argumente von I bilden die sicheren Argumente von U),
- $\mathcal{A}^? = \mathscr{A}^?$ (die unsicheren Argumente von I bilden die unsicheren Argumente von U),
- $\mathcal{R} = \{(\{a\}, b) \mid (a, b) \in \mathscr{R}\}$ (jeder bedingt sichere Angriff (a, b) wird als einelementiger Mengenangriff aufgefasst, bei dem lediglich ein Argument a angreift),

- $\mathcal{R}^? = \{(\{a\}, b) \mid (a, b) \in \mathscr{R}^?\}$ (jeder unsichere Angriff (a, b) wird als einelementiger Mengenangriff aufgefasst).

Auf diese Weise lässt sich für jedes iAF ein entsprechendes iSetAF konstruieren. □

Da gezeigt wurde, dass sich jedes AF, SetAF bzw. iAF auch als iSetAF betrachten lässt, folgt direkt, dass eine Eigenschaft für iSetAFs nicht erfüllt sein kann, wenn diese bereits für AFs, SetAFs bzw. iAFs nicht erfüllt ist. Für das nachfolgende Theorem bezeichne $E \in$ {Syntaxunabhängigkeit, I-Maximalität, Enthaltung, Direktionalität, Dichtheit, Konfliktsensitivität, Modularisierung} die verschiedenen zu untersuchenden Eigenschaften.

Theorem 5.1. Erfüllt eine Semantik σ für AFs, SetAFs oder iAFs eine Eigenschaft E nicht, so wird diese Eigenschaft weder von einer Semantik σ_w noch von einer Semantik σ_s erfüllt.

Beweis. Sei F ein beliebiger abstrakter Argumentationsgraph, M ein SetAF und I ein iAF. Angenommen, eine Eigenschaft E gelte nicht für F, M oder I. Entsprechend Proposition 5.1 lässt sich jede dieser Strukturen in eine Form eines iSetAFs überführen, für das die Eigenschaft E ebenso wenig gilt. Es liegt somit mindestens ein iSetAF vor, das die Eigenschaft nicht erfüllt, weshalb eine Erfüllung im Allgemeinen nicht möglich ist. □

Die im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Eigenschaften wurden bereits vollständig für AFs untersucht (vgl. [vdTV17, DDLW15]). Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind in Tabelle 2 übersichtlich dargestellt. Für SetAFs wurde ebenfalls ein Großteil der Eigenschaften untersucht (vgl. [DKUW24]), die Ergebnisse sind in Tabelle 3 dargestellt. Dabei wurden die Syntaxunabhängigkeit sowie die Konfliktsensitivität nicht untersucht. Auch für extensionsbasierte iSetAFs wurden bereits einige dieser Eigenschaften untersucht (vgl. [Mai24]). Dabei wurden allerdings nur die Semantiken co, pr, gr und st sowie wenige Postulate berücksichtigt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 4 dargestellt.

	cf	ad	co	pr	gr	st
Syntaxunabhängigkeit	✓	✓	✓	✓	✓	✓
I-Maximalität	✗	✗	✗	✓	✓	✓
Enthaltung	✓	✓	✓	✗	✓	✗
Direktionalität	✓	✓	✓	✓	✓	✗
Dichtheit	✓	✗	✗	✗	✓	✓
Konfliktsensitivität	✓	✓	✗	✓	✓	✓
Modularisierung	✗	✓	✓	✓	✓	✓

Tabelle 2: Übersicht der Erfüllung von Postulaten für AFs durch verschiedene Semantiken. Eigene Darstellung in Anlehnung an Dunne et al. und Dvořák et al. [DDLW15, DKUW24].

	cf	ad	co	pr	gr	st
I-Maximalität	✗	✗	✗	✓	✓	✓
Enthaltung	✓	✓	✓	✗	✓	✗
Direktionalität	✓	✓	✓	✓	✓	✗
Dichtheit	✗	✗	✗	✗	✓	✗
Modularisierung	✗	✓	✓	✓	✓	✓

Tabelle 3: Übersicht der Erfüllung von Postulaten für SetAFs durch verschiedene Semantiken. Eigene Darstellung in Anlehnung an Dvořák et al. [DKUW24].

	co_w	co_s	pr_w	pr_s	gr_w	gr_s	st_w	st_s
I-Maximalität	✗	✗	✓	✓	✓	✓	✗	✓
Enthaltung	✓	✓	✗	✗	✓	✓	✗	✗
Direktionalität	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✗

Tabelle 4: Übersicht der Erfüllung von Postulaten für iAFs durch Semantiken. Eigene Darstellung in Anlehnung an Mailly [Mai24].

Alle in Tabelle 2, Tabelle 3 und Tabelle 4 nicht erfüllten Eigenschaften erfüllen auch die Semantiken für iSetAFs im Allgemeinen nicht. Dies geht aus Theorem 5.1 hervor. Daher wird in den folgenden Ausführungen auf einen erneuten Beweis der Nichterfüllung einer Eigenschaft verzichtet.

Ist eine Eigenschaft E jedoch für eine Semantik σ für AFs, SetAFs bzw. iAFs erfüllt, lässt sich daraus nicht direkt schließen, dass diese auch für die entsprechende Semantik für iSetAFs gilt, weshalb diese Fälle in den kommenden Unterkapiteln einzeln untersucht werden.

5.3 Syntaxunabhängigkeit

Das erste zu untersuchende Postulat ist die Syntaxunabhängigkeit. Die Definition 2.16 lässt sich analog auf iSetAFs anwenden, wobei zunächst definiert werden soll, wann zwei iSetAFs isomorph sind.

Definition 5.2 (Isomorphe iSetAFs)**.** Seien $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ und $U' = (\mathcal{A}', \mathcal{A}'^?, \mathcal{R}', \mathcal{R}'^?)$ zwei iSetAFs. Die beiden iSetAFs U und U' heißen isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $\rho : \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^? \to \mathcal{A}' \cup \mathcal{A}'^?$ gibt, sodass für jede Menge $S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ und $a \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ gilt:

$$(S, a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^? \quad \text{gdw.} \quad (\rho(S), \rho(a)) \in \mathcal{R}' \cup \mathcal{R}'^?.$$

Dabei wird die Abbildung ρ auf die Menge S elementweise angewandt. Es gilt somit:

$$\rho(S) = \{\rho(x) \mid x \in S\}.$$

Mit der Isomorphie zweier iSetAFs lässt sich nun auch die Syntaxunabhängigkeit für iSetAFs definieren.

Definition 5.3 (Syntaxunabhängigkeit für iSetAFs)**.** Eine Semantik σ_x erfüllt Syntaxunabhängigkeit gdw. für alle iSetAFs U und U' gilt: Sind U und U' isomorph mit einer bijektiven Abbildung ρ (es gilt somit $\rho(U) = U'$), dann folgt:

$$\sigma_x(\rho(U)) = \rho(\sigma_x(U)).$$

Die Extensionen eines iSetAFs sollten somit unabhängig von der konkreten Bezeichnung der Argumente sein. Im Folgenden wird gezeigt, dass dies für alle Semantiken σ_x gilt.

Theorem 5.2. Jede Semantik σ_x für iSetAFs erfüllt Syntaxunabhängigkeit.

Beweis. Per Definition der Syntaxunabhängigkeit gibt es für jede Semantik σ_x eine Bijektion $\rho(U)$, die die Knotenbezeichnungen lediglich umbenennt. Dabei wird die Struktur des Graphen durch ρ nicht verändert, da die Angriffsbeziehungen der Argumente erhalten bleiben. Aus diesem Grund sind die Graphen U und $\rho(U)$ isomorph. Da Semantiken definitionsgemäß von den Knotenbezeichnern unabhängig sind und nur die Struktur des Graphen berücksichtigt wird, folgt direkt

$$\sigma_x(\rho(U)) = \rho(\sigma_x(U)).$$

Damit erfüllt jede Semantik σ_x für iSetAFs Syntaxunabhängigkeit. □

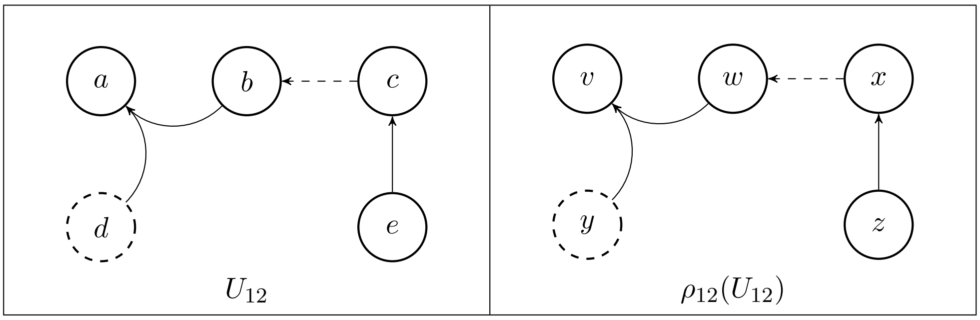

Abbildung 21: Zwei isomorphe iSetAFs U_{12} und $\rho_{12}(U_{12})$ zu Beispiel 5.1. Eigene Darstellung.

Die Syntaxunabhängigkeit von iSetAFs soll im folgenden Beispiel verdeutlicht werden.

Beispiel 5.1. In Abbildung 21 ist zum einen das iSetAF U_{12} und zum anderen das umbenannte iSetAF $\rho_{12}(U_{12})$ abgebildet. Für die Bijektion ρ_{12} gilt

$$\begin{aligned} &\rho_{12}(a) = v, \quad &&\rho_{12}(b) = w, \quad &&\rho_{12}(c) = x, \\ &\rho_{12}(d) = y, \quad &&\rho_{12}(e) = z. \end{aligned}$$

Diese Umbenennung verändert jedoch nicht die Struktur der Angriffe oder die Unsicherheit des Graphen, sodass U_{12} und $\rho_{12}(U_{12})$ isomorph sind.
Weiter gilt

$$co_w(U_{12}) = \{\{a, b, d, e\}\} \text{ und}$$
$$\rho_{12}(co_w(U_{12})) = \{\{v, w, y, z\}\}.$$

Für den isomorphen Graphen gilt ebenso

$$co_w(\rho_{12}(U_{12})) = \{\{v, w, y, z\}\}.$$

Es folgt

$$co_w(\rho_{12}(U_{12})) = \rho_{12}(co_w(U_{12})).$$

5.4 I-Maximalität

Die zweite Eigenschaft ist die I-Maximalität. Sofern diese Eigenschaft erfüllt ist, gibt es keine zwei unterschiedlichen Extensionen eines iSetAFs, die in einer echten Teilmengenbeziehung zueinander stehen. Die Definition 2.17 kann analog für iSetAFs definiert werden.

Definition 5.4 (I-Maximalität für iSetAFs)**.** Seien $S, S' \in \sigma_x(U)$ zwei Extensionen eines iSetAFs. Eine Semantik σ_x erfüllt I-Maximalität gdw. für alle iSetAFs gilt: Wenn $S \subseteq S'$, dann muss $S = S'$ gelten.

Mit dieser Definition der I-Maximalität kann nun gezeigt werden, dass die Semantiken pr_x, gr_x und st_s diese Eigenschaft erfüllen. Das folgende Theorem stellt dies formal dar.

Theorem 5.3. pr_x, gr_x und st_s erfüllen I-Maximalität.

Beweis. Sei $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ ein iSetAF und $S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$.

- pr_x: Per Definition handelt es sich bei der x-präferierten Extension um eine maximal x-zulässige Menge. Es seien $S, S' \in pr_x(U)$ zwei x-präferierte Extensionen mit $S \subseteq S'$. Angenommen, es gilt zudem $S \neq S'$ und somit auch $S' \supset S$. Dann kann aber nur S' x-präferiert sein, da nur diese Extension maximal ist. Daraus folgt, dass S nicht x-präferiert sein kann, was zum Widerspruch führt. Somit folgt $S = S'$.

- gr_x: Per Definition handelt es sich bei der schwach bzw. stark grundierten Extension um den Fixpunkt der x-charakteristischen Funktion. Dieser Fixpunkt ist eindeutig bestimmt, weshalb es keine $S, S' \in gr_x(U)$ mit $S \subseteq S'$ und $S \neq S'$ geben kann. Hieraus folgt trivialerweise $S = S'$.

- st_s: Seien $S, S' \in st_s$ zwei stark stabile Extensionen mit $S \subseteq S'$. Angenommen, es gilt $S \neq S'$ und damit auch $S' \supset S$, dann muss ein Argument b existieren mit $b \in S'$ und $b \notin S$. Da S aber stark stabil ist, werden alle Argumente $a \in (\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?) \setminus S$

von S sicher angegriffen, somit auch das Argument b. Wenn S das Argument b angreift, muss aber auch die Obermenge S' das Argument b angreifen, woraus folgt, dass S' nicht stark konfliktfrei sein kann. Dies steht im Widerspruch und es muss $S = S'$ gelten.

□

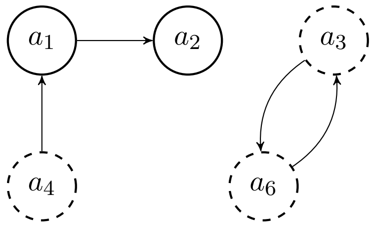

Abbildung 22: iSetAF U_{13} zu Beispiel 5.2. Eigene Darstellung.

Die Semantiken cf_x, ad_x, co_x und st_w erfüllen I-Maximalität hingegen nicht. Dies wird durch das nachfolgende Gegenbeispiel verdeutlicht.

Beispiel 5.2. Für das in Abbildung 22 dargestellte iSetAF U_{13} gilt:

- $S_1 = \{a_1\} \in cf_x$ und $S_2 = \{a_1, a_4\} \in cf_x$. Es gilt $S_1 \subseteq S_2$, aber $S_1 \neq S_2$.
- $S_1 = \{a_3\} \in ad_x$ und $S_2 = \{a_3, a_4\} \in ad_x$. Es gilt $S_1 \subseteq S_2$, aber $S_1 \neq S_2$.
- $S_1 = \{a_2, a_4\} \in co_x$ und $S_2 = \{a_2, a_3, a_4\} \in co_x$. Es gilt $S_1 \subseteq S_2$, aber $S_1 \neq S_2$.
- $S_1 = \{a_2, a_4\} \in st_w$ und $S_2 = \{a_2, a_3, a_4\} \in st_w$. Es gilt $S_1 \subseteq S_2$, aber $S_1 \neq S_2$.

Würden die zuvor in Beispiel 5.2 genannten Semantiken I-Maximalität erfüllen, dann müsste in jedem der gezeigten Beispiele zwingend $S_1 = S_2$ gelten. Dies ist nicht erfüllt, weshalb diese Semantiken die I-Maximalität grundsätzlich nicht erfüllen.

5.5 Enthaltung

Die dritte zu untersuchende Eigenschaft ist die Enthaltung. Um die Definition 2.18 auf iSetAFs anwenden zu können, muss zunächst die Bezeichnung S^- bzw. S^+ konkretisiert werden. Für eine Menge von Argumenten $S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ bezeichnet

- $S^{-,w}$ die Menge aller Argumentmengen, von denen S sicher angegriffen wird:

$$S^{-,w} = \{B \subseteq \mathcal{A} \mid \exists a \in S : (B, a) \in \mathcal{R}\},$$

- $S^{-,s}$ die Menge aller Argumentmengen, von denen S sicher oder unsicher angegriffen wird:

$$S^{-,s} = \{B \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^? \mid \exists a \in S : (B, a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^?\},$$

- $S^{+,w}$ die Menge aller Argumente, die sicher von S angegriffen werden:
$$S^{+,w} = \{a \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^? \mid \exists B \subseteq (S \cap \mathcal{A}) : (B, a) \in \mathcal{R}\},$$
- $S^{+,s}$ die Menge aller Argumente, die sicher oder unsicher von S angegriffen werden:
$$S^{+,s} = \{a \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^? \mid \exists B \subseteq S : (B, a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^?\}.$$

Mit dieser alternativen Bezeichnung lässt sich nun auch die Eigenschaft der Enthaltung leicht auf iSetAFs übertragen.

Definition 5.5 (Enthaltung für iSetAFs)**.** Seien $S_1, S_2 \in \sigma_x(U)$ zwei Extensionen von U. Eine Semantik σ_x erfüllt Enthaltung gdw. für alle Argumente $a \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ gilt: Ist $a \in S_1$ und zudem auch $a \in S_2^{+,x}$, dann gibt es eine weitere Extension $S_3 \in \sigma_x(U)$, sodass weder $a \in S_3$ noch $a \in S_3^{+,x}$ gilt.

Für die schwache Ausprägung einer Semantik bedeutet dies: Befindet sich ein Argument a in einer Menge akzeptierter Argumente und wird es von einem sicheren Argument einer anderen Menge sicher angegriffen, dann existiert eine dritte Extension, die weder a enthält noch a angreift. Insbesondere werden dabei unsichere Angriffe auf a nicht berücksichtigt.

Theorem 5.4. Die Semantiken cf_x, ad_x, co_s und gr_x für iSetAFs erfüllen Enthaltung.

Beweis. Sei $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ ein iSetAF.

- cf_x: Seien $S_1, S_2 \in cf_x(U)$. Angenommen, es existiert ein Argument $a \in S_1$, das von einer Menge $B \subseteq S_2$ x-attackiert wird. Dann gibt es gemäß Proposition 4.2 immer eine weitere Extension $S_3 = \{\emptyset\}$ mit $S_3 \in cf_x(U)$.

- ad_x: Seien $S_1, S_2 \in ad_x(U)$. Angenommen, es existiert ein Argument $a \in S_1$, das von einer Menge $B \subseteq S_2$ x-attackiert wird. Dann gibt es gemäß Proposition 4.2 immer eine weitere Extension $S_3 = \{\emptyset\}$ mit $S_3 \in ad_x(U)$.

- co_s: Seien $S_1, S_2 \in co_s$. Angenommen, es existiert ein Argument $a \in S_1$, das von einer Menge $B \subseteq S_2$ s-attackiert wird. Sei $S_3 \in gr_s(U)$ die stark grundierte Extension, für die per Definition auch $S_3 \in co_s(U)$ gilt. Insbesondere ist S_3 Teil jeder stark vollständigen Extension. Wegen $S_3 \subseteq S_1 \cap S_2$ und $a \notin S_1 \cap S_2$ folgt $a \notin S_3$. Weiter folgt daraus, dass für wenigstens ein Argument $b \in B$ gilt, dass $b \notin S_1$, da $S_1 \in cf_s(U)$ und dies ansonsten zum Konflikt führen würde. Der Mengenangriff von B auf a kann somit nicht vollständig in S_1 und damit auch nicht in S_3 liegen.

- gr_x: Da die schwach bzw. stark grundierte Semantik eindeutig bestimmt ist, kann es keine zwei Extensionen $S_1, S_2 \in gr_x(U)$ geben, wodurch die Definition der Enthaltung trivialerweise erfüllt ist.

□

Die verbliebenen Semantiken co_w, pr_x und st_x erfüllen die Eigenschaft der Enthaltung nicht. Dies wurde bereits in Theorem 5.1 gezeigt.

5.6 Direktionalität

Als Vorbereitung auf das nächste Postulat muss an dieser Stelle zunächst der Begriff der Projektion auf iSetAFs übertragen werden, da dieser von der allgemeinen Definition abweicht.

Definition 5.6 (Projektion eines iSetAFs)**.** Für ein iSetAF $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ und eine Menge $S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ ist die Projektion $U_{\downarrow S}$ (das iSetAF U projiziert auf die Menge S) gegeben durch:

$$U_{\downarrow S} = (\mathcal{A} \cap S, \mathcal{A}^? \cap S, \mathcal{R}_{\downarrow S}, \mathcal{R}^?_{\downarrow S})$$

mit

$$\mathcal{R}_{\downarrow S} = \{(B, a) \in \mathcal{R} \mid B \subseteq S \text{ und } a \in S\} \text{ und}$$
$$\mathcal{R}^?_{\downarrow S} = \{(B, a) \in \mathcal{R}^? \mid B \subseteq S \text{ und } a \in S\}.$$

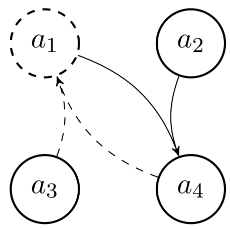

Abbildung 23: iSetAF U_{14} zu Beispiel 5.3. Eigene Darstellung.

Beispiel 5.3. Das in Abbildung 23 dargestellte iSetAF U_{14} kann auf unterschiedliche Mengen projiziert werden. Einige beispielhafte Projektionen sind zur Veranschaulichung in Abbildung 24 dargestellt. Ein Mengenangriff kann somit nur in einer Projektion enthalten sein, wenn alle beteiligten Argumente – sowohl die angreifenden Argumente als auch das angegriffene Argument – in der Menge, auf die projiziert wird, enthalten sind.

Für die Überprüfung der Direktionalität ist zudem der Begriff der unattackierten Menge auf iSetAFs zu übertragen, da Mengenangriffe in der herkömmlichen Definition (vgl. Definition 2.20) nicht berücksichtigt werden. Dabei wird zusätzlich zwischen einer schwach unattackierten und einer stark unattackierten Menge unterschieden.

Definition 5.7 (x-unattackiert)**.** Sei $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ ein iSetAF und $S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ eine Menge von Argumenten.

- Eine Menge S heißt w-unattackiert gdw. diese von keinem Mengenangriff $B \subseteq \{\mathcal{A} \setminus S\}$ mit $B \neq \emptyset$ sicher angegriffen wird.
- Eine Menge S heißt s-unattackiert gdw. diese von keinem Mengenangriff $B \subseteq \{(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?) \setminus S\}$ mit $B \neq \emptyset$ sicher oder unsicher angegriffen wird.

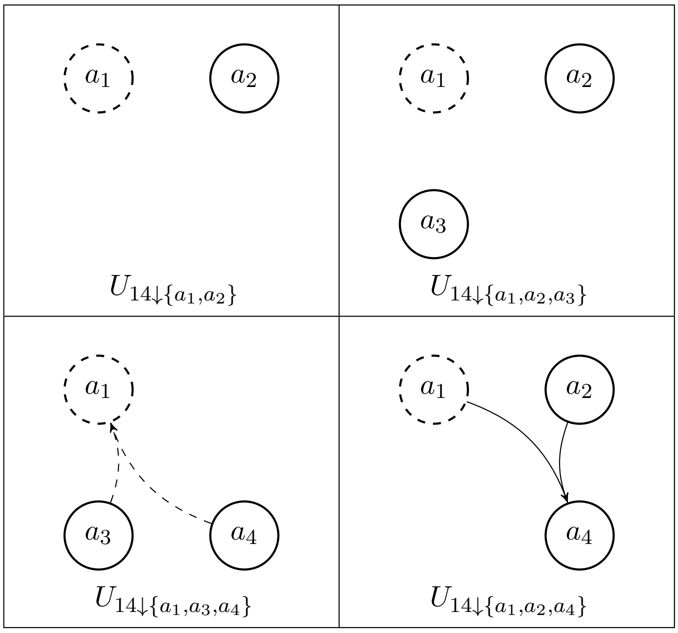

Abbildung 24: Beispielhafte Projektionen von U_{14} aus Abbildung 23 auf unterschiedliche Mengen. Eigene Darstellung zu Beispiel 5.3.

