

# Aggregierte rangbasierte Semantiken für abstrakte Argumentation

## Masterarbeit

zur Erlangung des Grades *Master of Science (M.Sc.)*  
im Studiengang Praktische Informatik

vorgelegt von  
Ulla Wege

Erstgutachter: Prof. Dr. Matthias Thimm  
Artificial Intelligence Group

Betreuer: Kenneth Skiba  
Artificial Intelligence Group



# Erklärung

Ich erkläre, dass ich die Masterarbeit selbstständig und ohne unzulässige Inanspruchnahme Dritter verfasst habe. Ich habe dabei nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet und die aus diesen wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht. Die Versicherung selbstständiger Arbeit gilt auch für enthaltene Zeichnungen, Skizzen oder graphische Darstellungen. Die Masterarbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form weder derselben noch einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch nicht veröffentlicht. Mit der Abgabe der elektronischen Fassung der endgültigen Version der Masterarbeit nehme ich zur Kenntnis, dass diese mit Hilfe eines Plagiatserkennungsdienstes auf enthaltene Plagiate geprüft werden kann und ausschließlich für Prüfungszwecke gespeichert wird.

Der Veröffentlichung dieser Arbeit auf der Webseite des Lehrgebiets Künstliche Intelligenz und damit dem freien Zugang zu dieser Arbeit stimme ich ausdrücklich zu.

Für diese Arbeit erstellte Software wurde quelloffen verfügbar gemacht, ein entsprechender Link zu den Quellen ist in dieser Arbeit enthalten. Gleiches gilt für angefallene Forschungsdaten.

Berlin, 24.9.2025

.....  
(Ort, Datum)



.....  
(Unterschrift)



## **Zusammenfassung**

In der abstrakten Argumentationstheorie sind eine große Anzahl an unterschiedlichen rangbasierten Semantiken zu finden. In dieser Arbeit werden aus ausgewählten rangbasierten Semantiken neue aggregierte rangbasierte Semantiken gebildet. Diese fassen Rangordnungen von rangbasierten Semantiken zusammen und bilden eine aggregierte Rangordnung. Konkrete Aggregationen werden ähnlich zu den Wahlregeln der Pluralitätswahl, der Copeland-Wahl und der Borda-Wahl aus der Sozialwahltheorie definiert. Anschließend werden die aggregierten rangbasierten Semantiken auf ihre Eigenschaften hin untersucht.

## **Abstract**

In the field of abstract argumentation, diverse ranking-based semantics are defined, each of which assigns a ranking to the arguments in an argumentation framework. These rankings can differ in some aspects between semantics. In this thesis, new aggregated ranking-based semantics are explored, which merge several rankings into one collective ranking. With the ideas of the plurality, the Copeland and the Borda social welfare functions, families of aggregated ranking-based semantics are defined. Afterwards, a selection of ranking-based semantics are aggregated and common properties of ranking-based semantics are assessed.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Grundlagen abstrakter Argumentation</b>	<b>3</b>
2.1. Extensionsbasierte Semantiken . . . . .	3
2.2. Rangbasierte Semantiken . . . . .	5
2.2.1. Die Kategorisierersemantik . . . . .	6
2.2.2. Die diskussionsbasierte Semantik . . . . .	8
2.2.3. Die büldenbasierte Semantik . . . . .	9
2.2.4. Die strategiebasierte Semantik . . . . .	10
2.2.5. Eigenschaften von rangbasierten Semantiken . . . . .	13
2.2.6. Abhängigkeiten der Eigenschaften . . . . .	20
2.2.7. Eigenschaften der betrachteten rangbasierten Semantiken . . . . .	21
<b>3. Konstruktion aggregierter rangbasierter Semantiken</b>	<b>24</b>
3.1. Pluralitäts-aggregierte Semantiken . . . . .	26
3.2. Copeland <sup>α</sup> -aggregierte rangbasierte Semantiken . . . . .	28
3.3. Borda <sup>α</sup> -aggregierte rangbasierte Semantiken . . . . .	29
3.4. Beispiele: Aggregationen von vier rangbasierten Semantiken . . . . .	31
<b>4. Untersuchung der aggregierten rangbasierten Semantiken auf ihre Eigenschaften</b>	<b>40</b>
4.1. Zusammenhang zwischen Erhaltung und Übertragbarkeit von Eigenschaften . . . . .	42
4.2. Erhaltung der aggregierten rangbasierten Semantiken . . . . .	44
4.3. Untersuchung der aggregierten rangbasierten Semantiken auf Übertragbarkeit von Eigenschaften . . . . .	47
4.4. Untersuchung der aggregierten rangbasierten Semantiken auf Mehrheitsübertragbarkeit von Eigenschaften . . . . .	59
<b>5. Diskussion</b>	<b>70</b>
<b>6. Fazit</b>	<b>72</b>
<b>A. Tabellen</b>	<b>1</b>



# 1. Einleitung

*Formale Argumentation* ist ein Teilgebiet der künstlichen Intelligenz und beschäftigt sich mit Formalismen, welche die menschliche Argumentation nachbilden und Schlussfolgerungen ziehen. Anwendungsgebiete sind überall dort zu finden, wo argumentiert wird: so zum Beispiel in online Diskussionsplattformen [18, 26, 4] oder bei der Entscheidungsunterstützung [1] beispielsweise im juristischen [21] oder medizinischen [23] Bereich.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Teilgebiet der *abstrakten Argumentationstheorie*, die auf Dung [17] zurück geht. Menschliche Argumentationen werden mit Argumenten als Knoten ohne Inhalt und ihren Angriffen als gerichteten Kanten untereinander in *abstrakten Argumentationsgraphen* abstrahiert. Semantiken interpretieren die Argumente nur anhand der Struktur des jeweiligen abstrakten Argumentationsgraphens auf unterschiedliche Weisen und verleihen dem Argumentationsgraphen *Sinn*. Die klassischen extensionsbasierten Semantiken akzeptieren eine Menge von Argumenten und lehnen die übrigen Argumente ab. Eine weitere wichtige Familie von Semantiken sind die rangbasierten Semantiken, welche eine Rangordnung nach Argumentationsstärke der Argumente festlegen, damit Argumente miteinander differenzierter verglichen werden können. In der Literatur wird eine Vielzahl rangbasierter Semantiken definiert [14, 19, 1, 22, 8, 9] und auf ihre Eigenschaften untersucht. Diese weisen den Argumenten desselben Argumentationsgraphen teils unterschiedliche Rangfolgen zu. Welche Rangfolge soll bei solch verschiedenen Ergebnissen in Betracht gezogen werden? Eine Art Abstimmung der Rangfolgen zu einer gemeinsamen Rangfolge könnte die Ergebnisse zu einer gewählten gemeinsamen Rangfolge zusammenfassen - eine aggregierte Rangfolge. Können verschiedene rangbasierte Semantiken *sinnvoll* zu einer neuen aggregierten rangbasierten Semantik zusammengefasst werden?

In dieser Arbeit wird untersucht, ob mit Hilfe von ausgewählten Wahlregeln aus der Sozialwahltheorie [24, 12] *sinnvolle* aggregierte rangbasierte Semantiken gebildet werden können. Es werden drei Familien aggregierter rangbasierter Semantiken jeweils auf einer Wahlregel aufbauend definiert und auf ihre Eigenschaften hin untersucht. Es wird der Frage nachgegangen, ob sich Eigenschaften der rangbasierten Semantiken auf die aggregierte Semantik übertragen, oder ob sie verloren gehen. Die Rolle der Wahlregel wird dabei ebenfalls untersucht.

Für die Beantwortung der Forschungsfrage findet zunächst eine Untersuchung der jeweiligen Aggregationen von vier rangbasierten Semantiken auf ihre Eigenschaften statt. Erste Gegenbeispiele für verschiedene Eigenschaften werden dabei herausgearbeitet. Anschließend wird versucht allgemeingültige Beweise für Eigenschaften, die sich von den rangbasierten Semantiken auf die jeweilige aggregierte Semantik *übertragen*, oder weitere Gegenbeispiele zu finden. Zuletzt wird noch untersucht, ob die aggregierten Semantiken Eigenschaften erfüllen, wenn eine Mehrheit der zu aggregierenden rangbasierten Semantiken die jeweilige Eigenschaft erfüllt. Für eine schnellere Berechnung der Ränge und ein einfacheres Finden von Ge-

genbeispielen für konkrete Argumentationsgraphen findet eine Implementierung der aggregierten rangbasierten Semantiken statt. Dabei wird das Tweety-Projekt [27, 28] erweitert<sup>1</sup>. Bestehende Implementierungen wie die einiger rangbasierter Semantiken, sowie die Überprüfung einiger Eigenschaften werden erweitert und genutzt. Der interne Generator für Argumentationsgraphen wird dafür verwendet um kleinere Gegenbeispiele zu finden.

Diese Arbeit ist wie folgt aufgebaut: In Kapitel zwei werden aus der Literatur theoretische Grundlagen zusammengestellt. So werden abstrakte Argumentationsgraphen formal eingeführt und anschließend zwei unterschiedliche Familien von Semantiken vorgestellt: die extensionsbasierten Semantiken in Kapitel 2.1 und die rangbasierten Semantiken in Kapitel 2.2. Für die rangbasierten Semantiken werden weiterhin vier Beispielsemantiken und wichtige Eigenschaften vorgestellt.

In Kapitel drei wird allgemein der Begriff einer aggregierten rangbasierten Semantik definiert und anschließend werden mittels Ideen aus der Sozialwahltheorie drei Familien aggregierter Semantiken definiert. Zuletzt werden diese Definitionen genutzt um mit den vier rangbasierten Semantiken aus Kapitel 2 aggregierte rangbasierte Semantiken zu bilden und erste Gegenbeispiele für nicht erfüllte Eigenschaften aufzuzeigen.

In Kapitel 4 werden die drei Familien aggregierter rangbasierter Semantiken aus Kapitel 3 auf eine allgemeine Erfüllung der in Kapitel 2 eingeführten Eigenschaften untersucht. Es wird untersucht, welche Eigenschaften sich von den rangbasierten Semantiken auf die aggregierte rangbasierte Semantik *übertragen*.

In Kapitel fünf findet eine Diskussion der Ergebnisse statt und Kapitel 6 schließt mit einem Fazit.

---

<sup>1</sup>Die Erweiterung des Tweety-Projekts für diese Arbeit befindet sich unter [https://github.com/UWege/TweetyProject\\_AggregatedRankingSemantics](https://github.com/UWege/TweetyProject_AggregatedRankingSemantics).

## 2. Grundlagen abstrakter Argumentation

In der abstrakten Argumentationstheorie werden Diskussionen oder Debatten auf die einzelnen Argumente und deren Angriffe untereinander abstrahiert und in einem *abstrakten Argumentationsgraphen* (engl. *abstract argumentation framework*) beschrieben. Dieser geht auf Dung zurück [17].

**Definition 2.1** (abstrakter Argumentationsgraph). Ein *abstrakter Argumentationsgraph* (kurz: Argumentationsgraph) ist ein geordnetes Paar  $F = (A, R)$ . Dabei ist  $A$  eine endliche Menge von Argumenten und  $R \subseteq A \times A$  eine binäre Relation auf  $A$ , welche die Angriffe darstellt.

**Notation.** In einem Argumentationsgraphen  $F = (A, R)$  mit zwei Argumenten  $a, b \in A$  bedeutet die Relation  $R$  für  $(a, b) \in R$ , dass Argument  $a$  Argument  $b$  *angreift*. Dafür wird im Folgenden auch verkürzt  $aRb$  geschrieben (wie beispielsweise bei Amgoud und Ben-Naim [1] und Cayrol und Lagasquie-Schiex [13]).

Insbesondere spielen in der Argumentationstheorie Angriffe auf bzw. von einer Menge eine große Rolle. Daher seien für eine Menge  $S \subseteq A$  die folgenden Bezeichnungen definiert:

- $S^- := \{b \in A \mid \exists a \in S : bRa\}$  die Menge der Angreifer von  $S$ ,
- $S^+ := \{b \in A \mid \exists a \in S : aRb\}$  die Menge der von  $S$  Angegriffenen.

Argumentationsgraphen können als gerichtete (einfache) Graphen dargestellt und als solche behandelt werden. Dafür werden die Argumente der Argumentationsgraphen als Knoten und die Angriffe zwischen den Argumenten als Kanten betrachtet. Daher können Konzepte aus der Graphentheorie, wie beispielsweise die der Kantenzüge, der Wege und der (schwachen) Zusammenhangskomponenten, übernommen und in gleicher Weise auf Argumentationsgraphen angewendet werden.

**Beispiel 1.** Als Beispiel für einen Argumentationsgraphen sei  $F_1 = (A_1, R_1)$  mit abstrahierten Argumenten  $A_1 = \{a, b, c, d, e, f\}$  und Angriffen  $R_1 = \{(a, b), (a, c), (b, d), (d, d), (d, e), (e, d), (c, e), (c, f), (e, f), (f, e)\}$ . In Abbildung 1 befindet sich eine Darstellung des Argumentationsgraphens als gerichteten einfachen Graphen.

Seien  $S_1 := \{a, f\}$  und  $S_2 := \{d, e\}$  Teilmengen von Argumenten von  $F_1$ , dann ist  $S_1^- = \{c, e\}$ ,  $S_1^+ = \{b, c, e\}$  und  $S_2^- = \{b, c, d, e, f\}$ ,  $S_2^+ = \{d, e, f\}$ .

**Bemerkung.** Ursprünglich definierte Dung abstrakte Argumentationsgraphen nicht mit einer endlichen Anzahl an Argumenten. Wie bei Amgoud und Ben-Naim sowie anderen Autoren [1, 9] werden Argumentationsgraphen in dieser Arbeit auf eine **endliche** Menge von Argumenten eingeschränkt.

### 2.1. Extensionsbasierte Semantiken

Extensionsbasierte Semantiken sind eine Menge von Argumenten aus einem Argumentationsgraphen, die in gewisser Weise zusammen *Sinn* ergeben und die gemeinsam *akzeptiert* werden können.

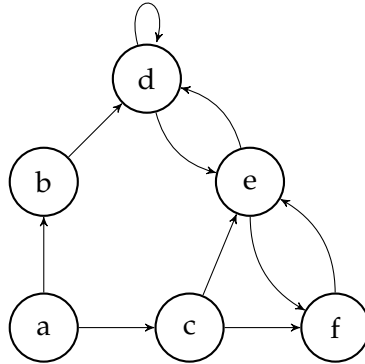


Abbildung 1: Der Argumentationsgraph  $F_1$ .

Die Eigenschaft der *Konfliktfreiheit* einer Menge schließt aus, dass sich Elemente untereinander angreifen.

**Definition 2.2** (Konfliktfreiheit [17]). Sei  $F = (A, R)$  ein Argumentationsgraph. Eine Menge  $S$  von Argumenten aus  $A$  heißt *konfliktfrei* (engl. *conflict-free*) in  $F$ , falls es keine Argumente  $a, b \in S$  gibt mit  $aRb$ .

**Beispiel 2** (Fortführung Beispiel 1). Im Argumentationsgraphen  $F_1$  aus Abbildung 1 ist die Menge  $S_1$  konfliktfrei, während  $S_2$  nicht konfliktfrei ist.

Gegen Angriffe können Argumente wie folgt *verteidigt* (engl. *defended*; ursprünglich *acceptable* [17]) werden.

**Definition 2.3** (Verteidigung [17]). Sei  $F = (A, R)$  ein Argumentationsgraph,  $S \subseteq A$  eine Teilmenge von Argumenten und  $a \in A$  ein Argument. Die Menge  $S$  *verteidigt* (engl. *defends*) das Argument  $a$  in  $F$  gdw. für alle  $b \in A$  mit  $bRa$  gibt es ein  $c \in S$  mit  $cRb$ .

**Beispiel 3.** In  $F_1$  aus Abbildung 1 verteidigt die Menge  $S_1$  das Argument  $f$ .

Zusammen ergeben die Begriffe der Konfliktfreiheit und der Verteidigung eine *zulässige Menge* wie folgt:

**Definition 2.4** (Zulässigkeit [17]). Sei  $F = (A, R)$  ein Argumentationsgraph. Eine konfliktfreie Menge von Argumenten  $S \subseteq A$  ist *zulässig* (engl. *admissible*) gdw. jedes Argument  $a \in S$  von  $S$  verteidigt wird.

**Beispiel 4.** In unserem Beispielgraphen  $F_1$  aus Abbildung 1 ist die Menge  $S_1$  zulässig, da jedes ihrer Argumente von Argumenten aus der Menge selbst verteidigt wird.

Mit diesen Begriffen werden verschiedene *sinnvolle* bzw. *akzeptable* Mengen definiert. Diese heißen *Extensionen*.

**Definition 2.5** (Extensionsbasierte Semantiken [17, 2]). Sei  $F = (A, R)$  ein Argumentationsgraph.

- Eine zulässige Menge  $S$  ist eine *vollständige* (co, engl. *complete*) *Extension* von  $F$  gdw.  $S$  jedes Argument enthält, dass es verteidigt.
- $S$  ist eine *präferierte* (pr, engl. *preferred*) *Extension* von  $F$  gdw.  $S$  eine maximal vollständige Extension ist (bzgl. Mengeninklusion).
- Eine konfliktfreie Menge  $S$  ist eine *stabile* (st, engl. *stable*) *Extension* von  $F$  gdw. es jedes Argument in  $A \setminus S$  angreift.
- $S$  ist eine *grundierte* (gr, engl. *grounded*) *Extension* von  $F$  gdw.  $S$  eine minimal vollständige Extension ist (bzgl. Mengeninklusion).

**Bemerkung.** Stabile Extensionen sind auch vollständig und eine grundierte Extension ist immer eindeutig.

**Beispiel 5.** Im Argumentationsgraphen  $F_1$  aus Abbildung 1 sind die Mengen  $S_1 = \{a, f\}$ ,  $S_3 := \{a, e\}$  und  $S_4 := \{a\}$  vollständige Extensionen. Die Mengen  $S_1$  und  $S_3$  sind maximal vollständige Extensionen und damit präferierte Extensionen.  $S_3$  ist stabil, da die Menge zulässig ist und alle übrigen Argumente aus  $F$  angreift:  $S_3^+ = \{b, c, d, f\}$  und  $S_3 \cup S_3^+ = A$ .  $S_4$  ist die grundierte Extension.

## 2.2. Rangbasierte Semantiken

Eine andere Möglichkeit die Argumente eines Argumentationsgraphen zu interpretieren ist mittels rangbasierter Semantiken. Diese weisen den Argumentationsgraphen Rangordnungen zu, mit denen Argumente paarweise verglichen werden können. Damit kann eine Aussage darüber gemacht werden kann, welches Argument von beiden *akzeptabler* ist. Es müssen allerdings nicht alle Paare von Argumenten verglichen werden können, es kann in speziellen rangbasierten Semantiken auch unvergleichbare Argumente geben.

**Definition 2.6** (Rangbasierte Semantik [10]). Eine *rangbasierte Semantik*  $\theta$  ordnet jedem abstrakten Argumentationsgraphen  $F = (A, R)$  eine *Rangordnung*  $\theta(F)$  zu. Dabei ist  $\theta(F)$  eine Präordnung (eine reflexive und transitive Relation) auf  $A$ . Als Schreibweise wird im Folgenden  $\theta(F) = \succeq_F^\theta$  genutzt. Argument  $a$  ist mindestens so *akzeptabel* wie  $b$ , falls  $a \succeq_F^\theta b$  für  $a, b \in A$  gilt. Weiterhin wird mit  $a \succ_F^\theta b$  bezeichnet, dass  $a$  *strikt akzeptabler* als  $b$  ist für  $a, b \in A$ , falls  $a \succeq_F^\theta b$  und  $b \not\succeq_F^\theta a$ .

Bei deutlicher Kennzeichnung der rangbasierten Semantik  $\theta$  und des zugehörigen Argumentationsgraphens  $F$  wird in dieser Arbeit aus Gründen der besseren Lesbarkeit teilweise in Rangordnungen  $\succeq, \succ, \simeq$  statt  $\succeq_F^\theta, \succ_F^\theta, \simeq_F^\theta$  geschrieben.

Neben dem Begriff der rangbasierten Semantiken gibt es noch den Begriff von sogenannten *bewerteten Semantiken* (engl. *gradual semantics*), welche mittels einer Funktion jedem Argument aus dem Argumentationsgraphen einen Zahlenwert zuordnen. Diese Wertung hängt alleine von dem Aufbau des Argumentationsgraphen

selbst ab und ist abzugrenzen von gewichteten Argumentationsgraphen (engl. *weighted argumentation frameworks*). Durch den Vergleich der Bewertungen von je zwei Argumenten einer bewerteten Semantik kann eine rangbasierte Semantik bestimmt werden [16]. Viele rangbasierte Semantiken werden mittels solcher Funktionen, welche den Argumenten rationale oder reelle Zahlen zuordnen, berechnet. Daher wird in dieser Arbeit vor allem der allgemeine Begriff von rangbasierten Semantiken genutzt, in dem bewertete Semantiken bereits eingeschlossen sind.

**Bemerkung.** In der Literatur werden die Rangordnungen der rangbasierten Semantiken auf unterschiedliche Weisen definiert. So definieren sie Amgoud et al. [1, 22] als total und transitiv. Außerdem verwenden Amgoud und Ben-Naim [1] die Schreibweise  $a \succeq_F^\theta b$  genau in umgedrehter Bedeutung. In dieser Arbeit wird die allgemeinere und geläufigere Definition von Bonzon et al. [10] ohne die Einschränkung der Totalität genutzt, ähnlich wie in anderen Arbeiten [5, 16, 8].

Im Folgenden werden zuerst einige bekannte Vertreter der rangbasierten Semantiken vorgestellt, gefolgt von einigen wichtigen Eigenschaften.

### 2.2.1. Die Kategorisierersemantik

Die Kategorisierersemantik von Pu et al. [22] weist jedem Argument eine Argumentationsstärke unter Berücksichtigung aller Angreifer und aller Verteidiger zu. Dies wird mittels der Kategorisiererfunktion erreicht:

**Definition 2.7** (Kategorisiererfunktion [6, 22]). Sei  $F = (A, R)$  ein Argumentationsgraph. Die Kategorisiererfunktion ist gegeben durch  $Cat : A \rightarrow (0, 1]$ .

$$Cat(a) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \{a\}^- = \emptyset, \\ \frac{1}{1 + \sum_{b \in \{a\}^-} Cat(b)}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ergibt sich somit für alle  $a \in A$  ein Gleichungssystem mit  $|A|$  nichtlinearen Gleichungen. Für Bäume (kreisfreie Graphen) lässt sich eine Lösung rekursiv bestimmen. Falls ein Argumentationsgraph Kreise enthält, muss das nichtlineare Gleichungssystem anderweitig gelöst werden. Pu et al. [22] zeigen die Eindeutigkeit und Existenz der Lösung des Gleichungssystems.

**Definition 2.8** (Kategorisierersemantik [22]). Sei  $F = (A, R)$  ein Argumentationsgraph und  $Cat^*$  die eindeutige Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems mit  $|A|$  Gleichungen der Kategorisiererfunktion  $Cat$ . Die *Kategorisierersemantik*  $\theta^{Cat}$  ist eine rangbasierte Semantik, welche dem Argumentationsgraphen  $F$  wie folgt eine Präordnung  $\succeq_F^{\theta^{Cat}}$  zuweist: es gilt  $a \succeq_F^{\theta^{Cat}} b$  gdw.  $Cat^*(a) \geq Cat^*(b)$ , für alle  $a, b \in A$ .

**Bemerkung.** Ursprünglich definieren Besnard und Hunter [6] die Kategorisiererfunktion (genannt *h-categoriser*) für Bäume (kreisfreie Graphen) im Kontext ihrer logikbasierten Theorie von deduktiver Argumentation. Cayrol und Lagasque-Schiex

[14] weisen darauf hin, dass die Kategorisiererfunktion auch für Graphen mit Kreisen geeignet ist. Schließlich beweisen Pu et al. [22] allgemein Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung und definieren mit ihr eine rangbasierte Semantik.

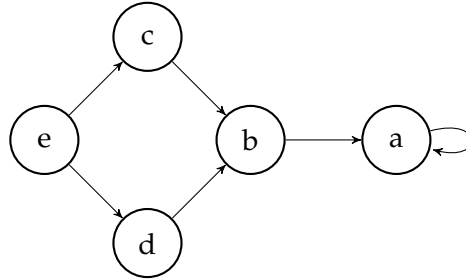


Abbildung 2: Der Argumentationsgraph  $F_2$ .

**Beispiel 6.** Sei  $F_2 = (A_2, R_2)$  ein Argumentationsgraph mit den Argumenten  $A_2 = \{a, b, c, d, e\}$  und Angriffen  $R_2 = \{(a, a), (b, a), (c, b), (d, b), (e, c), (e, d)\}$  aus Abbildung 2. Zunächst wird die Kategorisiererfunktion für jeden Knoten berechnet:

$$Cat(e) = 1,$$

$$Cat(c) = Cat(d) = \frac{1}{1 + Cat(e)} = \frac{1}{2},$$

$$Cat(b) = \frac{1}{1 + Cat(c) + Cat(d)} = \frac{1}{2},$$

Da  $a$  sich selbst angreift und somit einen Kreis bildet, muss in diesem Fall eine quadratische Gleichung gelöst werden:

$$Cat(a) = \frac{1}{1 + Cat(a) + Cat(b)}$$

$$Cat(a) = \frac{1}{\frac{3}{2} + Cat(a)}$$

$$Cat(a)^2 + \frac{3}{2}Cat(a) = 1$$

$$\left(Cat(a) + \frac{3}{4}Cat(a)\right)^2 = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$Cat(a) = \pm \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{3}{4}}$$

$$Cat(a) = \frac{5}{4} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Der letzte Schritt gilt, da die Kategorisiererfunktion positiven Wertebereich hat. Durch den Vergleich der Kategorisiererfunktionen  $Cat(e) > Cat(a) = Cat(b) = Cat(c) = Cat(d)$  ergibt sich die Rangfolge  $e \succ_{F_2}^{\theta^{Cat}} a \simeq_{F_2}^{\theta^{Cat}} b \simeq_{F_2}^{\theta^{Cat}} c \simeq_{F_2}^{\theta^{Cat}} d$ .

### 2.2.2. Die diskussionsbasierte Semantik

Die diskussionsbasierte Semantik geht auf Amgoud und Ben-Naim [1] zurück. Für die Bestimmung der Argumentationsstärke der diskussionsbasierten Semantik sind die Anzahl an *Diskussionen* aufsteigender Länge entscheidend. Mit Diskussionen werden Sequenzen von Kanten (Kantenzüge) zu den jeweiligen Argumenten hin bezeichnet. Bei ungerader Länge der Diskussion handelt es sich um einen direkten oder indirekten Angriff auf das jeweilige Argument und schadet dem Argument, wogegen bei gerader Länge der Diskussion das Argument durch eine direkte oder indirekte Verteidigung unterstützt wird.

Dieser Abschnitt orientiert sich an den Arbeiten der Autoren Amgoud und Ben-Naim [1], wobei Anpassungen in Definition 2.9 vorgenommen wurden, welche zu anderen Vorzeichen in Gleichung 2.9 führen und für eine intuitivere Definition sorgen sollen.

**Definition 2.9** (Diskussionen). Sei  $F = (A, R)$  ein Argumentationsgraph und  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  eine positive ganze Zahl. Für ein Argument  $a \in A$  sei eine *Diskussion* der Länge  $n$  definiert durch einen Kantenzug der Länge  $n$  zu diesem Argument  $a$  hin:

- $(b_1, a)$  mit Angriff  $b_1Ra$ , für  $n = 1$ ,
- $(b_1, b_2), \dots, (b_n, a)$  mit Angriffen  $b_iRb_{i+1}$  für alle  $i = 1, \dots, n - 1$  und  $b_nRa$ , sonst.

Sei  $N \in \mathbb{N}$  die Anzahl an Diskussionen der Länge  $n$ . Der Vektor der Diskussionsanzahl  $D^F(a)$ , für  $a \in A$ , sei definiert durch:

$$D_n^F(a) := \begin{cases} -N, & \text{falls } n \text{ ungerade;} \\ N, & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Die rangbasierte Semantik wird durch lexikographischen Vergleich der Vektoren  $D^F(a)$  für alle  $a \in A$  wie folgt bestimmt:

**Definition 2.10** (Diskussionsbasierte Semantik [1]). Sei  $F = (A, R)$  ein Argumentationsgraph. Für die rangbasierte Semantik  $\theta^{Dbs}$  gilt  $a \succeq_F^{\theta^{Dbs}} b$ , für  $a, b \in A$ , falls einer der beiden Fälle eintritt:

- es existiert ein  $i \in \mathbb{N}_{>0}$  mit  $D_i^F(a) > D_i^F(b)$  und  $D_j^F(a) = D_j^F(b)$  für alle  $j < i$ ;
- $D_n^F(a) = D_n^F(b)$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ .

**Beispiel 7.** Für den bereits bekannten Argumentationsgraphen  $F_2$  mit Argumenten  $A_2 = \{a, b, c, d, e\}$  und Angriffen  $R = \{(a, a), (b, a), (c, b), (d, b), (e, c), (e, d)\}$  aus Abbildung 2 werden zunächst  $D_n^{F_2}(x)$  für alle  $x \in A$  berechnet, siehe Tabelle 1. Durch lexikographische Vergleiche der Diskussionslängen ergibt sich die Rangordnung:  $e \succ_{F_2}^{\theta^{Dbs}} c \simeq_{F_2}^{\theta^{Dbs}} d \succ_{F_2}^{\theta^{Dbs}} a \succ_{F_2}^{\theta^{Dbs}} b$ .

$n$	$D_n^{F_2}(a)$	$D_n^{F_2}(b)$	$D_n^{F_2}(c)$	$D_n^{F_2}(d)$	$D_n^{F_2}(e)$
1	-2	-2	-1	-1	0
2	3	2	0	0	0
3	-3	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0
5	-1	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabelle 1: Die Diskussionsanzahlen für die diskussionsbasierte Semantik für den Argumentationsgraphen  $F_2$ .

**Bemerkung.** Amgoud und Ben-Naim weisen darauf hin, dass der Vektor der Diskussionsanzahl bei Kreisen unendlich viele Einträge ungleich Null besitzt, was theoretisch zu unendlich vielen Vergleichen führt [1]. Ein Beweis für einen Grenzwert, welcher Gleichheit garantiert, steht noch aus.

### 2.2.3. Die bürdenbasierte Semantik

Die bürdenbasierte Semantik geht genau wie die diskussionsbasierte Semantik auf Amgoud und Ben-Naim [1] zurück. Für jedes Argument werden schrittweise Bürdenzahlen berechnet. Diese sind abhängig von den Bürdenzahlen der direkten Angreifer aus dem vorherigen Schritt. Jeder Angreifer legt so jedem angegriffenen Argument eine Bürde auf und schwächt es. Damit ergibt sich, dass je höher die Bürdenzahl ist, desto schwächer ist das Argument. Der Abschnitt richtet sich nach den Arbeiten von Amgoud und Ben-Naim [1].

**Definition 2.11** (Bürdenzahl [1]). Sei  $F = (A, R)$  ein Argumentationsgraph,  $a \in A$  ein Argument und  $i \in \mathbb{N}$  eine nichtnegative ganze Zahl. Die *Bürdenzahl* (engl. *burden number*) von  $a$  im  $n$ -ten Schritt  $Bur_n^F(a)$  sei definiert durch:

$$Bur_n^F(a) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0, \\ 1 + \sum_{b \in \{a\}^-} \frac{1}{Bur_{n-1}^F(b)}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die bürdenbasierte Semantik wird mittels eines lexikographischen Vergleichs der Bürdenzahlen definiert:

**Definition 2.12** (Bürdenbasierte Semantik [1]). Sei  $F = (A, R)$  ein Argumentationsgraph. In der rangbasierten Semantik  $\theta^{Bbs}$  gilt  $a \succeq_F^{Bbs} b$  für zwei Argumente  $a, b \in A$ , falls einer der beiden Fälle eintritt:

- es existiert ein  $i \in \mathbb{N}$  mit  $Bur_i^F(a) < Bur_i^F(b)$  und  $Bur_j^F(a) = Bur_j^F(b)$  für alle  $j < i$ ;

- für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $Bur_n^F(a) = Bur_n^F(b)$ .

**Beispiel 8.** Wie in den vorherigen rangbasierten Semantiken, wird die Rangordnung für den Argumentationsgraphen  $F_2$  mit Argumenten  $A_2 = \{a, b, c, d, e\}$  und Angriffen  $R = \{(a, a), (b, a), (c, b), (d, b), (e, c), (e, d)\}$  aus Abbildung 2 bestimmt. Zuerst wird  $Bur_n^{F_2}(x)$  für alle  $x \in A$  berechnet, siehe Tabelle 2.

$n$	$Bur_n^{F_2}(a)$	$Bur_n^{F_2}(b)$	$Bur_n^{F_2}(c)$	$Bur_n^{F_2}(d)$	$Bur_n^{F_2}(e)$
1	1	1	1	1	1
2	3	3	2	2	1
3	$1^2/3$	2	2	2	1
4	$2^1/10$	2	2	2	1
5	$1^{41}/42$	2	2	2	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabelle 2: Die Bürdenzahlen für die bürdenbasierte Semantik für den Argumentationsgraphen  $F_2$ .

Die Rangordnung ergibt sich durch lexikographischen Vergleich der Bürdenzahlen:  $e \succ_{F_2}^{\theta^{Bbs}} c \simeq_{F_2}^{\theta^{Bbs}} d \succ_{F_2}^{\theta^{Bbs}} a \succ_{F_2}^{\theta^{Bbs}} b$ .

**Bemerkung.** Wie im vorherigen Abschnitt werden wieder theoretisch unendliche Vektoren  $(Bur_1^F(a), Bur_2^F(a), \dots)$  und  $(Bur_1^F(b), Bur_2^F(b), \dots)$  lexikographisch miteinander verglichen [1]. Auch hier steht ein Beweis für einen Grenzwert für die nötige Schrittzahl noch aus.

#### 2.2.4. Die strategiebasierte Semantik

Matt und Toni [19] nutzen Zwei-Personen-Nullsummenspiele aus der Spieltheorie um eine rangbasierte Semantik zu definieren. Der folgende Abschnitt orientiert sich an den Arbeiten von Matt und Toni [19].

Die strategiebasierte Semantik ist ein weiteres Beispiel für eine bewertete Semantik. So bestimmen Matt und Toni die *Argumentationsstärke* eines Argumentes  $a \in A$  bzgl. eines Argumentationsgraphen  $F = (A, R)$  mittels des Wertes eines  $(F, a)$ -Spiels  $s(a)$  (engl.  $(F, a)$  game of argumentation strategy). In diesem stehen sich der Verfechter (engl. *proponent*) von  $a$  und sein Widersacher (oder Gegner) (engl. *opponent*) gegenüber. Beide Spieler haben wie in der Spieltheorie üblich eine Menge reiner Strategien, aus denen sie wählen können. Eine reine Strategie  $P$  des Verfechters von  $a$  muss das Argument  $a$  enthalten, wogegen eine reine Strategie  $O \subseteq A$  des Widersachers ohne Einschränkung als Teilmenge der Menge der Argumente ausgewählt werden kann. Die Menge aller möglichen reinen Strategien des Verfechters von  $a$  und des Widersachers sind  $\{P \mid P \subseteq A, a \in P\} = \{P_1, \dots, P_n\}$  und  $\{O \mid O \subseteq A\} = \{O_1, \dots, O_m\}$ .

Seien  $P$  und  $O$  gewählte reine Strategien. Definiere die Mengen der Angriffe einer Strategie gegen eine andere vom Gegenspieler:

**Notation** (Menge der Angriffe [19]).  $T_F^{\leftarrow S} := \{(s, t) \in S \times T \mid (s, t) \in R\}$  sei die Menge aller Angriffe von  $S$  gegen  $T$  für Teilmengen von Argumenten  $S, T \subseteq A$ .

Der Grad der Akzeptabilität von  $P$  bzgl.  $O$  (engl. *degree of acceptability of  $P$  with respect to  $O$* ) wird mittels der Mengen der Angriffe untereinander wie folgt definiert:

$$\phi(P, O) = \frac{1}{2} (1 + f(|O^{\leftarrow P}|) - f(|P^{\leftarrow O}|)),$$

mit monoton steigender Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ , so dass  $f(0) = 0$  und Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 1$ . Die Funktion  $f(n) = \frac{n}{n+1}$  erfüllt diese Eigenschaften und sie wird im weiteren genutzt.

Die Belohnung  $r_F(P, O)$  von  $P$  (und gleichzeitig der Verlust von  $O$ ) wird definiert durch:

$$r_F(P, O) = \begin{cases} 0, & \text{falls } P \text{ nicht konfliktfrei ist,} \\ 1, & \text{falls } O \text{ keinen Angriff auf } P \text{ ausübt,} \\ \phi(P, O), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der erwartete Gewinn des Verfechters und gleichzeitig der erwartete Verlust des Widersachers, werden durch gemischte Strategien bestimmt.

In gemischten Strategien spielt ein Spieler mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit die reinen Strategien um in unendlich vielen Spielen die Gewinne zu maximieren bzw. die Verluste zu minimieren. Reine Strategien werden mittels Wahrscheinlichkeitsverteilungen  $X = (x_1, \dots, x_n)$  und  $Y = (y_1, \dots, y_m)$  gewählt, wobei der Verfechter mit Wahrscheinlichkeit  $x_i$  die reine Strategie  $P_i$  wählt und der Widersacher mit Wahrscheinlichkeit  $y_j$  die reine Strategie  $O_j$  wählt, für  $i = 1, \dots, n$  und  $j = 1, \dots, m$ . Die Gewinnmatrix (engl. *payoff matrix*) enthält alle möglichen Gewinnpaare von  $P_i$  und  $O_j$  und wird bezeichnet als  $R = (r_{i,j})_{n \times m}$ . Der erwartete Gewinn des Verfechters von  $a$  bei gegebenen gemischten Strategien  $X$  und  $Y$  ist:

$$E = X^T R Y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i r_{i,j} y_j.$$

Verfechter und Widersacher versuchen ihre Gewinne zu maximieren bzw. Verluste zu minimieren. Schließlich wird der *Wert des Spiels* mit Minimax-Theorem von von Neumann bestimmt:

$$s(a) = \max_X \min_Y X^T R Y = \min_Y \max_X X^T R Y$$

**Definition 2.13** (Strategiebasierte Semantik). Sei  $F = (A, R)$  ein Argumentationsgraph. In der rangbasierte Semantik  $\theta^{Strat}$  gilt  $a \succeq^{\theta^{Strat}} b$  für Argumente  $a, b \in A$ , falls für die Werte der jeweiligen  $(F, x)$ -Spiele,  $x \in \{a, b\}$  gilt:  $s(a) \geq s(b)$ .

Die Berechnung kann durch die Lösung eines linearen Programms mittels Simplex-Algorithmus berechnet werden, da der Wert des Spiels a priori positiv ist (Dantzig et al. 1955) [19]. Dafür wird für den Verfechter eine neue Variable  $x_{n+1}$  eingeführt, welche seinen Gewinn beschreibt.

$$\max x_{n+1} \quad (1)$$

$$s.t. \sum_{i=1}^n r_{i,j} x_i \geq x_{n+1}, \quad \text{für alle } j = 1, \dots, m, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad (3)$$

$$x_i \geq 0, \quad \text{für alle } j = 1, \dots, n + 1. \quad (4)$$

Auch ohne lineares Programm lassen sich die Präordnungen für kleinere Argumentationsgraphen gut ausrechnen. Wir betrachten folgendes Beispiel.

**Beispiel 9.** Für den bereits bekannten Argumentationsgraphen  $F_2$  mit Argumenten  $A_2 = \{a, b, c, d, e\}$  und Angriffen  $R = \{(a, a), (b, a), (c, b), (d, b), (e, c), (e, d)\}$  aus Abbildung 2 aus den vorherigen Teilabschnitten wird zunächst für jedes Argument der jeweilige Wert des Spiels mit Hilfe der Belohnungen  $r_{F_2}(P, O)$  für Strategien P und O berechnet:

- $s(a) = 0$ , da  $a$  nicht konfliktfrei ist, ist die Belohnung in diesem Fall für jede mögliche Strategie bereits Null.
- $s(e) = 1$ , denn kein Angreifer existiert, den der Gegner in seine Strategie aufnehmen müsste.
- $s(c)$ : Die einzig sinnvolle Strategie für den Verfechter ist  $\{c\}$ , denn das Argument  $e$  zerstört die Konfliktfreiheit und die übrigen Argumente drohen von anderen Argumenten vom Widersacher angegriffen zu werden. Für den Widersacher greift  $\{e\}$  als einziges Argument  $c$  an, weswegen eine andere Strategie für ihn nicht besser ist. Damit ergibt sich:  $s(c) = r_{F_2}(\{c\}, \{e\}) = \phi(\{c\}, \{e\}) = \frac{1}{2} \left( 1 + f \left( \left| \{e\}^{\leftarrow \{c\}} \right| \right) - f \left( \left| \{c\}^{\leftarrow \{e\}} \right| \right) \right) = \frac{1}{2} \left( 1 + 0 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$ .
- $s(d) = s(c) = \frac{1}{4}$ , wegen Symmetrie.
- $s(b)$ : Mögliche Strategien des Verfechters sind  $\{\{b\}, \{b, e\}\}$ , denn alle übrigen Strategien verletzen die Konfliktfreiheit und führen zu keinem Gewinn. Sinnvolle Strategien des Widersachers sind nur  $\{\{c\}, \{d\}, \{c, d\}\}$ , welche die Strategien des Verfechters angreifen ohne unnötig angegriffen zu werden. Berechnung der möglichen Belohnungen:
  - $\phi(\{b\}, \{c\}) = \phi(\{c\}, \{d\}) = \frac{1}{2} \left( 1 + 0 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$ ,
  - $\phi(\{b\}, \{c, d\}) = \frac{1}{2} \left( 1 + 0 - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{6}$ ,

- $\phi(\{b, e\}, \{c\}) = \phi(\{b, e\}, \{d\}) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ ,
- $\phi(\{b, e\}, \{c, d\}) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}$ .

Damit ist  $s(b) = \frac{1}{2}$ .

Die Präordnung für  $F_2$  der strategiebasierten Semantik ergibt sich nach Vergleich der Werte der Spiele:  $e \succ_{F_2}^{\theta^{Strat}} b \succ_{F_2}^{\theta^{Strat}} c \simeq_{F_2}^{\theta^{Strat}} d \succ_{F_2}^{\theta^{Strat}} a$ .

### 2.2.5. Eigenschaften von rangbasierten Semantiken

In diesem Kapitel wird auf mögliche Eigenschaften für rangbasierte Semantiken eingegangen. Die meisten der Eigenschaften wurden von Amgoud und Ben-Naim [1] definiert. Dabei sind die Eigenschaften unterschiedlich sinnvoll und die jeweiligen rangbasierten Semantiken unterscheiden sich darin, welche Eigenschaften sie erfüllen und welche nicht.

Eine wünschenswerte Eigenschaft ist die *Syntaxunabhängigkeit* (engl. *Abstraction*). Eine rangbasierte Semantik erfüllt Syntaxunabhängigkeit, wenn sie unabhängig von der Namensgebung der Argumente ist. Dies ist der Fall, wenn beliebige isomorphe abstrakte Argumentationsgraphen die gleiche Rangfolge in der rangbasierten Semantik haben. Syntaxunabhängigkeit ist für gewöhnlich für alle sinnvollen rangbasierten Semantiken erfüllt.

**Definition 2.14** (Isomorphismus [10]). Ein Isomorphismus  $\gamma$  zwischen zwei Argumentationsgraphen  $F = (A, R)$  und  $F' = (A', R')$  ist eine bijektive Abbildung  $\gamma : A \rightarrow A'$ , so dass für alle  $x, y \in A$  gilt:  $xRy$  gdw.  $\gamma(x)R'\gamma(y)$ .

Zwei Argumentationsgraphen heißen isomorph zueinander, wenn ein Isomorphismus zwischen ihnen existiert.

**Definition 2.15** (Syntaxunabhängigkeit [1]). Eine rangbasierte Semantik  $\theta$  erfüllt *Syntaxunabhängigkeit* gdw. für alle isomorphen abstrakten Argumentationsgraphen  $F = (A, R)$  und  $F' = (A', R')$  mit Isomorphismus  $\gamma : A \rightarrow A'$  für alle  $a, b \in A$  gilt, dass  $a \succeq_F^\theta b$  gdw.  $\gamma(a) \succeq_{F'}^\theta \gamma(b)$ .

**Beispiel 10.** Seien  $F = (\{a1, a2\}, R)$  mit  $R = \{(a1, a2)\}$  und  $F' = (\{b1, b2\}, R')$  mit  $R' = \{(b1, b2)\}$  zwei Argumentationsgraphen. Für die folgende Abbildung  $\gamma$ , mit  $\gamma(a1) = b1$  und  $\gamma(a2) = b2$ , gilt  $a1Ra2$  gdw.  $\gamma(a1)R'\gamma(a2)$ . Sie hat die Umkehrfunktion  $\gamma^{-1}(b1) = a1$  und  $\gamma^{-1}(b2) = a2$  und ist bijektiv. Für rangbasierte Semantiken, die Syntaxunabhängigkeit erfüllen, ist die Präordnung für die beiden Argumentationsgraphen nach Umbenennung durch den Isomorphismus  $\gamma$  gleich.

Eine weitere wünschenswerte Eigenschaft ist die *Komponentenunabhängigkeit* (engl. *Independence*). Die Ränge von Argumenten sollten nur von Argumenten abhängen, die in Beziehung zu dem jeweiligen Argument stehen. Damit sollten die Ränge von zwei Argumenten in einer schwachen Zusammenhangskomponente nur von der eigenen schwachen Zusammenhangskomponente abhängen und nicht von Argumenten aus einer anderen schwachen Zusammenhangskomponente, die in keiner Weise mit den Argumenten in Beziehung stehen.

**Definition 2.16** (Komponentenunabhängigkeit [1]). Eine rangbasierte Semantik  $\theta$  erfüllt *Komponentenunabhängigkeit* gdw. für jeden Argumentationsgraphen  $F = (A, R)$  und für jede seiner schwachen Zusammenhangskomponenten  $F' = (A', R')$  gilt:  $a \succeq_F^\theta b$  gdw.  $a \succeq_{F'}^\theta b$  für alle  $a, b \in A'$ .

**Beispiel 11.** Sei  $F_3 = (A_3, R_3)$  ein Argumentationsgraph mit Argumenten  $A_3 = \{a, a1, a2, b\}$  und Angriffen  $R_3 = \{(b, b), (a1, a), (a2, a)\}$ , siehe Abbildung 3. Er besteht aus den zwei schwachen Zusammenhangskomponenten  $Z_1 = (\{b\}, \{(b, b)\})$  und  $Z_2 = (\{a, a1, a2\}, \{(a1, a), (a2, a)\})$ , zwischen denen kein ungerichteter Weg existiert. Erfüllt eine rangbasierte Semantik die Eigenschaft der Komponentenunabhängigkeit, so bleibt die bestehende Präordnung für Argumente innerhalb einer Zusammenhangskomponente unverändert, egal ob sie für den ganzen Argumentationsgraphen berechnet wurde oder nur für die Zusammenhangskomponente allein.

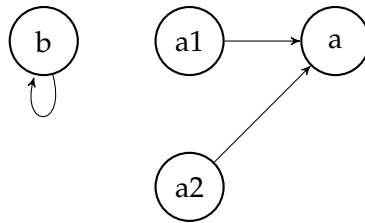


Abbildung 3: Der Argumentationsgraph  $F_3$ .

Bei der Eigenschaft *Kardinalitätsvorrang* (engl. *Cardinality Precedence*) spielt nur die Anzahl der direkten Angreifer eine Rolle.

**Definition 2.17** (Kardinalitätsvorrang [1]). Eine rangbasierte Semantik  $\theta$  erfüllt *Kardinalitätsvorrang*, gdw. für jeden Argumentationsgraphen  $F = (A, R)$  und für alle Angriffe  $a, b \in A$ , falls  $|\{a\}^-| < |\{b\}^-|$ , dann gilt  $a \succ_F^\theta b$ .