Nachdem die benötigen Begriffe definiert wurden, lässt sich nun auch die Definition 2.20 auf iSetAFs übertragen, wobei lediglich minimale Anpassungen erforderlich sind.

Definition 5.8 (Direktionalität für iSetAFs)**.** Sei $S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ eine in einem iSetAF U x-unattackierte Menge. Sei zudem $S' \in \sigma_x(U)$ eine σ_x-Extension in U. Eine Semantik σ_x erfüllt Direktionalität gdw.

$$\sigma_x(U_{\downarrow S}) = \{S' \cap S \mid S' \in \sigma_x(U)\}$$

für jedes iSetAF gilt.

Theorem 5.5. Die Semantik cf_x für iSetAFs erfüllt Direktionalität.

Beweis. Sei $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ ein iSetAF und $S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ eine in U x-unattackierte Menge. Zu zeigen sind dabei beide Seiten der Gleichung $cf_x(U_{\downarrow S}) = \{S \cap S' \mid S' \in cf_x(U)\}$.

1. Sei $S' \in cf_x(U)$. Da S x-unattackiert in U ist und in $U_{\downarrow S}$ keine nicht erlaubten Angriffe hinzugefügt werden, folgt direkt, dass $S \cap S'$ in $U_{\downarrow S}$ ebenfalls x-konfliktfrei ist.

2. Sei $S' \in cf_x(U_{\downarrow S})$. Da S x-unattackiert in U ist, existieren in U keine zusätzlichen nicht erlaubten Angriffe auf Argumente in S. Weiter ist S' in $U_{\downarrow S}$ x-konfliktfrei, weshalb $S' \subseteq S$ gelten muss und es folgt direkt, dass die Menge $S \cap S' = S'$ auch in U x-konfliktfrei ist. Somit gilt $S' \in cf_x(U)$.

$\square$

Es lässt sich allerdings leicht feststellen, dass Semantiken, die auf der x-Zulässigkeit basieren, Direktionalität grundsätzlich nicht erfüllen können. Die zwei nachfolgenden Beispiele zeigen die Problematik unter Berücksichtigung der herkömmlichen Definition der Direktionalität.

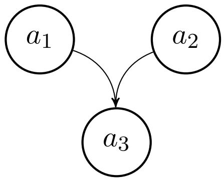

Abbildung 25: iSetAF U_{15} zu Beispiel 5.4. Eigene Darstellung.

Beispiel 5.4. Sei U_{15} das in Abbildung 25 dargestellte iSetAF und $S = \{a_1, a_3\}$ eine x-unattackierte Menge entsprechend Definition 5.7. Da keine unsichere Information enthalten ist, lässt sich das Beispiel sowohl für die schwache als auch für die starke Ausprägung anwenden. Keines der beiden Argumente wird von einem Mengenangriff außerhalb von S angegriffen. Es gilt

$$ad_x(U_{15\downarrow S}) = \{\{a_1\}, \{a_3\}, \{a_1, a_3\}\}.$$

Weiter gilt

$$ad_x(U_{15}) = \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}\}.$$

Dann gilt allerdings auch

$$(S \cap S' \mid S' \in ad_x(U_{15})) = \{\{a_1\}\}.$$

Dies widerspricht der Definition der Direktionalität. Die Menge $\{a_3\}$ ist somit in $U_{\downarrow S}$ x-zulässig, in U hingegen nicht, da das Argument vom Mengenangriff $(\{a_1, a_2\}, a_3)$ attackiert und nicht verteidigt wird.

Auch für die weiteren Semantiken für iSetAFs, die auf der x-Zulässigkeit basieren, lassen sich Gegenbeispiele finden, wie nachfolgend gezeigt wird.

Beispiel 5.5. Fortsetzung zu Beispiel 5.4. Für das iSetAF U_{15} aus Abbildung 25 und eine Menge $S = \{a_1, a_3\}$ gilt:

$$co_x(U_{15\downarrow S}) = pr_x(U_{15\downarrow S}) = gr_x(U_{15\downarrow S}) = st_x(U_{15\downarrow S}) = \{\{a_1, a_3\}\}.$$

Weiter gilt

$$co_x(U_{15}) = pr_x(U_{15}) = gr_x(U_{15}) = st_x(U_{15}) = \{\{a_1, a_2\}\}.$$

Dann gilt allerdings auch

$$
\begin{aligned}
(S' \cap S \mid S' \in co_x(U_{15})) &= \{\{a_1\}\}, \\
(S' \cap S \mid S' \in pr_x(U_{15})) &= \{\{a_1\}\}, \\
(S' \cap S \mid S' \in gr_x(U_{15})) &= \{\{a_1\}\}, \\
(S' \cap S \mid S' \in st_x(U_{15})) &= \{\{a_1\}\}.
\end{aligned}
$$

Dies widerspricht ebenfalls der Definition der Direktionalität.

Damit erfüllen die Semantiken ad_x, co_x, gr_x, pr_x und st_x Direktionalität im Allgemeinen nicht. Dies ist allerdings eine zentrale Eigenschaft, die es ermöglicht, lokale Entscheidungen zu treffen, ohne den gesamten Argumentationsgraphen zu betrachten. Zudem ist bekannt, dass die Semantiken cf, ad, co, pr und gr für AFs die Eigenschaft der Direktionalität erfüllen (vgl. [BG07]), weshalb dies auch für iSetAFs eine wünschenswerte Eigenschaft ist.

Damit die Direktionalität auch für Semantiken für iSetAFs erfüllt werden kann, soll zunächst der Begriff der unattackierten Menge eingeschränkt und neu definiert werden. Solange eine bislang unattackierte Menge in einem Teilgraphen durch Hinzunahme von weiteren Argumenten von einem möglichen Mengenangriff bedroht sein kann, kann die Direktionalität nicht erfüllt sein. Aus diesem Grund wird nachfolgend eine *unberührte* Menge für die Direktionalität definiert (in Anlehnung an Dvořák et al. [DKUW24]).

Definition 5.9 (x-unberührt)**.** Sei $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ ein iSetAF und $S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ eine Menge von Argumenten.

- Eine Menge S heißt w-unberührt gdw. es kein $b \in \{\mathcal{A} \setminus S\}$ und keine Menge $B \subseteq \mathcal{A}$ mit $b \in B$ gibt, sodass $(B, a) \in \mathcal{R}$ für mindestens ein $a \in S$ gilt.
- Eine Menge S heißt s-unberührt gdw. es kein $b \in \{(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?) \setminus S\}$ und keine Menge $B \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ mit $b \in B$ gibt, sodass $(B, a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^?$ für mindestens ein $a \in S$ gilt.

Eine Menge ist somit schwach unberührt, wenn diese nicht von außen von einem sicheren Mengenangriff attackiert wird. Außerdem müssen alle Argumente eines Mengenangriffs, der ein Argument innerhalb der schwach unberührten Menge attackiert, auch innerhalb dieser schwach unberührten Menge liegen. Ansonsten würde ein Mengenangriff entstehen, der erst durch die Hinzunahme von Argumenten von außerhalb der Menge gültig wird. Genau dies soll vermieden werden. Analog lässt sich auch eine stark unberührte Menge erklären.

Beispiel 5.6. Sei U_{16} das in Abbildung 26 abgebildete iSetAF. Dann sind beispielsweise die Mengen $\{a_1\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_2, a_4\}, \{a_1, a_2, a_3\}, \{a_2, a_3, a_6\}$ schwach unberührt. Die Mengen $\{a_2, a_6\}, \{a_3, a_6\}, \{a_4, a_5\}$ hingegen sind nicht schwach unberührt.

Weiter sind beispielsweise die Mengen $\{a_1, a_2, a_4\}, \{a_2, a_3, a_6\}, \{a_2, a_3, a_5, a_6\}$ stark unberührt, während die Mengen $\{a_1\}, \{a_1, a_2\}, \{a_3, a_6\}, \{a_2, a_5\}$ hingegen nicht stark unberührt sind.

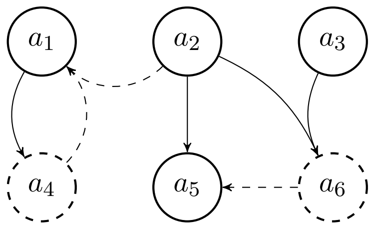

Abbildung 26: iSetAF U_{16} zu Beispiel 5.6. Eigene Darstellung.

Mit Hilfe der x-unberührten Menge, lässt sich die Direktionalität neu definieren. Diese Neudefinition soll *Mengendirektionalität* genannt werden.

Definition 5.10 (Mengendirektionalität)**.** Sei $S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ eine in einem iSetAF U x-unberührte Menge. Sei zudem $S' \in \sigma_x(U)$ eine σ_x-Extension in U. Eine Semantik σ_x erfüllt Mengendirektionalität gdw.

$$\sigma_x(U_{\downarrow S}) = \{S' \cap S \mid S' \in \sigma_x(U)\}$$

für jedes iSetAF gilt.

Die Mengendirektionalität ist für die meisten Semantiken für iSetAFs erfüllt, wie das nachfolgende Theorem zeigt.

Theorem 5.6. Die Semantiken cf_x, ad_x, co_x, pr_x und gr_x erfüllen Mengendirektionalität.

Beweis. Sei $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ ein iSetAF und $S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ eine in U x-unberührte Menge. Zu zeigen sind dabei immer beide Seiten der Gleichung $\sigma_x(U_{\downarrow S}) = \{S' \cap S \mid S' \in \sigma_x(U)\}$.

1. cf_x:
   a) Sei $S' \in cf_x(U)$. Da S x-unberührt in U ist, werden in $U_{\downarrow S}$ keine nicht erlaubten Angriffe hinzugefügt. Daraus folgt direkt, dass $S \cap S'$ in $U_{\downarrow S}$ ebenfalls x-konfliktfrei ist.
   b) Sei $S' \in cf_x(U_{\downarrow S})$. Da S x-unberührt in U ist, existieren in U keine zusätzlichen nicht erlaubten Angriffe auf Argumente in S. Weiter ist S' in $U_{\downarrow S}$ x-konfliktfrei, weshalb $S' \subseteq S$ gelten muss und es folgt direkt, dass die Menge $S \cap S' = S'$ auch in U x-konfliktfrei ist. Somit gilt $S' \in cf_x(U)$.

2. ad_x:
   a) Sei $S' \in ad_x(U)$. Dann folgt direkt, dass $S' \in cf_x(U)$ und damit auch $S \cap S' \in cf_x(U_{\downarrow S})$ (vgl. Punkt 1a). Es bleibt zu zeigen, dass $S \cap S'$ alle seine Argumente in $U_{\downarrow S}$ verteidigt. Da die Menge S x-unberührt ist, gilt für alle Angreifer (B, a) mit $a \in S \cap S'$ somit $B \subseteq S$. Da $S' \in ad_x(U)$ gilt, existiert eine Menge $C \subseteq S'$, sodass (C, b) mit $b \in B$ gilt. Da C ein Argument in S angreift und S x-unberührt ist, muss zudem $C \subseteq S$ gelten. Es folgt $C \subseteq S \cap S'$ und damit verteidigt sich $S \cap S'$ gegen alle Angreifer.

b) Sei $S' \in ad_x(U_{\downarrow S})$. Dann folgt direkt, dass $S' \in cf_x(U_{\downarrow S})$ und demnach auch $S' \in cf_x(U)$ (vgl. Punkt 1b). Es bleibt zu zeigen, dass S' in U alle seine Argumente verteidigt. Da S' x-zulässig in $U_{\downarrow S}$ ist, verteidigt sich S' gegen alle Angreifer (B, a) mit $B \subseteq S$ und $a \in S'$. Da S x-unberührt in U ist, kann es in U keine weiteren Angriffe auf S' geben, die verteidigt werden müssten.

3. co_x:

   a) Sei $S' \in co_x(U)$. Dann folgt direkt, dass $S' \in ad_x(U)$ und damit auch $S \cap S' \in ad_x(U_{\downarrow S})$ (vgl. Punkt 2a). Es bleibt zu zeigen, dass $S \cap S'$ keine weiteren Argumente in $U_{\downarrow S}$ verteidigt. Angenommen, es gibt ein Argument $a \in S$ mit $a \notin S'$, das von $S \cap S'$ verteidigt wird. Da $S \cap S' \subseteq S'$ und $S' \in co_x(U)$ gilt, müsste aber auch $a \in S'$ gelten, was zum Widerspruch führt. Somit enthält $S \cap S'$ bereits alle Argumente, die es verteidigt und es folgt $S \cap S' \in co_x(U_{\downarrow S})$.

   b) Sei $S' \in co_x(U_{\downarrow S})$. Da S' x-vollständig in $U_{\downarrow S}$ ist, gibt es kein weiteres Argument $a \in S$, das von S' verteidigt wird. Zudem folgt aus Punkt 2b, dass $S' \in ad_x(U_{\downarrow S})$ und demnach auch $S' \in ad_x(U)$. Da S' x-zulässig in U ist, muss es auch eine Obermenge $S'' \supseteq S'$ geben, sodass $S'' \in co_x(U)$. Trivialerweise gilt zudem $S' \subseteq S$ und damit folgt $S \cap S'' = S'$, womit die Definition der Mengendirektionalität erfüllt ist.

4. pr_x:

   a) Sei $S' \in pr_x(U)$. Dann folgt direkt, dass $S' \in co_x(U)$ und damit auch $S \cap S' \in co_x(U_{\downarrow S})$ (vgl. Punkt 3a). Es bleibt zu zeigen, dass $S \cap S'$ maximal x-vollständig in $U_{\downarrow S}$ ist. Angenommen, es gibt ein Argument $a \in (S \setminus (S \cap S'))$, sodass $\{a \cup (S \cap S')\}$ x-vollständig in $U_{\downarrow S}$ ist. Das heißt, das Argument a wird entweder von $S \cap S'$ verteidigt oder es verteidigt sich selbst gegen Angriffe. In beiden Fällen müsste dann aber auch $a \in S'$ gelten, da S' maximal x-vollständig in U ist. Dies widerspricht der Annahme, dass $a \notin S'$ gilt. Somit ist $S \cap S'$ maximal x-vollständig und es folgt $S \cap S' \in pr_x(U_{\downarrow S})$.

   b) Sei $S' \in pr_x(U_{\downarrow S})$. Da S' maximal x-vollständig in $U_{\downarrow S}$ ist, gibt es kein weiteres Argument $a \in S$, sodass $\{a \cup S'\}$ x-vollständig in $U_{\downarrow S}$ ist. Zudem folgt aus Punkt 2b, dass $S' \in ad_x(U_{\downarrow S})$ und demnach auch $S' \in ad_x(U)$. Da S' x-zulässig in U ist, muss es auch eine Obermenge $S'' \supseteq S'$ geben, sodass $S'' \in pr_x(U)$. Trivialerweise gilt zudem $S' \subseteq S$ und damit folgt $S \cap S'' = S'$, womit die Definition der Mengendirektionalität erfüllt ist.

5. gr_x:

   a) Sei $S' \in gr_x(U)$. Dann folgt direkt, dass $S' \in co_x(U)$ und damit auch $S \cap S' \in co_x(U_{\downarrow S})$ (vgl. Punkt 3a). Es bleibt zu zeigen, dass $S \cap S'$ minimal x-vollständig in $U_{\downarrow S}$ ist. Angenommen, es gibt ein Argument $a \in S \cap S'$, sodass $(S \cap S') \setminus a$ in $U_{\downarrow S}$ x-vollständig ist. Da S' minimal x-vollständig ist und wegen $a \in S'$ auch das Argument a verteidigt, führt dies zum Widerspruch. Somit ist $S \cap S'$ minimal x-vollständig in $U_{\downarrow S}$, und es folgt $S \cap S' \in gr_x(U_{\downarrow S})$.

b) Sei $S' \in gr_x(U_{\downarrow S})$. Da S' minimal x-vollständig in $U_{\downarrow S}$ ist, gibt es kein Argument $a \in S'$ sodass $S' \setminus a$ ebenfalls x-vollständig in $U_{\downarrow S}$ ist. Da S x-unberührt ist, gilt für die eindeutig bestimmte x-grundierte Extension S'' von U genau $S' \subseteq S''$. Trivialerweise gilt zudem $S' \subseteq S$ und damit folgt $S \cap S'' = S'$, womit die Definition der Mengendirektionalität erfüllt ist.

□

Die stabile Semantik st_x für iSetAFs erfüllt Mengendirektionalität auch unter Berücksichtigung der neu definierten x-unberührten Menge im Allgemeinen hingegen nicht, wie das nachfolgende Gegenbeispiel zeigt.

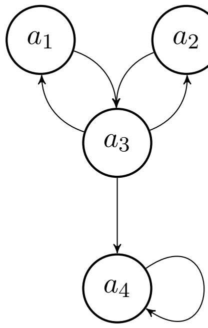

Abbildung 27: iSetAF U_{17} zu Beispiel 5.7. Eigene Darstellung.

Beispiel 5.7. Sei U_{17} das in Abbildung 27 dargestellte iSetAF und $S = \{a_1, a_2, a_3\}$ eine x-unberührte Menge. Für die stabile Semantik für iSetAFs $st_x(U_{17})$ gilt dann:

$$st_x(U_{17}) = \{\{a_3\}\} \text{ und}$$
$$st_x(U_{17\downarrow S}) = \{\{a_1, a_2\}, \{a_3\}\}.$$

Allerdings gilt auch

$$\{S \cap S' \mid S' \in st_x(U_{17})\} = \{\{a_3\}\} \neq st_x(U_{17\downarrow S}).$$

Dies zeigt, dass st_x das Postulat der Mengendirektionalität im Allgemeinen nicht erfüllt.

5.7 Dichtheit

Die nächste zu überprüfende Eigenschaft ist die Dichtheit. Die Definition der Dichtheit aus Definition 2.21 soll zunächst auch für iSetAFs erweitert werden.

Definition 5.11 (Dichtheit für iSetAFs)**.** Eine Menge von Extensionen $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $S_1, \ldots, S_n \in \sigma_x(U)$ heißt dicht gdw. gilt: Sei $S \in \mathcal{S}$ und $S \cup \{a\} \notin \mathcal{S}$ mit

$a \in (\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?) \setminus S$, dann folgt, dass es ein $b \in S$ gibt, das nicht gemeinsam mit a in einer beliebigen Extension aus $\mathcal{S}$ vorkommen kann.

Eine Semantik σ_x erfüllt Dichtheit gdw. die Menge $\sigma_x(U)$ für jedes iSetAF dicht ist.

Entsprechend dieser herkömmlichen, aber für iSetAFs erweiterten Definition der Dichtheit lässt sich zeigen, dass diese Eigenschaft lediglich von der x-grundierten Semantik erfüllt wird.

Theorem 5.7. Die Semantik gr_x für iSetAFs erfüllt Dichtheit.

Beweis. Sei $S \in gr_x(U)$ und $a \in (\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?) \setminus S$, sodass $\{S \cup a\} \notin gr_x(U)$. Da die x-grundierte Semantik eindeutig bestimmt ist, kann es trivialerweise keine Menge $S' \in gr_x(U)$ mit $S' \neq S$ geben, was die Dichtheit beweist. $\square$

Die restlichen Semantiken für iSetAFs erfüllen Dichtheit in der Regel nicht, wie das nachfolgende Gegenbeispiel zeigt.

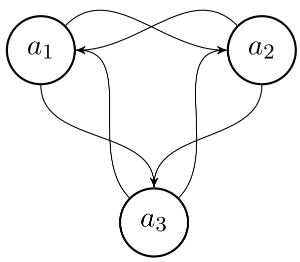

Abbildung 28: iSetAF U_{18} zu Beispiel 5.4. Abbildung in Anlehnung an Dvořák, Fandinno und Woltran [DFW19].

Beispiel 5.8. Sei $\sigma_{18} = \{cf_x, ad_x, co_x, pr_x, st_x\}$. Für das in Abbildung 28 dargestellte iSetAF U_{18} ist die Menge $\{a_1, a_2\} \in \sigma_{18}(U_{18})$ und die Menge $\{a_1, a_2, a_3\} \notin \sigma_{18}(U_{18})$. Würde eine Semantik aus σ_{18} nun Dichtheit erfüllen, müsste entweder $\{a_1, a_3\} \notin \sigma_{18}(U_{18})$ oder $\{a_1, a_2\} \notin \sigma_{18}(U_{18})$ gelten. Es gilt allerdings $\{a_1, a_3\}, \{a_1, a_2\} \in \sigma_{18}(U_{18})$.

Damit die Dichtheit zumindest für einige Semantiken erfüllt wird, lässt sich die Definition der Dichtheit auf iSetAFs übertragen, indem auch Mengenangriffe sinngemäß berücksichtigt werden. Dafür müssen statt einzelner Argumente auch Argumentmengen, die gemeinsam einen Mengenangriff bilden, berücksichtigt werden. Eine solche Argumentmenge soll als *zusammengehörige Menge* wie folgt definiert werden:

Definition 5.12 (Zusammengehörige Menge)**.** Sei $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ ein iSetAF. Eine Menge $B \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ wird als *zusammengehörige Menge* bezeichnet,

- falls $|B| = 1$ oder
- falls $|B| > 1$, dann muss B einen zusammengehörigen Mengenangriff darstellen. Das heißt, es existiert ein Angriff $(B, c) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^?$ für ein beliebiges Argument $c \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$, sodass B und c in einer Angriffsbeziehung stehen.

Zudem wird für die Definition der Dichtheit, bei der auch Mengenangriffe berücksichtigt werden können, die Menge $Pairs(\mathcal{S})$ benötigt, die wie folgt definiert wird.