**Beispiel 12.** Wir betrachten den Argumentationsgraphen  $F_4 = (A_4, R_4)$  mit Argumenten  $A_4 = \{a, a1, a2, a3, a4, b, b1\}$  und Angriffen  $R_4 = \{(a1, a), (a2, a1), (a3, a), (a4, a3), (b1, b)\}$ , siehe Abbildung 4. Da  $a$  mehr Angreifer als  $b$  hat, gilt für rangbasierte Semantiken, welche Kardinalitätsvorrang erfüllen, dass  $b$  strikt akzeptabler als  $a$  ist. Im Vergleich mit vollständigen Extensionen aus Kapitel 2.1 ist die Menge  $\{a, a2, a4, b1\}$  eine vollständige, stabile, grundierte und präferierte Extension und sie enthält  $a$ , welches nach Kardinalitätsvorrang strikt schwächer ist als  $b$ , und sie enthält nicht  $b$ . Dieses Beispiel zeigt, dass die Eigenschaft des Kardinalitätsvorrangs eine lokale Eigenschaft ist, die nicht unbedingt sinnvoll ist und nicht mit den klassischen extensionsbasierten Semantiken zusammenpasst. Für die Kategorisierersemantik gilt beispielsweise  $Cat(a2) = Cat(b1) = Cat(a4) = 1, Cat(a) = Cat(b) = Cat(a1) = Cat(a3) = 0.5$ , weswegen sich  $a \simeq_{F_4}^{\theta^{Cat}} b$  ergibt. Daher erfüllt die Kategorisierersemantik die Eigenschaft Kardinalitätsvorrang nicht.

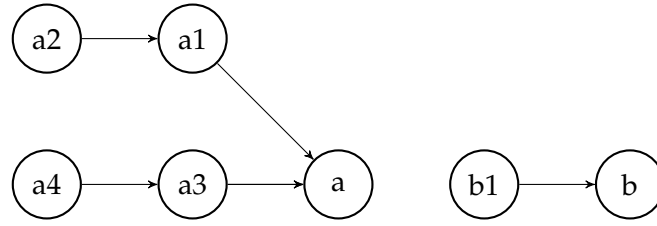


Abbildung 4: Der Argumentationsgraph  $F_4$ .

Für die Eigenschaften der Gegentransitivität und der starken Gegentransitivität (engl. *strict Counter-Transitivity*) werden die Mengen der Angreifer von zwei Argumenten miteinander auf folgende Weise verglichen:

**Definition 2.18** (Vergleich zweier Mengen [1]). Sei  $\theta$  eine rangbasierte Semantik auf einer Menge von Argumenten  $A$  und  $F = (A, R)$  ein Argumentationsgraph. Zwei Mengen  $S_1, S_2 \subseteq A$  werden in der rangbasierten Semantik wie folgt verglichen:  $S_1 \succeq_F^\theta S_2$  gdw. eine injektive Funktion  $f : S_2 \rightarrow S_1$  existiert, so dass  $f(a) \succeq_F^\theta a$  für alle  $a \in S_2$ . Außerdem sei  $S_1 \succ_F^\theta S_2$  gdw.  $S_1 \succeq_F^\theta S_2$  und es gilt entweder  $|S_2| < |S_1|$  oder es gibt ein  $a \in S_2$ , mit  $f(a) \succ_F^\theta a$ . Außerdem sei  $S_1 \simeq_F^\theta S_2$  gdw.  $S_1 \succeq_F^\theta S_2$  und  $S_2 \succeq_F^\theta S_1$ .

**Definition 2.19** (Gegentransitivität [1, 10]). Eine rangbasierte Semantik  $\theta$  erfüllt *Gegentransitivität* gdw. für jeden Argumentationsgraphen  $F = (A, R)$  und für alle  $a, b \in A$  gilt: falls  $\{b\}^- \succeq_F^\theta \{a\}^-$ , dann folgt  $a \succeq_F^\theta b$ .

**Definition 2.20** (Starke Gegentransitivität [1, 10]). Eine rangbasierte Semantik  $\theta$  erfüllt *starke Gegentransitivität* gdw. für jeden Argumentationsgraphen  $F = (A, R)$  und für alle  $a, b \in A$  gilt: falls  $\{b\}^- \succ_F^\theta \{a\}^-$ , dann folgt  $a \succ_F^\theta b$ .

**Beispiel 13.** Wir betrachten den Argumentationsgraphen  $F_5 = (A_5, R_5)$  mit Argumenten  $A_5 = \{a, a1, a2, a3, a4, a5\}$  und Angriffen zwischen den Argumenten  $R_5 = \{(a, a1), (a1, a2), (a2, a3), (a3, a4), (a4, a5)\}$ , siehe Abbildung 5. Angenommen, starke Gegentransitivität sei erfüllt, dann ist  $a$  als unangegriffenes Argument das stärkste Argument. Weiter folgt aus der starken Gegentransitivität, dass  $a1$  schwächer als jedes andere Argument ist. Dies macht wiederum  $a2$  zu dem nächst stärkeren Argument, da sein einziger Angreifer schwächer als alle anderen Angreifer ist. Wird auf diese Weise weiter geschlossen, so folgt die Rangordnung  $a \succ a2 \succ a4 \succ a5 \succ a3 \succ a1$ . Dies ist ein Gegenbeispiel für die strategiebasierte Semantik, für die sich die Werte der jeweiligen Spiele berechnen zu:  $s(a) = 1, s(a2) = s(a4) = 0.5, s(a5) \approx 0.425, s(a3) \approx 0.386, s(a1) = 0.25$ . Damit folgt insbesondere  $a2 \simeq_{F_5}^{\theta^{strat}} a4$ , was ein Widerspruch zur Eigenschaft der starken Gegentransitivität darstellt.

Die Eigenschaft der  $\sigma$ -Kompatibilität (engl.  *$\sigma$ -Compatibility*) stellt einen Bezug zu den extensionsbasierten Semantiken her.

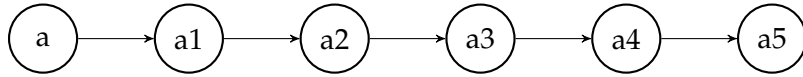


Abbildung 5: Der Argumentationsgraph  $F_5$ .

**Definition 2.21** ( $\sigma$ -Kompatibilität [9]). Sei  $\sigma$  eine extensionsbasierte Semantik. Eine rangbasierte Semantik  $\theta$  erfüllt  $\sigma$ -Kompatibilität gdw. für jeden Argumentationsgraphen  $F = (A, R)$ , falls für  $a, b \in A$  gilt, dass  $a$  in einer  $\sigma$ -Extension vorkommt ( $a \in \bigcup \sigma(F)$ ) und  $b$  nicht ( $b \notin \bigcup \sigma(F)$ ), dann folgt, dass  $a$  strikt akzeptabler ist als  $b$ ,  $a \succ_F^\theta b$ .

**Beispiel 14.** Der Argumentationsgraphen  $F_1$  aus Abbildung 1 wurde bereits bei den extensionsbasierten Semantiken in den Beispielen verwendet und die Extensionen in Beispiel 5 bestimmt:

- $S_1 = \{a, f\}$ ,  $S_3 := \{a, e\}$  und  $S_4 := \{a\}$  sind die vollständigen Extensionen,
- $S_1$  und  $S_3$  sind die präferierten Extensionen,
- $S_3$  ist die in diesem Fall einzige stabile Extension,
- $S_4$  ist die grundierte Extension.

Eine rangbasierte Semantik erfüllt:

- co-Kompatibilität für  $F_1$ , falls  $x \in S_1 \cup S_3 \cup S_4 = \{a, e, f\}$  strikt akzeptabler als alle übrigen Argumente des Argumentationsgraphen ist.
- pr-Kompatibilität für  $F_1$ , falls  $x \in S_1 \cup S_3 = \{a, e, f\}$  strikt akzeptabler als alle übrigen Argumente des Argumentationsgraphen ist.
- st-Kompatibilität für  $F_1$ , falls  $x \in S_3 = \{a, e\}$  strikt akzeptabler als alle übrigen Argumente des Argumentationsgraphen ist.
- gr-Kompatibilität für  $F_1$ , falls  $a$  strikt akzeptabler als alle übrigen Argumente des Argumentationsgraphen ist.

Bei der Eigenschaft des Leerheitsvorrangs (engl. *Void Precedence*) ist jedes unattackierte Argument akzeptabler als jedes attackierte Argument.

**Definition 2.22** (Leerheitsvorrang [1, 10]). Eine rangbasierte Semantik  $\theta$  erfüllt *Leerheitsvorrang*, falls für jeden Argumentationsgraphen  $F = (A, R)$  und für alle  $a, b \in A$  gilt: wenn  $\{a\}^- = \emptyset$  und  $\{b\}^- \neq \emptyset$ , folgt  $a \succ_F^\theta b$ .

**Beispiel 15.** Bei Erfüllung der Eigenschaft des Leerheitsvorrangs ist im Argumentationsgraphen  $F_5 = (A_5, R_5)$  aus Abbildung 5 das unangegriffene Argument  $a$  strikt akzeptabler als alle übrigen Argumente.

Auf Matt und Toni [19] geht die Eigenschaft der Selbstwiderspruchsvermeidung (engl. *Self-Contradiction*) zurück. Argumente, die sich selbst angreifen, sollten weniger akzeptabel sein als alle Argumente ohne Selbstwiderspruch.

**Definition 2.23** (Selbstwiderspruchsvermeidung [10]). Eine rangbasierte Semantik  $\theta$  erfüllt *Selbstwiderspruchsvermeidung*, falls für alle Argumentationsgraphen  $F = (A, R)$  und alle  $(a, a) \notin R$  und  $(b, b) \in R$  gilt, dass  $a \succ_F^\theta b$ .

**Beispiel 16** (Idee nach Delobelle [16]). Die Eigenschaft der Selbstwiderspruchsvermeidung kann an dem Argumentationsgraphen  $F_3 = (A_3, R_3)$  aus Abbildung 3 mit Argumenten  $A_3 = \{a, a1, a2, b\}$  und  $R_3 = \{(b, b), (a1, a), (a2, a)\}$  gezeigt werden. Da sich das Argument  $b$  selbst angreift, gilt für rangbasierte Semantiken, welche Selbstwiderspruchsvermeidung erfüllen:  $a' \succ_F^\theta b$  für alle  $a' \in \{a, a1, a2\}$ .

In der diskussionsbasierten Semantik und der büdenbasierten Semantik ergeben sich beispielsweise jeweils die Rangfolgen zu  $a1 \simeq_{F_3}^\theta a2 \succ_{F_3}^\theta b \succ_{F_3}^\theta a$ , mit  $\theta \in \{\theta^{Bbs}, \theta^{Dbs}\}$ . Damit ist insbesondere  $b$  strikt akzeptabler als  $a$ , weswegen die beiden Semantiken nicht die Eigenschaft der Selbstwiderspruchsvermeidung erfüllen.

Auf Amgoud und Ben-Naim [1] geht der Begriff des *Qualitätsvorrangs* (engl. *Quality Precedence*) zurück, welcher starke direkte Angreifer berücksichtigt und das angegriffene Argument schwächt.

**Definition 2.24** (Qualitätsvorrang [1, 10]). Eine rangbasierte Semantik  $\theta$  erfüllt *Qualitätsvorrang* gdw. für jeden Argumentationsgraphen  $F = (A, R)$  und alle Argumente  $a, b \in A$ , falls ein Argument  $b' \in \{b\}^-$  existiert, so dass für alle  $a' \in \{a\}^-$  gilt  $b' \succ_F^\theta a'$ , so folgt  $a \succ_F^\theta b$ .

**Beispiel 17.** Wir führen Beispiel 12 fort und betrachten den Argumentationsgraphen  $F_4$ , siehe Abbildung 4. Dort hatten wir für die Kategorisierersemantik bereits  $b1 \succ_{F_4}^{\theta^{Cat}} a1$  und  $b1 \succ_{F_4}^{\theta^{Cat}} a3$  gesehen. Falls sie Qualitätsvorrang erfüllt, müsste nun  $a \succ_{F_4}^{\theta^{Cat}} b$  folgen. Es gilt allerdings  $a \simeq_{F_4}^{\theta^{Cat}} b$ , weswegen die Kategorisierersemantik nicht die Eigenschaft Qualitätsvorrang erfüllt.

Die Eigenschaft *Angriff vs vollständige Verteidigung* (engl. *Attack vs Full Defense*) gewichtet eine umfassende Verteidigung eines Argumentes mit beliebig vielen Angriffen besser als ein Argument mit nur einem einzigen Angreifer, der nicht selbst angegriffen wird. Dafür wird zunächst der Begriff der *vollständigen Verteidigung* benötigt.

**Definition 2.25** (Angriffspfad und vollständige Verteidigung). Sei  $F = (A, R)$  ein Argumentationsgraph. *Angriffspfade* von  $b_n \in A$  nach  $a \in A$  sind Wege ungerader Länge  $(b_n, \dots, b_1, a)$ , die im Argument  $a$  enden, mit  $b_n R b_{n-1}, \dots, b_1 R a$  und  $n \in \mathbb{N}$  ungerade. Ein Argument  $a \in A$  heißt *vollständig verteidigt*, falls es für alle Angriffspfade  $(b_n, \dots, b_1, a)$  nach  $a$  ein Argument  $c \in A$  gibt, welches  $a$  gegen diesen Angriffspfad verteidigt durch  $c R b_n$ .

**Definition 2.26** (Angriff vs vollständige Verteidigung [10]). Eine rangbasierte Semantik  $\theta$  erfüllt *Angriff vs vollständige Verteidigung*, falls für alle azyklischen Argumentationsgraphen  $F = (A, R)$ , mit Argument  $a \in A$ , welches vollständig verteidigt wird, und  $b \in A$  mit genau einem Angreifer  $c \in A$ :  $cRb$ , der nicht angegriffen wird,  $\{c\}^- = \emptyset$ , gilt:  $a \succ_F^\theta b$ .

**Beispiel 18** (Beispiel für Angriff vs vollständige Verteidigung (Idee nach Bonzon et al. [10])). Sei  $F_6 = (\{a, a1, a2, a3, a4, a5, a6, b, b1\}, \{(a2, a1), (a1, a), (a4, a3), (a3, a), (a6, a5), (a5, a), (b1, b)\})$  der Argumentationsgraph aus Abbildung 6. Während  $a$  gegen seine drei Angreifer vollständig verteidigt wird, hat  $b$  genau einen Angreifer, der selbst nicht angegriffen wird. In rangbasierten Semantiken, welche Angriff vs vollständige Verteidigung erfüllen, gilt dann  $a \succ_{F_6} b$ .

Für die diskussionsbasierten Semantik und die büdenbasierten Semantik berechnen sich jeweils die Rangfolgen zu  $b1 \simeq_{F_6}^\theta a6 \simeq_{F_6}^\theta a4 \simeq_{F_6}^\theta a2 \succ_{F_6}^\theta a5 \simeq_{F_6}^\theta b \simeq_{F_6}^\theta a3 \simeq_{F_6}^\theta a1 \succ_{F_6}^\theta a$ , mit  $\theta \in \{\theta^{Bbs}, \theta^{Dbs}\}$ . Da  $a \not\succeq_{F_6}^\theta b$ , erfüllen die beiden Semantiken nicht die Eigenschaft Angriff vs vollständige Verteidigung.

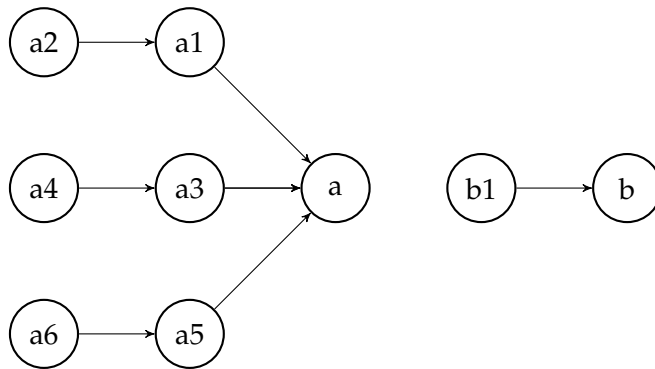


Abbildung 6: Der Argumentationsgraph  $F_6$  aus Beispiel 18.

Die Eigenschaft der Totalität (engl. *total*) gibt eine Aussage darüber, ob in einem Argumentationsgraphen alle Argumente miteinander verglichen werden können, oder ob es auch unvergleichbare Argumente gibt.

**Definition 2.27** (Totalität [10]). Eine rangbasierte Semantik  $\theta$  ist total gdw. für alle Argumentationsgraphen  $F = (A, R)$  alle Argumente  $a, b \in A$  vergleichbar sind. Es gilt also entweder  $a \succeq_F^\theta b$  oder  $b \succeq_F^\theta a$ .

**Bemerkung.** Amgoud et al. [1] definieren eine rangbasierte Semantik bereits als total, siehe Bemerkung auf Seite 6. In dieser Arbeit wird die Totalität anstatt dessen als Eigenschaft aufgeführt wie bei Bozon et al. [10].

Bei der *Äquivalenz der Unangegriffenen* (engl. *Non-attacked Equivalence*, NaE) sollen alle nicht-angegriffenen Argumente gleich geordnet sein.

**Definition 2.28** (Äquivalenz der Unangegriffenen [16]). Eine rangbasierte Semantik  $\theta$  erfüllt *Äquivalenz der Unangegriffenen* genau dann, wenn für jeden Argumentationsgraphen  $F = (A, R)$  und alle  $a, b \in A$ , mit  $\{a\}^- = \emptyset$  und  $\{b\}^- = \emptyset$ , gilt  $a \simeq_F^\theta b$ .

**Beispiel 19** (Äquivalenz der Unangegriffenen). Wir betrachten den Argumentationsgraphen  $F_6$  aus Beispiel 18, siehe Abbildung 6. Die Eigenschaft der Äquivalenz der Unangegriffenen besagt, dass alle nicht angegriffenen Argumente gleich stark sein sollen. Diese sind im Argumentationsgraphen  $F_6$  die Argumente  $a_2, a_4, a_6$  und  $b_1$ . Diese Eigenschaft wird von den meisten rangbasierten Semantiken erfüllt, so auch beispielsweise von der diskussionsbasierten und der bürgenbasierten Semantik. Auch für den betrachteten Beispielerargumentationsgraphen gilt  $a_2 \simeq_{F_6}^\theta a_4 \simeq_{F_6}^\theta a_6 \simeq_{F_6}^\theta b_1$  für alle rangbasierten Semantiken, welche die Eigenschaft erfüllen, so auch für  $\theta \in \{\theta^{Dbs}, \theta^{Bbs}\}$ , siehe Rangordnungen aus Beispiel 18.

Für die nächste Eigenschaft wird zunächst der Begriff des *Graphens der Vorfahren* (engl. *ancestors' graph*) eines Argumentes benötigt, in welchem die gesamte Argumentationskette zu dem jeweiligen Argument hin sowie das Argument selbst enthalten ist.

**Definition 2.29** (Graph der Vorfahren [16]). Sei  $F = (A, R)$  ein Argumentationsgraph und  $a \in A$  ein Argument des Graphens. Der *Graph der Vorfahren* von  $a$  wird durch  $Anc_F(a) = (A', R')$  bezeichnet und enthält die Argumente  $A' = \{a\} \cup \{x \in A \mid \text{es existiert ein Weg } \langle x, \dots, a \rangle \text{ von } x \text{ nach } a\}$  und die Angriffe untereinander  $R' = \{(x_1, x_2) \in R \mid x_1, x_2 \in A'\}$ .

Für die Eigenschaft der *Äquivalenz der Argumentation* (engl. *Argument Equivalence*, AE) sollten alle Argumente gleich stark sein, für welche es einen Isomorphismus zwischen ihren Graphen der Vorfahren gibt und somit jeweils eine gleich starke Argumentationskette zu ihnen hin führt.

**Definition 2.30** (Äquivalenz der Argumentation [16]). Eine rangbasierte Semantik  $\theta$  erfüllt *Äquivalenz der Argumentation* genau dann, wenn für jeden Argumentationsgraphen  $F = (A, R)$  gilt: für alle Argumente  $a, b \in A$  mit Isomorphismus  $\gamma$ , so dass  $Anc_F(a) = \gamma(Anc_F(b))$ , folgt  $a \simeq_F^\theta b$ .

Die Eigenschaft *Äquivalenz* (engl. *Equivalence* (EQ)) vergleicht die Menge der Angreifer von je zwei Argumenten. Gibt es eine Bijektion, durch die alle Angreifer des einen Argumentes jeweils einem gleich starken Angreifer des anderen Argumentes zugeordnet wird, so sollten auch die angegriffenen Argumente gleich stark sein.

**Definition 2.31** (Äquivalenz [2]). Eine rangbasierte Semantik  $\theta$  erfüllt *Äquivalenz* genau dann, wenn für jeden Argumentationsgraphen  $F = (A, R)$  und alle  $a, b \in A$ , falls eine bijektive Abbildung  $f : \{a\}^- \rightarrow \{b\}^-$  existiert, so dass für alle  $c \in \{a\}^-$  gilt  $c \simeq_F^\theta f(c)$ , dann ist  $a \simeq_F^\theta b$ .

**Bemerkung.** Eine rangbasierte Semantik  $\theta$  erfüllt also genau dann *Äquivalenz*, wenn für alle Argumentationsgraphen  $F = (A, R)$  gilt, dass aus  $\{b\}^- \simeq_F^\theta \{a\}^-$ ,  $a \simeq_F^\theta b$  folgt für alle  $a, b \in A$ .

**Beispiel 20.** Wir betrachten den Argumentationsgraph  $F_5$  aus Beispiel 13, siehe Abbildung 5. Wir hatten im obigen Beispiel bereits gesehen, dass für die strategiebasierte Semantik  $s(a) = 1, s(a_2) = s(a_4) = 0.5, s(a_5) \approx 0.425, s(a_3) \approx 0.386, s(a_1) = 0.25$  gilt. Mit der Bijektion  $f$  von  $\{a_3\}^- = \{a_2\}$  nach  $\{a_5\}^- = \{a_4\}$ , mit  $f(a_2) = a_5$ , gilt  $a_2 \simeq_{F_5}^{\theta^{Strat}} a_4$ . Falls  $\theta^{Strat}$  die Eigenschaft der Äquivalenz erfüllen würde, müsste  $a_3 \simeq_{F_5}^{\theta^{Strat}} a_5$  folgen. Bei der strategiebasierten Semantik gilt allerdings  $a_5 \succ_{F_5}^{\theta^{Strat}} a_3$ , weswegen sie nicht die Eigenschaft der Äquivalenz erfüllt.

### 2.2.6. Abhängigkeiten der Eigenschaften

In diesem Abschnitt wird auf die Abhängigkeiten der betrachteten Eigenschaften eingegangen. Nicht alle Eigenschaften sind unabhängig voneinander und manche schließen sich auch gegenseitig aus. Die Ergebnisse werden im Folgenden vor allem von Amgoud und Ben-Naim [1], Besnard et al. [5] und Blümel und Thimm [9] ohne Beweise zusammengefasst. Delobelle trägt noch weitere Eigenschaften und ihre Abhängigkeiten zusammen und ergänzt mit vielen eigenen Ergebnissen [16], lediglich die  $\sigma$ -Kompatibilität behandelt er nicht. Bonzon et al. [10, 11] liefern weitere Zusammenfassungen, welche die Ergebnisse von Delobelle enthalten.

**Proposition 1** (Inkompatibilitäten).

- Selbstwiderspruchsvermeidung und Kardinalitätsvorrang sind inkompatibel [5].
- Selbstwiderspruchsvermeidung und Gegentransitivität sind inkompatibel [5].
- Selbstwiderspruchsvermeidung und starke Gegentransitivität sind inkompatibel [5].
- Kardinalitätsvorrang und Qualitätsvorrang sind inkompatibel [1].
- Kardinalitätsvorrang und Angriff vs vollständige Verteidigung sind inkompatibel [16].
- $\sigma$ -Kompatibilität für  $\sigma \in \{\text{co}, \text{pr}\}$  und Gegentransitivität sind inkompatibel [9].
- $\sigma$ -Kompatibilität für  $\sigma \in \{\text{co}, \text{pr}\}$  und starke Gegentransitivität sind inkompatibel [9].
- $\sigma$ -Kompatibilität für  $\sigma \in \{\text{co}, \text{pr}\}$  und Kardinalitätsvorrang sind inkompatibel [9].
- $\sigma$ -Kompatibilität für  $\sigma \in \{\text{co}, \text{pr}\}$  und Qualitätsvorrang sind inkompatibel [9].
- Äquivalenz der Argumentation und Selbstwiderspruchsvermeidung sind inkompatibel [16].