Definition 5.13 ($Pairs(\mathcal{S})$)**.** Sei $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S}$ eine Menge von Extensionen. Zudem seien $B, B' \subseteq S$ zwei zusammengehörige Mengen einer Extension mit $S \in \mathcal{S}$. Definiere

$$Pairs(\mathcal{S}) = \{(B, B') \mid \{B \cup B'\} \subseteq S, S \in \mathcal{S}\}.$$

$Pairs(\sigma_x)$ bezeichnet somit genau die Menge zweier zusammengehöriger Mengen, die gemeinsam in einer beliebigen Extension in σ_x vorkommen. Zwei zusammengehörige Mengen sind nicht Teil von $Pairs(\sigma_x)$, wenn ein Konflikt zwischen beiden Mengen besteht. Ein solcher Konflikt kann beispielsweise ein Angriff einer Menge auf ein Argument der anderen Menge sein.

Unter Berücksichtigung von zusammengehörigen Mengen lässt sich nun auch der Begriff der Mengendichtheit analog der Dichtheit formulieren.

Definition 5.14 (Mengendichtheit)**.** Eine Menge von Extensionen $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $S_1, \dots, S_n \in \sigma_x(U)$ heißt mengendicht gdw. gilt: Sei $S \in \mathcal{S}$ und $S \cup \{a\} \notin \mathcal{S}$ mit $a \in (\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?) \setminus S$, dann folgt, dass es eine zusammengehörige Menge $B \subseteq S$ gibt, sodass $(B, \{a\}) \notin Pairs(\mathcal{S})$.

Eine Semantik σ_x erfüllt Mengendichtheit gdw. die Menge $\sigma_x(U)$ für jedes iSetAF mengendicht ist.

Mit Hilfe dieser neuen Definition lässt sich nun zeigen, dass sich iSetAFs bzgl. der Mengendichtheit genauso verhalten wie AFs bzgl. der Dichtheit.

Theorem 5.8. Die Semantiken cf_x, gr_x und st_x für iSetAFs erfüllen Mengendichtheit.

Beweis. Sei $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ ein iSetAF.

- cf_x: Sei $S \in cf_x(U)$ und $a \in (\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?) \setminus S$, sodass $\{S \cup a\} \notin cf_x(U)$. Daraus folgt direkt, dass es eine Menge $B \subseteq S$ geben muss, sodass für $x = w$ ein sicherer Mengenangriff $(B, a) \in \mathcal{R}$ oder $(\{a\}, b) \in \mathcal{R}$ mit $b \in B$ erfolgt und für $x = s$ ein beliebiger Angriff $(B, a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^?$ oder $(\{a\}, b) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^?$ mit $b \in B$ erfolgt. Damit gilt aber auch $(B \cup \{a\}) \notin Pairs(cf_x(U))$, was die Mengendichtheit beweist.

- gr_x: Sei $S \in gr_x(U)$ und $a \in (\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?) \setminus S$, sodass $\{S \cup a\} \notin gr_x(U)$. Da die x-grundierte Semantik eindeutig bestimmt ist, kann es trivialerweise keine Menge $S' \in gr_x(U)$ mit $S' \neq S$ geben, was die Mengendichtheit beweist.

- st_x: Sei $S \in st_x(U)$ und $a \in (\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?) \setminus S$, sodass $\{S \cup a\} \notin st_x(U)$.
  - Fall 1 mit $x = w$ und $a \in \mathcal{A}$: Da $S \in st_w(U)$, wird jedes $b \in \mathcal{A} \setminus S$ von einer Menge $C \subseteq S$ angegriffen. Angenommen, es gilt $(C, \{a\}) \in Pairs(st_w(U))$ und es gibt eine beliebige Extension $\{C \cup ... \cup a\} \in st_w(U)$. Dann greift auch in diesem Fall die Menge C das Argument a an, weshalb diese Extension weder w-konfliktfrei noch w-stabil sein kann. Dies führt zum Widerspruch und die Mengendichtheit ist erfüllt.

- Fall 2 mit $x = w$ und $a \in \mathcal{A}^?$: Per Definition muss ein unsicheres Argument außerhalb von S nicht zwingend angegriffen werden. Wenn aber $\{S \cup a\} \notin st_w(U)$ gilt, dann muss es einen Mengenangriff $(C, a) \in \mathcal{R}$ geben mit $C \subseteq S$. Würde es einen solchen Angriff nicht geben, müsste folglich $\{S \cup a\} \in st_w(U)$ gelten. Der Beweis lässt sich analog Fall 1 fortsetzen.
- Fall 3 mit $x = s$: Da $S \in st_s(U)$ gilt, wird jedes $b \in (\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?) \setminus S$ von einer Menge $C \subseteq S$ angegriffen. Der Beweis lässt sich analog Fall 1 fortsetzen.
- Fall 4 mit $(\{a\}, a) \in \mathcal{R}$: Für den Fall, dass a sich selbst attackiert, folgt direkt, dass es keine Extension in $st_x(U)$ geben kann, die a enthält.

Damit erfüllt st_x folglich Mengendichtheit.

□

Die weiteren Semantiken ad_x, co_x und pr_x erfüllen die Eigenschaft der Mengendichtheit im Allgemeinen nicht. Nachfolgend soll ein Gegenbeispiel der Mengendichtheit für pr_x aufgezeigt werden. Da jede x-präferierte Extension auch eine x-vollständige und eine x-zulässige Extension ist, ist die Mengendichtheit auch für diese Semantiken im Allgemeinen nicht erfüllt.

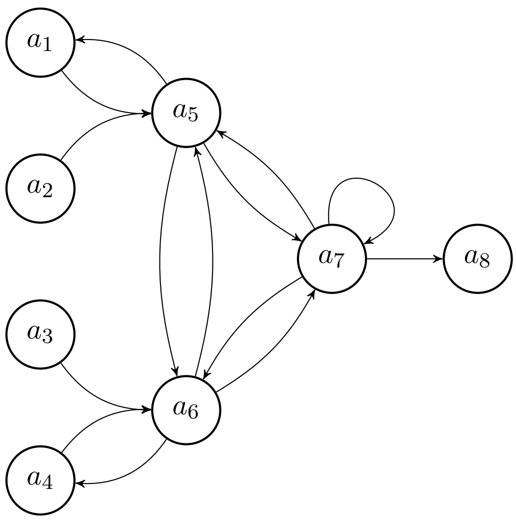

Abbildung 29: iSetAF U_{19} zu Beispiel 5.9. Eigene Darstellung.

Beispiel 5.9. Für das iSetAF U_{19} aus Abbildung 29 gilt:

- Die Menge $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ist x-präferiert in U_{19}. Kein weiteres Argument wird x-verteidigt und es gibt keine echte Obermenge in U_{19}, die größer ist.
- Die Menge $\{a_1, a_2, a_3, a_4\} \cup \{a_8\}$ ist hingegen nicht x-präferiert, da der Angriff $(\{a_7\}, a_8)$ nicht verteidigt wird.

- Allerdings gilt: $\{a_1, a_2, a_6, a_8\} \in pr_x(U_{19})$ und auch $\{a_3, a_4, a_5, a_8\} \in pr_x(U_{19})$. Somit steht weder die Menge $\{a_1, a_2\}$ noch die Menge $\{a_3, a_4\}$ mit a_8 in Konflikt. Dies widerspricht der Definition der Mengendichtheit.

5.8 Konfliktsensitivität

Das nächste zu prüfende Postulat ist die Konfliktsensitivität, die zunächst auf iSetAFs übertragen wird.

Definition 5.15 (Konfliktsensitivität für iSetAFs)**.** Eine Menge von Extensionen $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $S_1, \ldots, S_n \in \sigma_x(U)$ heißt konfliktsensitiv gdw. für alle Paare $S_i, S_j \in \mathcal{S}$ mit $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt: Wenn $S_i \cup S_j \notin \mathcal{S}$, dann folgt, dass es ein $a \in S_i$ und ein $b \in S_j$ gibt, sodass $(\{a\}, \{b\}) \notin Pairs(\sigma_x(U))$.

Eine Semantik σ_x erfüllt Konfliktsensitivität gdw. die Menge $\sigma_x(U)$ für jedes iSetAF konfliktsensitiv ist.

Proposition 5.4. Die Semantik gr_x für iSetAFs erfüllt Konfliktsensitivität.

Beweis. Da es keine zwei unterschiedliche x-grundierte Extensionen $S, S' \in gr_x(U)$ in U mit $S \neq S'$ geben kann, wird die Konfliktsensitivität trivialerweise erfüllt. □

Ähnlich wie bei der bereits gezeigten Dichtheit kann auch diese herkömmliche Definition für die meisten Semantiken nicht verwendet werden, da Mengenangriffe nicht korrekt berücksichtigt werden, wie das nachfolgende Beispiel zeigt.

Beispiel 5.10. Sei $\sigma_{20} = \{cf_x, ad_x, co_x, pr_x, st_x\}$. Für das in Abbildung 28 dargestellte iSetAF U_{20} gilt $\{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \{a_1, a_3\} \in \sigma_{20}(U_{20})$. Die Vereinigung zweier dieser Extensionen ist hingegen selbst keine Extension. Es gilt $\{a_1, a_2, a_3\} \notin \sigma_{20}(U_{20})$. Würde eine Semantik aus σ_{20} nun Konfliktsensitivität erfüllen, müsste entweder $(\{a_1\}, \{a_3\}) \notin Pairs(\sigma_{20}(U_{20}))$, $(\{a_1\}, \{a_2\}) \notin Pairs(\sigma_{20}(U_{20}))$ oder $(\{a_2\}, \{a_3\}) \notin Pairs(\sigma_{20}(U_{20}))$ gelten. Dies ist jedoch nicht erfüllt.

Mit dem Gegenbeispiel wurde gezeigt, dass die Semantiken cf_x, ad_x, co_x, pr_x und st_x die Konfliktsensitivität im Allgemeinen nicht erfüllen. Lediglich die Semantik gr_x erfüllt diese Eigenschaft trivialerweise.

Ähnlich wie bei der Dichtheit soll an dieser Stelle eine für iSetAFs angepasste Konfliktsensitivität definiert werden, die auch Mengenangriffe sinngemäß berücksichtigen kann. Dies ist die *Mengenkonfliktsensitivität*. Zur Vorbereitung auf die Definition und die nachfolgenden Beweise soll zunächst gezeigt werden, dass sich die Vereinigung zweier x-zulässiger Mengen selbst gegen alle Angreifer x-verteidigt. Das nachfolgende Lemma wird in Anlehnung an Dunne et al. [DDLW15] formuliert, wobei zusätzlich Mengenangriffe berücksichtigt werden können und somit eine Anwendung für iSetAFs möglich ist.

Lemma 5.1. Sei $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ ein iSetAF und $S_1, S_2 \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ mit $S_1, S_2 \in ad_x(U)$ zwei in U x-zulässige Mengen, die sich jeweils selbst in U x-verteidigen. Dann folgt für die Vereinigung $S_1 \cup S_2$, dass sich diese in U selbst x-verteidigt.

Beweis. Die Mengen S_1 und S_2 x-verteidigen sich jeweils selbst gegen alle möglichen Mengenangriffe in U. Angenommen, die Menge $S_3 = S_1 \cup S_2$ x-verteidigt sich nicht selbst gegen alle Mengenangriffe auf S_3. Dann gibt es für $x = w$ einen Mengenangriff $(B, a) \in \mathcal{R}$ bzw. für $x = s$ einen Mengenangriff $(B, a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^?$ mit $a \in S_3$ und $B \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$, der nicht von S_3 verteidigt wird. Sei die Einschränkung $a \in S_1$ gegeben. Da sich S_3 nicht gegen den Angriff (B, a) x-verteidigen kann, kann sich auch S_1 nicht gegen diesen Angriff x-verteidigen, was im Widerspruch zur Annahme der x-Zulässigkeit von S_1 steht. Gleiches lässt sich auch für ein $a \in S_2$ zeigen. Somit folgt direkt, dass die Annahme widerlegt ist und sich S_3 selbst gegen alle Mengenangriffe auf S_3 verteidigt. □

Mit Hilfe von Lemma 5.1 lässt sich nun auch das nachfolgende Lemma schließen.

Lemma 5.2. Für die Vereinigung $S_1 \cup S_2$ zweier x-zulässiger Mengen $S_1, S_2 \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ gilt: Ist $S_1 \cup S_2$ x-konfliktfrei in U, dann ist $S_1 \cup S_2$ auch x-zulässig in U.

Beweis. Gemäß Lemma 5.1 verteidigt sich die Vereinigung $S_1 \cup S_2$ selbst gegen alle Mengenangriffe. Da bereits angenommen wurde, dass $S_1 \cup S_2$ x-konfliktfrei ist, folgt, dass $S_1 \cup S_2 \in ad_x(U)$. □

An dieser Stelle lässt sich nun auch der bereits erwähnte Begriff der Mengenkonfliktsensitivität definieren.

Definition 5.16 (Mengenkonfliktsensitivität)**.** Eine Menge von Extensionen $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$ heißt mengenkonfliktsensitiv gdw. für alle Paare $S_i, S_j \in \mathcal{S}$ mit $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt: Wenn $S_i \cup S_j \notin \mathcal{S}$, dann folgt, dass es zwei zusammengehörige Mengen $B \subseteq S_i$ und $B' \in S_j$ gibt, sodass $(B, B') \notin Pairs(\mathcal{S})$.

Eine Semantik σ_x erfüllt Mengenkonfliktsensitivität gdw. die Menge $\sigma_x(U)$ für jedes iSetAF mengenkonfliktsensitiv ist.

Diese angepasste Definition der herkömmlichen Konfliktsensitivität wird nun von den meisten Semantiken erfüllt, wie nachfolgend gezeigt wird.

Theorem 5.9. Die Semantiken cf_x, ad_x, pr_x, gr_x und st_x erfüllen Mengenkonfliktsensitivität.

Beweis. Sei $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ ein iSetAF.

- cf_x: Seien $S_1, S_2 \in cf_x(U)$ und $S_1 \cup S_2 \notin cf_x(U)$. Angenommen, cf_x ist nicht mengenkonfliktsensitiv, dann gilt für alle $A, B \subseteq S_1 \cup S_2$, dass $(A, B) \in Pairs(cf_x(U))$. Daraus folgt aber, dass jede Menge $A \cup B$ x-konfliktfrei ist und damit gilt $S_1 \cup S_2 \in cf_x(U)$. Dies führt zum Widerspruch. Somit ist cf_x mengenkonfliktsensitiv.

- ad_x: Seien $S_1, S_2 \in ad_x(U)$ und $S_1 \cup S_2 \notin ad_x(U)$. Angenommen, ad_x ist nicht mengenkonfliktsensitiv, dann gilt für alle $A, B \subseteq S_1 \cup S_2$, dass $(A, B) \in Pairs(ad_x(U))$. Daraus folgt aber, dass jede Menge $A \cup B$ x-konfliktfrei ist und damit gilt $S_1 \cup S_2 \in cf_x(U)$. Da aber nun S_1 und S_2 jeweils x-zulässig sind und $S_1 \cup S_2$ x-konfliktfrei ist, folgt nach Lemma 5.2, dass $S_1 \cup S_2$ auch x-zulässig ist. Dies führt zum Widerspruch. Somit ist ad_x mengenkonfliktsensitiv.

- pr_x: Seien $S_1, S_2 \in pr_x(U)$ und $S_1 \cup S_2 \notin pr_x(U)$. Angenommen, pr_x ist nicht mengenkonfliktsensitiv, dann gilt für alle $A, B \subseteq S_1 \cup S_2$, dass $(A, B) \in Pairs(pr_x(U))$. Daraus folgt, dass jede Menge $A \cup B$ x-konfliktfrei ist und damit gilt $S_1 \cup S_2 \in cf_x(U)$. Gemäß dem letzten Beweis für ad_x folgt direkt, dass $S_1 \cup S_2 \in ad_x(U)$. Wegen $S_1 \cup S_2 \notin pr_x(U)$ und $S_1 \cup S_2 \in ad_x(U)$ muss es eine echte Obermenge $S_3 \supset S_1 \cup S_2$ geben, die x-präferiert ist. Da aber auch $S_3 \supset S_1$ und $S_3 \supset S_2$ gilt, können S_1 und S_2 nicht x-präferiert sein, was direkt zum Widerspruch führt. Somit ist pr_x mengenkonfliktsensitiv.

- gr_x: Da die x-grundierte Semantik eindeutig bestimmt ist, kann es trivialerweise keine zwei Mengen $S_1, S_2 \in gr_x(U)$ mit $S_1 \neq S_2$ geben, weshalb die Mengenkonfliktsensitivität erfüllt ist.

- st_x: Seien $S_1, S_2 \in st_x(U)$ und $S_1 \cup S_2 \notin st_x(U)$. Angenommen, st_x ist nicht mengenkonfliktsensitiv, dann gilt für alle $A, B \subseteq S_1 \cup S_2$, dass $(A, B) \in Pairs(st_x(U))$. Daraus folgt, dass jede Menge $A \cup B$ x-konfliktfrei ist und damit gilt $S_1 \cup S_2 \in cf_x(U)$. Gemäß dem Beweis für ad_x folgt direkt, dass $S_1 \cup S_2 \in ad_x(U)$. Da mit S_1 eine x-stabile Extension existiert, kann ausgeschlossen werden, dass das iSetAF keine x-stabile Extension besitzt. Wegen $S_1 \cup S_2 \notin st_x(U)$ muss es für $x = w$ ein Argument $c \in \mathcal{A}$ bzw. für $x = s$ ein Argument $c \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ geben, das weder in $S_1 \cup S_2$ enthalten ist, noch von $S_1 \cup S_2$ attackiert wird. Dann gilt aber auch $c \notin S_1$, $c \notin S_2$, $c \notin S_1^+$ und $c \notin S_2^+$, woraus sich auch $S_1, S_2 \notin st_x(U)$ ergibt. Dies führt zum Widerspruch und damit ist st_x mengenkonfliktsensitiv.

$\square$

Die Semantik co_x erfüllt Mengenkonfliktsensitivität im Allgemeinen nicht, wie das nachfolgende Beispiel zeigt.

Beispiel 5.11. Für das iSetAF U_{21} aus Abbildung 30 gilt:

- $\{a_1, a_2\}, \{a_3\} \in co_x(U_{21})$ und
- $\{a_1, a_2, a_3\} \notin co_x(U_{21})$.
- Allerdings gilt auch $\{a_1, a_2, a_3, a_6\} \in co_x(U_{21})$.

Das heißt, $(\{a_1\}, \{a_3\}), (\{a_2\}, \{a_3\}), (\{a_1, a_2\}, \{a_3\}) \in Pairs(co_x(U_{21}))$ und es gibt keine zwei Teilmengen von $\{a_1, a_2, a_3\}$ die in einem Konflikt zueinander stehen.

5.9 Modularisierung

Um die Modularisierung untersuchen zu können, muss zunächst der Begriff des Redukts für iSetAFs definiert werden. Eine ähnliche Definition für SetAFs wurde bereits von Dvořák et al. veröffentlicht [DKUW24]. Diese soll entsprechend erweitert werden, sodass zusätzlich auch unvollständiges Wissen berücksichtigt werden kann. Dabei wird zudem eine schwache und eine starke Ausprägung berücksichtigt.

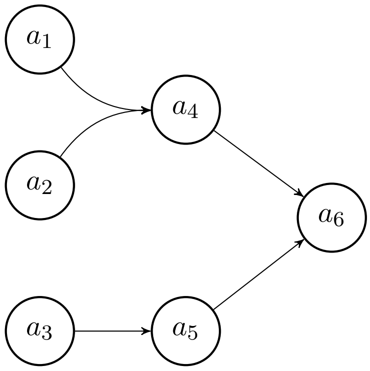

Abbildung 30: iSetAF U_{21} zu Beispiel 5.11. Eigene Darstellung.

Definition 5.17 (x-Redukt eines iSetAFs)**.** Das schwache bzw. starke Redukt $U^{S,x}$ eines iSetAFs U bzgl. einer Menge $S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ ist wie folgt definiert: $U^{S,x} = (\mathcal{A}', \mathcal{A}'^?, \mathcal{R}', \mathcal{R}'^?)$ mit

- $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus (S \cup S^{+,x})$,
- $\mathcal{A}'^? = \mathcal{A}^? \setminus (S \cup S^{+,x})$,
- $\mathcal{R}' = \{(\{B \setminus S\}, a) \mid (B, a) \in \mathcal{R}, B \subseteq \mathcal{A}' \cup \mathcal{A}'^?, a \in \mathcal{A}' \cup \mathcal{A}'^?$ und $B \cap S^{+,x} = \emptyset\}$ und
- $\mathcal{R}'^? = \{(\{B \setminus S\}, a) \mid (B, a) \in \mathcal{R}^?, B \subseteq \mathcal{A}' \cup \mathcal{A}'^?, a \in \mathcal{A}' \cup \mathcal{A}'^?$ und $B \cap S^{+,x} = \emptyset\}$.

Das heißt, es wird nur der Teilgraph von U betrachtet, aus dem alle Argumente aus S und alle Argumente, die von S x-attackiert werden, entfernt wurden. Der Grund für die Berücksichtigung von Angriffen der Art $(\{B \setminus S\}, a)$ ist, dass Mengenangriffe, die zum Teil aus Argumenten aus S bestehen, auch im Redukt weiterhin eine Bedrohung darstellen (vgl. Beispiel 5.12). Die Bedingung $B \cap S^{+,x} = \emptyset$ sorgt zudem dafür, dass genau die Mengenangriffe nicht mehr als Bedrohung im Redukt angesehen werden, deren Argumente zumindest teilweise bereits von S x-attackiert wurden (vgl. ebenfalls Beispiel 5.12). Das heißt, die Angriffsbeziehung verfällt im Redukt.

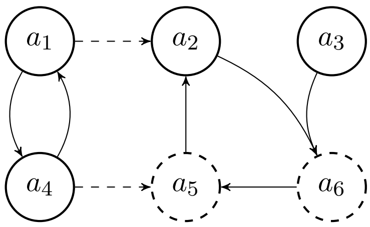

Abbildung 31: iSetAF U_{22} zu Beispiel 5.12. Eigene Darstellung.