- Äquivalenz und Selbstwiderspruchsvermeidung sind inkompatibel [7].

**Proposition 2** (Implikationen).

- starke Gegen transitivität impliziert Leerheitsvorrang [1].
- Leerheitsvorrang und Qualitätsvorrang implizieren Angriff vs vollständige Verteidigung [16].
- Gegen transitivität impliziert Äquivalenz der Unangegriffenen [10].
- Gegen transitivität impliziert Äquivalenz [16].
- Starke Gegen transitivität und Äquivalenz implizieren Gegen transitivität [16].
- Äquivalenz der Argumentation impliziert Äquivalenz der Unangegriffenen [16].
- Äquivalenz impliziert Äquivalenz der Unangegriffenen [16].

**Proposition 3** (Kompatibilitäten [1]).

- Syntaxunabhängigkeit, Komponentenunabhängigkeit, Gegen transitivität, starke Gegen transitivität, Kardinalitätsvorrang und Vorrang der verteilten Verteidigung sind kompatibel.

### 2.2.7. Eigenschaften der betrachteten rangbasierten Semantiken

In diesem Abschnitt wird zusammengefasst, welche der rangbasierten Semantiken die Eigenschaften aus Kapitel 2.2.5 erfüllen und welche Eigenschaften im Allgemeinen nicht erfüllt werden.

**Proposition 4.** Die jeweiligen rangbasierten Semantiken erfüllen die folgenden Eigenschaften:

- Die Kategorisierersemantik erfüllt die Eigenschaften Syntaxunabhängigkeit, Komponentenunabhängigkeit, (starke) Gegen transitivität, Leerheitsvorrang, Totalität, Äquivalenz der Unangegriffenen, Äquivalenz der Argumentation und Äquivalenz.
- Die diskussionsbasierte Semantik erfüllt die Eigenschaften Syntaxunabhängigkeit, Komponentenunabhängigkeit, Kardinalitätsvorrang, (starke) Gegen transitivität, Leerheitsvorrang, Totalität, Äquivalenz der Unangegriffenen, Äquivalenz der Argumentation und Äquivalenz.
- Die büdenbasierte Semantik erfüllt die Eigenschaften Syntaxunabhängigkeit, Komponentenunabhängigkeit, Kardinalitätsvorrang, (starke) Gegen transitivität, Leerheitsvorrang, Totalität, Äquivalenz der Unangegriffenen, Äquivalenz der Argumentation und Äquivalenz.

- Die strategiebasierte Semantik erfüllt die Eigenschaften Syntaxunabhängigkeit, Komponentenunabhängigkeit, Leerheitsvorrang, Selbstwiderspruchsvermeidung, Angriff vs vollständige Verteidigung, Totalität und Äquivalenz der Unangegriffenen.

*Beweis.* Die meisten Resultate für die Kategorisierersemantik stammen aus Pu et al. [22], die für die diskussions- und die büldenbasierten Semantiken aus Amgoud und Ben-Naim [1] und die für die strategiebasierte Semantik können in [19] nachgesehen werden. Delobelle [16] ergänzt fehlende Beweise, wie beispielsweise Beweise für die Totalität.  $\square$

Die übrigen Eigenschaften aus Kapitel 2.2.5 erfüllen die jeweiligen rangbasierten Semantiken im Allgemeinen nicht. Mit Ausnahme der  $\sigma$ -Kompatibilität können entsprechende Gegenbeispiele in der Literatur nachgesehen werden [19, 1, 22, 16]. Im Folgenden werden Gegenbeispiele für die  $\sigma$ -Kompatibilität für  $\sigma \in \{\text{co}, \text{pr}, \text{gr}, \text{st}\}$  gezeigt.

**Beispiel 21** (Gegenbeispiel  $\sigma$ -Kompatibilität für  $\theta^{Cat}$ ,  $\theta^{Dbs}$  und  $\theta^{Bbs}$  für Extensionen  $\sigma \in \{\text{co}, \text{pr}, \text{gr}, \text{st}\}$ ). Wir betrachten den Argumentationsgraphen  $F_7 = (\{a, b, c, d\}, \{(a, b), (b, d), (a, c), (c, d)\})$ , siehe Abbildung 7. In diesem Argumentationsgraphen ist  $\text{co} = \text{pr} = \text{gr} = \text{st} = \{\{a, d\}\}$ .

Für  $\theta^{Cat}$ :  $Cat_{F_7}(a) = 1, Cat_{F_7}(b) = Cat_{F_7}(c) = Cat_{F_7}(d) = 0.5$ . Insbesondere folgt  $d \not\prec_{F_7}^{\theta^{Cat}} b$ .

Für  $\theta^{Dbs}$  sind die Diskussionsanzahlen in Tabelle 3 aufgeführt. Da  $D_1^{F_7}(b) > D_1^{F_7}(d)$ , folgt  $d \not\prec_{F_7}^{\theta^{Dbs}} b$ .

$n$	$D_n^{F_7}(a)$	$D_n^{F_7}(b)$	$D_n^{F_7}(c)$	$D_n^{F_7}(d)$
1	0	-1	-1	-2
2	0	0	0	2
3	0	0	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabelle 3: Die Diskussionslängen für die diskussionsbasierte rangbasierte Semantik für Argumentationsgraph  $F_7$ .

Für  $\theta^{Bbs}$  sind die Bürdenzahlen in der Tabelle 4 angegeben. Da  $Bur_1^{F_7}(b) < Bur_1^{F_7}(d)$  und  $Bur_0^{F_7}(b) = Bur_0^{F_7}(d)$  folgt auch hier:  $d \not\prec_{F_7}^{\theta^{Bbs}} b$ .

Zusammengefasst gilt  $d \not\prec_{F_7}^{\theta} b$  für  $\theta \in \{\theta^{Cat}, \theta^{Dbs}, \theta^{Bbs}\}$ , obwohl  $b$  in keiner  $\sigma$ -Extension ist und  $d$  in mindestens einer  $\sigma$ -Extension vorkommt. Es folgt, dass die rangbasierten Semantiken  $\theta^{Cat}$ ,  $\theta^{Dbs}$  und  $\theta^{Bbs}$  nicht die Eigenschaft der  $\sigma$ -Kompatibilität für  $\sigma = \{\text{co}, \text{pr}, \text{gr}, \text{st}\}$  im Allgemeinen erfüllen.

Schritt $n$	$Bur_n^{F_7}(a)$	$Bur_n^{F_7}(b)$	$Bur_n^{F_7}(c)$	$Bur_n^{F_7}(d)$
0	1	1	1	1
1	1	2	2	3
2	1	2	2	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabelle 4: Die Bürdenzahlen für die büldenbasierte rangbasierte Semantik für den Argumentationsgraphen  $F_7$ .

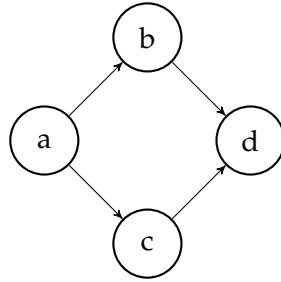


Abbildung 7: Der Argumentationsgraph  $F_7$ .

**Beispiel 22** (Gegenbeispiel für die  $\sigma$ -Kompatibilität der strategiebasierten Semantik für  $\sigma \in \{\text{co}, \text{pr}, \text{st}\}$ ). Wir betrachten den Argumentationsgraphen  $F_8 = (\{a, a1, b, b1, c, c1, d1, d2, d3, e1, e2, e3, e4\}, \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b), (a, c1), (b, c1), (a, b1), (c, b1), (b, a1), (c, a1), (d1, e1), (e1, d2), (d2, e2), (e2, d3), (d3, e3), (e3, d4)\})$ , siehe Abbildung 8.

Während die Argumente  $d1, d2, d3, d4$  in jeder vollständigen, präferierten und stabilen Extension vorkommen, kommen die Elemente  $e1, e2, e3$  in keiner vollständigen, präferierten und stabilen Extension vor. Die Menge  $\{c, c1, d1, d2, d3, d4\}$  ist sowohl eine vollständige, eine präferierte und eine stabile Extension. Die Werte der jeweiligen Spiele für die strategiebasierte Semantik sind:  $s(d1) = 1, s(a) = s(b) = s(c) = s(d2) = s(d3) = s(d4) = 0.5, s(e3) \approx 0.425, s(a1) = s(b1) = s(c1) \approx 0.417, s(e2) \approx 0.386, s(e1) = 0.25$ . Insbesondere ist  $s(e3) > s(c1)$ , weswegen  $c1 \not\prec_{F_8}^{\theta^{Strat}} e3$  gilt, obwohl  $c1$  in einer  $\sigma$ -Extension vorkommt und  $e3$  nicht. Somit erfüllt die strategiebasierte Semantik nicht die Eigenschaft der  $\sigma$ -Kompatibilität für  $\sigma \in \{\text{co}, \text{pr}, \text{st}\}$  im Allgemeinen.

**Beispiel 23** (Gegenbeispiel für gr-Kompatibilität der strategiebasierten Semantik). Sei  $F_9 = (\{a, b, c, d, e\}, \{(a, b), (b, a), (c, d), (d, e)\})$  ein Argumentationsgraph, siehe Abbildung 9. Es gilt:  $\text{gr} = \{c, e\}$  und  $s(c) = 1, s(a) = s(b) = s(e) = 0.5, s(d) = 0.25$ . Somit ist insbesondere  $e \not\prec_{F_9}^{\theta^{Strat}} a$ , obwohl  $e$  in der gr-Extension enthalten ist und  $a$  nicht. Deswegen kann  $\theta^{Strat}$  die Eigenschaft der gr-Kompatibilität im Allgemeinen nicht erfüllen.

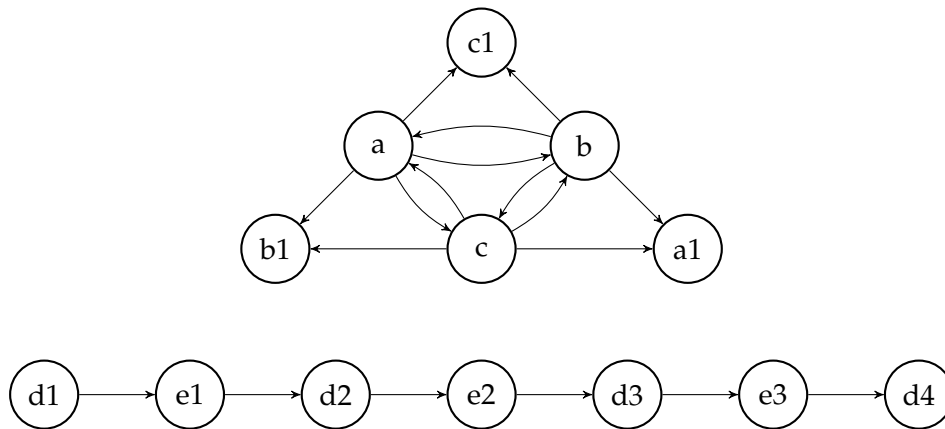


Abbildung 8: Der Argumentationsgraph  $F_8$ .

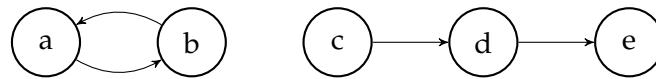


Abbildung 9: Der Argumentationsgraph  $F_9$ .

Eine Übersicht über die allgemeine (nicht-)Erfüllung der in Kapitel 2.2.5 eingeführten Eigenschaften der rangbasierten Semantiken Kategorisierersemantik, diskussionsbasierte Semantik, büldenbasierte Semantik und strategiebasierte Semantik ist in Tabelle 5 zusammengefasst. Die Ergebnisse wurden bis auf die  $\sigma$ -Kompatibilität aus der Arbeit von Delobelle [16] übernommen.

### 3. Konstruktion aggregierter rangbasierter Semantiken

In diesem Kapitel wird der Begriff der aggregierten rangbasierten Semantik spezifiziert. Anschließend werden anhand von Ideen aus der Sozialwahltheorie drei Familien aggregierter rangbasierter Semantiken definiert. Diese Semantiken werden auf die Erfüllung der aus Kapitel 2.2.5 beschriebenen bekannten Eigenschaften für rangbasierte Semantiken hin untersucht. Dafür wird am Ende des Kapitels als Beispiele auf die Aggregationen der vier rangbasierten Semantiken aus Kapitel 2.2 eingegangen und Gegenbeispiele aufgezeigt. Im nächsten Kapitel findet eine allgemeine Untersuchung der aggregierten rangbasierten Semantik auf ihre Eigenschaften statt.

Zunächst wird allgemein eine *aggregierte rangbasierte Semantik* definiert. Dafür wird eine endliche Menge rangbasierter Semantiken aggregiert, deren Präordnungen gleich sein können. Es wird die folgende Bezeichnung der Multimenge der Präordnungen über einem Argumentationsgraphen eingeführt:

**Notation** ( $\Theta(F)$ ). Sei  $F = (A, R)$  ein Argumentationsgraph und  $\Theta$  eine endliche Menge rangbasierter Semantiken. Die Multimenge der Präordnungen gebildet aus

	Cat	Dbs	Bbs	M&T
Syntaxunabhängigkeit	✓	✓	✓	✓
Komponentenunabhängigkeit	✓	✓	✓	✓
Kardinalitätsvorrang	✗	✓	✓	✗
Gegentransitivität	✓	✓	✓	✗
starke Gegenteiltransitivität	✓	✓	✓	✗
$\sigma$ -Kompatibilität*	✗	✗	✗	✗
Leerheitsvorrang	✓	✓	✓	✓
Selbstwiderspruchsvermeidung	✗	✗	✗	✓
Qualitätsvorrang	✗	✗	✗	✗
Angriff vs vollständige Verteidigung	✗	✗	✗	✓
Totalität	✓	✓	✓	✓
Äquivalenz der Unangegriffenen	✓	✓	✓	✓
Äquivalenz der Argumentation	✓	✓	✓	✗
Äquivalenz	✓	✓	✓	✗

Tabelle 5: (Nicht)-Erfüllung der eingeführten Eigenschaften der vier rangbasierten Semantiken: Kategorisierersemantik (Cat), diskussionsbasierte Semantik (Dbs), bürgenbasierte Semantik (Bbs) und strategiebasierte Semantik (M&T). \*  $\sigma$ -Kompatibilität für  $\sigma = \{\text{co, pr, gr, st}\}$

den rangbasierten Semantiken aus  $\Theta$  jeweils angewendet auf  $F$  wird im Folgenden mit  $\Theta(F) := \{\theta_1(F), \dots, \theta_n(F)\}_b$  bezeichnet.

**Definition 3.1** (Aggregierte rangbasierte Semantik). Gegeben sei eine endliche Menge rangbasierter Semantiken  $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ . Eine *aggregierte rangbasierte Semantik über  $\Theta$*  bezeichnet als  $\theta_\Theta$  ist eine Funktion, die jedem Argumentationsgraphen  $F = (A, R)$  mittels der Multimenge an Präordnungen  $\Theta(F)$  eine Präordnung  $\theta_\Theta(F) = \succeq_F^{\theta_\Theta}$  zuordnet.

Im Folgenden werden drei Familien aggregierter rangbasierter Semantiken mittels Ideen zur Aggregation aus der Sozialwahltheorie (engl. *social choice theory*) definiert. In der Sozialwahltheorie werden Wahlen eingeführt, welche individuelle Präferenzen aggregieren um eine kollektive Entscheidung herbeizuführen [24, 12]. Solche Wahlregeln können eingesetzt werden um verschiedene Rangordnungen für einen Argumentationsgraphen zu einer gemeinsamen aggregierten Rangordnung zusammenzufassen. Die Stimmzettel der Wahlen der Sozialwahltheorie bestehen ursprünglich aus linearen Ordnungen (reflexiv, transitiv, antisymmetrisch, total) der Individuen, während die Wahl eine aggregierte schwache Ordnung (reflexiv, transitiv, total) erzeugt [12]. Im Gegensatz dazu bilden rangbasierte Semantiken sowie aggregierte rangbasierte Semantiken Präordnungen (reflexive, transitive binäre Relationen). Deswegen werden die folgenden Definitionen der aggregierten rangbasierten Semantiken entsprechend angepasst.

Es folgen die Einführungen von drei Familien aggregierter Semantiken: Pluralitäts-aggregierte Semantiken, Copeland<sup>α</sup>-aggregierte Semantiken und Borda<sup>α</sup>-aggregierte Semantiken mit jeweils einem Beispiel.

### 3.1. Pluralitäts-aggregierte Semantiken

Die aus der Sozialwahltheorie stammende Pluralitätswahl ist eine positionsabhängige Bewertungsregel. Den linear geordneten individuellen Präferenzen werden nur den jeweiligen Favoriten (die Elemente mit höchstem Rang) ein Punkt zugeordnet. Anschließend werden die Punkte zusammengezählt und ein Gewinner anhand Majoritätswahl bestimmt. Dieses Verfahren wird im Folgenden auf rangbasierte Semantiken angepasst.

Für eine aggregierte rangbasierte Semantik muss eine Präordnung bestimmt werden und kein alleiniger Gewinner. Eine Idee ist, die zusammengezählten Punkte zu vergleichen und damit wie bei der Definition einer bewerteten rangbasierten Semantik zu nutzen. Weiterhin sind in rangbasierten Semantiken im Allgemeinen keine linearen Ordnungen gegeben, sondern ebenfalls nur Präordnungen. Somit muss es keinen eindeutigen Favoriten bzw. kein eindeutiges maximales Element der jeweiligen rangbasierten Semantik geben. Um kein willkürliches maximales Element zu bestimmen, werden daher allen maximalen Elementen je rangbasierter Semantik jeweils ein Punkt zugeordnet. Eine Definition für maximale Elemente einer Präordnung lässt sich aus der Definition von Schröder für maximale Elemente auf einer Ordnung [25] anpassen.

**Definition 3.2** (maximale Elemente auf einer Präordnung). Sei  $\succeq$  eine Präordnung auf einer Menge  $A$ . Ein Element  $m \in A$  heißt *maximal* bzgl. der Präordnung  $\succeq$  gdw. es kein  $a \in A$  gibt für das gilt:  $a \succ m$ .

**Notation** ( $\text{Max}_{\succeq}(A)$ ). Die Menge der maximalen Elemente einer Menge  $A$  bzgl. der Präordnung  $\succeq$  wird im Folgenden mit  $\text{Max}_{\succeq}(A)$  bezeichnet.

**Bemerkung.** Die Definition maximaler Elemente auf einer Präordnung ist wohldefiniert, da laut Definition 3.2 ist ein Element maximal bzgl. einer Präordnung, falls es kein akzeptableres Argument bzgl. der Präordnung gibt. Dabei muss nicht jedes Element mit jedem anderen vergleichbar sein, sondern es werden nur vergleichbare Argumente miteinander verglichen. Deswegen gilt dies insbesondere auch für nicht totale Präordnungen.

Mittels maximalen Elementen wird eine Prioritätsfunktion für eine Präordnung definiert.

**Definition 3.3** (Prioritätsfunktion). Sei  $\succeq$  eine Präordnung auf einer Menge  $A$ . Die *Prioritätsfunktion*  $\text{Prio}_{\succeq} : A \rightarrow [0, 1]$  weist jedem maximalen Element von  $A$  bezüglich der Präordnung  $\succeq$  einen Wert von 1 zu und den übrigen Elementen einen Wert von 0.

$$\text{Prio}_{\succeq}(a) = \begin{cases} 1, & \text{falls } a \in \text{Max}_{\succeq}(A), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5)$$

Die aggregierte Prioritätsfunktion ergibt sich aus der Summe der Prioritätsfunktionen einer Menge von Präordnungen.

**Definition 3.4** (aggregierte Prioritätsfunktion). Seien  $\succeq_1, \dots, \succeq_n$  Präordnungen auf einer Menge  $A$ . Definiere die *aggregierte Prioritätsfunktion*  $\text{Prio}_{\{\succeq_1, \dots, \succeq_n\}_b}^\oplus : A \rightarrow \mathbb{N}$  durch:

$$\text{Prio}_{\{\succeq_1, \dots, \succeq_n\}_b}^\oplus(a) = \sum_{i=1}^n \text{Prio}_{\succeq_i}(a).$$

**Bemerkung.** Da ein maximales Element für alle Präordnungen wohldefiniert ist und insbesondere für nicht-totale Präordnungen gilt, ordnen die Prioritätsfunktion und die aggregierte Prioritätsfunktion jedem Element  $a \in A$  einen eindeutigen Wert zu. Damit sind die beiden Funktionen ebenfalls wohldefiniert.

Durch den Vergleich der aggregierten Prioritätsfunktionen werden die Rangordnungen der pluralitäts-aggregierten Semantiken bestimmt.

**Definition 3.5** (Pluralitäts-aggregierte Semantik). Sei  $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  eine endliche Menge von rangbasierten Semantiken. Sei  $F = (A, R)$  ein Argumentationsgraph und  $\Theta(F) := \{\theta_1(F), \dots, \theta_n(F)\}_b$  die Multimenge der Präordnungen bzgl. des Argumentationsgraphen  $F$ . Die *Pluralitäts-aggregierte Semantik über  $\Theta$*  bezeichnet als  $\theta_\Theta^{pl}$  sei definiert durch  $\text{Prio}_{\Theta(F)}^\oplus(a) \geq \text{Prio}_{\Theta(F)}^\oplus(b)$  gdw.  $a \succeq_F^{\theta_\Theta^{pl}} b$ .

Folgendes Beispiel zeigt die pluralitäts-aggregierte Semantik der vier rangbasierten Semantiken aus Kapitel 2.2 an einem Beispielargumentationsgraphen.

**Beispiel 24.** Sei  $\Theta := \{\theta^{Cat}, \theta^{Dbs}, \theta^{Bbs}, \theta^{Strat}\}$  die Menge der zu aggregierenden rangbasierten Semantiken. Wir betrachten den Argumentationsgraphen  $F_2$  aus Abbildung 2. Die Präordnungen der rangbasierten Semantiken  $\theta \in \Theta$  des Argumentationsgraphen  $F_2$  wurden bereits in Kapitel 2.2 berechnet. In Tabelle 6 sind die Ergebnisse zusammengefasst. Für jede der Prioritätsfunktionen ergibt sich  $\text{Prio}_\theta(e) = 1$

rangbasierte Semantik	Präordnung
Kategorisierersemantik	$e \succ_{F_2}^{\theta^{Cat}} a \simeq_{F_2}^{\theta^{Cat}} b \simeq_{F_2}^{\theta^{Cat}} c \simeq_{F_2}^{\theta^{Cat}} d$
Diskussionsbasierte Semantik	$e \succ_{F_2}^{\theta^{Dbs}} c \simeq_{F_2}^{\theta^{Dbs}} d \succ_{F_2}^{\theta^{Dbs}} a \succ_{F_2}^{\theta^{Dbs}} b$
Bürdenbasierte Semantik	$e \succ_{F_2}^{\theta^{Bbs}} c \simeq_{F_2}^{\theta^{Bbs}} d \succ_{F_2}^{\theta^{Bbs}} a \succ_{F_2}^{\theta^{Bbs}} b$
Strategiebasierte Semantik	$e \succ_{F_2}^{\theta^{Strat}} b \succ_{F_2}^{\theta^{Strat}} c \simeq_{F_2}^{\theta^{Strat}} d \succ_{F_2}^{\theta^{Strat}} a$

Tabelle 6: Die Präordnungen der rangbasierten Semantiken  $\theta^{Cat}, \theta^{Dbs}, \theta^{Bbs}, \theta^{Strat}$  von dem Argumentationsgraphen  $F_2$ .

und  $\text{Prio}_\theta(x) = 0$  für alle  $x \in \{a, b, c, d\}$  und  $\theta \in \Theta$ . Die aggregierte Prioritätsfunktion ist damit  $\text{Prio}_{\Theta(F_2)}^\oplus(e) = 4$  und  $\text{Prio}_{\Theta(F_2)}^\oplus(x) = 0$  für alle  $x \in \{a, b, c, d\}$  und es ergibt sich die pluralitäts-aggregierte Präordnung  $e \succ_{F_2}^{\theta_\Theta^{pl}} a \simeq_{F_2}^{\theta_\Theta^{pl}} b \simeq_{F_2}^{\theta_\Theta^{pl}} c \simeq_{F_2}^{\theta_\Theta^{pl}} d$ .

### 3.2. Copeland $^\alpha$ -aggregierte rangbasierte Semantiken

Eine weitere Idee für eine Aggregation von Rängen ist mit Hilfe der Copeland-Regel aus der Sozialwahltheorie, welche die Kandidaten paarweise vergleicht und dem paarweisen Gewinner, der durch Majoritätswahl bestimmt wird, je einen Punkt gibt [24]. Bei der klassischen Copeland-Regel wird bei Gleichstand beiden Kandidaten ein halber Punkt gegeben. In dieser Arbeit wird eine ganze Familie bezeichnet mit Copeland $^\alpha$  betrachtet, bei welcher im Falle eines Gleichstandes  $\alpha$  addiert wird, mit  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Copeland $^1$  heißt auch Lulls System und Copeland $^{\frac{1}{2}}$  entspricht der klassischen Copeland-Regel. In der Sozialwahltheorie werden die Punkte anschließend zu einer Copeland $^\alpha$ -Wertung zusammengezählt und der Kandidat mit den meisten Stimmen wird als Sieger erklärt. Diese Wahlregel wird im Folgenden auf aggregierte rangbasierte Semantiken angepasst. Bei der Aggregation der Präordnungen von rangbasierten Semantiken werden die Copeland $^\alpha$ -Wertungen verglichen um eine aggregierte Präordnung zu erzeugen.

Zunächst wird die paarweise Majoritätsrelation auf einer Menge rangbasierter Semantiken definiert, mit Hilfe derer für je zwei Argumente das stärkere Argument ermittelt werden kann.

**Definition 3.6** (Paarweise Majoritätsrelation). Seien  $\succeq_1, \dots, \succeq_n$  Präordnungen auf einer Menge  $A$ . Die paarweise Majoritätsrelation für  $a, b \in A$  sei definiert durch:

- $a \geq_{\{\succeq_1, \dots, \succeq_n\}_b}^\mu b$  gdw.  $|\{i \in \{1, \dots, n\} : a \succeq_i b\}| \geq |\{i \in \{1, \dots, n\} : b \succeq_i a\}|$
- $a >_{\{\succeq_1, \dots, \succeq_n\}_b}^\mu b$  gdw.  $|\{i \in \{1, \dots, n\} : a \succeq_i b\}| > |\{i \in \{1, \dots, n\} : b \succeq_i a\}|$
- $a =_{\{\succeq_1, \dots, \succeq_n\}_b}^\mu b$  gdw.  $|\{i \in \{1, \dots, n\} : a \succeq_i b\}| = |\{i \in \{1, \dots, n\} : b \succeq_i a\}|$

**Bemerkung.** Auch für nicht-totale Präordnungen ist die paarweise Majoritätsrelation wohldefiniert. Sind beispielsweise für alle betrachteten Präordnungen zwei Argumente einer Menge unvergleichbar, so sind die beiden Argumente in der paarweisen Majoritätsrelation gleich stark.

Mit Hilfe der paarweisen Majoritätsrelation kann nun eine Definition für Copeland $^\alpha$ -Wertungen erfolgen.

**Definition 3.7** (Copeland $^\alpha$ -Wertung). Seien  $\succeq_1, \dots, \succeq_n$  Präordnungen auf einer Menge  $A$  und  $\alpha \in [0, 1]$ . Definiere die Copeland $^\alpha$ -Wertung  $C_{\{\succeq_1, \dots, \succeq_n\}_b}^\alpha : A \rightarrow \mathbb{R}$  durch:

$$C_{\{\succeq_1, \dots, \succeq_n\}_b}^\alpha(a) = \left| \left\{ b \in A \mid a >_{\{\succeq_1, \dots, \succeq_n\}_b}^\mu b \right\} \right| + \alpha \left| \left\{ b \in A \setminus \{a\} \mid a =_{\{\succeq_1, \dots, \succeq_n\}_b}^\mu b \right\} \right|$$

**Bemerkung.** In der Literatur der Sozialwahltheorie gibt es noch die symmetrische Copeland-Wertung  $C^{sym}(x) = |\{y \in A \mid x >^\mu y\}| - |\{y \in A \mid y >^\mu x\}|$  [12]. Diese kann durch die affine Transformation  $C^{sym} \mapsto \frac{1}{2}C^{\frac{1}{2}} + n - 1$  zur Copeland $^{\frac{1}{2}}$ -Wertung transformiert werden, wobei  $n$  der Anzahl an Kandidaten entspricht. Daher sind die gebildeten Rangfolgen mittels  $C^{sym}$ -Wertung und  $C^{\frac{1}{2}}$ -Wertung äquivalent und es genügt allgemein Copeland $^\alpha$  zu betrachten.

Durch Vergleich der Copeland $^\alpha$ -Wertungen werden Copeland $^\alpha$ -aggregierte Semantiken definiert.

**Definition 3.8** (Copeland $^\alpha$ -aggregierte Semantik). Sei  $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  eine endliche Menge rangbasierter Semantiken und  $\alpha \in [0, 1]$ . Sei  $F = (A, R)$  ein Argumentationsgraph und  $\Theta(F) := \{\theta_1(F), \dots, \theta_n(F)\}_b$  die Multimenge der Präordnungen bzgl. des Argumentationsgraphen  $F$ . Definiere die Copeland $^\alpha$ -aggregierte Semantik von  $\Theta$  bezeichnet als  $\theta_\Theta^{C^\alpha}$  durch  $a \succeq_F^{\theta_\Theta^{C^\alpha}} b$  gdw.  $C_{\Theta(F)}^\alpha(a) \geq C_{\Theta(F)}^\alpha(b)$ .

Das folgende Beispiel zeigt die Copeland $^\alpha$ -aggregierten Semantiken über den vier rangbasierten Semantiken aus Kapitel 2.2 für alle  $\alpha \in [0, 1]$  an einem Beispielargumentationsgraphen.

**Beispiel 25.** Sei  $\Theta := \{\theta^{Cat}, \theta^{Dbs}, \theta^{Bbs}, \theta^{Strat}\}$  die Menge der zu aggregierenden rangbasierten Semantiken. Es wird, wie im vorherigen Beispiel, der Argumentationsgraph  $F_2$  aus Abbildung 2 genutzt. In Tabelle 6 befindet sich die Zusammenfassung der Präordnungen der vier rangbasierten Semantiken. Zunächst betrachten wir die Ergebnisse der paarweisen Majoritätsrelationen. Für alle zehn Paare von unterschiedlichen Argumenten wurde in Tabelle 7 ein Vergleich innerhalb der rangbasierten Semantiken hergestellt und ein gemeinsamer Gewinner oder Gleichstand bestimmt. Damit können nun die Copeland $^\alpha$ -Wertungen für alle Argumente berech-

	a vs b	a vs c	a vs d	a vs e	b vs c	b vs d	b vs e	c vs d	c vs e	d vs e
$\theta^{Cat}(F_2)$	a/b	a/c	a/d	e	b/c	b/d	e	c/d	e	e
$\theta^{Dbs}(F_2)$	a	c	d	e	c	d	e	c/d	e	e
$\theta^{Bbs}(F_2)$	a	c	d	e	c	d	e	c/d	e	e
$\theta^{Strat}(F_2)$	b	c	d	e	b	b	e	c/d	e	e
Gesamt	a	c	d	e	c	d	e	c/d	e	e

Tabelle 7: Ergebnisse der paarweisen Majoritätsrelationen für die Berechnung der Copeland $^\alpha$ -aggregierten Semantiken über den vier rangbasierten Semantiken  $\theta^{Cat}, \theta^{Dbs}, \theta^{Bbs}, \theta^{Strat}$  des Argumentationsgraphen  $F_2$ .

net werden:  $C_{\Theta(F_2)}^\alpha(a) = 1, C_{\Theta(F_2)}^\alpha(b) = 0, C_{\Theta(F_2)}^\alpha(c) = 2 + \alpha, C_{\Theta(F_2)}^\alpha(d) = 2 + \alpha, C_{\Theta(F_2)}^\alpha(e) = 4$ . Mit Hilfe eines Vergleichs der Copeland $^\alpha$ -Wertungen ergibt sich für alle  $\alpha \in [0, 1]$  die gleiche Präordnung der Copeland $^\alpha$ -aggregierten Semantiken  $\theta_\Theta^{C^\alpha}$ :  $e \succ_{F_2}^{\theta_\Theta^{C^\alpha}} c \simeq_{F_2}^{\theta_\Theta^{C^\alpha}} d \succ_{F_2}^{\theta_\Theta^{C^\alpha}} a \succ_{F_2}^{\theta_\Theta^{C^\alpha}} b$ .

### 3.3. Borda $^\alpha$ -aggregierte rangbasierte Semantiken

Die Borda-Wahl ist wie die Pluralitätswahl eine weitere positionsabhängige Bewertungsregel in der Sozialwahltheorie. Bei dieser Regel erhalten die Kandidaten jeweils geordnet nach ihren linearen Präferenzen absteigend unterschiedlich viele

Punkte. Der Favorit mit dem höchsten Rang erhält die meisten Punkte (Anzahl der Kandidaten minus eins), während der Kandidat an letzter Position null Punkte erhält. Anschließend werden wieder alle Punkte eines jeden Kandidaten zusammengezählt und derjenige mit den meisten Punkten wird zum Gewinner erklärt.

Die Idee der Borda-Wahlregel wird im Folgenden wieder auf aggregierte Semantiken übertragen. Anders als in der Sozialwahltheorie muss für rangbasierte Semantiken definiert werden, wie gleich starke Argumente bewertet werden und was mit unvergleichbaren Argumenten passiert. Daher wird die Bewertung der Argumente in rangbasierten Semantiken wie folgt abgewandelt: Anstatt anhand der Position Punkte zu verteilen, wird jeweils ein Punkt vergeben, wenn ein Argument besser als ein anderes Argument ist. Für unvergleichbare Argumente werden somit keine Punkte vergeben. Für gleich starke Argumente werden wieder wie bei der Copeland-Wahlregel unterschiedliche Möglichkeiten und damit eine Familie von Borda-Wahlregeln,  $Borda^\alpha$  für  $\alpha \in [0, 1]$ , betrachtet. Sind zwei Argumente gleich stark, so erhalten beide  $\alpha$  Punkte dafür. Die  $Borda^\alpha$ -Wertung eines Argumentes ist die Gesamtanzahl der erreichten Punkte des Argumentes. Formal wird die  $Borda^\alpha$ -Wertung wie folgt definiert:

**Definition 3.9** (Borda $^\alpha$ -Wertung). Seien  $\succeq_1, \dots, \succeq_n$  Präordnungen auf einer Menge  $A$  und  $\alpha \in [0, 1]$ . Definiere die *Borda $^\alpha$ -Wertung*  $B_{\{\succeq_1, \dots, \succeq_n\}_b}^\alpha : A \rightarrow \mathbb{R}$  durch:

$$B_{\{\succeq_1, \dots, \succeq_n\}_b}^\alpha(a) = \sum_{i=1}^n (|\{b \in A \mid a \succ_i b\}| + \alpha |\{b \in A \setminus \{a\} \mid a \simeq_i b\}|).$$

Mittels Vergleich der Borda $^\alpha$ -Wertungen werden die Borda $^\alpha$ -aggregierte Semantiken definiert.

**Definition 3.10** (Borda $^\alpha$ -aggregierte Semantiken). Sei  $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  eine endliche Menge rangbasierter Semantiken und  $\alpha \in [0, 1]$ . Sei  $F = (A, R)$  ein Argumentationsgraph und  $\Theta(F) := \{\theta_1(F), \dots, \theta_n(F)\}_b$  die Multimenge der Präordnungen bzgl. des Argumentationsgraphen  $F$ . Definiere eine *Borda $^\alpha$ -aggregierte Semantik* von  $\Theta$  mit der Bezeichnung  $\theta_{\Theta}^{B^\alpha}$  durch  $a \succeq_F^{\theta_{\Theta}^{B^\alpha}} b$  gdw.  $B_{\Theta(F)}^\alpha(a) \geq B_{\Theta(F)}^\alpha(b)$ .

Abschließend werden die definierten Borda $^\alpha$ -aggregierten Semantiken über den vier rangbasierten Semantiken aus Kapitel 2.2 für einen Beispielargumentationsgraphen bestimmt.

**Beispiel 26.** Sei  $\Theta := \{\theta^{Cat}, \theta^{Dbs}, \theta^{Bbs}, \theta^{Strat}\}$  die Menge der zu aggregierenden rangbasierten Semantiken und  $F_2$  der Beispielargumentationsgraph aus Abbildung 2. Die Rangordnungen der rangbasierten Semantiken sind in Tabelle 6 zusammengefasst. Die Borda $^\alpha$ -Wertungen für alle Argumente berechnen sich wie folgt:

- $B_{\Theta(F_2)}^\alpha(a) = 3 * \alpha + 1 + 1 + 0 = 2 + 3\alpha,$
- $B_{\Theta(F_2)}^\alpha(b) = 3 * \alpha + 0 + 0 + 3 = 3 + 3\alpha,$

- $B_{\Theta(F_2)}^\alpha(c) = 3 * \alpha + (2 + \alpha) + (2 + \alpha) + (1 + \alpha) = 5 + 6\alpha,$
- $B_{\Theta(F_2)}^\alpha(d) = 3 * \alpha + (2 + \alpha) + (2 + \alpha) + (1 + \alpha) = 5 + 6\alpha,$
- $B_{\Theta(F_2)}^\alpha(e) = 4 + 4 + 4 + 4 = 16.$

Durch einen Vergleich der Borda $^\alpha$ -Wertungen ergibt sich die Rangfolge der Borda $^\alpha$ -aggregierten Semantik zu:  $e \succ_{F_2}^{\theta_{\Theta}^{B^\alpha}} c \simeq_{F_2}^{\theta_{\Theta}^{B^\alpha}} d \succ_{F_2}^{\theta_{\Theta}^{B^\alpha}} b \succ_{F_2}^{\theta_{\Theta}^{B^\alpha}} a$  für alle  $\alpha \in [0, 1]$ .

### 3.4. Beispiele: Aggregationen von vier rangbasierten Semantiken

In diesem Abschnitt werden die vier rangbasierten Semantiken aus Kapitel 2: Kategorisierersemantik, diskussionsbasierte Semantik, bürgenbasierte Semantik und strategiebasierte Semantik mit den definierten Familien aggregierter Semantiken Pluralitäts-aggregierte, Copeland $^\alpha$ -aggregierte und Borda $^\alpha$ -aggregierte Semantiken zu neuen aggregierten Semantiken zusammengefasst und Gegenbeispiele für nicht erfüllte Eigenschaften aufgezeigt.

Sei  $\Theta_1 := \{\theta^{Cat}, \theta^{Dbs}, \theta^{Bbs}, \theta^{Strat}\}$  die Menge der zu aggregierenden Semantiken. In den Beispielen 24,25,26 der drei definierten aggregierten rangbasierten Semantiken über  $\Theta_1$  auf jeweils den gleichen Argumentationsgraphen wurden bereits unterschiedliche Rangordnungen berechnet. Im Folgenden werden erste Untersuchungen der Eigenschaften für die aggregierten rangbasierten Semantiken  $\theta_{\Theta_1}^{pl}$ ,  $\theta_{\Theta_1}^{C^\alpha}$ ,  $\theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}$  angestellt.

Die Eigenschaft Komponentenunabhängigkeit wird von allen  $\theta \in \Theta_1$  erfüllt. Die folgenden Beispiele zeigen für  $\theta_{\Theta_1}^{C^\alpha}$ ,  $\theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}$  und  $\theta_{\Theta_1}^{pl}$ , dass diese aggregierten rangbasierten Semantiken trotzdem keine Komponentenunabhängigkeit erfüllen. Für  $\theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}$  wurde kein Gegenbeispiel gefunden.

**Beispiel 27** (Gegenbeispiel für die Komponentenunabhängigkeit für  $\theta_{\Theta_1}^{C^\alpha}$ ). Der folgende Argumentationsgraph  $F_{10} = (A_{10}, R_{10})$  aus Abbildung 10 besteht aus den beiden Teilargumentationsgraphen  $F'_{10} = (A'_{10}, R'_{10})$ , mit  $A'_{10} = \{a, b, c, d, e, f\}$  und  $R'_{10} = \{(a, a), (e, a), (c, b), (d, b), (e, c), (e, d), (f, c)\}$ , sowie  $F''_{10} = (A''_{10}, R''_{10})$ , mit  $A''_{10} = \{g, h, i, j, k, l, m\}$  und  $R''_{10} = \{(h, g), (i, h), (i, m), (j, h), (j, i), (j, m), (k, g), (l, k), (l, m), (m, k)\}$ . Er wurde so konstruiert, dass sich auch die diskussionsbasierte und die bürgenbasierte Semantik, welche sich sehr ähnlich verhalten, unterscheiden. Alle vier rangbasierten Semantiken erfüllen die Komponentenunabhängigkeit. Ihre Rangordnungen für  $F_{10}$  sind wie folgt, dabei sind Argumente der Zusammenhangskomponente  $F''_{10}$  in der Rangordnung hellgrau gekennzeichnet:

$$\begin{aligned} \theta^{Cat}(F_{10}): & e \simeq f \simeq \mathbf{j} \simeq \mathbf{l} \succ b \succ \mathbf{g} \succ a \succ d \simeq \mathbf{i} \succ \mathbf{k} \succ \mathbf{h} \succ c \succ \mathbf{m}, \\ \theta^{Dbs}(F_{10}): & e \simeq f \simeq \mathbf{j} \simeq \mathbf{l} \succ d \simeq \mathbf{i} \succ a \succ \mathbf{g} \succ b \succ \mathbf{k} \succ \mathbf{h} \succ c \succ \mathbf{m}, \\ \theta^{Bbs}(F_{10}): & e \simeq f \simeq \mathbf{j} \simeq \mathbf{l} \succ d \simeq \mathbf{i} \succ \mathbf{g} \succ a \succ b \succ \mathbf{k} \succ \mathbf{h} \succ c \succ \mathbf{m}, \\ \theta^{Strat}(F_{10}): & e \simeq f \simeq \mathbf{j} \simeq \mathbf{l} \succ \boxed{b \simeq \mathbf{g} \succ d} \simeq \mathbf{i} \simeq \mathbf{k} \succ c \simeq \mathbf{h} \succ \mathbf{m} \succ a. \end{aligned}$$

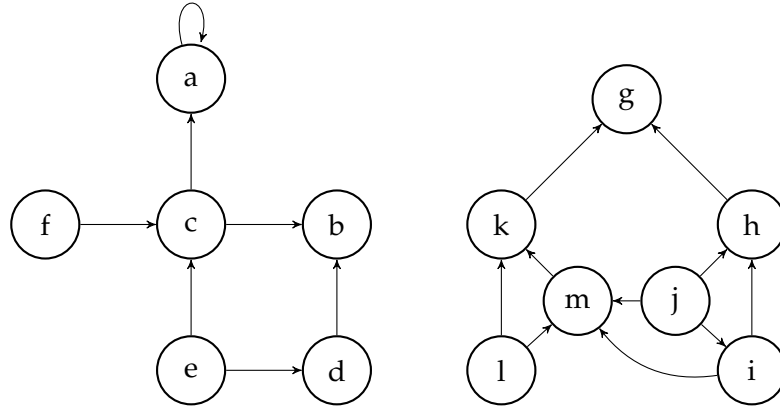


Abbildung 10: Der Argumentationsgraph  $F_{10}$ .

Im Anhang in Tabelle 15 sind die Copeland $^\alpha$ -Werte zu finden und in Tabelle 8 werden die Rangordnungen für die Copeland $^\alpha$ -aggregierten Semantiken zusammengefasst. Wichtige Unterscheidungen sind hellgrau gekennzeichnet.

Copeland $^1$ :	$\theta_{\Theta_1}^{C^1}(F'_{10})$	$e \simeq f \succ b \simeq d \succ a \succ c$
	$\theta_{\Theta_1}^{C^1}(F''_{10})$	$j \simeq l \succ g \simeq i \succ k \succ h \succ m$
	$\theta_{\Theta_1}^{C^1}(F_{10})$	$e \simeq f \simeq j \simeq l \succ g \simeq i \simeq d \succ b \succ a \succ k \succ h \succ c \succ m$
Copeland $^\alpha$ , $1 < \alpha < 0$ :	$\theta_{\Theta_1}^{C^\alpha}(F'_{10})$	$e \simeq f \succ d \succ b \succ a \succ c$
	$\theta_{\Theta_1}^{C^\alpha}(F''_{10})$	$j \simeq l \succ g \simeq i \succ k \succ h \succ m$
	$\theta_{\Theta_1}^{C^\alpha}(F_{10})$	$e \simeq f \simeq j \simeq l \succ g \succ i \simeq d \succ b \succ a \succ k \succ h \succ c \succ m$
Copeland $^0$ :	$\theta_{\Theta_1}^{C^0}(F'_{10})$	$e \simeq f \succ d \succ a \simeq b \succ c$
	$\theta_{\Theta_1}^{C^0}(F''_{10})$	$j \simeq l \succ g \simeq i \succ k \succ h \succ m$
	$\theta_{\Theta_1}^{C^0}(F_{10})$	$e \simeq f \simeq j \simeq l \succ g \succ i \simeq d \succ a \simeq b \succ k \succ h \succ c \succ m$

Tabelle 8: Copeland $^\alpha$ -aggregierte Semantiken über  $\Theta_1$  für den Argumentationsgraphen  $F_{10}$  und seinen Zusammenhangskomponenten  $F'_{10}$  und  $F''_{10}$ .

Die Rangordnungen der Copeland $^\alpha$ -aggregierten Semantiken für den Gesamtargumentationsgraphen unterscheiden sich zu den einzelnen Zusammenhangskomponenten in je einer Zusammenhangskomponente. Denn die Bewertung von Vergleichen unbeteiligter Argumente der jeweils anderen Zusammenhangskomponente gehen bei der Berechnung der Copeland $^\alpha$ -Werte mit ein. So sind im Beispiel der Copeland $^\alpha$ -aggregierten Semantiken mit  $0 \leq \alpha < 1$  zunächst in der zweiten Zusammenhangskomponente  $F''_{10}$  die Argumente  $g$  und  $i$  gleich stark bewertet. Im Gesamtgraphen hingegen verändert die unterschiedliche Bewertung zu jeweils dem Argument  $b$  die gesamte Bewertung. Während  $g$  im Direktvergleich mit  $b$  gewinnt, so herrscht zwischen  $i$  und  $b$  Gleichstand, weswegen sich gesamt die Veränderung

$g \succ_{F_{10}}^{\theta_{\Theta_1}^{C^\alpha}} i$  ergibt, mit  $0 \leq \alpha < 1$ . Im Falle von  $\alpha = 1$  betrachten wir die im Teilargumentationsgraph zunächst gleich starken Argumente  $b$  und  $d$ , welche im Gesamtargumentationsgraphen nicht mehr gleich stark sind. Damit sind Copeland $^\alpha$ -aggregierte Semantiken im Allgemeinen nicht Komponentenunabhängig.

**Beispiel 28** (Gegenbeispiel für die Komponentenunabhängigkeit für  $\theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}$ ). Wir betrachten den Argumentationsgraphen  $F_{11} = (\{a, b, c, d, e, f\}, \{(a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, a), (d, a), (e, f)\})$ , siehe Abbildung 11, mit seinen beiden Zusammenhangskomponenten  $F'_{11} = (\{a, b, c, d\}, \{(a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, a), (d, a)\})$  und  $F''_{11} = (\{e, f\}, \{(e, f)\})$ .