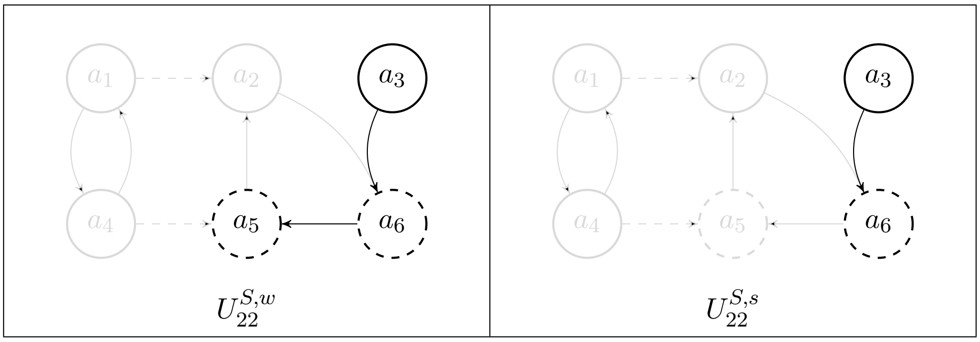

Abbildung 32: Redukte $U_{22}^{S,w}$ bzw. $U_{22}^{S,s}$ des iSetAFs U_{22} zu Beispiel 5.12 mit $S = \{a_2, a_4\}$. Eigene Darstellung.

Beispiel 5.12. Für das in Abbildung 31 dargestellte iSetAF U_{22} und eine Menge $S = \{a_2, a_4\}$ ist das Redukt $U_{22}^{S,w}$ bzw. $U_{22}^{S,s}$ in Abbildung 32 dargestellt. Für beide Redukte fällt auf, dass der Mengenangriff $(\{a_2, a_3\}, a_6)$ durch den Mengenangriff $(\{a_3\}, a_6)$ weiterhin im Redukt als Bedrohung angesehen wird. Da das Argument a_2 bereits in der Menge S enthalten und damit akzeptiert ist, kann der Mengenangriff durch die weitere Akzeptanz von a_3 eine Bedrohung für a_6 sein.

Für eine Menge $S' = \{a_1\}$ ist das Redukt $U_{22}^{S',w}$ bzw. $U_{22}^{S',s}$ in Abbildung 33 dargestellt. Für das starke Redukt fällt auf, dass der Mengenangriff $(\{a_2, a_3\}, a_6)$ durch den Angriff von S auf a_2 entfällt und keine Bedrohung mehr im Redukt darstellt. Beim schwachen Redukt hingegen wird a_2 von S nur unsicher angegriffen. Ein solcher Angriff wird nicht als Bedrohung angesehen, weshalb der Angriff $(\{a_2, a_3\}, a_6)$ weiterhin im Redukt bestehen bleibt.

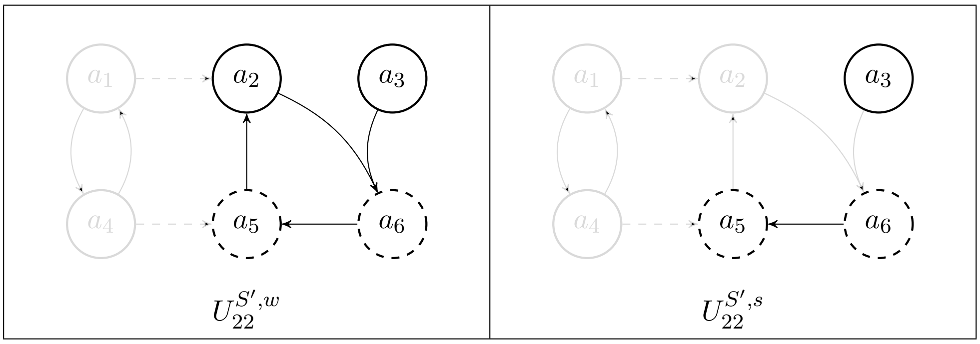

Abbildung 33: Redukte $U_{22}^{S',w}$ bzw. $U_{22}^{S',s}$ des iSetAFs U_{22} zu Beispiel 5.12 mit $S' = \{a_1\}$. Eigene Darstellung.

Für eine x-konfliktfreie Menge lassen sich nun die folgenden Eigenschaften in Bezug auf deren Redukt feststellen.

Lemma 5.3. Sei U ein iSetAF und $S \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ mit $S \in cf_x(U)$ eine x-konfliktfreie Menge in U. Wenn zudem $S' \in cf_x(U^{S,x})$ gilt und S' kein Argument aus S angreift, dann folgt, dass auch $S \cup S' \in cf_x(U)$ gilt.

Beweis. Die Menge S ist x-konfliktfrei in U und im x-Redukt $U^{S,x}$ werden alle Argumente entfernt, die von S angegriffen werden oder in S enthalten sind. Das heißt, jedes im x-Redukt verbliebene Argument wird nicht von S angegriffen. Die Menge S' ist im x-Redukt x-konfliktfrei und damit auch trivialerweise in U. Ein Angriff von S' auf ein Argument aus S ist per Voraussetzung ausgeschlossen. Da weder S die Menge S' angreift, noch S' die Menge S angreift, folgt, dass die Vereinigung beider x-konfliktfreien Mengen $S \cup S'$ ebenfalls x-konfliktfrei sein muss. □

Lemma 5.4. Sei U ein iSetAF und $S \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ mit $S \in co_w(U)$, dann folgt,

1. dass es im w-Redukt $U^{S,w}$ kein Argument geben kann, das nicht sicher angegriffen wird und
2. dass $gr_w(U^{S,w}) = \{\emptyset\}$.

Beweis.

1. Sei $U^{S,w} = (\mathcal{A}', \mathcal{A}'^?, \mathcal{R}', \mathcal{R}'^?)$ das w-Redukt von U bzgl. S. Angenommen, es gibt ein Argument $a \in \mathcal{A}' \cup \mathcal{A}'^?$, das im w-Redukt nicht angegriffen wird. Dann gibt es in U entweder gar keinen Mengenangriff auf a oder es gibt einen sicheren Mengenangriff $(B, a) \in \mathcal{R}$ mit $B \subseteq (\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?) \setminus S$. Wäre $B \subseteq S$, würde a von S angegriffen werden, weshalb a nicht im Redukt enthalten sein könnte. Da somit $B \nsubseteq S$ und $B \nsubseteq (\mathcal{A}' \cup \mathcal{A}'^?)$ gelten, folgt, dass B von S angegriffen wird. In beiden Fällen, wird a dann aber von S stark verteidigt und wegen $S \in co_w(U)$ gilt $a \in S$ und somit $a \notin U^{S,w}$. Dies führt zum Widerspruch.

   Für den Fall, dass es ein $a \in \mathcal{A}' \cup \mathcal{A}'^?$ gibt, das im w-Redukt unsicher angegriffen wird, muss a nicht verteidigt werden, weil unsichere Angriffe nicht als Bedrohung angesehen werden. Damit würde ebenfalls $a \in S$ und $a \notin U^{S,w}$ gelten, was zum Widerspruch führt.

2. Aus Lemma 5.4 Punkt 1 folgt bereits, dass es keine Argumente in $U^{S,w}$ geben kann, die nicht sicher angegriffen werden. Damit kann es im w-Redukt auch keine Argumente geben, die von der leeren Menge schwach verteidigt werden. Die einzige schwach grundierte Extension im w-Redukt ist damit die leere Menge.

□

Aus Lemma 5.4 lässt sich folgende Proposition folgern.

Proposition 5.5. Sei U ein iSetAF und $S \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$. Es gilt $S \in co_w(U)$ gdw. $S \in ad_w(U)$ und $gr_w(U^{S,w}) = \{\emptyset\}$.

Beweis. Für die erste Richtung gilt: Sei $S \in co_w(U)$, dann folgt per Definition direkt $S \in ad_w(U)$ und gemäß Lemma 5.4 Punkt 2 folgt zudem $gr_w(U^{S,w}) = \{\emptyset\}$.

Für die zweite Richtung gilt: Sei $S \in ad_w(U)$ und $gr_w(U^{S,w}) = \{\emptyset\}$, dann verteidigt S alle Angriffe auf S. Angenommen, es gilt $S \notin co_w(U)$, dann gibt es ein Argument $a \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$, das schwach von S verteidigt wird. Das heißt, das Argument a wird entweder nicht angegriffen, unsicher angegriffen oder sicher angegriffen. Wird a nicht oder nur unsicher in U angegriffen, wird dieses Argument in $U^{S,w}$ von der leeren Menge verteidigt und es folgt $a \in S'$ mit $S' \in gr_x(U^{S,w})$, was zum Widerspruch führt. Für den Fall, dass a sicher angegriffen und von S in U verteidigt wird, gibt es einen Mengenangriff $(B, a) \in \mathcal{R}$ mit $B \subseteq \mathcal{A}$ und einen verteidigenden Mengenangriff $(C, b) \in \mathcal{R}$ mit $C \subseteq S$ und $b \in B$. Da somit b von S angegriffen wird, kann b nicht im w-Redukt $U^{S,w}$ enthalten sein. Somit entfällt per Definition des w-Redukts aber auch der gesamte Angriff (B, a) in $U^{S,w}$. Es folgt, dass a in $U^{S,w}$ unangegriffen ist und damit $a \in S'$ mit $S' \in gr_x(U^{S,w})$ gelten muss, was ebenfalls zum Widerspruch führt. Damit muss $S \in co_w(U)$ gelten. □

Mit Hilfe des x-Redukts lässt sich nun auch die Modularisierung auf iSetAFs wie folgt übertragen.

Definition 5.18 (Modularisierung für iSetAFs)**.** Eine Semantik σ_x erfüllt Modularisierung gdw. für alle iSetAFs U gilt: Wenn $S \in \sigma_x(U)$ und $S' \in \sigma_x(U^{S,x})$, dann gilt $S \cup S' \in \sigma_x(U)$.

Das heißt, wenn es eine Extension in U und eine weitere Extension im Redukt von U bzgl. S gibt, so ist auch die Vereinigung dieser beiden Mengen eine Extension des originalen iSetAFs U.

Theorem 5.10. Die Semantiken für iSetAFs $ad_w, co_w, pr_w, gr_w, st_w$ und st_s erfüllen Modularisierung.

Beweis. Sei $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ ein iSetAF.

- ad_w: Sei $S \in ad_w(U)$ und $S' \in ad_w(U^{S,w})$. Da S schwach zulässig in U ist, werden alle Angriffe auf Argumente aus S auch von S schwach verteidigt. Da S keines der im w-Redukt verbliebenen Argumente S sicher angreift, kann S von diesen ebenfalls nicht sicher angegriffen werden, da sich S ansonsten gegen den Angriff verteidigen würde. Es folgt, dass es keinen Angriff von Argumenten aus S' auf Argumente aus S gibt. Gemäß Lemma 5.3 folgt direkt, dass $S \cup S' \in cf_w(U)$ gilt. Es bleibt zu zeigen, dass $S \cup S'$ sich selbst verteidigt.

  Angenommen, es gibt eine Menge $B \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$, die ein Argument $a \in S \cup S'$ w-attackiert. Sei $a \in S$, dann folgt wegen $S \in ad_w(U)$ direkt, dass der Angriff von S und somit auch von $S \cup S'$ verteidigt wird. Für den Fall $a \in S'$ folgt wegen $S' \in ad_w(U^{S,w})$, dass alle Angriffe innerhalb des w-Redukts auch schwach verteidigt werden. Angriffe von außerhalb des w-Redukts auf S' werden von S sicher angegriffen und verteidigen damit den Angriff. Es folgt $S \cup S' \in ad_w(U)$.

- co_w: Sei $S \in co_w(U)$ und $S' \in co_w(U^{S,w})$, dann folgt gemäß dem ersten Beweis $S \cup S' \in ad_w(U)$. Nach Lemma 5.4 Punkt 1 gilt $gr_w(U^{S,w}) = \{\emptyset\}$ und

$gr_w((U^{S,w})^{S',w}) = \{\emptyset\}$. Es folgt $gr_w(U^{S \cup S',w}) = \{\emptyset\}$ und gemäß Proposition 5.5 folgt schlussendlich $S \cup S' \in co_w(U)$.

- pr_w: Sei $S \in pr_w(U)$ und $S' \in pr_w(U^{S,w})$. Angenommen, es gilt $S' \neq \{\emptyset\}$. S' wird in U nicht von S verteidigt, da wegen der schwachen Präferiertheit ansonsten $S' \subseteq S$ gelten würde und S' nicht in $U^{S,w}$ enthalten wäre. Daraus folgt, dass sich S' selbst in U verteidigt. Dann wäre S allerdings nicht schwach präferiert in U, weil es eine größere Menge $S \cup S'$ gibt, die ebenfalls in U zulässig ist. Dies steht im Widerspruch zur Annahme. Somit kann nur $S' = \{\emptyset\}$ gelten. Trivialerweise ist $S \cup \emptyset = S$ und damit ist auch $\{S \cup \emptyset\} \in pr_w(U)$. Damit erfüllt pr_w Modularisierung.

- gr_w: Sei $S \in gr_w(U)$, dann gilt auch $S \in co_w(U)$ und es folgt nach Lemma 5.4 Punkt 2, dass $\{\emptyset\}$ im Redukt $U^{S,w}$ die einzige schwach grundierte Extension ist. Trivialerweise ist $S \cup \emptyset = S$ und damit ist auch $\{S \cup \emptyset\} \in gr_w(U)$. Damit erfüllt gr_w Modularisierung.

- st_w: Sei $S \in st_w(U)$ und $S' \in st_w(U^{S,w})$. Da S schwach stabil in U ist, folgt $S \cup S^{+,w} \supseteq \mathcal{A}$. Alle sicheren Argumente sind entweder in S oder werden von S sicher angegriffen. Das heißt, im w-Redukt von U bzgl. S können nur unsichere Argumente enthalten sein, die von S nicht sicher angegriffen werden. Für jedes Argument $a \in S'$ gilt zudem $a \in \mathcal{A}^? \setminus S$. Weil alle Argumente aus S' unsicher sind, folgt, dass die Vereinigung $S \cup S'$ schwach konfliktfrei ist, da ein Konflikt, bezogen auf die schwache Konfliktfreiheit, nur zwischen sicheren Argumenten entstehen kann. Zudem ist $S \cup S'$ auch schwach zulässig, da S bereits alle Angriffe auf S verteidigt und es keine weiteren Angriffe auf S' gibt, die verteidigt werden müssen. Es folgt, dass $S \cup S' \in st_w(U)$ gilt, da alle sicheren Argumente bereits von S sicher angegriffen werden.

- st_s: Sei $S \in st_s(U)$, dann gilt $S \cup S^{+,s} = \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$. Es gibt somit keine verbleibenden Argumente in $ad_w(U^{S,w})$. Somit erfüllt st_s Modularisierung trivialerweise.

□

Für die Semantiken cf_x, ad_s, co_s, pr_s sowie gr_s ist die Eigenschaft der Modularisierung aufgrund der Definition der starken Verteidigung nicht gegeben. Wird ein Argument von einer Menge S schwach angegriffen, wird dieser Angriff als Bedrohung angesehen und dieses Argument ist im s-Redukt von U bzgl. S nicht mehr enthalten. Allerdings kann durch diesen schwachen Angriff kein Argument verteidigt werden, weil für die Verteidigung von Argumenten zwingend ein sicherer Angriff erfolgen muss. Nachfolgend sollen Gegenbeispiele für die Nichterfüllung der Modularisierung aufgezeigt werden.

Beispiel 5.13. Für das in Abbildung 34 dargestellte iSetAF U_{23} gilt:

Sei $S = \{a_4\}$, dann ist $S \in cf_x(U_{23})$. Weiter ist $S^{+,x} = \emptyset$ und damit wird im x-Redukt $U_{23}^{S,x}$ lediglich das Argument a_4 und der Angriff $(\{a_3\}, a_4)$ entfernt. Damit ist $\{a_3\} \in cf_x(U_{23}^{S,x})$, aber $S \cup \{a_3\} \notin cf_x(U_{23})$. Dies widerspricht der Definition der Modularisierung.

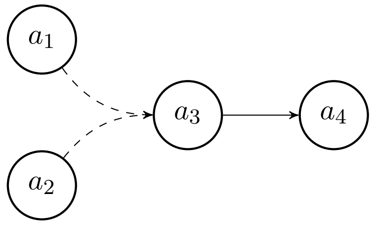

Abbildung 34: iSetAF U_{23} zu Beispiel 5.13. Eigene Darstellung.

Beispiel 5.14. In Fortsetzung zu Beispiel 5.13 sei U_{23} das iSetAF aus Abbildung 34 und σ_{23} eine Menge von Semantiken mit $\sigma_{23} = \{ad_s, co_s, pr_s, gr_s\}$. Dann gilt:

Sei $S = \{a_1, a_2\}$, dann ist $S \in \sigma_{23}(U_{23})$. Weiter ist $S^{+,s} = \{a_3\}$ und damit besteht das s-Redukt $U_{23}^{S,s}$ nur aus dem Argument a_4 und enthält keine Angriffe. Damit ist $\{a_4\} \in \sigma_{23}(U_{23}^{S,s})$, aber $S \cup \{a_4\} \notin \sigma_{23}(U_{23})$. Dies widerspricht der Definition der Modularisierung.

5.10 Ergebnisse

In diesem Kapitel wurde untersucht, welche Eigenschaften das in Abschnitt 4 neu definierte Framework iSetAF erfüllt und welche dieser Eigenschaften nicht erfüllt werden. Im Fokus standen dabei die folgenden Eigenschaften: Syntaxunabhängigkeit, I-Maximalität, Enthaltung, Direktionalität, Dichtheit, Konfliktsensitivität und Modularisierung.

Einige dieser Eigenschaften wurden bereits in früheren Arbeiten für klassische AFs, SetAFs oder auch für extensionsbasierte iAFs untersucht. Eine Übersicht dieser bisherigen Ergebnisse ist in Unterabschnitt 5.2 dargestellt.

Es wurde gezeigt, dass sich jedes AF, SetAF und iAF als Spezialfall eines iSetAFs auffassen lässt. Beispielsweise kann ein SetAF als iSetAF modelliert werden, indem man auf unsichere Argumente und Angriffe verzichtet. Daraus ergibt sich unmittelbar: Wenn eine bestimmte Eigenschaft bereits für AFs, SetAFs oder iAFs nicht erfüllt ist, kann diese auch für iSetAFs nicht erfüllt sein.

Anschließend wurden die Eigenschaften einzeln betrachtet. Dabei musste die herkömmliche Definition aller Eigenschaften für AFs angepasst werden, sodass die Postulate auch auf iSetAFs anwendbar waren. Nach dieser Anpassung konnten die folgenden Postulate ohne weitere Konflikte direkt auf iSetAFs angewendet werden:

- **Syntaxunabhängigkeit:** Es wurde gezeigt, dass das Postulat sowohl von beiden Ausprägungen aller betrachteten Semantiken erfüllt ist. Dies deckt sich mit den Ergebnissen für klassische AFs.
- **I-Maximalität:** Die Ergebnisse stimmen größtenteils mit denen für klassische AFs überein. Eine Ausnahme bildet die schwache Ausprägung der stabilen Semantik, die das Postulat nicht erfüllt.

- **Enthaltung:** Grundsätzlich decken sich die Ergebnisse mit den Ergebnissen für klassische AFs. Lediglich die schwache Ausprägung der vollständigen Semantik erfüllt das Postulat nicht.

- **Modularisierung:** Es wurde gezeigt, dass sich die Ergebnisse der schwachen Ausprägung der Semantiken mit den Ergebnissen für klassische AFs decken. Die starke Ausprägung der Semantiken erfüllt die Modularisierung hingegen grundsätzlich nicht und ist nur für die stark stabile Semantik trivialerweise erfüllt.

Die Eigenschaften Direktionalität, Dichtheit und Konfliktsensitivität wurden von vielen Semantiken trotz Anpassung nicht erfüllt und entsprachen aufgrund der Besonderheiten von iSetAFs auch nicht mehr dem ursprünglichen Sinn der Postulate. Da diese Eigenschaften jedoch wünschenswert sind, wurden neue angepasste Postulate eingeführt: Mengendirektionalität, Mengendichtheit und Mengenkonfliktsensitivität. Der ursprüngliche Sinn der Eigenschaften wurde dabei wiederhergestellt. Dies führte zu folgenden Ergebnissen:

- **Mengendirektionalität:** Wird Direktionalität im klassischen AF erfüllt, so wird auch das angepasste Postulat Mengendirektionalität von beiden Ausprägungen der jeweiligen Semantik erfüllt.

- **Mengendichtheit:** Wird das Postulat Dichtheit von einer Semantik für AFs erfüllt, so erfüllen sowohl die schwache als auch die starke Ausprägung der jeweiligen Semantik das angepasste Postulat Mengendichtheit.

- **Mengenkonfliktsensitivität:** Wird das Postulat Konfliktsensitivität von einer Semantik für AFs erfüllt, so erfüllen auch die beiden Ausprägungen der jeweiligen Semantik das angepasste Postulat Mengenkonfliktsensitivität.

Zur Veranschaulichung der Ergebnisse werden in den folgenden Tabellen (Tabelle 5 und Tabelle 6) die Erfüllungen der Postulate für die schwache und starke Ausprägung der betrachteten Semantiken zusammengefasst.

Die Untersuchung der Eigenschaften zeigt, dass iSetAFs in weiten Teilen dem ursprünglichen Framework AF von Dung ähnelt und sich viele Eigenschaften durch gezielte Anpassungen übertragen lassen. Insgesamt erhält man durch die Einführung von iSetAFs weitaus mehr Möglichkeiten, reale Argumentationen zu modellieren, behält aber gleichzeitig die meisten der wünschenswerten Eigenschaften bei.

	cf_w	cf_s	ad_w	ad_s	co_w	co_s
Syntaxunabhängigkeit	✓	✓	✓	✓	✓	✓
I-Maximalität	✗	✗	✗	✗	✗	✗
Enthaltung	✓	✓	✓	✓	✗	✓
Direktionalität	✓	✓	✗	✗	✗	✗
Mengendirektionalität	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Dichtheit	✗	✗	✗	✗	✗	✗
Mengendichtheit	✓	✓	✗	✗	✗	✗
Konfliktsensitivität	✗	✗	✗	✗	✗	✗
Mengenkonfliktsensitivität	✓	✓	✓	✓	✗	✗
Modularisierung	✗	✗	✓	✗	✓	✗

Tabelle 5: Übersicht der Erfüllung von Postulaten für iSetAFs durch Semantiken (Teil 1). Eigene Darstellung.

	pr_w	pr_s	gr_w	gr_s	st_w	st_s
Syntaxunabhängigkeit	✓	✓	✓	✓	✓	✓
I-Maximalität	✓	✓	✓	✓	✗	✓
Enthaltung	✗	✗	✓	✓	✗	✗
Direktionalität	✓	✓	✓	✓	✗	✗
Mengendirektionalität	✓	✓	✓	✓	✗	✗
Dichtheit	✗	✗	✓	✓	✗	✗
Mengendichtheit	✗	✗	✓	✓	✓	✓
Konfliktsensitivität	✗	✗	✓	✓	✗	✗
Mengenkonfliktsensitivität	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Modularisierung	✓	✗	✓	✗	✓	✓

Tabelle 6: Übersicht der Erfüllung von Postulaten für iSetAFs durch Semantiken (Teil 2). Eigene Darstellung.

6 Komplexität von vervollständigungsbasierten iSetAFs

Nachdem iSetAFs als neue Erweiterung der AFs in Abschnitt 4 formal eingeführt wurden, soll in diesem Kapitel die Komplexität von Schlussfolgerungsproblemen untersucht werden. Die Analyse der Komplexität von Schlussfolgerungsproblemen spielt eine zentrale Rolle in der formalen Argumentation. Diese gibt Aufschluss darüber, wie aufwendig es ist, Entscheidungen über die Akzeptanz eines Argumentes bzw. einer Menge von Argumenten zu treffen.

Mit der Einführung von iSetAFs wurden zwei Konzepte kombiniert: Mengenangriffe und unvollständiges Wissen. Diese Kombination erweitert den Ausdrucksgehalt des Frameworks, erhöht aber potenziell auch die Komplexität der Schlussfolgerungsprobleme. Die Komplexität klassischer AFs wurde bereits umfassend von Baroni et al. [BGGVdT18] analysiert. Für SetAFs (Dvořák et al., Bikakis et al. [DKUW24, BCD$^+$21]) und iAFs (Baumeister et al. [BNR18]) existieren ebenfalls detaillierte Untersuchungen. Wie sich jedoch die Kombination beider Erweiterungen auf die Komplexität auswirkt, ist bislang ungeklärt. Ziel dieses Kapitels ist es daher, die Komplexität von Schlussfolgerungsproblemen für iSetAFs zu untersuchen. Dabei werden insbesondere die Entscheidungsprobleme CRED (leichtgläubige Akzeptanz), SKEP (skeptische Akzeptanz) und VER (Verifikation) für die verschiedenen Semantiken betrachtet.

Nach einer kurzen Einführung in die Komplexitätstheorie werden zunächst die relevanten Entscheidungsprobleme algorithmisch dargestellt. Da bereits Modgil und Bench-Capon [MBC11] gezeigt haben, wie sich SetAFs in polynomieller Zeit in AFs umformen lassen, soll dieser Ansatz auch zur Bestimmung der Komplexität für iSetAFs verfolgt werden. Dafür soll untersucht werden, ob sich iSetAFs in polynomieller Zeit in iAFs umwandeln lassen, sodass sich auch deren Komplexitätseigenschaften übertragen lassen. Abschließend werden die Ergebnisse zusammengefasst.

Sofern nicht anders erwähnt, sei auch für dieses Kapitel stets $\sigma \in \{cf, ad, co, pr, gr, st\}$ eine beliebige Semantik und $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ ein iSetAF.

6.1 Komplexitätstheorie

Die Komplexitätstheorie untersucht den Ressourcenverbrauch von Algorithmen bei der Lösung von Problemen. Dabei unterscheidet man grundsätzlich zwischen Zeit- und Platzkomplexität. In dieser Arbeit liegt der Fokus auf der Zeitkomplexität, die der Frage nachgeht, wie viel Rechenzeit ein Algorithmus benötigt, um ein gegebenes Schlussfolgerungsproblem zu lösen. Schlussfolgerungsprobleme sind dabei immer genau solche Probleme, die sich mit *Ja* oder *Nein* beantworten lassen. Die Probleme werden dafür in sogenannte Komplexitätsklassen eingeteilt. Eine der grundlegendsten Klassen ist P, die alle Probleme umfasst, die durch einen deterministischen Algorithmus in polynomieller Zeit gelöst werden können. Die Laufzeit von Problemen in P liegt somit maximal bei $\mathcal{O}(n^k)$, wobei n die Eingabegröße und $k \in \mathbb{N}$ eine Konstante ist.

Eine weitere wichtige Komplexitätsklasse ist die Klasse NP. Diese entspricht der Menge aller Entscheidungsprobleme, die in nichtdeterministischer polynomieller Zeit lösbar sind. Ein Problem in NP lässt sich wie folgt lösen:

1. Rate eine mögliche Lösung des Problems.
2. Überprüfe durch einen deterministischen Algorithmus in polynomieller Zeit, ob die geratene Lösung korrekt ist.

Neben P und NP existieren noch weitere Komplexitätsklassen. Beispielsweise ist coNP die Klasse der Probleme, deren Komplement in NP liegt. Eine weitere wichtige Klasse ist Σ_2^P, die Probleme umfasst, die durch einen nichtdeterministischen Algorithmus mit Zugriff auf ein NP-Orakel in polynomieller Zeit gelöst werden können. Das heißt, ein Problem in Σ_2^P lässt sich wie folgt lösen:

1. Rate eine mögliche Lösung des Problems.
2. Überprüfe durch einen Algorithmus der Komplexitätsklasse NP, ob die geratene Lösung korrekt ist.

Eine weitere Komplexitätsklasse, die im Rahmen dieser Arbeit verwendet wird, ist die Klasse Π_2^P. Diese enthält alle Probleme, deren Komplement in Σ_2^P liegt.

Darüber hinaus ist die sogenannte *Reduktion* ein wichtiger Begriff der Komplexitätstheorie. Ist es möglich, ein Problem R auf ein anderes Problem R' abzubilden, sodass eine Lösung für R' automatisch auch eine Lösung für R liefert, wird das Problem R auf R' reduziert. Dies ist ein wichtiges Konzept im Rahmen dieser Arbeit, da auf diese Weise auch die Laufzeiten übertragen werden können, sofern sich das Problem R in polynomieller Zeit auf das Problem R' abbilden lässt.

Sei nachfolgend $\mathcal{C}$ eine beliebige Komplexitätsklasse. Lassen sich nun alle Probleme einer Klasse $\mathcal{C}$ auf ein bestimmtes Problem R' abbilden, dann ist R' $\mathcal{C}$-schwer. Wenn R' weiterhin selbst in $\mathcal{C}$ liegt, ist dieses Problem $\mathcal{C}$-vollständig. Die Begriffe $\mathcal{C}$-schwer und $\mathcal{C}$-vollständig (kurz $\mathcal{C}$-c) lassen sich unter anderem auf alle genannten Komplexitätsklassen P, NP, Σ_2^P und Π_2^P anwenden.

6.2 Schlussfolgerungsprobleme

Einige der Schlussfolgerungsprobleme wurden bereits in Abschnitt 3 und Abschnitt 4 in Kürze vorgestellt. Diese Probleme sollen an dieser Stelle als algorithmische Problemstellungen dargestellt werden.

Bezogen auf ein SetAF $M = (A, \mathcal{R})$ kann zunächst zwischen einer leichtgläubigen (*credulous*) und einer skeptischen (*skeptical*) σ-Schlussfolgerung unterschieden werden (vgl. Abschnitt 3). Mit Hilfe der leichtgläubigen σ-Schlussfolgerung lässt sich für ein Argument $a \in A$ schließen, dass es mindestens eine σ-Extension in M gibt, die das Argument a enthält. Als algorithmische Problemstellung lässt sich Definition 3.5 aus Abschnitt 3 wie folgt darstellen:

CRED$_\sigma$

Eingabe: SetAF $M = (A, \mathcal{R})$, Argument $a \in A$

Ausgabe: `JA`, falls es eine σ-Extension $S \subseteq A$ gibt, sodass $a \in S$. Sonst `NEIN`.

Mit Hilfe der skeptischen σ-Schlussfolgerung hingegen lässt sich für ein Argument $a \in A$ schließen, dass jede σ-Extension in M das Argument a enthält. Algorithmisch lässt sich Definition 3.6 aus Abschnitt 3 wie folgt darstellen:

SKEP$_\sigma$
Eingabe: SetAF $M = (A, \mathcal{R})$, Argument $a \in A$
Ausgabe: `JA`, falls für jede σ-Extension $S \subseteq A$ gilt, dass $a \in S$. Sonst `NEIN`.

Neben den bereits gezeigten Schlussfolgerungsproblemen für SetAFs soll zudem das Verifikationsproblem eingeführt werden. Beim Verifikationsproblem geht es darum, zu entscheiden, ob eine gegebene Menge von Argumenten eine σ-Extension in einem bestimmten SetAF darstellt oder nicht. Algorithmisch sieht das Problem wie folgt aus:

VER$_\sigma$
Eingabe: SetAF $M = (A, \mathcal{R})$, Argumentmenge $S \subseteq A$
Ausgabe: `JA`, falls S eine σ-Extension in M ist. Sonst `NEIN`.

Die für SetAFs genannten Schlussfolgerungsprobleme CRED$_\sigma$, SKEP$_\sigma$ sowie das Verifikationsproblem VER$_\sigma$ lassen sich allerdings nicht direkt auf vervollständigungsbasierte iSetAFs übertragen, weshalb zusätzlich zwischen möglichen (*possible*) und notwendigen (*necessary*) σ-Schlussfolgerungen unterschieden werden muss, wie es bereits in Abschnitt 4 in Definition 4.7 definiert wurde.

Für CRED$_\sigma$ lässt sich die Problemstellung, bezogen auf eine mögliche σ-Schlussfolgerung, wie folgt algorithmisch darstellen:

p-CRED$_\sigma$
Eingabe: iSetAF $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$, Argument $a \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$
Ausgabe: `JA`, falls es für eine Vervollständigung von U eine σ-Extension $S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ gibt, sodass $a \in S$. Sonst `NEIN`.

Analog zur möglichen Schlussfolgerung lässt sich auch eine notwendige Variante definieren. Bezogen auf eine notwendige σ-Schlussfolgerung sieht die Problemstellung folgendermaßen aus:

n-CRED$_\sigma$
Eingabe: iSetAF $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$, Argument $a \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$
Ausgabe: `JA`, falls es für jede Vervollständigung von U eine σ-Extension $S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ gibt, sodass $a \in S$. Sonst `NEIN`.

Für die skeptische Schlussfolgerung SKEP$_\sigma$ lässt sich die Problemstellung analog formulieren. Zunächst wird der Fall einer möglichen skeptischen σ-Schlussfolgerung betrachtet:

p-SKEP$_\sigma$

Eingabe: iSetAF $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$, Argument $a \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$

Ausgabe: `JA`, falls es eine Vervollständigung von U gibt, sodass für jede σ-Extension $S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ dieser Vervollständigung gilt, dass $a \in S$. Sonst `NEIN`.

Im Gegensatz dazu erfordert die notwendige skeptische σ-Schlussfolgerung, dass das Argument in jeder Vervollständigung und jeder σ-Extension enthalten ist:

n-SKEP$_\sigma$

Eingabe: iSetAF $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$, Argument $a \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$

Ausgabe: `JA`, falls für jede Vervollständigung von U und jede σ-Extension $S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ dieser Vervollständigung gilt, dass $a \in S$. Sonst `NEIN`.

Schließlich wird das Verifikationsproblem VER$_\sigma$ betrachtet, bei dem überprüft wird, ob eine Menge von Argumenten in einer Vervollständigung bzw. allen Vervollständigungen akzeptiert wird. Für eine mögliche σ-Schlussfolgerung ergibt sich folgende Problemstellung:

p-VER$_\sigma$

Eingabe: iSetAF $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$, Argumentmenge $S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$

Ausgabe: `JA`, falls es eine Vervollständigung von U gibt, sodass S eine σ-Extension in dieser Vervollständigung ist. Sonst `NEIN`.

Für die notwendige verifizierende σ-Schlussfolgerung ergibt sich entsprechend:

n-VER$_\sigma$

Eingabe: iSetAF $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$, Argumentmenge $S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$

Ausgabe: `JA`, falls S eine σ-Extension in jeder Vervollständigung von U ist. Sonst `NEIN`.

Mit Hilfe der Schlussfolgerungsprobleme lassen sich schließlich Aussagen über die Akzeptanz von einzelnen Argumenten oder Mengen von Argumenten treffen. Die Komplexitätseigenschaften dieser Probleme sollen im nachfolgenden Unterkapitel genauer untersucht werden.

6.3 Übertragung von Komplexitätseigenschaften

Nachdem die Schlussfolgerungsprobleme in Unterabschnitt 6.2 algorithmisch dargestellt wurden, soll in diesem Unterkapitel die Komplexität dieser Problemstellungen untersucht werden.

Zunächst lässt sich leicht feststellen, dass sich jedes iAF zugleich auch als iSetAF darstellen lässt, wie Proposition 5.3 aus Abschnitt 5 bereits gezeigt hat. Insbesondere lässt sich auf diese Weise jedes iAF zu einem iSetAF umformen, wie das nachfolgende Beispiel zeigt.

Beispiel 6.1. Sei $I_5 = (\mathscr{A}_5, \mathscr{A}_5^?, \mathscr{R}_5, \mathscr{R}_5^?)$ ein iAF mit:

- $\mathscr{A}_5 = \{a_1, a_2, a_3\}$
- $\mathscr{A}_5^? = \{a_4, a_5\}$
- $\mathscr{R}_5 = \{(a_1, a_2), (a_4, a_2), (a_3, a_5)\}$
- $\mathscr{R}_5^? = \{(a_4, a_1)\}$

Dann lässt sich daraus analog Proposition 5.3 das entsprechende iSetAF $U_{I_5} = (\mathcal{A}_{I_5}, \mathcal{A}_{I_5}^?, \mathcal{R}_{I_5}, \mathcal{R}_{I_5}^?)$ ableiten mit:

- $\mathcal{A}_{I_5} = \{a_1, a_2, a_3\}$
- $\mathcal{A}_{I_5}^? = \{a_4, a_5\}$
- $\mathcal{R}_{I_5} = \{(\{a_1\}, a_2), (\{a_4\}, a_2), (\{a_3\}, a_5)\}$
- $\mathcal{R}_{I_5}^? = \{(\{a_4\}, a_1)\}$

Mit dieser Erkenntnis lässt sich direkt folgern, dass alle genannten Problemstellungen für iSetAFs mindestens genauso schwer sein müssen, wie die entsprechenden Problemstellungen für iAFs, da sich jedes iAF auch als iSetAF darstellen lässt.

An dieser Stelle stellt sich die Frage, ob auch die umgekehrte Richtung gilt: Lassen sich die Problemstellungen für iSetAFs auf diejenigen für iAFs reduzieren? Falls dies der Fall ist, wäre die Komplexität der Probleme für iSetAFs mit der Komplexität der entsprechenden Probleme für iAFs identisch. Dies würde die zu Beginn getroffene Annahme widerlegen, dass die Kombination zweier Erweiterungen für AFs potenziell zu einer höheren Komplexität führt.

Damit die Problemstellungen für iSetAFs auf die Problemstellungen für iAFs reduziert werden können, muss gezeigt werden, dass ein iSetAF in polynomieller Zeit in ein iAF umgewandelt werden kann, ohne die semantischen Eigenschaften zu verlieren. Ein ähnlicher Ansatz, ein SetAF in polynomieller Zeit in ein AF umzuwandeln, wurde bereits von Modgil und Bench-Capon [MBC11] vorgestellt. Deren Vorgehen führte neue Hilfsargumente ein, um schließlich die Mengenangriffe zu eliminieren. Analog können aber auch die Mengenangriffe von iSetAFs eliminiert werden, um iAFs zu erhalten.

Die Idee von Modgil und Bench-Capon war es, für jedes bestehende Argument eines Mengenangriffs ein weiteres Hilfsargument hinzuzufügen. Zudem wurde für jeden Mengenangriff ebenfalls ein zusätzliches Argument hinzugefügt, das diese Angriffsbeziehung repräsentiert. Ein ähnlicher Ansatz soll nun auch für iSetAFs verfolgt werden. Nachfolgend ist in Algorithmus 1 eine mögliche Konstruktion für iSetAFs algorithmisch im Pseudocode dargestellt.

Algorithmus 1 Transformation iSetAF in iAF

Eingabe: iSetAF $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$
Ausgabe: iAF $I_U = (\mathscr{A}_U, \mathscr{A}^?_U, \mathscr{R}_U, \mathscr{R}^?_U)$
$\mathscr{A}_U \leftarrow \mathcal{A}$ ▷ Initialisiere $\mathscr{A}_U$ mit den Argumenten aus $\mathcal{A}$
$\mathscr{A}^?_U \leftarrow \mathcal{A}^?$ ▷ Initialisiere $\mathscr{A}^?_U$ mit den Argumenten aus $\mathcal{A}^?$
$\mathscr{R}_U \leftarrow \emptyset$ ▷ Leere Angriffsrelation für $\mathscr{R}_U$
$\mathscr{R}^?_U \leftarrow \emptyset$ ▷ Leere Angriffsrelation für $\mathscr{R}^?_U$
for (S, b) **in** $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^?$ **do**
    $\mathscr{A}_U \leftarrow \mathscr{A}_U \cup \{h_{(S,b)}\}$ ▷ Hilfsargument für jeden Mengenangriff
    for a **in** S **do**
        $\mathscr{A}_U \leftarrow \mathscr{A}_U \cup \{h_a\}$ ▷ Hilfsargument für jedes Argument aus S
        $\mathscr{R}_U \leftarrow \mathscr{R}_U \cup \{(a, h_a), (h_a, h_{(S,b)})\}$ ▷ Füge die Angriffsrelationen hinzu
    end for
end for
for (S, b) **in** $\mathcal{R}$ **do**
    $\mathscr{R}_U \leftarrow \mathscr{R}_U \cup \{(h_{(S,b)}, b)\}$ ▷ Angriffsrelation für sichere Angriffe
end for
for (S, b) **in** $\mathcal{R}^?$ **do**
    $\mathscr{R}^?_U \leftarrow \mathscr{R}^?_U \cup \{(h_{(S,b)}, b)\}$ ▷ Angriffsrelation für unsichere Angriffe
end for
Ergebnis: $I_U = (\mathscr{A}_U, \mathscr{A}^?_U, \mathscr{R}_U, \mathscr{R}^?_U)$ ▷ Ausgabe des transformierten iAFs

Der Algorithmus macht deutlich, dass sich ein iSetAF in maximal polynomieller Zeit in ein iAF transformieren lässt. Seien $n = |\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?|$ und $m = |\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^?|$. Sei zudem $n + m$ die gesamte Eingabelänge des Algorithmus, dann ergeben sich folgende Laufzeiten:

Initialisieren von $\mathscr{A}_U$ und $\mathscr{A}^?_U$	$\mathcal{O}(n)$
Erste Schleife	$\mathcal{O}(n \cdot m)$
Zweite Schleife	$\mathcal{O}(m)$
Dritte Schleife	$\mathcal{O}(m)$

Dabei ist zu beachten, dass es auch iSetAFs gibt, für die $|\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^?| = |\mathcal{R}|$ gilt, falls es keine unsicheren Angriffe gibt. Entsprechend kann es auch iSetAFs geben, die nur unsichere Angriffe enthalten, weshalb die Laufzeit der zweiten und dritten Schleife bei $\mathcal{O}(m)$ liegt. Offensichtlich beträgt die Gesamtlaufzeit des Algorithmus $\mathcal{O}(n \cdot m)$ und erfolgt damit in polynomieller Zeit.

Die zuvor algorithmisch dargestellte Transformation von iSetAFs in iAFs soll nun formal definiert werden.

Definition 6.1 (Transformierte iSetAFs)**.** Sei $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ ein iSetAF. Das dazugehörige transformierte iSetAF $I_U = (\mathscr{A}_U, \mathscr{A}_U^?, \mathscr{R}_U, \mathscr{R}_U^?)$ stellt ein iAF dar und wird wie folgt definiert:

- $\mathscr{A}_U = \mathcal{A} \cup \{h_a \mid a \in S, (S, b) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^?\} \cup \{h_{(S,b)} \mid (S, b) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^?\}$
- $\mathscr{A}_U^? = \mathcal{A}^?$
- $\mathscr{R}_U = \{(a, h_a) \mid a \in S, (S, b) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^?\} \cup \{(h_a, h_{(S,b)}) \mid a \in S, (S, b) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^?\} \cup \{(h_{(S,b)}, b) \mid (S, b) \in \mathcal{R}\}$
- $\mathscr{R}_U^? = \{(h_{(S,b)}, b) \mid (S, b) \in \mathcal{R}^?\}$

Auf diese Weise lässt sich für jedes iSetAF ein entsprechendes iAF konstruieren. Im Folgenden werden die Bezeichnungen der unterschiedlichen Argumenttypen wie folgt unterschieden:

- Argumente vom Typ a: Standardargumente,
- Argumente vom Typ h_a: Standard-Hilfsargument,
- Argumente vom Typ $h_{(S,b)}$: Angriffs-Hilfsargument.

In Abschnitt 4, Abbildung 12 wurden die unterschiedlichen Mengenangriffe von iSetAFs dargestellt. Diese sind nochmals in Abbildung 35 zu finden. Die unterschiedlichen Arten von Mengenangriffen von iSetAFs können nun entsprechend Definition 6.1 in iAFs transformiert werden. Die transformierten iSetAFs können Abbildung 36 entnommen werden. Es ist offensichtlich, dass keine Mengenangriffe mehr vorhanden sind und es sich um iAFs handelt. Zudem lässt sich leicht feststellen, dass das Argument a_1 in allen sechs iAFs nur dann angegriffen wird, wenn die Argumente a_2 und a_3 beide akzeptiert sind und zudem auch der Angriff (h_r, a_1) gültig ist. Für den Fall, dass a_2 oder a_3 nicht akzeptiert sind, wird in jeder Konstellation das Argument h_r angegriffen und damit wird das Argument a_1 nicht attackiert und kann akzeptiert werden.

Um zu zeigen, dass die Transformation ohne Verlust von semantischen Eigenschaften erfolgt, soll zunächst die *transformierte Vervollständigung* eingeführt werden. Dies ist eine Vervollständigung des transformierten iSetAFs, die dieselben semantischen Eigenschaften hat, wie die entsprechende Vervollständigung des ursprünglichen iSetAFs.