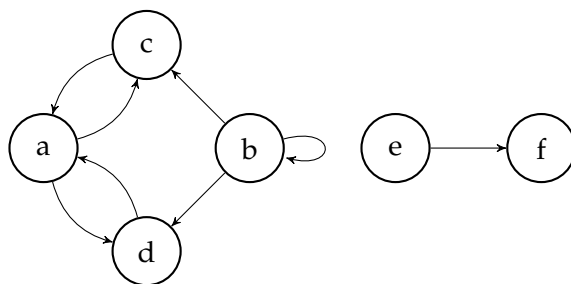


Abbildung 11: Der Argumentationsgraph  $F_{12}$ .

Die rangbasierten Semantiken  $\theta \in \{\theta^{Cat}, \theta^{Dbs}, \theta^{Bbs}\}$  erzeugen die folgenden Rangordnungen:

Kategorisierersemantik:	$e \succ_{F_{11}}^{\theta^{Cat}} b \succ_{F_{11}}^{\theta^{Cat}} a \succ_{F_{11}}^{\theta^{Cat}} f \succ_{F_{11}}^{\theta^{Cat}} c \simeq_{F_{11}}^{\theta^{Cat}} d$ ,
Diskussionsbasierte Semantik:	$e \succ_{F_{11}}^{\theta^{Dbs}} b \succ_{F_{11}}^{\theta^{Dbs}} f \succ_{F_{11}}^{\theta^{Dbs}} a \succ_{F_{11}}^{\theta^{Dbs}} d \simeq_{F_{11}}^{\theta^{Dbs}} c$ ,
Bürdenbasierte Semantik:	$e \succ_{F_{11}}^{\theta^{Bbs}} b \succ_{F_{11}}^{\theta^{Bbs}} f \succ_{F_{11}}^{\theta^{Bbs}} a \succ_{F_{11}}^{\theta^{Bbs}} d \simeq_{F_{11}}^{\theta^{Bbs}} c$ ,
Strategiebasierte Semantik:	$e \succ_{F_{11}}^{\theta^{Strat}} a \succ_{F_{11}}^{\theta^{Strat}} c \simeq_{F_{11}}^{\theta^{Strat}} d \simeq_{F_{11}}^{\theta^{Strat}} f \succ_{F_{11}}^{\theta^{Strat}} b$ .

Damit ergeben sich die Rangordnungen der entsprechenden Borda $^\alpha$ -aggregierten Semantiken für  $F_{11}$  wie folgt:  $e \succ_{F_{11}}^{\theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}} b \succ_{F_{11}}^{\theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}} a \succ_{F_{11}}^{\theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}} f \succ_{F_{11}}^{\theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}} c \simeq_{F_{11}}^{\theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}} d$  für  $\alpha \in [0, 1)$  und für  $\theta_{\Theta_1}^{B^1}(F_{11})$  ergibt sich  $e \succ_{F_{11}}^{\theta_{\Theta_1}^{B^1}} b \succ_{F_{11}}^{\theta_{\Theta_1}^{B^1}} a \simeq_{F_{11}}^{\theta_{\Theta_1}^{B^1}} f \succ_{F_{11}}^{\theta_{\Theta_1}^{B^1}} c \simeq_{F_{11}}^{\theta_{\Theta_1}^{B^1}} d$ . Für die Zusammenhangskomponente  $F'_{11}$  sind die Rangordnungen  $a \simeq_{F'_{11}}^{\theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}} b \succ_{F'_{11}}^{\theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}} c \simeq_{F'_{11}}^{\theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}} d$  für alle  $\alpha \in [0, 1]$ . Da  $b \succ_{F_{11}}^{\theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}} a$  und  $a \simeq_{F'_{11}}^{\theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}} b$  für alle  $\alpha \in [0, 1]$  ist die Komponentenunabhängigkeit nicht erfüllt.

**Beispiel 29** (Gegenbeispiel für die Komponentenunabhängigkeit für  $\theta_{\Theta_1}^{pl}$ ). Wir betrachten den Argumentationsgraphen  $F_{12} = (\{a, b, c, d\}, \{(a, b), (a, c), (b, a), (c, b)\})$  siehe Abbildung 12 mit seinen beiden Zusammenhangskomponenten  $F'_{12} = (\{a, b, c\}, \{(a, b), (a, c), (b, a), (c, b)\})$  und  $F''_{12} = (\{d\}, \{\})$ . Die rangbasierten Semantiken  $\theta \in$

$\{\theta^{Cat}, \theta^{Dbs}, \theta^{Bbs}\}$  erzeugen jeweils eine Rangordnung von  $a \succ_{F'_{12}}^\theta c \succ_{F'_{12}}^\theta b$  für die Zusammenhangskomponente  $F'_{12}$  und  $d \succ_{F_{12}}^\theta a \succ_{F_{12}}^\theta c \succ_{F_{12}}^\theta b$  für den Gesamtargumentationsgraphen  $F_{12}$  und die strategiebasierte Semantik erzeugt eine Rangordnung von  $a \succ_{F'_{12}}^{\theta^{Strat}} b \simeq_{F'_{12}}^{\theta^{Strat}} c$  für die Zusammenhangskomponente  $F'_{12}$  und  $d \succ_{F_{12}}^{\theta^{Strat}} a \succ_{F_{12}}^{\theta^{Strat}} b \simeq_{F_{12}}^{\theta^{Strat}} c$  für den Gesamtargumentationsgraphen  $F_{12}$ . Für die pluralitäts-aggregierte Semantik  $\theta_{\Theta_1}^{pl}$  zählen jeweils nur die Gewinner der Rangordnungen. Es ergeben sich die folgenden Präordnungen für  $F$  und  $F'$ :  $a \succ_{F'_{12}}^{\theta_{\Theta_1}^{pl}} b \simeq_{F'_{12}}^{\theta_{\Theta_1}^{pl}} c$  und  $d \succ_{F_{12}}^{\theta_{\Theta_1}^{pl}} a \simeq_{F_{12}}^{\theta_{\Theta_1}^{pl}} b \simeq_{F_{12}}^{\theta_{\Theta_1}^{pl}} c$ . Damit ist  $\theta_{\Theta_1}^{pl}$  nicht komponentenunabhängig, da insbesondere  $a \succ_{F'_{12}}^{\theta_{\Theta_1}^{pl}} b$ , während  $a \not\succeq_{F_{12}}^{\theta_{\Theta_1}^{pl}} b$ .

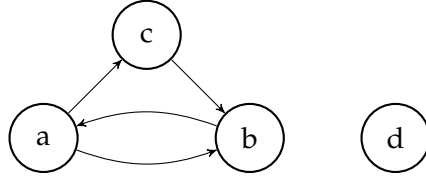


Abbildung 12: Der Argumentationsgraph  $F_{12}$ .

Die Eigenschaft des Kardinalitätsvorrangs wird im Allgemeinen weder von der pluralitäts-aggregierten Semantik  $\theta_{\Theta_1}^{pl}$ , noch von den Borda $^\alpha$ -aggregierten Semantiken  $\theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}$  und Copeland $^\alpha$ -aggregierten Semantiken  $\theta_{\Theta_1}^{C^\alpha}$  erfüllt. Allerdings ist ein Gegenbeispiel für die pluralitäts-aggregierte rangbasierte Semantik über  $\Theta_1$  wesentlich leichter zu finden, als für die übrigen aggregierten Semantiken. Dies verdeutlicht das folgende Beispiel:

**Beispiel 30** (Gegenbeispiel für den Kardinalitätsvorrang für  $\theta_{\Theta_1}^{pl}$ ). Wir betrachten den Argumentationsgraphen  $F_{13} = (\{a, b, c, d\}, \{(b, a), (d, c), (e, c)\})$ , siehe Abbildung 13.

Die vier rangbasierten Semantiken  $\theta \in \Theta_1$  haben jeweils die Rangfolge  $b \simeq_{F_{13}}^\theta d \simeq_{F_{13}}^\theta e \succ_{F_{13}}^\theta a \succ_{F_{13}}^\theta c$ . Für die pluralitäts-aggregierte Semantik  $\theta_{\Theta_1}^{pl}$  ergibt sich die Rangfolge  $b \simeq_{F_{13}}^{\theta_{\Theta_1}^{pl}} d \simeq_{F_{13}}^{\theta_{\Theta_1}^{pl}} e \succ_{F_{13}}^{\theta_{\Theta_1}^{pl}} a \simeq_{F_{13}}^{\theta_{\Theta_1}^{pl}} c$ . Obwohl in diesem Beispiel die zu aggregierenden Rangfolgen aller vier rangbasierten Semantiken nicht dem Kardinalitätsvorrang widersprechen, erfüllt die Präordnung  $\theta_{\Theta_1}^{pl}(F)$  nicht die Eigenschaft des Kardinalitätsvorrangs, da  $a \not\succeq_{F_{13}}^{\theta_{\Theta_1}^{pl}} c$  gilt, obwohl  $|\{a\}^-| < |\{c\}^-|$ . Im Gegensatz dazu gilt für die Copeland $^\alpha$ - und Borda $^\alpha$ -aggregierten Semantiken jeweils  $a \succ_{F_{13}}^\theta c$ , mit  $\theta \in \{\theta_{\Theta_1}^{C^\alpha}, \theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}\}$  für alle  $\alpha \in [0, 1]$ .

Auch für die Copeland $^\alpha$ -aggregierten und Borda $^\alpha$ -aggregierten Semantiken lässt sich ein Gegenbeispiel finden, wie das folgende Beispiel zeigt.

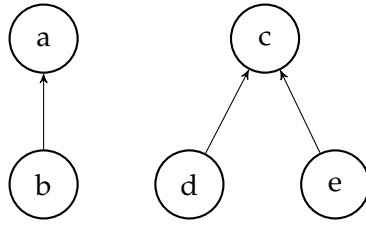


Abbildung 13: Der Argumentationsgraph  $F_{13}$ .

**Beispiel 31** (Gegenbeispiel für den Kardinalitätsvorrang für  $\theta_{\Theta_1}^{C^\alpha}$  und  $\theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}$ ). Wir betrachten den Argumentationsgraphen  $F_{14} = (\{a, b, c, d, e, f, g\}, \{(a, a), (c, b), (d, b), (e, c), (e, d), (f, c), (f, d), (g, c), (g, d)\})$  siehe Abbildung 14.

Die Präordnungen der vier zu aggregierenden rangbasierten Semantiken sind wie folgt:

$$\theta^{Cat}(F_{14}): e \simeq f \simeq g \succ b \succ a \succ c \simeq d,$$

$$\theta^{Dbs}(F_{14}): e \simeq f \simeq g \succ a \succ b \succ c \simeq d,$$

$$\theta^{Bbs}(F_{14}): e \simeq f \simeq g \succ a \succ b \succ c \simeq d,$$

$$\theta^{Strat}(F_{14}): e \simeq f \simeq g \succ b \succ c \simeq d \succ a.$$

Aggregiert ergeben sich die Rangfolgen für die Copeland $^\alpha$ -aggregierten und Borda $^\alpha$ -aggregierten rangbasierten Semantiken für alle  $\alpha \in [0, 1]$ :

$$\theta_{\Theta_1}^{C^\alpha}(F_{14}): e \simeq f \simeq g \succ a \simeq b \succ c \simeq d,$$

$$\theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}(F_{14}): e \simeq f \simeq g \succ b \succ a \succ c \simeq d.$$

Während die diskussionsbasierte und die bürgenbasierte Semantik jeweils Kardinalitätsvorrang erfüllen, erfüllen die Kategorisierersemantik und die strategiebasierte Semantik die Eigenschaft in diesem Beispiel nicht. Insbesondere ist  $a \not\succeq_{F_{14}}^\theta b$  für  $\theta \in \{\theta^{Cat}, \theta^{Strat}\}$ , obwohl  $|\{a\}^-| < |\{b\}^-|$  gilt. Dies reicht aus, dass auch für die aggregierten Semantiken die Eigenschaft des Kardinalitätsvorrangs nicht erfüllt ist, denn es gilt  $a \simeq_{F_{14}}^{\theta_{\Theta_1}^{C^\alpha}} b$  und  $b \succ_{F_{14}}^{\theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}} a$ , für alle  $\alpha \in [0, 1]$ .

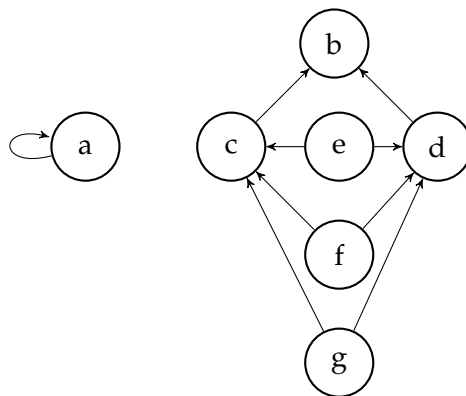


Abbildung 14: Der Argumentationsgraph  $F_{14}$ .

Gegentransitivität und starke Gegentransitivität sind von keiner der aggregierten Semantiken bzgl.  $\Theta_1$  im Allgemeinen erfüllt, wie die beiden folgenden Gegenbeispiele zeigen.

**Beispiel 32** (Gegenbeispiel für die Gegentransitivität für  $\theta_{\Theta_1}^{pl}$ ,  $\theta_{\Theta_1}^{C^\alpha}$  und  $\theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}$ ). Wir betrachten den Argumentationsgraphen  $F_{15} = (\{a, b\}, \{(a, a), (a, b)\})$  siehe Abbildung 15. Falls eine rangbasierte Semantik  $\theta$  die Eigenschaft der Gegentransitivität erfüllt, ergibt sich die Rangfolge für  $F_{15}$  wie folgt: Die Mengen der Angreifer  $\{b\}^- = \{a\}^- = \{a\}$  bestehen jeweils nur aus der Menge mit dem Argument  $a$ , weswegen sowohl  $\{b\}^- \succeq_{F_{15}}^\theta \{a\}^-$  als auch  $\{a\}^- \succeq_{F_{15}}^\theta \{b\}^-$  gilt. Es folgt sowohl  $a \succeq_{F_{15}}^\theta b$  als auch  $b \succeq_{F_{15}}^\theta a$  und somit ergibt sich als Gesamtrangfolge  $a \simeq_{F_{15}}^\theta b$  für alle rangbasierten Semantiken  $\theta$  mit Eigenschaft der Gegentransitivität. Dies entspricht auch den Rangfolgen der Kategorisierersemantik, der diskussionsbasierten und bürgenbasierten rangbasierten Semantiken  $\theta \in \{\theta^{Cat}, \theta^{Dbs}, \theta^{Bbs}\}$ , die jeweils alle die Eigenschaft der Gegentransitivität erfüllen. Die strategiebasierte Semantik hingegen erfüllt die Eigenschaft nicht und ihre Rangordnung ist  $b \succ_{F_{15}}^{\theta^{Strat}} a$ . Für die aggregierten rangbasierten Semantiken erhalten wir auch jeweils  $b \succ_{F_{15}}^\theta a$  für alle  $\theta \in \{\theta_{\Theta_1}^{pl}, \theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}, \theta_{\Theta_1}^{C^\alpha}\}$  für jeweils alle  $\alpha \in [0, 1]$ . Somit erfüllen sie alle im Allgemeinen nicht die Eigenschaft der Gegentransitivität.

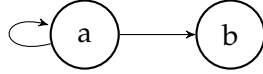


Abbildung 15: Der Argumentationsgraph  $F_{15}$ .

**Beispiel 33** (Gegenbeispiel für die starke Gegentransitivität für  $\theta_{\Theta_1}^{pl}$ ,  $\theta_{\Theta_1}^{C^\alpha}$  und  $\theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}$ ). Wir betrachten den Argumentationsgraphen  $F_{16} = (\{a, b\}, \{(a, a), (a, b), (b, c)\})$  siehe Abbildung 16. Für die rangbasierten Semantiken Kategorisierersemantik, die diskussionsbasierte Semantik und die bürgenbasierte Semantik ergibt sich jeweils eine Rangfolge von  $a \simeq_{F_{16}}^\theta b \simeq_{F_{16}}^\theta c$ , mit  $\theta \in \{\theta^{Cat}, \theta^{Dbs}, \theta^{Bbs}\}$ . Für die strategiebasierte Semantik ist die Rangfolge hingegen  $b \simeq_{F_{16}}^{\theta^{Strat}} c \succ_{F_{16}}^{\theta^{Strat}} a$ . Auch die Rangfolgen der aggregierten rangbasierten Semantiken sind jeweils  $b \simeq_{F_{16}}^\theta c \succ_{F_{16}}^\theta a$ , mit  $\theta \in \{\theta_{\Theta_1}^{pl}, \theta_{\Theta_1}^{C^\alpha}, \theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}\}$  für alle  $\alpha \in [0, 1]$ . Angenommen, die aggregierten rangbasierten Semantiken  $\theta \in \{\theta_{\Theta_1}^{pl}, \theta_{\Theta_1}^{C^\alpha}, \theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}\}$  für alle  $\alpha \in [0, 1]$ , erfüllen die starke Gegentransitivität. Es gilt  $\{c\}^- = \{b\}$  und  $\{b\}^- = \{a\}$  und da  $b \succ_{F_{16}}^\theta a$  gilt, ist  $\{c\}^- \succ_{F_{16}}^\theta \{b\}^-$ . Aus der starken Gegentransitivität müsste nun  $b \succ_{F_{16}}^\theta c$  folgen. Dies ist ein Widerspruch zu den berechneten Rangfolgen, weswegen die Eigenschaft der starken Gegentransitivität im Allgemeinen nicht erfüllt ist.

Die Eigenschaft der  $\sigma$ -Kompatibilität ist für alle behandelten aggregierten rangbasierten Semantiken bzgl.  $\Theta_1$  im Allgemeinen nicht erfüllt.

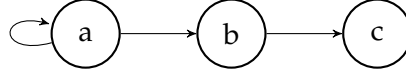


Abbildung 16: Der Argumentationsgraph  $F_{16}$ .

**Beispiel 34** (Gegenbeispiel  $\sigma$ -Kompatibilität, mit  $\sigma \in \{\text{co}, \text{pr}, \text{gr}, \text{st}\}$ , für  $\theta_{\Theta_1}^{pl}$ ,  $\theta_{\Theta_1}^{C^\alpha}$  und  $\theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}$ ). Wir betrachten den Argumentationsgraphen  $F_7$  aus Beispiel 21, siehe Abbildung 7. Wie dort bereits gesehen, ist  $\text{co} = \text{pr} = \text{gr} = \text{st} = \{\{a, d\}\}$ . Daher müssten für eine Erfüllung der Eigenschaft der  $\sigma$ -Kompatibilität die Argumente  $a$  und  $d$  stärker als die übrigen Argumente in der rangbasierten Semantik sein für alle  $\sigma \in \{\text{co}, \text{pr}, \text{gr}, \text{st}\}$ . Die rangbasierten Semantiken aus  $\Theta_1$  haben die folgenden Rangfolgen:

- $a \succ_{F_7}^{\theta^{Cat}} b \simeq_{F_7}^{\theta^{Cat}} c \simeq_{F_7}^{\theta^{Cat}} d$ ,
- $a \succ_{F_7}^{\theta} b \simeq_{F_7}^{\theta} c \succ_{F_7}^{\theta} d$ , für die beiden rangbasierten Semantiken  $\theta^{Dbs}$ ,  $\theta^{Bbs}$ , und
- $a \succ_{F_7}^{\theta^{Strat}} d \succ_{F_7}^{\theta^{Strat}} b \simeq_{F_7}^{\theta^{Strat}} c$ .

Für die aggregierten rangbasierten Semantiken ergeben sich die folgenden Rangfolgen:  $a \succ_{F_7}^{\theta} b \simeq_{F_7}^{\theta} c \succ_{F_7}^{\theta} d$  für  $\theta \in \{\theta_{\Theta_1}^{C^{\alpha_1}}, \theta_{\Theta_1}^{B^{\alpha_2}}\}$ , für  $\alpha_1 \in [0, 1]$  und  $\alpha_2 \in (0, 1]$ , und  $a \succ_{F_7}^{\theta} b \simeq_{F_7}^{\theta} c \simeq_{F_7}^{\theta} d$ , für  $\theta \in \{\theta_{\Theta_1}^{pl}, \theta_{\Theta_1}^{B^0}\}$ . Insbesondere ist jeweils  $d \not\succeq_{F_7}^{\theta} b$  für alle  $\theta \in \{\theta_{\Theta_1}^{pl}, \theta_{\Theta_1}^{C^\alpha}, \theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}\}$ , für  $\alpha \in [0, 1]$ , und damit die Eigenschaft der  $\sigma$ -Kompatibilität für alle  $\sigma \in \{\text{co}, \text{pr}, \text{gr}, \text{st}\}$  nicht erfüllt.

Auch die Eigenschaft der Selbstwiderspruchsvermeidung ist für alle aggregierten rangbasierten Semantiken  $\theta_{\Theta_1}^{pl}$ ,  $\theta_{\Theta_1}^{C^\alpha}$  und  $\theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}$ , mit  $\alpha \in [0, 1]$ , im Allgemeinen nicht erfüllt. Wir betrachten das folgende Gegenbeispiel:

**Beispiel 35** (Gegenbeispiel für die Selbstwiderspruchsvermeidung für  $\theta_{\Theta_1}^{pl}$ ,  $\theta_{\Theta_1}^{C^\alpha}$  und  $\theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}$ ). Wir betrachten den Argumentationsgraphen  $F_{17} = (\{a, b, c\}, \{(a, a), (b, c)\})$ , siehe Abbildung 17. Für die Kategorisierersemantik, die diskussionsbasierte Semantik und die büldenbasierte Semantik, welche alle die Eigenschaft der Selbstwiderspruchsvermeidung nicht erfüllen, ergibt sich jeweils eine Rangfolge von  $b \succ_{F_{17}}^{\theta} a \succ_{F_{17}}^{\theta} c$ , mit  $\theta \in \{\theta^{Cat}, \theta^{Dbs}, \theta^{Bbs}\}$ . Für die strategiebasierte Semantik, welche die Eigenschaft der Selbstwiderspruchsvermeidung erfüllt, ist die Rangfolge hingegen  $b \succ_{F_{17}}^{\theta^{Strat}} c \succ_{F_{17}}^{\theta^{Strat}} a$ . Die Rangfolgen der betrachteten aggregierten rangbasierten Semantiken sind wie folgt:  $b \succ_{F_{17}}^{\theta_{\Theta_1}^{pl}} a \simeq_{F_{17}}^{\theta_{\Theta_1}^{pl}} c$  und  $b \succ_{F_{17}}^{\theta} a \succ_{F_{17}}^{\theta} c$ , für die rangbasierten Semantiken  $\theta \in \{\theta_{\Theta_1}^{C^\alpha}, \theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}\}$ , für alle  $\alpha \in [0, 1]$ . Obwohl das Argument  $a$  sich selbst angreift, ist es bei den untersuchten aggregierten rangbasierten Semantiken nicht schwächer in der Rangordnung als das Argument  $c$ , welches sich nicht selbst angreift. Deswegen ist die Eigenschaft der Selbstwiderspruchsvermeidung im Allgemeinen nicht erfüllt.

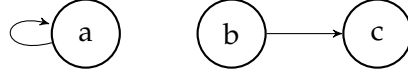


Abbildung 17: Der Argumentationsgraph  $F_{17}$ .

Qualitätsvorrang ist von keiner rangbasierten Semantik aus der Menge  $\Theta_1$  erfüllt und auch nicht von den aggregierten Semantiken, wie das folgende Beispiel zeigt.

**Beispiel 36** (Gegenbeispiel für den Qualitätsvorrang für  $\theta_{\Theta_1}^{pl}$ ,  $\theta_{\Theta_1}^{C\alpha}$  und  $\theta_{\Theta_1}^{B\alpha}$ ). Wir betrachten den Argumentationsgraphen  $F_{18} = (\{a, b, c\}, \{(a, a), (a, b), (b, a), (c, b), (c, c)\})$  siehe Abbildung 18.

Für die Kategorisierersemantik, die diskussionsbasierte Semantik und die büdenbasierte Semantik ergibt sich jeweils eine Rangfolge von  $c \succ_{F_{18}}^\theta a \succ_{F_{18}}^\theta b$ , mit  $\theta \in \{\theta^{Cat}, \theta^{Dbs}, \theta^{Bbs}\}$  und für die strategiebasierte Semantik ist die Rangfolge  $b \succ_{F_{18}}^{\theta^{Strat}} a \simeq_{F_{18}}^{\theta^{Strat}} c$ .