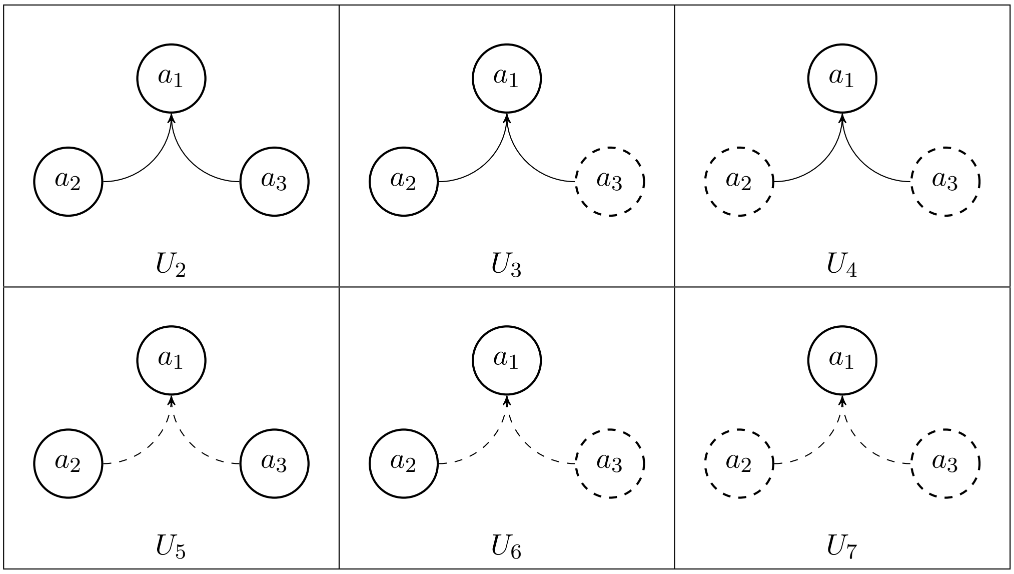

Abbildung 35: Mögliche Mengenangriffe mit unvollständiger Information über Argumente oder Angriffe. Dargestellt sind sechs iSetAFs U_2 bis U_7, die jeweils unterschiedliche unvollständige Teilkomponenten besitzen. Eigene Darstellung.

Definition 6.2 (Transformierte Vervollständigung)**.** Seien

- $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ ein iSetAF,
- $I_U = (\mathscr{A}_U, \mathscr{A}_U^?, \mathscr{R}_U, \mathscr{R}_U^?)$ das dazugehörige transformierte iSetAF (ein iAF) und
- $U^* = (A^*, \mathcal{R}^*)$ eine Vervollständigung (SetAF) von U mit $\mathcal{A} \subseteq A^* \subseteq (\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?)$ und $\mathcal{R} \cap (2^{A^*} \times A^*) \subseteq \mathcal{R}^* \subseteq (\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^?) \cap (2^{A^*} \times A^*)$.

Dann lässt sich die transformierte Vervollständigung vom SetAF U^* wie folgt bestimmen:

$$I^*_{\to U^*} = (B, T)$$

mit

$$B = \{\mathscr{A}_U \cup (\mathscr{A}_U^? \cap A^*)\}$$

und

$$T = \{(c, d) \mid c, d \in B, (c, d) \in \mathscr{R}_U\} \cup \{(h_{(S,a)}, a) \mid S \subseteq B, (S, a) \ \in \mathcal{R}^*\}.$$

Die transformierte Vervollständigung enthält somit immer alle Hilfsargumente, Argumente, die in der Vervollständigung des iSetAFs enthalten sind sowie alle sicheren

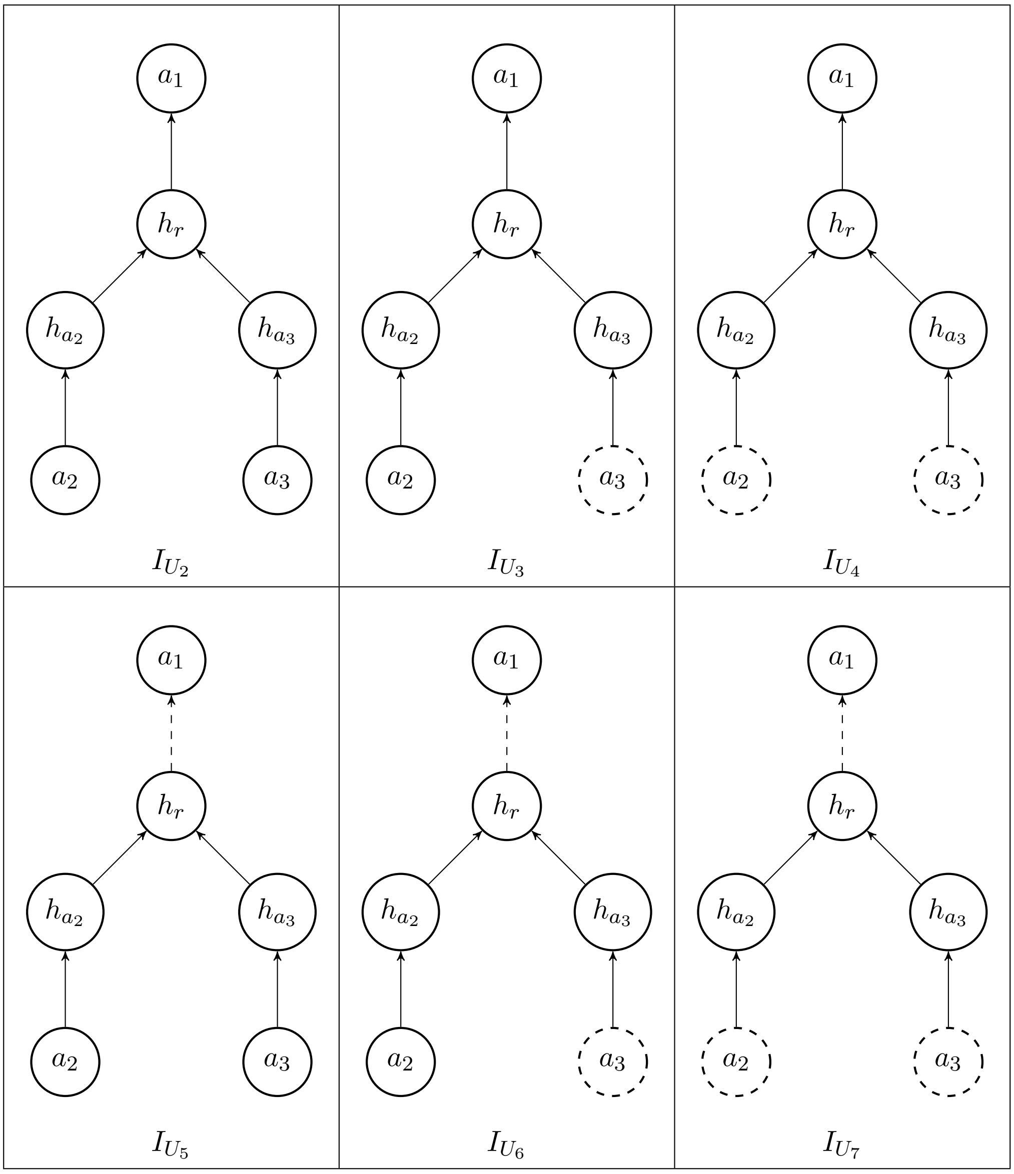

Abbildung 36: Ergebnisse der Transformation der iSetAFs aus Abbildung 35 in die entsprechenden iAFs, wobei für $r = (\{a_2, a_3\}, a_1)$ gilt. Eigene Darstellung.

Angriffe zwischen diesen. Weiterhin sind für alle Mengenangriffe (S, a) der Vervollständigung des iSetAFs entsprechende Angriffe $(h_{(S,a)}, a)$ des Hilfsarguments auf das Argument a enthalten.

Die Definition der transformierten Vervollständigung soll nachfolgend an einem Beispiel verdeutlicht werden.

Beispiel 6.2. Für das in Abbildung 37 dargestellte iSetAF U_7 ist U_7^* eine mögliche Vervollständigung. Weiterhin lässt sich das iSetAF U_7 zu einem iAF transformieren. Dieses transformierte iSetAF I_{U_7} ist der Übersicht halber ebenfalls in Abbildung 37 abgebildet. Entsprechend der Definition 6.2 lässt sich dann die transformierte Vervollständigung $I^*_{\to U_7^*}$ ableiten. Dabei gilt für dieses Beispiel $r = (\{a_2, a_3\}, a_1)$. Die transformierte Vervollständigung $I^*_{\to U_7^*}$ enthält:

- Alle sicheren Argumente von I_{U_7}:
$$\{a_1, h_r, h_{a_2}, h_{a_3}\}.$$
- Alle unsicheren Argumente von I_{U_7}, die auch in der Vervollständigung U_7^* vorkommen:
$$\{a_3\}.$$
- Alle bedingt sicheren Angriffe von I_{U_7} zwischen Argumenten, die in $I^*_{\to U_7^*}$ enthalten sind:
$$\{(a_3, h_{a_3}), (h_{a_2}, h_r), (h_{a_3}, h_r)\}.$$

Der unsichere Angriff (h_r, a_1) von I_{U_7} ist in der transformierten Vervollständigung nicht enthalten, weil der entsprechende Mengenangriff $(\{a_2, a_3\}, a_1)$ von U_7 ebenfalls nicht in dessen Vervollständigung U_7^* enthalten ist.

Für das eben gezeigte Beispiel ist $\{a_1, a_3\}$ die grundierte Extension von U_7^*. Für die transformierte Vervollständigung $I^*_{\to U_7^*}$ ist $\{a_1, h_{a_2}, a_3\}$ die grundierte Extension und es gilt $\{a_1, a_3\} \subseteq \{a_1, h_{a_2}, a_3\}$. Dies verdeutlicht den Erhalt der semantischen Eigenschaften, was nachfolgend gezeigt werden soll. Zuvor soll allerdings noch die *transformierte Menge* eingeführt werden, durch die sich insbesondere auch σ-Extensionen transformieren lassen.

Definition 6.3 (Transformierte Menge)**.** Seien

- $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ ein iSetAF,
- $I_U = (\mathscr{A}_U, \mathscr{A}_U^?, \mathscr{R}_U, \mathscr{R}_U^?)$ das dazugehörige transformierte iSetAF (ein iAF),
- $S \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?$ eine Menge von Argumenten aus U,
- $U^* = (A^*, \mathcal{R}^*)$ eine Vervollständigung (SetAF) von U und
- $I^*_{\to U^*} = (B, T)$ die transformierte Vervollständigung bzgl. U^*.

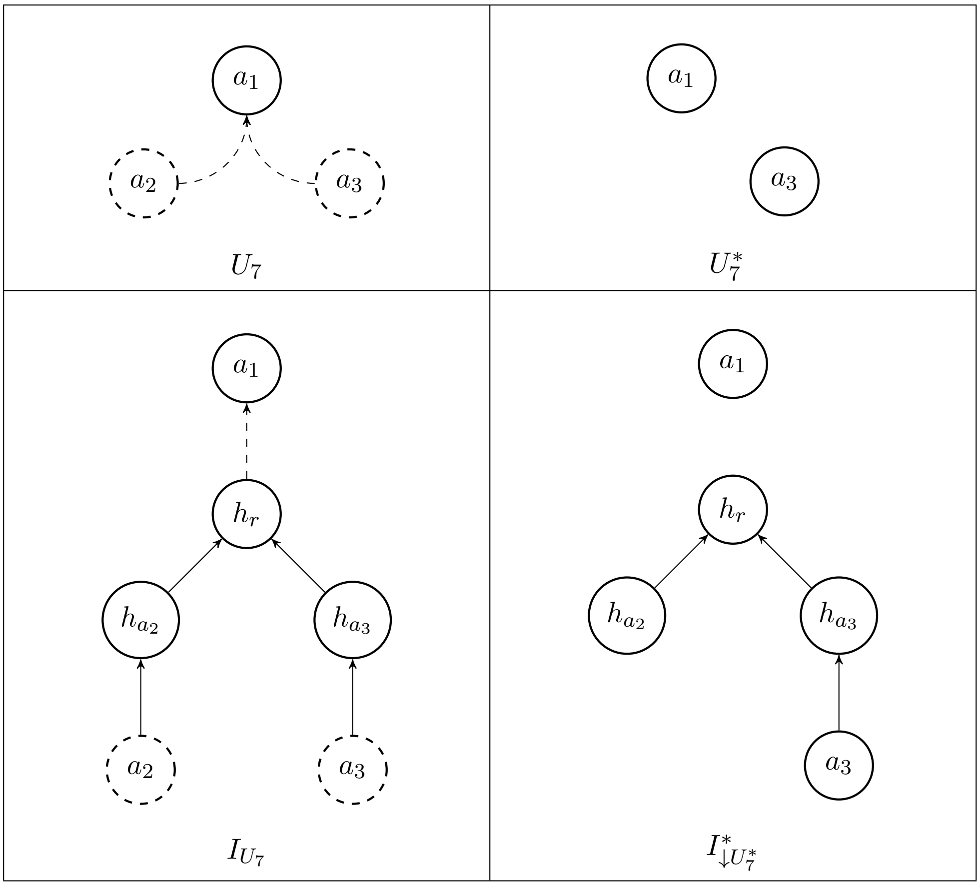

Abbildung 37: In der oberen Reihe ist das iSetAF U_7 sowie eine mögliche Vervollständigung U_7^* abgebildet. In der unteren Reihe ist das transformierte iSetAF I_{U_7} sowie die zu U_7^* gehörige transformierte Vervollständigung $I^*_{\downarrow U_7^*}$ dargestellt, vgl. Beispiel 6.2. Eigene Darstellung.

Definiere die bzgl. S transformierte Menge wie folgt:

$$S'_{\to S} = S \cup H_S \cup H'_S,$$

wobei S Standardargumente, H_S Angriffs-Hilfsargumente und H'_S Standard-Hilfsargumente sind, die wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} H_S &= \{h_{(C,a)} \mid C \subseteq S\}, \\ H'_S &= \{h_a \mid h_{(C,a)} \in H_S \text{ oder } a \in \mathscr{A}^?_U, a \notin B\}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der soeben eingeführten transformierten Menge lassen sich nun alle Mengen von Argumenten aus einem iSetAF in eine gleichbedeutende Menge von Argumenten im transformierten iSetAF umwandeln. Hintergrund der Einführung dieser Definition ist, dass nun gezeigt werden kann, dass es für jede σ-Extension S einer Vervollständigung eines iSetAFs eine entsprechende Menge S' gibt, sodass S' eine σ-Extension einer Vervollständigung des transformierten iSetAFs ist. Dies zeigt das nachfolgende Theorem 6.1.

Theorem 6.1. Sei $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ ein iSetAF, $I_U = (\mathscr{A}_U, \mathscr{A}^?_U, \mathscr{R}_U, \mathscr{R}^?_U)$ das dazugehörige transformierte iSetAF, $S \subseteq (\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^?)$ eine Menge von Argumenten aus U und $S'_{\to S}$ die bzgl. S transformierte Menge. Dann gilt:

1. $S'_{\to S}$ ist eine mögliche σ-Extension in I_U gdw. S eine mögliche σ-Extension in U ist.
2. $S'_{\to S}$ ist eine notwendige σ-Extension in I_U gdw. S eine notwendige σ-Extension in U ist.

Beweis. Sei U^* eine Vervollständigung von U und $I^*_{\to U^*} = (B, T)$ die zugehörige transformierte Vervollständigung und damit auch eine Vervollständigung von I_U. Es wird für alle Semantiken gezeigt, dass

$$S'_{\to S} = S \cup H_S \cup H'_S$$

mit $H_S = \{h_{(C,d)} \mid C \subseteq S\}$ und $H'_S = \{h_a \mid h_{(C,a)} \in H_S \text{ oder } a \in \mathscr{A}^?_U, a \notin B\}$ eine mögliche σ-Extension in I_U ist, wenn S eine mögliche σ-Extension in U ist.

Zunächst sollen dafür die angreifenden und angegriffenen Mengen für die einzelnen Teilmengen von $S'_{\to S}$ in der Vervollständigung $I^*_{\to U^*}$ bestimmt werden. Berücksichtigt werden dabei somit nur Argumente, die in der Vervollständigung $I^*_{\to U^*}$ enthalten sind:

$$\begin{aligned} S^+ &= \{h_b \mid h_b \in B, b \in S\}, \\ H^+_S &= \{d \mid h_{(C,d)} \in B, C \subseteq S, (h_{(C,d)}, d) \in T\}, \\ H'^+_S &= \{h_{(F,g)} \mid F \not\subseteq S, f \in F, h_f \in H'_S\}, \\ S^- &= \{h_{(D,e)} \mid h_{(D,e)} \in B, e \in S\}, \\ H^-_S &= \{h_c \mid h_{(C,d)} \in B, C \subseteq S, c \in C\}, \\ H'^-_S &= \{i \mid h_{(C,i)} \in B, C \subseteq S\}. \end{aligned}$$

Insbesondere fällt auf, dass es per Definition keine Selbstangriffe auf Argumente geben kann. Insgesamt gilt dann:

$$(S'_{\to S})^+ = S^+ \cup H_S^+ \cup H_S'^+,$$
$$(S'_{\to S})^- = S^- \cup H_S^- \cup H_S'^-.$$

Nachfolgend sollen nun die Semantiken einzeln betrachtet werden.

- cf: Da S eine mögliche cf-Extension ist, gibt es eine Vervollständigung U^* von U, sodass $S \in cf(U^*)$. Zu zeigen ist, dass es keine Angriffe innerhalb von $S'_{\to S}$ in $I^*_{\to U^*}$ gibt. Dafür werden die drei Teilmengen, aus denen sich $S'_{\to S}$ zusammensetzt, einzeln betrachtet:
  - S greift Argumente aus S^+ an. S^+ ist aber per Definition nicht in $S'_{\to S}$ enthalten. Es gilt $S^+ \cap H'_S = \{\}$.
  - H_S greift Argumente aus H_S^+ an. H_S^+ kann aber nicht in $S'_{\to S}$ enthalten sein. Da S in U^* konfliktfrei ist, kann es kein $h_{(C,d)} \in B$ geben mit $C \subseteq S$ und $d \in S$. Dies wäre ein Selbstangriff. Es gilt $H_S^+ \cap S = \{\}$.
  - Es gilt per Definition $H_S'^+ \cap H_S = \{\}$, da $H_S'^+$ alle Angriffs-Hilfsargumente $h_{(F,g)}$ mit $F \nsubseteq S$ enthält, während H_S genau die Angriffs-Hilfsargumente mit $F \subseteq S$ enthält.

  Damit ist gezeigt, dass keine der drei Teilmengen von $S'_{\to S}$ ein weiteres Argument innerhalb dieser Menge angreift. Damit gilt $S'_{\to S} \in cf(I^*_{\to U^*})$.

- ad: Da S eine mögliche ad-Extension ist, gibt es eine Vervollständigung U^* von U, sodass $S \in ad(U^*)$. Zu zeigen ist, dass $S'_{\to S}$ konfliktfrei in $I^*_{\to U^*}$ ist und dass sich die Menge $S'_{\to S}$ gegen alle Angreifer verteidigt.

  Da S zulässig in U^* ist, ist S konfliktfrei in U^*. Es wurde bereits gezeigt, dass daraus $S'_{\to S} \in cf(I^*_{\to U^*})$ folgt. Es bleibt zu zeigen, dass alle Argumente aus $S'_{\to S}$ von $S'_{\to S}$ verteidigt werden. Dafür werden die drei Teilmengen, aus denen sich $S'_{\to S}$ zusammensetzt, einzeln betrachtet:
  - Ein Standardargument $j \in S$ wird nur von Angriffs-Hilfsargumenten $h_{(F,j)}$ angegriffen. Weil S konfliktfrei ist, gilt für F allerdings $F \nsubseteq S$. Daraus folgt direkt $h_{(F,j)} \in H_S'^+$ und alle Angriffe auf S werden durch H'_S verteidigt.
  - Ein Angriffs-Hilfsargument $h_{(C,d)} \in H_S$ wird nur von Standard-Hilfsargumenten h_c mit $c \in C$ und $C \subseteq S$ angegriffen. Daraus folgt, dass $c \in S$ und damit ist $h_c \in S^+$ enthalten. Alle Angriffe auf H_S werden durch S verteidigt.
  - Es gilt $H_S'^- = H_S^+$. Damit werden alle Argumente, die ein Argument aus H'_S angreifen, von H_S attackiert. Alle Argumente aus H'_S werden somit verteidigt.

Damit ist gezeigt, dass keine der drei Teilmengen von $S'_{\to S}$ angegriffen wird, ohne dass dieser Angriff von $S'_{\to S}$ verteidigt wird. Damit gilt $S'_{\to S} \in ad(I^*_{\to U^*})$.

- co: Da S eine mögliche co-Extension ist, gibt es eine Vervollständigung U^* von U, sodass $S \in co(U^*)$. Zu zeigen ist, dass $S'_{\to S}$ zulässig in $I^*_{\to U^*}$ ist und dass die Menge $S'_{\to S}$ keine weiteren Argumente verteidigt.

  Da S vollständig in U^* ist, ist S konfliktfrei und zulässig in U^*. Es wurde bereits gezeigt, dass daraus $S'_{\to S} \in ad(I^*_{\to U^*})$ folgt. Es bleibt zu zeigen, dass alle Argumente, die von $S'_{\to S}$ verteidigt werden, in $S'_{\to S}$ liegen. Angenommen, dies gilt nicht, dann gibt es ein Argument aus $B \setminus S'_{\to S}$, das von $S'_{\to S}$ verteidigt wird. Dieses Argument kann für die drei Argumenttypen einzeln betrachtet werden:

  - Sei $k \in B \setminus S'_{\to S}$ ein Standardargument, das von $S'_{\to S}$ verteidigt wird. Für den Fall, dass k allein dadurch verteidigt wird, dass k unattackiert ist, folgt direkt, dass k dann auch in U^* unattackiert ist. Damit kann aber die Menge S in U^* nicht vollständig sein, was zum Widerspruch führt. Für den Fall, dass k attackiert wird, gibt es ein Angriffs-Hilfsargument $h_{(J,k)}$, das von einem Standard-Hilfsargument $h_m \in S'_{\to S}$ mit $m \in J$ angegriffen wird und damit k verteidigt. Dann folgt aber auch, dass es ein Angriffs-Hilfsargument $h_{(G,m)} \in S'_{\to S}$ mit $G \subseteq S$ geben muss. Übertragen auf die Vervollständigung U^* muss es somit einen Mengenangriff (G, m) mit $G \subseteq S$ geben, der den Mengenangriff (J, k) verteidigt. Dann verteidigt S aber auch das Argument k in U^*. Daraus folgt, dass S in U^* aber nicht vollständig ist, was zum Widerspruch führt.
  - Sei $h_k \in B \setminus S'_{\to S}$ ein Standard-Hilfsargument, das von $S'_{\to S}$ verteidigt wird. Für den Fall, dass h_k allein dadurch verteidigt wird, dass h_k unattackiert ist, folgt direkt per Definition, dass $h_k \in H'_S \subseteq S'_{\to S}$. Dies führt zum Widerspruch, da per Annahme $h_k \in B \setminus S'_{\to S}$ gilt. Für den Fall, dass h_k attackiert wird, gibt es ein Standardargument k, das von einem Angriffs-Hilfsargument $h_{(G,k)} \in S'_{\to S}$ mit $G \subseteq S$ angegriffen und damit verteidigt wird. Wegen $h_{(G,k)} \in S'_{\to S}$ mit $G \subseteq S$ folgt direkt, dass bereits per Definition $h_k \in S'_{\to S}$ gilt. Dies führt ebenfalls zum Widerspruch, da per Annahme $h_k \in B \setminus S'_{\to S}$ gilt.
  - Sei $h_{(K,n)} \in B \setminus S'_{\to S}$ ein Angriffs-Hilfsargument, das von $S'_{\to S}$ verteidigt wird. Der Fall, dass $h_{(K,n)}$ allein dadurch verteidigt wird, dass h_k unattackiert ist, existiert nicht, da Angriffs-Hilfsargumente per Definition immer mindestens einen Angreifer haben. Somit wird $h_{(K,n)}$ attackiert. Gilt zudem $K \subseteq S$, dann folgt direkt $h_{(K,n)} \in H_S \subseteq S'_{\to S}$, was im Widerspruch zur Annahme steht. Gilt für $h_{(K,n)}$ hingegen $K \nsubseteq S$ und für ein $k \in K$ zudem $h_k \in H_S$, dann folgt direkt, dass $h_{(K,n)} \in H'^{+}_S$ gilt und damit von $S'_{\to S}$ angegriffen wird. Gilt für $h_{(K,n)}$ weiterhin $K \nsubseteq S$, aber es gibt kein $k \in K$ mit $h_k \in H_S$, dann kann $h_{(K,n)}$ aber nur vom Standardargument k verteidigt werden. Wegen $K \nsubseteq S$ und $k \in K$ gilt $k \notin S$ und damit auch $k \notin S'_{\to S}$. Alle

Fälle stehen im Widerspruch zu der Annahme, dass $h_{(K,n)}$ von $S'_{\to S}$ verteidigt wird.