Die Rangfolgen der betrachteten aggregierten rangbasierten Semantiken sind wie folgt:  $c \succ_{F_{18}}^{\theta_{\Theta_1}^{pl}} b \succ_{F_{18}}^{\theta_{\Theta_1}^{pl}} a$  und  $c \succ_{F_{18}}^\theta a \succ_{F_{18}}^\theta b$ , für die rangbasierten Semantiken  $\theta \in \{\theta_{\Theta_1}^{C\alpha}, \theta_{\Theta_1}^{B\alpha}\}$ , für alle  $\alpha \in [0, 1]$ . Es ist  $\{c\}^- = \{c\}$  und  $\{a\}^- = \{a, b\}$ . Da für die aggregierten rangbasierten Semantiken jeweils  $c \succ_{F_{18}}^\theta a$  und  $c \succ_{F_{18}}^\theta b$  gilt, müsste für eine rangbasierte Semantik, die Qualitätsvorrang erfüllt,  $a \succ_{F_{18}}^\theta c$  folgen. Da allerdings  $c \succ_{F_{18}}^\theta a$  oder  $c \simeq_{F_{18}}^\theta a$  für alle  $\theta \in \{\theta^{Cat}, \theta^{Dbs}, \theta^{Bbs}, \theta_{\Theta_1}^{pl}, \theta_{\Theta_1}^{C\alpha}, \theta_{\Theta_1}^{B\alpha}\}$  gilt, ist die Eigenschaft des Qualitätsvorrangs für dieses Beispiel für keine der aufgeführten rangbasierten Semantiken erfüllt. Somit erfüllen die behandelten aggregierten rangbasierten Semantiken über  $\Theta_1$  nicht die Eigenschaft des Qualitätsvorrangs.

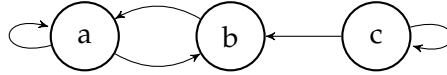


Abbildung 18: Der Argumentationsgraph  $F_{18}$ .

Die Eigenschaft Angriff vs vollständige Verteidigung wird von keiner der aggregierten rangbasierten Semantiken über  $\Theta_1$  erfüllt. Dies wird durch das folgende Gegenbeispiel gezeigt:

**Beispiel 37** (Gegenbeispiel für Angriff vs vollständige Verteidigung für  $\theta_{\Theta_1}^{pl}$ ,  $\theta_{\Theta_1}^{C\alpha}$  und  $\theta_{\Theta_1}^{B\alpha}$ ). Wir betrachten den aus den Beispielen 21 und 34 bereits bekannten kreisfreien Argumentationsgraphen  $F_7 = (\{a, b, c, d\}, \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, d)\})$ , siehe Abbildung 7.

Das Argument  $d$  ist vollständig verteidigt und das Argument  $c$  hat genau einen Angreifer  $\{c\}^- = \{a\}$ , der selbst nicht angegriffen wird, mit  $\{a\}^- = \emptyset$ . Daher gilt für eine rangbasierte Semantik  $\theta$ , welche die Eigenschaft Angriff vs vollständige Verteidigung erfüllt, insbesondere  $d \succ_{F_7}^\theta c$ , wie beispielsweise für die strategiebasierte

Semantik, mit  $a \succ_{F_7}^{\theta^{Strat}} d \succ_{F_7}^{\theta^{Strat}} b \simeq_{F_7}^{\theta^{Strat}} c$ . Für die übrigen drei Semantiken ist die Eigenschaft nicht erfüllt mit  $a \succ_{F_7}^{\theta^{Cat}} b \simeq_{F_7}^{\theta^{Cat}} c \simeq_{F_7}^{\theta^{Cat}} d$  und  $a \succ_{F_7}^{\theta} b \simeq_{F_7}^{\theta} c \succ_{F_7}^{\theta} d$ , für  $\theta \in \{\theta^{Dbs}, \theta^{Bbs}\}$ .

Berechnungen für die pluralitäts-aggregierte und die Borda<sup>0</sup>-aggregierte Semantik ergeben jeweils die Rangfolge  $a \succ_{F_7}^{\theta} b \simeq_{F_7}^{\theta} c \simeq_{F_7}^{\theta} d$ ,  $\theta \in \{\theta_{\Theta_1}^{pl}, \theta_{\Theta_1}^{B^0}\}$ . Für die übrigen betrachteten aggregierten rangbasierten Semantiken  $\theta \in \{\theta_{\Theta_1}^{C^\alpha}, \theta_{\Theta_1}^{B^{\alpha_1}}\}$ ,  $\alpha \in [0, 1]$  und  $\alpha_1 \in (0, 1]$  ergibt sich eine Rangfolge von  $a \succ_{F_7}^{\theta} b \simeq_{F_7}^{\theta} c \succ_{F_7}^{\theta} d$ . Wegen  $d \not\simeq_{F_7}^{\theta} c$  für alle aggregierten rangbasierten Semantiken  $\theta \in \{\theta_{\Theta_1}^{pl}, \theta_{\Theta_1}^{C^\alpha}, \theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}\}$  für alle  $\alpha \in [0, 1]$  erfüllt keine der betrachteten aggregierten rangbasierten Semantiken die Eigenschaft von Angriff vs vollständige Verteidigung.

Auch für die Eigenschaft Äquivalenz der Argumentation lässt sich ein Gegenbeispiel für alle aggregierten-rangbasierten Semantiken finden.

**Beispiel 38** (Gegenbeispiel für Äquivalenz der Argumentation für  $\theta_{\Theta_1}^{pl}$ ,  $\theta_{\Theta_1}^{C^\alpha}$  und  $\theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}$ ). Wir betrachten den Argumentationsgraphen  $F_{15} = (\{a, b\}, \{(a, a), (a, b)\})$ , siehe Abbildung 15 aus Beispiel 32.

Den gleichen Argumentationsgraphen und die folgende ähnliche Argumentation führte bereits Delobelle [16] auf, um zu zeigen, dass die Eigenschaften Selbstwiderspruchsvermeidung und Äquivalenz der Argumentation inkompatibel sind. Für alle rangbasierten Semantiken, welche die Eigenschaft der Äquivalenz der Argumentation erfüllen, müssen die Argumente  $a$  und  $b$  gleich stark sein, da ein Isomorphismus zwischen den unendlichen Vorfahrengraphen der beiden Argumente existiert. Dies gilt beispielsweise für die rangbasierten Semantiken  $\theta \in \{\theta^{Cat}, \theta^{Dbs}, \theta^{Bbs}\}$  mit  $a \simeq_{F_{15}}^{\theta} b$ . Die strategiebasierte Semantik, welche die Eigenschaft der Selbstwiderspruchsvermeidung erfüllt, hat hingegen die Rangfolge  $b \succ_{F_{15}}^{\theta^{Strat}} a$ .

Aggregationen der vier Rangfolgen ergeben  $b \succ_{F_{15}}^{\theta} a$  für alle  $\theta \in \{\theta_{\Theta_1}^{pl}, \theta_{\Theta_1}^{C^\alpha}, \theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}\}$ . Somit ist dies ein Gegenbeispiel für die Äquivalenz der Argumentation für die betrachteten aggregierten rangbasierten Semantiken.

Der gleiche Argumentationsgraph dient auch als Gegenbeispiel für die Äquivalenz für alle aggregierten rangbasierten Semantiken.

**Beispiel 39** (Gegenbeispiel für Äquivalenz für  $\theta_{\Theta_1}^{pl}$ ,  $\theta_{\Theta_1}^{C^\alpha}$  und  $\theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}$ ). Wir betrachten den gleichen Argumentationsgraphen  $F_{15} = (\{a, b\}, \{(a, a), (a, b)\})$  siehe Abbildung 15 aus Beispiel 32, der auch im vorherigen Beispiel 38 genutzt wurde. Da die beiden Argumente  $a$  und  $b$  jeweils die gleiche Menge an Angreifern haben, die nur aus dem Argument  $a$  besteht, gibt es mit der Identität eine triviale bijektive Abbildung zwischen den Angreifern  $f(a) = a$ , mit  $a \simeq_{F_{15}}^{\theta} f(a)$  für alle rangbasierten Semantiken  $\theta$ . Somit müssten rangbasierte Semantiken  $\theta$ , welche die Eigenschaft der Äquivalenz erfüllen, auch  $a \simeq_{F_{15}}^{\theta} b$  erfüllen. Da  $b \succ_{F_{15}}^{\theta} a$  für alle  $\theta \in \{\theta_{\Theta_1}^{pl}, \theta_{\Theta_1}^{C^\alpha}, \theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}\}$  gilt, wobei  $\alpha \in [0, 1]$ , ist dies ein Gegenbeispiel für die Eigenschaft der Äquivalenz für die betrachteten aggregierten rangbasierten Semantiken.

	Cat	Dbs	Bbs	M&T	Pluralität	Borda	Copeland
Syntaxunabhängigkeit	✓	✓	✓	✓	(✓)?	(✓)?	(✓)?
Komponentenunabhängigkeit	✓	✓	✓	✓	✗	✗	✗
Kardinalitätsvorrang	✗	✓	✓	✗	✗	✗	✗
Gegentransitivität	✓	✓	✓	✗	✗	✗	✗
starke Gegentransitivität	✓	✓	✓	✗	✗	✗	✗
$\sigma$ -Kompatibilität*	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
Leerheitsvorrang	✓	✓	✓	✓	(✓)?	(✓)?	(✓)?
Selbstwiderspruchsvermeidung	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗
Qualitätsvorrang	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
Angriff vs vollständige Verteidigung	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗
Totalität	✓	✓	✓	✓	(✓)?	(✓)?	(✓)?
Äquivalenz der Unangegriffenen	✓	✓	✓	✓	(✓)?	(✓)?	(✓)?
Äquivalenz der Argumentation	✓	✓	✓	✗	✗	✗	✗
Äquivalenz	✓	✓	✓	✗	✗	✗	✗

Tabelle 9: (Nicht)-Erfüllung von Eigenschaften der vier rangbasierten Semantiken: Kategorisierersemantik (Cat), diskussionsbasierte Semantik (Dbs), büdenbasierte Semantik (Bbs) und strategiebasierte Semantik (M&T) sowie (Nicht)-Erfüllung der Eigenschaften der aggregierten rangbasierten Semantiken der pluralitäts-aggregierten, der Copeland $^\alpha$ -aggregierten und der Borda $^\alpha$ -aggregierten Semantiken über jeweils diese vier rangbasierten Semantiken. \*  $\sigma$ -Kompatibilität für  $\sigma = \{\text{co, pr, gr, st}\}$

Die bisherigen Ergebnisse sind in der Tabelle 9 zusammengefasst. Es fällt auf, dass für fast alle Eigenschaften Gegenbeispiele gefunden werden konnten. Nur, falls alle vier rangbasierte Semantiken selbst eine gewisse Eigenschaft erfüllen, wurde teilweise kein Gegenbeispiel gefunden. So werden die Eigenschaften Syntaxunabhängigkeit, Leerheitsvorrang, Totalität und Äquivalenz der Unangegriffenen von allen  $\theta \in \Theta_1$  erfüllt und es konnten keine Gegenbeispiele für die aggregierten Semantiken  $\theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}$ ,  $\theta_{\Theta_1}^{C^\alpha}$ ,  $\theta_{\Theta_1}^{pl}$  gefunden werden. Auch die Eigenschaft der Komponentenunabhängigkeit wurde von allen vier rangbasierten Semantiken aus  $\Theta_1$  erfüllt, allerdings konnten für  $\theta_{\Theta_1}^{C^\alpha}$ ,  $\theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}$  und  $\theta_{\Theta_1}^{pl}$  bereits Gegenbeispiele gefunden werden. Weitere Untersuchungen, ob sich gewisse Eigenschaften von den rangbasierten Semantiken auf die aggregierten Semantiken im Allgemeinen *übertragen*, folgen im nächsten Kapitel.

## 4. Untersuchung der aggregierten rangbasierten Semantiken auf ihre Eigenschaften

In diesem Kapitel werden die drei Familien aggregierter rangbasierter Semantiken im Allgemeinen auf ihre Eigenschaften hin untersucht. In Kapitel 3.4 wurden bereits für die konkreten aggregierten rangbasierten Semantiken  $\theta_{\Theta_1}^{pl}$ ,  $\theta_{\Theta_1}^{C^\alpha}$ ,  $\theta_{\Theta_1}^{B^\alpha}$  für  $\Theta_1 := \{\theta^{Cat}, \theta^{Dbs}, \theta^{Bbs}, \theta^{Strat}\}$  und  $\alpha \in [0, 1]$  Gegenbeispiele für Eigenschaften gefunden, die nicht von allen rangbasierten Semantiken erfüllt sind. Falls alle vier

rangbasierten Semantiken selbst diese Eigenschaft erfüllen, wurden nur für die Eigenschaft der Komponentenunabhängigkeit Gegenbeispiele für alle betrachteten aggregierten Semantiken gefunden. In diesem Kapitel wird untersucht, ob die aggregierten rangbasierten Semantiken gewisse Eigenschaften erfüllen, falls alle rangbasierten Semantiken, die aggregiert werden sollen, diese Eigenschaft erfüllen. Beweise dieses Zusammenhangs werden wenn möglich aufgezeigt, oder Gegenbeispiele vorgestellt. Außerdem wird untersucht, ob eine aggregierte Semantik eine gewisse Eigenschaft erfüllt, wenn diese nur von der Mehrheit der rangbasierten Semantiken erfüllt wird. Dafür werden die Begriffe *Übertragbarkeit* und *Mehrheitsübertragbarkeit* definiert.

Zunächst kann als Ausnahme gezeigt werden, dass die Eigenschaft der Totalität für die drei Familien aggregierter rangbasierter Semantiken sogar unabhängig von den zu aggregierenden rangbasierten Semantiken erfüllt ist.

**Proposition 5.** Die pluralitäts-aggregierten, die Copeland $^\alpha$ -aggregierten und die Borda $^\alpha$ -aggregierten Semantiken erfüllen die Eigenschaft der Totalität.

*Beweis.* Sei  $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  eine endliche Menge rangbasierter Semantiken und  $F = (A, R)$  ein beliebiger Argumentationsgraph.

Für die pluralitäts-aggregierte rangbasierte Semantik  $\theta_\Theta^{pl}$  gilt: Da die Prioritätsfunktion und die aggregierte Prioritätsfunktion wohldefiniert sind und jedem Element  $a \in A$  jeweils einen Wert zuordnen, kann jedes Element mit jedem anderen in der pluralitäts-aggregierten Semantik verglichen werden. Die rangbasierte Semantik  $\theta_\Theta^{pl}$  kann somit als *bewertete Semantik* angesehen werden und es gilt für zwei Argumente  $a, b \in A$  entweder  $a \succeq_F^{\theta_\Theta^{pl}} b$  oder  $b \succeq_F^{\theta_\Theta^{pl}} a$ . Damit ist die Totalität für jede pluralitäts-aggregierte Semantik  $\theta_\Theta^{pl}$  für beliebige  $\Theta$  bewiesen.

Die Copeland $^\alpha$ -aggregierten rangbasierten Semantiken  $\theta_\Theta^{C^\alpha}$ , für  $\alpha \in [0, 1]$ , können auch jeweils als *bewertete Semantiken* eingeordnet werden, die jedes Argument des Argumentationsgraphen mit einem Zahlenwert bewerten und anhand der Vergleiche der Argumente untereinander jeweils die Präordnung bestimmen. So wird jedem  $a \in A$  eine Copeland $^\alpha$ -Wertung  $C_{\Theta(F)}^\alpha(a)$  zugeordnet, da die Copeland $^\alpha$ -Wertung wohldefiniert ist, und ein Vergleich aller Argumente  $a \in A$  untereinander möglich ist. Daher erfüllen die Copeland $^\alpha$ -aggregierten Semantiken  $\theta_\Theta^{C^\alpha}$  die Eigenschaft der Totalität für alle  $\alpha \in [0, 1]$  und beliebige  $\Theta$ .

Ähnlich werden auch die Präordnungen der Borda $^\alpha$ -aggregierten Semantiken  $\theta_\Theta^{B^\alpha}$ , mit  $\alpha \in [0, 1]$ , mittels Vergleich der Borda $^\alpha$ -Wertungen  $B_{\Theta(F)}^\alpha : A \rightarrow \mathbb{R}$  bestimmt. Da auch die Borda $^\alpha$ -Wertungen für alle  $a \in A$  wohldefiniert sind, können alle Argumente miteinander verglichen werden und die entstandene Präordnung ist total.  $\square$

Nun werden die Begriffe *Übertragbarkeit* und *Mehrheitsübertragbarkeit* definiert.

**Definition 4.1** (Übertragbarkeit). Sei  $\Theta$  eine beliebige endliche Menge rangbasierter Semantiken und  $\theta_\Theta$  eine aggregierte rangbasierte Semantik über  $\Theta$ . Eine Eigenschaft

der rangbasierten Semantiken aus der Menge  $\Theta$  *überträgt* sich auf die aggregierte rangbasierte Semantik  $\theta_\Theta$ , falls gilt: wenn alle rangbasierten Semantiken  $\theta \in \Theta$  die Eigenschaft erfüllen, dann erfüllt auch die aggregierte rangbasierte Semantik  $\theta_\Theta$  diese Eigenschaft.

Noch stärker als der Begriff der Übertragbarkeit ist der Begriff der *Mehrheitsübertragbarkeit*:

**Definition 4.2** (Mehrheitsübertragbarkeit). Sei  $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  eine beliebige endliche Menge rangbasierter Semantiken und  $\theta_\Theta$  eine aggregierte rangbasierte Semantik über  $\Theta$ . Eine Eigenschaft der Menge rangbasierter Semantiken  $\Theta$  ist *mehrheitsübertragbar* auf die aggregierte rangbasierte Semantik  $\theta_\Theta$ , falls gilt: es existiert eine Mehrheit der rangbasierten Semantiken  $\Theta' \subseteq \Theta$  mit  $|\Theta'| > \frac{n}{2}$ , welche die Eigenschaft erfüllt, dann erfüllt auch die aggregierte rangbasierte Semantik  $\theta_\Theta$  diese Eigenschaft.

Im nächsten Abschnitt wird der Begriff der *Erhaltung* für aggregierte rangbasierte Semantiken definiert und auf den Zusammenhang zwischen Erhaltung und Übertragbarkeit eingegangen.

#### 4.1. Zusammenhang zwischen Erhaltung und Übertragbarkeit von Eigenschaften

Im Folgenden werden Begriffe der *Erhaltung* für aggregierte rangbasierte Semantiken definiert. Diese beziehen sich auf eine gewisse Erhaltung der Präordnungen der rangbasierten Semantiken auf ihre aggregierte rangbasierte Semantik.

**Definition 4.3** (Erhaltung). Sei  $\Theta$  eine endliche Menge rangbasierter Semantiken. Die aggregierte rangbasierte Semantik  $\theta_\Theta$  über  $\Theta$  heißt:

- $\succeq$ -*erhaltend*, falls für alle Argumentationsgraphen  $F = (A, R)$  und alle  $a, b \in A$ , für die  $a \succeq_F^\theta b$  für alle  $\theta \in \Theta$  gilt, auch  $a \succeq_F^{\theta_\Theta} b$  folgt.
- $\succ$ -*erhaltend*, falls für alle Argumentationsgraphen  $F = (A, R)$  und alle  $a, b \in A$ , für die  $a \succ_F^\theta b$  für alle  $\theta \in \Theta$  gilt, auch  $a \succ_F^{\theta_\Theta} b$  folgt.
- $\simeq$ -*erhaltend*, falls für alle Argumentationsgraphen  $F = (A, R)$  und alle  $a, b \in A$ , für die  $a \simeq_F^\theta b$  für alle  $\theta \in \Theta$  gilt, auch  $a \simeq_F^{\theta_\Theta} b$  folgt.

Eine Erhaltung einer aggregierten rangbasierten Semantiken ist eng verknüpft mit der Übertragbarkeit einiger Eigenschaften der rangbasierten Semantiken und impliziert diese, wie die folgenden Lemmata zeigen.

**Lemma 1.** Ist eine aggregierte rangbasierte Semantik  $\succ$ -erhaltend, dann übertragen sich die folgenden Eigenschaften von den rangbasierten Semantiken auf die aggregierte Semantik: Kardinalitätsvorrang,  $\sigma$ -Kompatibilität, Leerheitsvorrang, Selbstwiderspruchsvermeidung und Angriff vs vollständige Verteidigung.

*Beweis.* Sei  $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  eine endliche Menge rangbasierter Semantiken, wobei jede der rangbasierten Semantiken aus  $\Theta$  die zu untersuchende Eigenschaft erfüllt, und  $F = (A, R)$  ein beliebiger Argumentationsgraph. Jede der aufgeführten Eigenschaften besteht aus einer Implikation, deren Antezedens (Bedingung) nur vom Argumentationsgraphen selbst abhängt und nicht von der rangbasierten Semantik und deren Konsequenz die Form hat, dass ein Argument  $a \in A$  stärker als ein Argument  $b \in A$  ist. Daher gilt für alle  $a, b \in A$ , welche die Bedingung der jeweiligen Eigenschaft erfüllen, dass  $a \succ_F^{\theta_i} b$  für alle  $i = 1, \dots, n$  erfüllt ist. Aus der  $\succ$ -Erhaltung von  $\theta_\Theta$  ergibt sich dann bereits  $a \succ_F^{\theta_\Theta} b$ .  $\square$

**Lemma 2.** Die aggregierte rangbasierte Semantik sei  $\simeq$ -erhaltend. Dann übertragen sich die beiden folgenden Eigenschaften von den rangbasierten Semantiken auf die aggregierte Semantik: Äquivalenz der Unangegriffenen und Äquivalenz der Argumentation.

*Beweis.* Sei  $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  eine endliche Menge rangbasierter Semantiken, wobei alle rangbasierten Semantiken aus  $\Theta$  jeweils die zu untersuchende Eigenschaft erfüllt und  $F = (A, R)$  ein beliebiger Argumentationsgraph. Sowohl die Eigenschaft Äquivalenz der Unangegriffenen als auch die Eigenschaft Äquivalenz der Argumentation bestehen jeweils aus einer Implikation, deren Antezedens nur vom Argumentationsgraphen selbst abhängt und nicht von der rangbasierten Semantik und deren Konsequenz die Form hat, dass zwei Argumente  $a, b \in A$  gleich stark sind. Daher gilt für alle  $a, b \in A$ , welche die Bedingung der jeweiligen Eigenschaft erfüllen, dass  $a \simeq_F^{\theta_i} b$  für alle  $i = 1, \dots, n$  erfüllt ist. Da  $\theta_\Theta$  als rangbasierte Semantik die Eigenschaft der  $\simeq$ -Erhaltung erfüllt, folgt bereits  $a \simeq_F^{\theta_\Theta} b$ .  $\square$

**Bemerkung.** Es lässt sich zeigen, dass sich für  $\succeq$ -erhaltende aggregierte rangbasierte Semantiken einige schwache Versionen von Eigenschaften übertragen. Die Eigenschaften müssen aus einer Implikation bestehen, deren Antezedens nur vom Argumentationsgraphen selbst und nicht von der jeweiligen rangbasierten Semantik abhängt und die Konsequenz muss aus einem  $\succeq$ -Vergleich zweier Argumente bestehen.

In dieser Arbeit werden keine schwachen Versionen von Eigenschaften behandelt, aber in der Literatur kommen sie vor. Beispielsweise argumentieren Thimm et al. [29] für eine Abschwächung der Eigenschaft des Leerheitsvorrangs, da Argumente, die ihre Stärke gegenüber Gegenargumenten bewiesen haben, nicht schlechter sein sollten als Argumente, die ihre Stärke noch nicht bewiesen haben. Bonzon et al. [11] betrachten bei der Behandlung der grundierten rangbasierten Semantik weitere schwache Versionen von Eigenschaften, wie beispielsweise der schwachen Selbstwiderspruchsvermeidung.