Damit ist gezeigt, dass $S'_{\to S} \in co(I^*_{\to U^*})$ in allen Fällen gelten muss.

- gr: Da S eine mögliche gr-Extension ist, gibt es eine Vervollständigung U^* von U, sodass $S \in gr(U^*)$. Zu zeigen ist, dass $S'_{\to S}$ vollständig in $I^*_{\to U^*}$ ist und dass $S'_{\to S}$ minimal ist.

  Da S grundiert in U^* ist, ist S vollständig in U^*. Es wurde bereits gezeigt, dass daraus $S'_{\to S} \in co(I^*_{\to U^*})$ folgt. Es bleibt zu zeigen, dass es keine kleinere Menge $S'' \subset S'_{\to S}$ gibt, die ebenfalls vollständig in $I^*_{\to U^*}$ ist. Angenommen, es existiert ein Argument aus $S'_{\to S}$, das nicht in $S'' \subset S'_{\to S}$ enthalten ist und S'' ist grundiert in $I^*_{\to U^*}$. Dieses Argument muss dann einem der drei unterschiedlichen Argumenttypen entsprechen:

  – Sei k ein Standardargument, mit $k \in S'_{\to S}$ und $S'' = S'_{\to S} \setminus \{k\}$ die grundierte Extension in $I^*_{\to U^*}$. Angewendet auf U^* würde dies aber bedeuten, dass $S \setminus k$ grundiert ist. Dies steht im Widerspruch dazu, dass S grundiert ist.

  – Sei h_k ein Standard-Hilfsargument, mit $h_k \in S'_{\to S}$ und $S'' = S'_{\to S} \setminus \{h_k\}$ die grundierte Extension in $I^*_{\to U^*}$. Per Definition muss es dann ein $h_{(C,k)} \in S'_{\to S}$ geben und damit gilt auch $h_{(C,k)} \in S''$. Das Argument $h_{(C,k)} \in S''$ verteidigt dann aber wiederum das Argument h_k, weshalb S'' nicht vollständig sein kann. Dies steht im Widerspruch zur Annahme, dass S'' grundiert ist.

  – Sei $h_{(K,n)}$ ein Angriffs-Hilfsargument, mit $h_{(K,n)} \in S'_{\to S}$ und $h_{(K,n)} \notin S''$. Da es für jedes $k \in K$ einen Angreifer h_k gibt und weil $S'_{\to S}$ vollständig ist, muss es in $S'_{\to S}$ die dazugehörigen Verteidiger k geben. Damit sind alle Standardargumente k aber auch in S'' enthalten und verteidigen $h_{(K,n)}$, weshalb S'' nicht vollständig sein kann. Auch dies steht im Widerspruch zur Annahme.

- pr: Da S eine mögliche pr-Extension ist, gibt es eine Vervollständigung U^* von U, sodass $S \in pr(U^*)$. Zu zeigen ist, dass $S'_{\to S}$ vollständig in $I^*_{\to U^*}$ ist und dass $S'_{\to S}$ maximal ist.

  Da S präferiert in U^* ist, ist S vollständig in U^*. Es wurde bereits gezeigt, dass daraus $S'_{\to S} \in co(I^*_{\to U^*})$ folgt. Es bleibt zu zeigen, dass es keine größere Menge $S'' \supset S'_{\to S}$ gibt, die ebenfalls vollständig in $I^*_{\to U^*}$ ist. Angenommen, es existiert ein weiteres Argument aus $B \setminus S'_{\to S}$, das von $S'_{\to S}$ verteidigt wird. Dieses Argument muss dann einem der drei unterschiedlichen Argumenttypen entsprechen:

  – Sei $k \in B \setminus S'_{\to S}$ ein Standardargument, mit $k \notin S'_{\to S}$ und $S'' = S'_{\to S} \cup \{k\}$ eine präferierte Extension in $I^*_{\to U^*}$. Dann verteidigt $S'_{\to S}$ das Argument k. Angewendet auf U^* würde dies aber bedeuten, dass S das Argument k verteidigt und S somit nicht vollständig ist. Dies steht im Widerspruch dazu, dass S präferiert ist.

– Sei $h_k \in B \setminus S'_{\to S}$ ein Standard-Hilfsargument, mit $h_k \notin S'_{\to S}$ und $S'' = S'_{\to S} \cup \{h_k\}$ eine präferierte Extension in $I^*_{\to U^*}$. Für den Fall, dass h_k von S'' dadurch verteidigt wird, dass h_k nicht attackiert wird, folgt direkt, dass h_k bereits per Definition in $S'_{\to S}$ enthalten sein muss. Andernfalls muss es ein $h_{(C,k)} \in S''$ geben, das ebenfalls in $S'_{\to S}$ liegt und das Argument h_k verteidigt. Daraus folgt aber auch direkt, dass bereits $h_k \in S'_{\to S}$ gelten muss, was im Widerspruch zur Annahme steht. Somit kann es kein Standard-Hilfsargument geben, das von $S'_{\to S}$ verteidigt wird und noch nicht in $S'_{\to S}$ enthalten ist.

– Sei $h_{(K,n)} \in B \setminus S'_{\to S}$ ein Angriffs-Hilfsargument, mit $h_{(K,n)} \notin S'_{\to S}$ und $h_{(K,n)} \in S''$. Da es für jedes $k \in K$ einen Angreifer h_k gibt und weil S'' per Annahme vollständig ist, muss es in S'' die dazugehörigen Verteidiger k geben. Diese sind folglich dann auch in $S'_{\to S}$ enthalten. Daraus folgt direkt, dass $h_{(K,n)} \in S'_{\to S}$ gelten muss, weshalb $S'_{\to S}$ bereits maximal ist.

Damit ist gezeigt, dass $S'_{\to S} \in pr(I^*_{\to U^*})$ in allen Fällen gelten muss.

- st: Da S eine mögliche st-Extension ist, gibt es eine Vervollständigung U^* von U, sodass $S \in st(U^*)$. Zu zeigen ist, dass $S'_{\to S}$ konfliktfrei in $I^*_{\to U^*}$ ist und dass jedes Argument entweder in der Menge $S'_{\to S}$ enthalten ist oder von dieser angegriffen wird.

  Da S stabil in U^* ist, ist S konfliktfrei in U^*. Es wurde bereits gezeigt, dass daraus $S'_{\to S} \in cf(I^*_{\to U^*})$ folgt. Es bleibt zu zeigen, dass jedes Argument entweder in $S'_{\to S}$ liegt oder von $S'_{\to S}$ angegriffen wird. Dafür werden wieder die drei unterschiedlichen Argumenttypen betrachtet:

  – Standardargumente: Da S in U^* stabil ist, gibt es für jedes Argument $d \notin S$ einen Mengenangriff (C, d) mit $C \subseteq S$ auf das Argument d. Dann gilt für das Argument d in $I^*_{\to U^*}$ aber direkt per Definition $d \in H^+_S$. Somit wird d von $S'_{\to S}$ angegriffen.

  – Standard-Hilfsargumente: Da S in U^* stabil ist, gibt es für jedes Argument $d \notin S$ einen Mengenangriff (C, d) mit $C \subseteq S$ auf das Argument d. Per Definition folgt direkt, dass $h_d \in H'_S \subseteq S'_{\to S}$ gilt. Für alle Argumente $s \in S$ gilt ebenfalls per Definition $h_s \in S^+$. Diese werden somit angegriffen. Es bleibt der Fall, dass ein Argument $a \in \mathscr{A}^?_U$ als unsicheres Argument nicht in der Vervollständigung $I^*_{\to U^*}$ enthalten ist. Dann ist das zugehörige Standard-Hilfsargument h_a per Definition in $S'_{\to S}$. Somit liegen alle Standard-Hilfsargumente entweder in $S'_{\to S}$ oder werden von dieser Menge attackiert.

  – Angriffs-Hilfsargumente: Gilt für ein Angriffs-Hilfsargumente $h_{(C,d)}$ $C \subseteq S$, dann folgt per Definition, dass $h_{(C,d)} \in S'_{\to S}$ gilt. Gilt hingegen $C \nsubseteq S$ und gibt es ein $c \in C$ mit $h_c \in H_S$, dann folgt direkt $h_{(C,d)} \in H'^+$. Gilt $C \nsubseteq S$ und gibt es kein $c \in C$ mit $h_c \in H_S$, dann folgt, dass das Standardargument c

nicht von $S'_{\to S}$ angegriffen wird. Andernfalls wäre h_c per Definition in $S'_{\to S}$ enthalten. Dann folgt aber auch für U^*, dass $c \notin S$ und c ist unangegriffen. Dies steht im Widerspruch dazu, dass S in U^* stabil ist. Damit werden alle Angriffs-Hilfsargumente entweder von $S'_{\to S}$ angegriffen oder sind in dieser Menge enthalten.

Damit ist gezeigt, dass $S'_{\to S} \in st(I^*_{\to U^*})$ in allen Fällen gelten muss.

Die Gegenrichtung der Äquivalenz von Theorem 6.1, Punkt 1 erfolgt mit einer analogen Argumentation wie der soeben gezeigte Beweis. Für die Konfliktfreiheit gilt beispielsweise:

Sei S eine beliebige Menge von Argumenten aus U und sei $S'_{\to S} = S \cup H_S \cup H'_S$ die bzgl. S transformierte Menge entsprechend Definition 6.3. Sei $S'_{\to S}$ eine mögliche konfliktfreie Menge in I_U. Es ist zu zeigen, dass dann auch S eine mögliche konfliktfreie Menge in U ist. Betrachtet man alle Angriffs-Hilfsargumente $h_{(B,c)} \in H_S \subseteq S'_{\to S}$, fällt auf, dass diese nur in $S'_{\to S}$ enthalten sein können, wenn $B \subseteq S$ gilt. Da $S'_{\to S}$ eine mögliche konfliktfreie Menge ist, kann jedes Argument c, das von einem Angriffs-Hilfsargument $h_{(B,c)} \in H_S$ angegriffen wird, nicht in $S'_{\to S}$ und damit auch nicht in S enthalten sein. Angenommen, es gibt keine Vervollständigung vom iSetAF U, in der S konfliktfrei ist. Dann gibt es einen Mengenangriff (D, e), wobei für jedes $d \in D$ auch $d \in S$ und zudem $e \in S$ gilt. Daraus folgt per Definition Definition 6.3, dass die Menge D aber auch in $S'_{\to S}$ enthalten ist. Zudem gilt $e \in S'_{\to S}$ und es gibt ein Angriffs-Hilfsargument $h_{(D,e)} \in S'_{\to S}$. Wegen des Angriffs $(h_{(D,e)}, e)$ in I_U folgt aber direkt, dass $S'_{\to S}$ nicht konfliktfrei sein kann. Dies führt zum Widerspruch zur Annahme, weshalb S in U eine mögliche konfliktfreie Menge sein muss.

Aufgrund der strukturellen Ähnlichkeit und der Länge des Beweises wird im Rahmen dieser Arbeit auf eine ausführliche Darstellung der weiteren Beweise verzichtet. Dies betrifft insbesondere auch Theorem 6.1, Punkt 2, deren Gültigkeit sich in analoger Weise zu den bereits gezeigten Beweisen nachvollziehen lässt. □

Zum besseren Verständnis wird nachfolgend noch ein Beispiel gegeben.

Beispiel 6.3. Für das in Abbildung 38 dargestellte iSetAF U_{24} ist das transformierte iSetAF $I_{U_{24}}$ in Abbildung 39 abgebildet. In Abbildung 40 ist eine Vervollständigung vom iSetAF U_{24} dargestellt. Für diese Vervollständigung lässt sich die transformierte Vervollständigung entsprechend Definition 6.2 bilden. Diese transformierte Vervollständigung $I^*_{U^*_{24}}$ ist in Abbildung 41 abgebildet. Es ist leicht nachzuvollziehen, dass es sich hierbei tatsächlich auch um eine korrekte Vervollständigung von $I_{U_{24}}$ handelt. Zum Vergleich ist nun in Tabelle 7 anschaulich dargestellt, welche Mengen S bzw. $S'_{\to S}$ in U^*_{24} bzw. $I^*_{U^*_{24}}$ einer σ-Extension entsprechen und welche dieser nicht entsprechen. Gemäß Theorem 6.1 gilt immer: Wenn $S \in \sigma(U^*_{24})$, dann gilt auch $S'_{\to S} \in \sigma(I^*_{U^*_{24}})$.

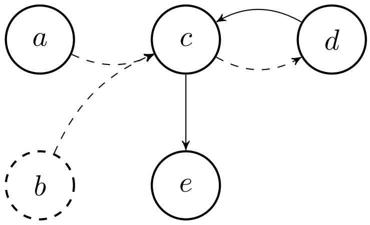

Abbildung 38: iSetAF U_{24} zu Beispiel 6.3. Eigene Darstellung.

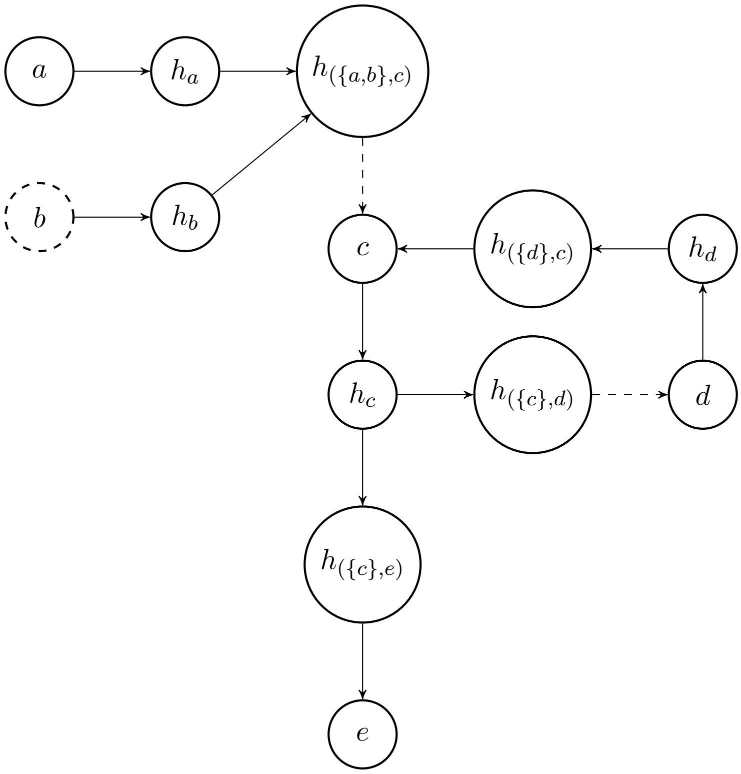

Abbildung 39: Transformiertes iSetAF $I_{U_{24}}$ zu Beispiel 6.3. Eigene Darstellung.

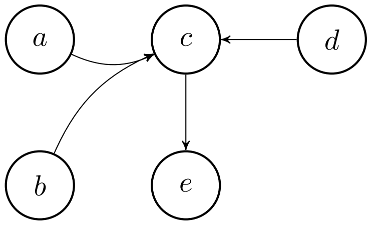

Abbildung 40: Eine Vervollständigung U_{24}^* vom iSetAF U_{24} aus Abbildung 39 zu Beispiel 6.3. Eigene Darstellung.

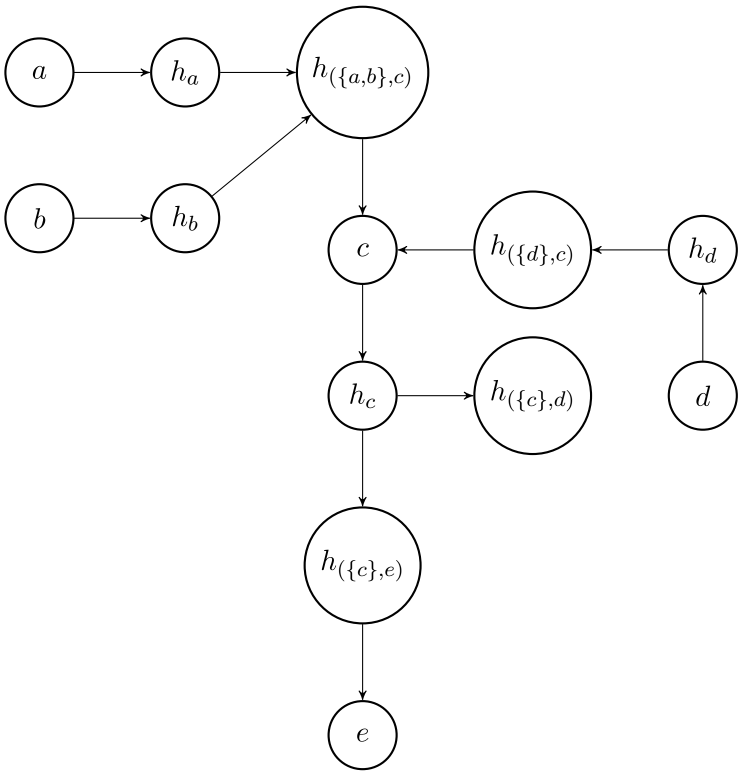

Abbildung 41: Transformierte Vervollständigung $I_{U_{24}^*}$ bzgl. der Vervollständigung U_{24}^* aus Abbildung 40 zu Beispiel 6.3. Eigene Darstellung.

	S	$\in \sigma(U_{24}^*)$	$S'_{\to S}$	$\in \sigma(I_{U_{24}^*})$
cf	$\{a, e\}$	✓	$\{a, e\}$	✓
	$\{a, b\}$	✓	$\{a, b, h_{(\{a,b\},c)}, h_c\}$	✓
	$\{a, b, c\}$	✗	$\{a, b, c, h_{(\{a,b\},c)}, h_{(\{c\},e)}, h_{(\{c\},d)}, h_c\}$	✗
ad	$\{d\}$	✓	$\{d, h_{(\{d\},c)}, h_c\}$	✓
	$\{a, b\}$	✓	$\{a, b, h_{(\{a,b\},c)}, h_c\}$	✓
	$\{e\}$	✗	$\{e\}$	✗
co	$\{a, b, d, e\}$	✓	$\{a, b, d, e, h_{(\{a,b\},c)}, h_{(\{d\},c)}, h_c\}$	✓
	$\{a, b, d\}$	✗	$\{a, b, d, h_{(\{a,b\},c)}, h_{(\{d\},c)}, h_c\}$	✗
pr	$\{a, b, d, e\}$	✓	$\{a, b, d, e, h_{(\{a,b\},c)}, h_{(\{d\},c)}, h_c\}$	✓
	$\{d, e\}$	✗	$\{d, e, h_{(\{d\},c)}, h_c\}$	✗
gr	$\{a, b, d, e\}$	✓	$\{a, b, d, e, h_{(\{a,b\},c)}, h_{(\{d\},c)}, h_c\}$	✓
	$\{a, b\}$	✗	$\{a, b, h_{(\{a,b\},c)}, h_c\}$	✗
st	$\{a, b, d, e\}$	✓	$\{a, b, d, e, h_{(\{a,b\},c)}, h_{(\{d\},c)}, h_c\}$	✓
	$\{a, b, e\}$	✗	$\{a, b, e, h_{(\{a,b\},c)}, h_c\}$	✗

Tabelle 7: Dargestellt sind unterschiedliche Mengen S bzw. $S'_{\to S}$, für die jeweils angegeben wird, ob diese in U_{24}^* bzw. $I_{U_{24}^*}$ einer σ-Extension entsprechen oder nicht. Dabei wird zwischen den Semantiken cf, ad, co, pr, gr und st unterschieden. Eigene Darstellung zu Beispiel 6.3.

Durch Theorem 6.1 wird deutlich, wie sich die Schlussfolgerungsprobleme für iSetAFs auf die entsprechenden Schlussfolgerungsprobleme für iAFs reduzieren lassen. Um ein Schlussfolgerungsproblem für iSetAFs zu lösen, wird das dazugehörige transformierte iSetAF bestimmt. Anschließend lässt sich das Problem leicht auf dieses iAF übertragen und lösen. Insbesondere gilt für p-CRED$_\sigma$, s-CRED$_\sigma$, p-SKEP$_\sigma$ und n-SKEP$_\sigma$, dass die Antwort `JA` ausgegeben wird, sofern das in der Eingabe übergebene Argument a in einer bzw. jeder Vervollständigung des transformierten iSetAFs I_U Teil einer bzw. jeder σ-Extension ist. Ansonsten lautet die Antwort `NEIN`.

Für die Probleme p-VER$_\sigma$ und n-VER$_\sigma$ hingegen wird die Antwort `JA` ausgegeben, sofern die bzgl. S (Eingabe) transformierte Menge $S'_{\to S}$ eine σ-Extension in einer bzw. jeder Vervollständigung des transformierten iSetAFs I_U ist. Ansonsten lautet die Antwort `NEIN`.

6.4 Ergebnisse

Nachdem in Unterabschnitt 6.3 gezeigt wurde, dass sich jedes iSetAF durch Eliminieren von Mengenangriffen zu einem iAF transformieren lässt, ohne dabei die semantischen Eigenschaften zu verlieren, sollen in diesem letzten Unterkapitel die Komplexitätseigenschaften von iSetAFs dargestellt werden. Diese Komplexitätseigenschaften lassen sich direkt von den Eigenschaften von iAFs übernehmen. Die Schlussfolgerungsprobleme p-CRED$_\sigma$, s-CRED$_\sigma$, p-SKEP$_\sigma$ und n-SKEP$_\sigma$ wurden für iAFs bereits von Baumeister, Neugebauer und Rothe [BNR18] untersucht. Die Verifikationsprobleme p-VER$_\sigma$

und n-VER$_\sigma$ wurden ebenfalls von Baumeister et al. [BNRS18] für iAFs untersucht. Die Ergebnisse lassen sich direkt auf iSetAFs übertragen und werden in Tabelle 8 dargestellt. Insbesondere heißt ein Schlussfolgerungsproblem *trivial*, wenn die Antwort unabhängig von der Eingabe immer `JA` bzw. immer `NEIN` lautet.

	p-CRED$_\sigma$	n-CRED$_\sigma$	p-SKEP$_\sigma$	n-SKEP$_\sigma$	p-VER$_\sigma$	n-VER$_\sigma$
cf	in P	in P	trivial	trivial	in P	in P
ad	NP-c	Π_2^P-c	trivial	trivial	in P	in P
co	NP-c	Π_2^P-c	NP-c	coNP-c	in P	in P
pr	NP-c	Π_2^P-c	Π_3^P-c	Π_2^P-c	Π_2^P-c	coNP-c
gr	NP-c	coNP-c	NP-c	coNP-c	in P	in P
st	NP-c	Π_2^P-c	Π_2^P-c	coNP-c	in P	in P

Tabelle 8: Komplexität der Schlussfolgerungsprobleme von iSetAFs, die von aus Ergebnissen der Komplexitätsuntersuchung für iAFs aus den Arbeiten von Baumeister, Neugebauer und Rothe bzw. Baumeister et al. [BNR18, BNRS18] übernommen wurden.

7 Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war die Entwicklung einer neuen Erweiterung der herkömmlichen abstrakten Argumentationsgraphen (AFs) von Dung [Dun95]. Diese Erweiterung ist das iSetAF (unsichere Argumentationsgraphen mit Mengenangriffen), das den Umgang sowohl mit Mengenangriffen als auch mit unsicherer Information in einem einheitlichen Modell ermöglichen sollte.

Ausgangspunkt dieser Arbeit waren dabei die klassischen von Dung eingeführten AFs, die es ermöglichen, Entscheidungsprozesse maschinell zu verarbeiten. Zudem dienten zwei bestehende Erweiterungen dieser AFs als Grundlage der im Rahmen dieser Arbeit zu entwickelnden Erweiterung: Argumentationsgraphen mit Mengenangriffen (SetAFs) von Nielsen und Parsons [NP06] und unvollständige Argumentationsgraphen (iAFs) von Coster Marquis et al. sowie Baumeister et al. [CMDK$^+$07, BNRS18].

All diese Frameworks erweitern die herkömmlichen AFs und ermöglichen die Modellierung zusätzlicher realweltlicher Szenarien. Allerdings gibt es auch Szenarien, in denen die Existenz von einzelnen Argumenten oder Mengenangriffen nicht sicher angenommen werden kann. Solche Szenarien konnten bislang nicht modelliert werden. Die Motivation war daher, diese Lücke zu schließen, indem sowohl Elemente aus Ansätzen zur Modellierung von Mengenangriffen als auch solche zur Behandlung von unvollständigem Wissen in einem weiteren Framework, dem iSetAF, integriert werden.

Im Rahmen der Arbeit wurde zunächst das iSetAF formal definiert. Dieses wurde als ein Tupel $U = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^?, \mathcal{R}, \mathcal{R}^?)$ definiert, das aus sicheren Argumenten $\mathcal{A}$, unsicheren Argumenten $\mathcal{A}^?$ sowie bedingt sicheren Mengenangriffen $\mathcal{R}$ und unsicheren Mengenangriffen $\mathcal{R}^?$ besteht. Dabei ist ein bedingt sicherer Mengenangriff immer genau dann gültig, wenn alle Argumente der angreifenden Menge gültig sind. Für unsichere Argumente und Angriffe kann nicht mit Sicherheit entschieden werden, ob diese gültig sind oder nicht. Es kann somit unterschiedliche Konstellationen geben.

Zur Auswertung und Entscheidungsfindung bzgl. solcher iSetAFs wurden anschließend zwei unterschiedliche Ansätze verfolgt. Dies war zum einen ein vervollständigungsbasierter Ansatz, ähnlich wie es bereits von Baumeister et al. [BNRS18] für iAFs gezeigt wurde. Zum anderen wurde ein extensionsbasierter Ansatz verfolgt, ähnlich wie es in der Arbeit von Mailly [Mai21] für iAFs gezeigt wurde.

Die Idee des vervollständigungsbasierten Ansatzes war es, alle möglichen Konstellationen des unsicheren Wissens durch Vervollständigungen zu berücksichtigen. Dabei ist eine Vervollständigung ein vom iSetAF abgeleitetes SetAF, bei dem kein unsicheres Wissen mehr enthalten ist. Auf Basis dieser Vervollständigungen ließen sich Aussagen über mögliche und notwendige σ-Extensionen treffen. Eine Menge von Argumenten bildet dabei genau dann eine mögliche σ-Extension, wenn sie in mindestens einer Vervollständigung des iSetAFs als σ-Extension akzeptiert wird. Eine notwendige σ-Extension liegt hingegen vor, wenn eine Menge von Argumenten in jeder möglichen Vervollständigung eine σ-Extension darstellt. Eine weitere Unterteilung erfolgte in eine leichtgläubige und eine skeptische Schlussfolgerung, wodurch insgesamt vier Schlussfolgerungsprobleme entstanden. Zusätzlich wurde noch das Verifikationsproblem betrachtet, bei dem Schlussfolgerungen für ganze Mengen getroffen werden konnten. Mit Hilfe dieser Probleme war es somit möglich, Aussagen über einzelne Argumente oder Mengen von Argumenten in den iSetAFs zu treffen. Beispielsweise lässt sich für ein einzelnes Argument schließen, dass es in jeder Vervollständigung Teil jeder σ-Extension ist. Für dieses Argument kann dann sicher angenommen werden, dass es in jedem Fall gültig und damit akzeptiert ist.

Für die Schlussfolgerungsprobleme wurde anschließend die Komplexität analysiert, da fraglich war, ob sich die Komplexität der Probleme erhöht, wenn sich die Aussagekraft des gesamten Frameworks erhöht. Tatsächlich zeigte sich, dass jedes iAF gleichzeitig auch ein iSetAF darstellt und sich zudem jedes iSetAF mittels Hilfsargumenten in polynomieller Zeit in ein iAF umwandeln lässt. Aus diesem Grund ließen sich auch die Komplexitätseigenschaften direkt von iAFs auf iSetAFs übertragen, da sich die Probleme für iSetAFs auf die Probleme für iAFs abbilden ließen. Die Ergebnisse der Komplexitätsbetrachtung wurden in Tabelle 8 in Abschnitt 6 dargestellt.

Der Nachteil des vervollständigungsbasierten Ansatzes war jedoch, dass immer alle Vervollständigungen berücksichtigt werden mussten, um Aussagen über das iSetAF treffen zu können. Die Anzahl der Vervollständigungen steigt allerdings exponentiell mit der Anzahl unsicherer Argumente und Angriffe. Aus diesem Grund wurde noch ein zweiter Ansatz verfolgt, der extensionsbasierte Ansatz. Bei diesem ging es darum, Aussagen über Mengen von Argumenten treffen zu können, ohne dass alle Vervollständigungen berücksichtigt werden mussten. Dafür wurden die klassischen Semantiken für AFs neu definiert und an das neue iSetAF angepasst. Dabei wurde jeweils eine schwache (w) und eine starke (s) Variante jeder Semantik definiert, wobei die schwache Ausprägung widerspiegelt, dass nur sichere Angriffe als Bedrohung angesehen werden, während in der starken Ausprägung auch unsichere Angriffe als Bedrohung angesehen und ggf. verteidigt werden müssen.

Neben der Definition dieser Semantiken wurden auch verschiedene Eigenschaften aus der Literatur untersucht, die als wünschenswert für Argumentationsframeworks angenommen wurden. Untersucht wurden dabei die Eigenschaften Syntaxunabhängigkeit, I-Maximalität, Enthaltung, Direktionalität, Dichtheit, Konfliktsensitivität und Modularisierung. Diese Postulate wurden angepasst, um auch Mengenangriffe zu berücksichtigen. Um auch die Besonderheiten von iSetAFs zu berücksichtigen und dabei den ursprünglichen Sinn der Postulate beizubehalten, mussten die Direktionalität, Dichtheit und Konfliktsensitivität abgeändert werden und es wurden die Eigenschaften Mengendirektionalität, Mengendichtheit und Mengenkonfliktsensitivität definiert.

Während die Syntaxunabhängigkeit unverändert analog der Ergebnisse für AFs auch für iSetAFs galt, konnte für die Mengendirektionalität, Mengendichtheit bzw. Mengenkonfliktsensitivität gezeigt werden, dass diese Eigenschaften von den Semantiken für iSetAFs genau dann erfüllt sind, wenn die klassischen Postulate Direktionalität, Dichtheit bzw. Konfliktsensitivität von den entsprechenden Semantiken für AFs erfüllt sind.

Auch die Postulate I-Maximalität und Enthaltung stimmten, bezogen auf iSetAFs, größtenteils mit den Ergebnissen von klassischen AFs überein. Für die I-Maximalität kam es lediglich bei der schwach stabilen Semantik und für die Enthaltung bei der schwach vollständigen Semantik zu Abweichungen. Bei der Modularisierung hingegen stimmte lediglich die schwache Ausprägung aller Semantiken mit den Ergebnissen von AFs überein. Bis auf die stark stabile Semantik erfüllten die starken Ausprägungen die Modularisierung grundsätzlich nicht. Eine genaue Übersicht der Ergebnisse wurde in Tabelle 5 und Tabelle 6 in Abschnitt 5 dargestellt.

Die vorliegende Arbeit zeigt, dass iSetAFs eine bedeutende Erweiterung klassischer Argumentationsframeworks darstellen, die es ermöglichen, unsichere Informationen und Mengenangriffe in einem einheitlichen Modell zu integrieren, ohne dabei die Komplexität der Schlussfolgerungsprobleme zu erhöhen. Zudem bleiben die wünschenswerten Eigenschaften für die meisten Semantiken für extensionsbasierte iSetAFs entsprechend der Ergebnisse für die herkömmlichen AFs erhalten.

Zum Abschluss dieser Arbeit folgt nun noch ein Fazit sowie ein Ausblick auf mögliche weitere Forschungsthemen.

7.1 Fazit

Die vorliegende Arbeit hat gezeigt, dass die klassischen abstrakten Argumentationsgraphen von Dung in ihrer herkömmlichen Form nicht ausreichen, um komplexe, mit Unsicherheit behaftete Entscheidungsprozesse realitätsnah abzubilden. Durch die Einführung von iSetAFs konnten sowohl Mengenangriffe als auch unvollständiges Wissen in einem einzigen Modell kombiniert werden.

Durch den vervollständigungsbasierten Ansatz lassen sich Schlussfolgerungen für die Akzeptanz einzelner Argumente oder Mengen von Argumenten ableiten. Interessant sind dabei insbesondere die notwendigen σ-Schlussfolgerungen für Mengen von Argumenten, da diese in jedem Fall gemeinsam akzeptiert werden können. Dabei ist die Existenz der weiteren unsicheren Argumente irrelevant. Mögliche σ-Schlussfolgerungen hingegen dienen nur als erste Einschätzung über die Akzeptanz von Argumenten oder Mengen von Argumenten. Diese Schlussfolgerungen unterliegen selbst einer gewissen Unsicherheit und hängen von der Existenz weiterer Argumente in der Realität ab. Das heißt, es bleibt weiterhin unklar, ob eine Menge tatsächlich eine zu akzeptierende Extension bildet oder nicht.

Allerdings führt der vervollständigungsbasierte Ansatz in Szenarien mit hoher Unsicherheit und mit vielen Argumenten zu einer erheblichen Steigerung der Berechnungsaufwände, da die Anzahl der Vervollständigungen exponentiell mit der Anzahl unsicherer Komponenten wächst.

Um den letztgenannten Nachteil zu umgehen, ist der extensionsbasierte Ansatz eine gute Alternative, da sämtliche Berechnungen unmittelbar auf dem iSetAF durchgeführt werden können, ohne Vervollständigungen bilden zu müssen. Insbesondere können die Extensionen direkt aus dem iSetAF abgeleitet werden. Durch die Abgrenzung der Semantiken in eine schwache und eine starke Ausprägung, lassen sich zwei Arten von Extensionen direkt aus dem iSetAF ableiten:

- Extensionen, die in gewissen Situationen gültig sind. Bei der schwachen Ausprägung werden unsichere Argumente oder Angriffe nicht als Angreifer wahrgenommen. Diese Extensionen sind somit gültig, sofern potenziell angreifende unsichere Elemente in der Realität nicht existieren.
- Extensionen, die in jedem Fall gültig sind. Bei der starken Ausprägung werden alle Angriffe verteidigt, sodass eine solche Extension zwingend gültig ist, unabhängig davon, ob unsichere Argumente oder unsichere Angriffe tatsächlich existieren oder nicht.

Es lassen sich somit, ähnlich wie beim vervollständigungsbasierten Ansatz, immer Extensionen finden, die in einer bestimmten Situation akzeptabel sind und Extensionen, die immer akzeptabel sind.

Der Nachteil des extensionsbasierten Ansatzes ist jedoch, dass dabei nicht jede mögliche Konstellation von Argumenten berücksichtigt werden kann. Es werden immer alle unsicheren Argumente und unsicheren Angriffe in Kombination entweder als unbedrohlich oder bedrohlich angesehen. Dabei kann nicht zwischen unsicheren Argumenten unterschieden werden, die mit hoher Wahrscheinlichkeit existieren und unsicheren Argumenten, die mit geringer Wahrscheinlichkeit existieren.

7.2 Ausblick

Die Ergebnisse dieser Arbeit bieten viele Möglichkeiten für weiterführende Forschungsarbeiten. Zukünftige Ansätze könnten das Framework dahingehend erweitern, dass auch Angriffe auf Mengen explizit zugelassen werden. Einen ähnlichen Ansatz verfolgten bereits Dimopoulos et al. [DDK$^+$23], bei dem eine ähnliche Form von iSetAFs eingeführt wurde, bei der allerdings nur Angriffe unsicher sein konnten. Argumente waren dabei nicht mit unsicherem Wissen behaftet.

Ein weiterer vielversprechender Forschungsansatz besteht darin, Wahrscheinlichkeiten bei der Modellierung unvollständiger Information zu berücksichtigen. Auf diese Weise ließe sich für unsichere Argumente oder Angriffe abschätzen, wie wahrscheinlich deren Existenz tatsächlich ist. Solche probabilistischen Argumentationsgraphen wurden bereits von Li, Oren und Norman eingeführt [LON11], wobei sich diese nur auf die klassischen AFs von Dung beziehen.

Eine weitere Möglichkeit ist die Erweiterung der Semantiken. In dieser Arbeit wurden lediglich die Standard-Semantiken von Dung im Rahmen des extensionsbasierten Ansatzes neu definiert. Mittlerweile existieren jedoch zahlreiche weitere Semantiken, die sich ebenfalls für die Anwendung auf iSetAFs neu definieren lassen, was Aufgabe zukünftiger Arbeiten sein könnte. Beispielsweise könnten die semi-stabile Semantik von Caminada [Cam06], die ideale Semantik von Dung et al. [DMT07] oder die stage-Semantik von Verhej [Ver96] so angepasst werden, dass diese mit Mengenangriffen und unsicherem Wissen kompatibel sind.

Darüber hinaus wäre auch eine Untersuchung weiterer Eigenschaften denkbar. Neben den in dieser Arbeit ausgewählten Eigenschaften gibt es noch zahlreiche weitere wünschenswerte Eigenschaften. Beispielsweise wurden von Dvořák et al. [DKUW24] bereits weitere Eigenschaften wie die Naivität (*naivety*), die Widereinsetzung (*reinstatement*) oder die Widerstandsfähigkeit (*crash-resistence*) in Bezug auf SetAFs untersucht. Die Untersuchung der Erfüllung bzw. Nichterfüllung dieser Eigenschaften für iSetAFs könnte Ziel weiterer Forschungsansätze sein.

Letztlich wäre auch eine praktische Implementierung und Evaluation in realen Szenarien ein denkbarer nächster Schritt. Auf diese Weise ließen sich die theoretischen Erkenntnisse dieser Arbeit in die praktische Anwendung überführen. Zudem könnte der Mehrwert des Frameworks für die maschinelle Entscheidungsunterstützung in komplexen, mit Unsicherheit behafteten Umgebungen praktisch getestet werden.

Literatur

[BBU22] Ringo Baumann, Gerhard Brewka, and Markus Ulbricht. Shedding new light on the foundations of abstract argumentation: Modularization and weak admissibility. *Artificial Intelligence*, 310:103742, 2022.

[BCD+21] Antonis Bikakis, Andrea Cohen, Wolfgang Dvorak, Giorgos Flouris, and Simon Parsons. Joint attacks and accrual in argumentation frameworks. *Journal of Applied Logics*, 8(6):1437–1501, 2021.

[BCG18] Pietro Baroni, Martin Caminada, and Massimiliano Giacomin. Abstract argumentation frameworks and their semantics. In *Handbook of formal argumentation*, pages 159–236. College Publications, 2018.

[BG07] Pietro Baroni and Massimiliano Giacomin. On principle-based evaluation of extension-based argumentation semantics. *Artificial Intelligence*, 171(10-15):675–700, 2007.

[BGGVdT18] Pietro Baroni, Dov Gabbay, Massimilino Giacomin, and Leendert Van der Torre. Handbook of formal argumentation. 2018.

[BNR18] Dorothea Baumeister, Daniel Neugebauer, and Jörg Rothe. Credulous and skeptical acceptance in incomplete argumentation frameworks. In *Computational Models of Argument*, pages 181–192. IOS Press, 2018.

[BNRS18] Dorothea Baumeister, Daniel Neugebauer, Jörg Rothe, and Hilmar Schadrack. Verification in incomplete argumentation frameworks. *Artificial Intelligence*, 264:1–26, 2018.

[Cam06] Martin Caminada. Semi-stable semantics. *COMMA*, 144:121–130, 2006.

[CD20] Marcos Cramer and Jérémie Dauphin. A first approach to argumentation label functions. In *Computational Models of Argument*, pages 159–166. IOS Press, 2020.

[CMDK+07] Sylvie Coste-Marquis, Caroline Devred, Sébastien Konieczny, Marie-Christine Lagasquie-Schiex, and Pierre Marquis. On the merging of dung's argumentation systems. *Artificial Intelligence*, 171(10-15):730–753, 2007.

[DDK+23] Yannis Dimopoulos, Wolfgang Dvorák, Matthias König, Anna Rapberger, Markus Ulbricht, and Stefan Woltran. Sets attacking sets in abstract argumentation. In *NMR*, pages 22–31, 2023.

[DDLW15] Paul E. Dunne, Wolfgang Dvořák, Thomas Linsbichler, and Stefan Woltran. Characteristics of multiple viewpoints in abstract argumentation. *Artificial Intelligence*, 228:153–178, 2015.

[DFW19] Wolfgang Dvořák, Jorge Fandinno, and Stefan Woltran. On the expressive power of collective attacks. *Argument & Computation*, 10(2):191–230, 2019.

[DKUW24] Wolfgang Dvořák, Matthias König, Markus Ulbricht, and Stefan Woltran. Principles and their computational consequences for argumentation frameworks with collective attacks. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 79:69–136, 2024.

[DMT07] Phan Minh Dung, Paolo Mancarella, and Francesca Toni. Computing ideal sceptical argumentation. *Artificial Intelligence*, 171(10-15):642–674, 2007.

[Dun95] Phan Minh Dung. On the acceptability of arguments and its fundamental role in nonmonotonic reasoning, logic programming and n-person games. *Artificial intelligence*, 77(2):321–357, 1995.

[LON11] Hengfei Li, Nir Oren, and Timothy J Norman. Probabilistic argumentation frameworks. In *International workshop on theorie and applications of formal argumentation*, pages 1–16. Springer, 2011.

[Mai21] Jean-Guy Mailly. Extension-based semantics for incomplete argumentation frameworks. In *Logic and Argumentation: 4th International Conference, CLAR 2021, Hangzhou, China, October 20–22, 2021, Proceedings 4*, pages 322–341. Springer, 2021.

[Mai23] Jean-Guy Mailly. Extension-based semantics for incomplete argumentation frameworks: Grounded semantics and principles. In *European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches with Uncertainty*, pages 84–94. Springer, 2023.

[Mai24] Jean-Guy Mailly. Grounded semantics and principle-based analysis for incomplete argumentation frameworks. *International Journal of Approximate Reasoning*, page 109282, 2024.

[MBC11] Sanjay Modgil and Trevor JM Bench-Capon. Metalevel argumentation. *Journal of Logic and Computation*, 21(6):959–1003, 2011.

[NP06] Søren Holbech Nielsen and Simon Parsons. A generalization of dung's abstract framework for argumentation: Arguing with sets of attacking arguments. In *International Workshop on Argumentation in Multi-Agent Systems*, pages 54–73. Springer, 2006.

[vdTV17] Leon van der Torre and Srdjan Vesic. The principle-based approach to abstract argumentation semantics. *IfCoLog Journal of Logics and Their Applications*, 2017.

[Ver96] Bart Verheij. Two approaches to dialectical argumentation: admissible sets and argumentation stages. *Proc. NAIC*, 96:357–368, 1996.

[VP00] Gerard AW Vreeswik and Henry Prakken. Credulous and sceptical argument games for preferred semantics. In *European workshop on logics in artificial intelligence*, pages 239–253. Springer, 2000.