In diesem Abschnitt wurde für einige der in dieser Arbeit vorgestellten Eigenschaften gezeigt, dass wenn die aggregierte Semantik je nach Eigenschaft  $\succ$ -erhaltend bzw.  $\simeq$ -erhaltend ist, sich die Eigenschaft von der Menge der zu aggregierenden

rangbasierten Semantiken auf die aggregierte rangbasierte Semantik überträgt. Im nächsten Abschnitt werden Beweise für die Erhaltungen für die drei Familien der aggregierten Semantiken aufgezeigt.

## 4.2. Erhaltung der aggregierten rangbasierten Semantiken

In diesem Abschnitt werden Erhaltungen von den Familien aggregierter rangbasierter Semantiken bewiesen, welche bereits eine Übertragbarkeit gewisser Eigenschaften implizieren, wie im vorherigen Abschnitt gezeigt.

**Proposition 6.** Die pluralitäts-aggregierten rangbasierten Semantiken sind  $\succeq$ -erhaltend und  $\simeq$ -erhaltend.

*Beweis.* Sei  $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  eine endliche Menge rangbasierter Semantiken,  $\theta_{\Theta}^{pl}$  die pluralitäts-aggregierte rangbasierte Semantik und  $F = (A, R)$  ein beliebiger Argumentationsgraph.

Für die  $\succeq$ -Erhaltung ist zu zeigen, dass für alle  $a, b \in A$ , für welche  $a \succeq_F^{\theta_i} b$  für alle  $i \in 1, \dots, n$  gilt,  $a \succeq_F^{\theta_{\Theta}^{pl}} b$  folgt. Falls  $b \in \text{Max}_{\theta_i}(A)$ , so müsste auch  $a \in \text{Max}_{\theta_i}(A)$  und somit  $\text{Prio}_{\theta_i(F)}(a) = \text{Prio}_{\theta_i(F)}(b)$ . In den übrigen Fällen ergibt sich  $\text{Prio}_{\theta_i(F)}(a) \geq \text{Prio}_{\theta_i(F)}(b)$ . Damit gilt  $\text{Prio}_{\theta_i(F)}(a) \geq \text{Prio}_{\theta_i(F)}(b)$  für alle  $i = 1, \dots, n$  und es folgt

$$\text{Prio}_{\Theta(F)}^{\oplus}(a) = \sum_{i=1}^n \text{Prio}_{\theta_i(F)}(a) \geq \sum_{i=1}^n \text{Prio}_{\theta_i(F)}(b) = \text{Prio}_{\Theta(F)}^{\oplus}(b).$$

Somit gilt  $a \succeq_F^{\theta_{\Theta}^{pl}} b$ .

Um die  $\simeq$ -Erhaltung zu zeigen, betrachten wir alle Argumente  $a, b \in A$ , mit  $a \simeq_F^{\theta_i} b$ . Für jedes  $i = 1, \dots, n$  ist  $a \in \text{Max}_{\theta_i}(A)$  gdw.  $b \in \text{Max}_{\theta_i}(A)$  und damit  $\text{Prio}_{\theta_i(F)}(a) = \text{Prio}_{\theta_i(F)}(b)$ . Daraus folgt:

$$\text{Prio}_{\Theta(F)}^{\oplus}(a) = \sum_{i=1}^n \text{Prio}_{\theta_i(F)}(a) = \sum_{i=1}^n \text{Prio}_{\theta_i(F)}(b) = \text{Prio}_{\Theta(F)}^{\oplus}(b).$$

Dies zeigt  $a \simeq_F^{\theta_{\Theta}^{pl}} b$  und die  $\simeq$ -Erhaltung der pluralitäts-aggregierten rangbasierten Semantik.  $\square$

**Proposition 7.** Die Borda $^{\alpha}$ -aggregierten Semantiken sind  $\succ$ -erhaltend,  $\simeq$ -erhaltend und  $\succeq$ -erhaltend.

*Beweis.* Seien  $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  rangbasierte Semantiken und  $F = (A, R)$  ein beliebiger Argumentationsgraph.

Für die  $\succ$ -Erhaltung, ist zu zeigen, dass für alle  $a, b \in A$ , mit  $a \succ_F^{\theta_i} b$ , für alle  $i = 1, \dots, n$ , für die Rangfolge der Borda $^{\alpha}$ -aggregierten Semantik  $a \succ_F^{\theta_{\Theta}^{B\alpha}} b$  folgt. Sei

$a, b \in A$  mit  $a \succ_F^{\theta_i} b$ , für alle  $i = 1, \dots, n$ . Für die Borda $^\alpha$ -Wertung ergibt sich:

$$B_{\Theta(F)}^\alpha(a) = \sum_{i=1}^n \left( \left| \{c \in A \setminus \{a\} \mid a \succ_F^{\theta_i} c\} \right| + \alpha \left| \{c \in A \setminus \{a\} \mid a \simeq_F^{\theta_i} c\} \right| \right) \quad (6)$$

$$\geq \sum_{i=1}^n \left( \left| \{c \in A \setminus \{a\} \mid a \succ_F^{\theta_i} c\} \right| \right) \quad (7)$$

$$\geq \sum_{i=1}^n \left( \left| \{c \in A \setminus \{a\} \mid b \succeq_F^{\theta_i} c\} \right| \right) \quad (8)$$

$$> \sum_{i=1}^n \left( \left| \{c \in A \setminus \{b\} \mid b \succeq_F^{\theta_i} c\} \right| \right) \quad (9)$$

$$\geq \sum_{i=1}^n \left( \left| \{c \in A \setminus \{b\} \mid b \succ_F^{\theta_i} c\} \right| + \alpha \left| \{c \in A \setminus \{b\} \mid b \simeq_F^{\theta_i} c\} \right| \right) \quad (10)$$

$$= B_{\Theta(F)}^\alpha(b) \quad (11)$$

Ungleichung 8 gilt, da durch die Transitivität der Präordnungen für eine Teilmenge  $X$  von  $A$  folgt:  $\{c \in X : a \succ_F^{\theta_i} c\} \supseteq \{c \in X : b \succeq_F^{\theta_i} c\}$ , für alle  $i = 1, \dots, n$ . Die Abschätzung 9 ergibt sich, da  $b \in \{c \in A \setminus \{a\} : b \succeq_F^{\theta_i} c\}$  wegen der Voraussetzung  $a \succ_F^{\theta_i} b$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Durch die Definition der Borda $^\alpha$ -aggregierten Semantiken folgt  $a \succ_F^{\theta^{B_\Theta^\alpha}} b$ .

Für den Beweis der  $\simeq$ -Erhaltung seien  $a, b \in A$ , mit  $a \simeq_F^{\theta_i} b$ , für alle  $i = 1, \dots, n$ . Damit gilt für die Borda $^\alpha$ -Werte:

$$\begin{aligned} B_{\Theta(F)}^\alpha(a) &= \sum_{i=1}^n \left( \left| \{c \in A \setminus \{a\} \mid a \succ_F^{\theta_i} c\} \right| + \alpha \left| \{c \in A \setminus \{a\} \mid a \simeq_F^{\theta_i} c\} \right| \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \left| \{c \in A \setminus \{b\} \mid b \succ_F^{\theta_i} c\} \right| + \alpha \left| \{c \in A \setminus \{b\} \mid b \simeq_F^{\theta_i} c\} \right| \right) \\ &= B_{\Theta(F)}^\alpha(b) \end{aligned}$$

Es folgt die  $\simeq$ -Erhaltung.

Für die  $\succeq$ -Erhaltung seien nun  $a, b \in A$  mit  $a \succeq_F^{\theta_i} b$ , für alle  $i = 1, \dots, n$ . Der Beweis ist eine Kombination aus den obigen Beweisen. Seien  $\Theta_1 \subseteq \Theta$ , so dass für alle  $\theta \in \Theta_1$  gilt  $a \succ_F^\theta b$  und  $\Theta_2 \subseteq \Theta$ , so dass für alle  $\theta \in \Theta_2$  gilt  $a \simeq_F^\theta b$ . Dann ergibt sich:  $\Theta_1 \cap \Theta_2 = \emptyset$  und  $\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2$ . Für die Borda $^\alpha$ -Wertung ergibt sich aus den Beweisen der  $\succ$ -Erhaltung und der  $\simeq$ -Erhaltung:

$$B_{\Theta(F)}^\alpha(a) = B_{\Theta_1(F)}^\alpha(a) + B_{\Theta_2(F)}^\alpha(a) \geq B_{\Theta_1(F)}^\alpha(b) + B_{\Theta_2(F)}^\alpha(b) = B_{\Theta(F)}^\alpha(b).$$

Es folgt die  $\succeq$ -Erhaltung. □

**Proposition 8.** Die Copeland $^\alpha$ -aggregierten Semantiken sind  $\succ$ -erhaltend,  $\simeq$ -erhaltend und  $\succeq$ -erhaltend.

*Beweis.* Sei  $\Theta$  eine endliche Menge rangbasierter Semantiken und  $F = (A, R)$  ein beliebiger Argumentationsgraph.

Für die  $\succ$ -Erhaltung seien  $a, b \in A$ , so dass  $a \succ_F^\theta b$  für alle  $\theta \in \Theta$ . Zu zeigen ist:  $C_{\Theta(F)}^\alpha(a) > C_{\Theta(F)}^\alpha(b)$ .

Für alle Argumente  $c \in A$  mit Majoritätsrelation  $b \succ_{\Theta(F)}^\mu c$  oder  $b =_{\Theta(F)}^\mu c$  gibt es eine Aufteilung der Menge der rangbasierten Semantiken in  $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3 \subseteq \Theta$ , mit  $\Theta_1 \cup \Theta_2 \cup \Theta_3 = \Theta$ , und leerem paarweisen Schnitt  $\Theta_i \cap \Theta_j = \emptyset, i, j \in \{1, \dots, 3\}, i \neq j$ . Dabei ist:  $b \succ_F^\theta c$  für alle  $\theta \in \Theta_1$ ,  $c \succ_F^\theta b$  für alle  $\theta \in \Theta_2$  und  $b \simeq_F^\theta c$  oder  $c \not\simeq_F^\theta b, b \not\simeq_F^\theta c$  für alle  $\theta \in \Theta_3$ . Da  $a \succ_F^\theta b$  für alle  $\theta \in \Theta$  wegen  $\succ$ -Erhaltung, folgt aufgrund der Transitivität der rangbasierten Semantiken  $a \succ_F^\theta c$  für  $\theta \in \Theta_1$ . Falls  $b \succ_{\Theta(F)}^\mu c$  gilt, ist die Differenz  $|\Theta_1| - |\Theta_2| > 0$  und es folgt  $a \succ_{\Theta(F)}^\mu c$ . Falls  $b =_{\Theta(F)}^\mu c$  gilt, ist die Differenz  $|\Theta_1| - |\Theta_2| = 0$  und es folgt  $a \succeq_{\Theta(F)}^\mu c$ . Damit kann ein Vergleich der Mengen angestellt werden:  $\{c \in A \mid b \succ_{\Theta(F)}^\mu c\} \subset \{c \in A \mid a \succ_{\Theta(F)}^\mu c\}$  und  $\{c \in A \setminus \{b\} \mid b =_{\Theta(F)}^\mu c\} \subset \{c \in A \mid a \succ_{\Theta(F)}^\mu c\} \cup \{c \in A \setminus \{a\} \mid a =_{\Theta(F)}^\mu c\}$ . Dabei herrscht jeweils echte Teilmengenbeziehung wegen  $a \succ_{\Theta(F)}^\mu b$ . Da weiterhin der Schnitt der beiden Mengen  $\{c \in A \mid b \succ_{\Theta(F)}^\mu c\}$  und  $\{c \in A \setminus \{b\} \mid b =_{\Theta(F)}^\mu c\}$  leer ist und wegen  $\alpha \in [0, 1]$  folgt die Abschätzung:

$$\begin{aligned} C_{\Theta(F)}^\alpha(b) &= \left| \{c \in A \mid b \succ_{\Theta(F)}^\mu c\} \right| + \alpha \left| \{c \in A \setminus \{b\} \mid b =_{\Theta(F)}^\mu c\} \right| \\ &< \left| \{c \in A \mid a \succ_{\Theta(F)}^\mu c\} \right| + \alpha \left| \{c \in A \setminus \{a\} \mid a =_{\Theta(F)}^\mu c\} \right| \\ &= C_{\Theta(F)}^\alpha(a) \end{aligned}$$

Damit ist die  $\succ$ -Erhaltung bewiesen.

Für die  $\simeq$ -Erhaltung seien  $a, b \in A$ , so dass  $a \simeq_F^\theta b$  für alle  $\theta \in \Theta$ . Für  $c \in A \setminus \{a, b\}$  folgt aus der Voraussetzung und der Transitivität der rangbasierten Semantiken für die Majoritätsrelation:  $a \succ_{\Theta(F)}^\mu c$  gdw.  $b \succ_{\Theta(F)}^\mu c$  und  $a =_{\Theta(F)}^\mu c$  gdw.  $b =_{\Theta(F)}^\mu c$ .

Und damit gilt für die Mengen:  $\{c \in A \mid a \succ_{\Theta(F)}^\mu c\} = \{c \in A \mid b \succ_{\Theta(F)}^\mu c\}$  und  $\{c \in A \setminus \{a, b\} \mid a =_{\Theta(F)}^\mu c\} = \{c \in A \setminus \{a, b\} \mid b =_{\Theta(F)}^\mu c\} =: D$ .

$$\begin{aligned} C_{\Theta(F)}^\alpha(a) &= \left| \{c \in A \mid a \succ_{\Theta(F)}^\mu c\} \right| + \alpha \underbrace{\left| \{c \in A \setminus \{a\} \mid a =_{\Theta(F)}^\mu c\} \right|}_{=D \cup \{b\}} \\ &= \left| \{c \in A \mid b \succ_{\Theta(F)}^\mu c\} \right| + \alpha \underbrace{\left| \{c \in A \setminus \{b\} \mid b =_{\Theta(F)}^\mu c\} \right|}_{=D \cup \{a\}} \\ &= C_{\Theta(F)}^\alpha(b). \end{aligned}$$

Es folgt  $a \simeq_F^{\theta C_\Theta^\alpha} b$ . Damit ist  $\simeq$ -Erhaltung bewiesen.

Der Beweis der  $\succeq$ -Erhaltung ist eine Kombination aus den beiden obigen Beweisen. Sei  $a, b \in A$ , so dass  $a \succeq_F^\theta b$  für alle  $\theta \in \Theta$ . Es gilt:  $\{c \in A \mid b >_{\Theta(F)}^\mu c\} \subseteq \{c \in A \mid a >_{\Theta(F)}^\mu c\}$  und  $\{c \in A \setminus \{a, b\} \mid b =_{\Theta(F)}^\mu c\} \subseteq \{c \in A \setminus \{a, b\} \mid a >_{\Theta(F)}^\mu c\} \cup \{c \in A \setminus \{a, b\} \mid a =_{\Theta(F)}^\mu c\}$ .

$$\begin{aligned} C_{\Theta(F)}^\alpha(a) &= \left| \{c \in A \mid a >_{\Theta(F)}^\mu c\} \right| + \alpha \left| \{c \in A \setminus \{a\} \mid a =_{\Theta(F)}^\mu c\} \right| \\ &\geq \left| \{c \in A \mid b >_{\Theta(F)}^\mu c\} \right| + \alpha \left| \{c \in A \setminus \{b\} \mid b =_{\Theta(F)}^\mu c\} \right| \\ &= C_{\Theta(F)}^\alpha(b). \end{aligned}$$

Damit gilt  $a \succeq_F^{\theta C_\Theta^\alpha} b$  und es folgt die  $\succeq$ -Erhaltung.  $\square$

In diesem Abschnitt wurden die Begriffe der Erhaltung eingeführt und verschiedene Erhaltungen für die drei Familien aggregierter rangbasierter Semantiken bewiesen. Im nächsten Abschnitt werden diese Ergebnisse genutzt um die Übertragbarkeit der betroffenen Eigenschaften zu zeigen. Anschließend werden die übrigen Eigenschaften untersucht.

### 4.3. Untersuchung der aggregierten rangbasierten Semantiken auf Übertragbarkeit von Eigenschaften

In diesem Abschnitt werden die drei Familien aggregierter Semantiken auf Übertragbarkeit von Eigenschaften überprüft.

Aus den Erhaltungen, die in den letzten beiden Abschnitten behandelt wurden, ergeben sich direkt die folgenden Übertragbarkeiten. Alle anderen Eigenschaften werden danach meist einzeln überprüft.

**Proposition 9.** Pluralitäts-aggregierte Semantiken übertragen die Eigenschaften Äquivalenz der Unangegriffenen und Äquivalenz der Argumentation.

*Beweis.* Aus Proposition 6 folgt, dass pluralitäts-aggregierte Semantiken  $\simeq$ -erhaltend sind. Mit Lemma 2 folgt die Übertragbarkeit der Eigenschaften Äquivalenz der Unangegriffenen und Äquivalenz der Argumentation.  $\square$

**Proposition 10.** Die Copeland $^\alpha$ -aggregierten und die Borda $^\alpha$ -aggregierten Semantiken übertragen die Eigenschaften Kardinalitätsvorrang,  $\sigma$ -Kompatibilität, Leerheitsvorrang, Selbstwiderspruchsvermeidung, Angriff vs vollständige Verteidigung, Äquivalenz der Unangegriffenen und Äquivalenz der Argumentation.

*Beweis.* Aus den Propositionen 8 und 7 folgt, dass alle Copeland $^\alpha$ -aggregierten und Borda $^\alpha$ -aggregierte Semantiken  $\succ$ -erhaltend und  $\simeq$ -erhaltend sind. Mit Lemma 1 folgt die Übertragbarkeit der Eigenschaften Kardinalitätsvorrang,  $\sigma$ -Kompatibilität,

Leerheitsvorrang, Selbstwiderspruchsvermeidung, Angriff vs vollständige Verteidigung und mit Lemma 2 folgt die Übertragbarkeit der Eigenschaften Äquivalenz der Unangegriffenen und Äquivalenz der Argumentation.  $\square$

Es kann bewiesen werden, dass sich die Eigenschaft der Syntaxunabhängigkeit für die drei Familien aggregierter rangbasierter Semantiken von den rangbasierten Semantiken überträgt, wie der folgende Beweis zeigt.

**Proposition 11** (Syntaxunabhängigkeit). Pluralitäts-aggregierte Semantiken, Borda-aggregierte Semantiken und Copeland $^\alpha$ -aggregierte Semantiken übertragen die Eigenschaft der Syntaxunabhängigkeit.

*Beweis.* Sei  $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  eine Menge rangbasierter Semantiken, die jeweils die Eigenschaft der Syntaxunabhängigkeit erfüllen. Seien  $F = (A, R)$  und  $F' = (A', R')$  Argumentationsgraphen, die isomorph sind mit Isomorphismus  $\gamma : A \rightarrow A'$ . Für alle  $\theta_i$  mit  $i = 1, \dots, n$  gilt nach Voraussetzung wegen Syntaxunabhängigkeit, dass  $a \succeq_F^{\theta_i} b$  gdw.  $\gamma(a) \succeq_{F'}^{\theta_i} \gamma(b)$  für alle  $a, b \in A$ .

Für pluralitäts-aggregierte Semantiken gilt: Für die Menge der maximalen Elemente gilt Gleichheit  $\text{Max}_{\theta_i(F)} = \text{Max}_{\theta_i(F')}$  für alle  $i = 1, \dots, n$ , da die rangbasierten Semantiken  $\theta_1, \dots, \theta_n$  Syntaxunabhängigkeit erfüllen. Daraus folgt für die Prioritätsfunktion  $\text{Prio}_{\theta_i(F)}(a) = \text{Prio}_{\theta_i(F')}(\gamma(a))$  für alle  $a \in A$ . Es folgt für die aggregierte Prioritätsfunktion, dass  $\text{Prio}_{\{\theta_1(F), \dots, \theta_n(F)\}_b}^\oplus(a) = \sum_{i=1}^n \text{Prio}_{\theta_i(F)}(a) = \sum_{i=1}^n \text{Prio}_{\theta_i(F')}(\gamma(a)) = \text{Prio}_{\{\theta_1(F'), \dots, \theta_n(F')\}_b}^\oplus(\gamma(a))$ . Deswegen gilt für die aggregierte rangbasierte Semantik  $\theta_\Theta^{\text{pl}}$ , dass  $a \succeq_F^{\theta_\Theta^{\text{pl}}} b$  gdw.  $\gamma(a) \succeq_{F'}^{\theta_\Theta^{\text{pl}}} \gamma(b)$ . Somit übertragen pluralitäts-aggregierte Semantiken die Eigenschaft der Syntaxunabhängigkeit.

Für Copeland $^\alpha$ -aggregierte Semantiken ergibt sich für die paarweise Majoritätsrelation direkt aus der Definition der Majoritätsrelation und der Syntaxunabhängigkeit der rangbasierten Semantiken  $\theta_i$  für  $i = 1, \dots, n$ , dass für alle  $a, b \in A$  gilt:

$$\begin{aligned} a >_{\Theta(F)}^\mu b & \text{ gdw. } \left| \left\{ i \in \{1, \dots, n\} : a \succeq_F^{\theta_i} b \right\} \right| > \left| \left\{ i \in \{1, \dots, n\} : b \succeq_F^{\theta_i} a \right\} \right| \\ & \text{ gdw. } \left| \left\{ i \in \{1, \dots, n\} : \gamma(a) \succeq_{F'}^{\theta_i} \gamma(b) \right\} \right| > \left| \left\{ i \in \{1, \dots, n\} : \gamma(b) \succeq_{F'}^{\theta_i} \gamma(a) \right\} \right| \\ & \text{ gdw. } \gamma(a) >_{\Theta(F')}^\mu \gamma(b). \end{aligned}$$

Auf analoge Weise folgt  $a =_{\Theta(F)}^\mu b$  gdw.  $\gamma(a) =_{\Theta(F')}^\mu \gamma(b)$  für alle  $a, b \in A$ . Damit ergibt sich für die Copeland $^\alpha$ -Wertungen:

$$\begin{aligned} C_{\Theta(F)}^\alpha(a) &= \left| \left\{ b \in A \mid a >_{\Theta(F)}^\mu b \right\} \right| + \alpha \left| \left\{ b \in A \setminus \{a\} \mid a =_{\Theta(F)}^\mu b \right\} \right| \\ &= \left| \left\{ b \in A \mid \gamma(a) >_{\Theta(F')}^\mu \gamma(b) \right\} \right| + \alpha \left| \left\{ b \in A \setminus \{a\} \mid \gamma(a) =_{\Theta(F')}^\mu \gamma(b) \right\} \right| \\ &= \left| \left\{ b' \in A' \mid \gamma(a) >_{\Theta(F')}^\mu b' \right\} \right| + \alpha \left| \left\{ b' \in A' \setminus \{\gamma(a)\} \mid \gamma(a) =_{\Theta(F')}^\mu b' \right\} \right| \\ &= C_{\Theta(F')}^\alpha(\gamma(a)) \end{aligned}$$

Aus der Definition der Copeland $^\alpha$ -aggregierten Semantiken folgt für alle  $a, b \in A$ , dass  $a \succeq_{F'}^{\theta^\alpha} b$  gdw.  $\gamma(a) \succeq_{F'}^{\theta^\alpha} \gamma(b)$ , und damit folgt die Syntaxunabhängigkeit.

Für Borda $^\alpha$ -aggregierte Semantiken ergeben sich die Borda $^\alpha$ -Wertungen für alle  $\alpha \in [0, 1]$  und alle  $a \in A$  aufgrund der Syntaxunabhängigkeit der rangbasierten Semantiken  $\theta_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$  wie folgt:

$$\begin{aligned} B_{\Theta(F)}^\alpha(a) &= \sum_{i=1}^n \left( \left| \{b \in A \mid a \succ_{F'}^{\theta_i} b\} \right| + \alpha \left| \{b \in A \setminus \{a\} \mid a \simeq_{F'}^{\theta_i} b\} \right| \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \left| \{b \in A \mid \gamma(a) \succ_{F'}^{\theta_i} \gamma(b)\} \right| + \alpha \left| \{b \in A \setminus \{a\} \mid \gamma(a) \simeq_{F'}^{\theta_i} \gamma(b)\} \right| \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \left| \{b' \in A' \mid \gamma(a) \succ_{F'}^{\theta_i} b'\} \right| + \alpha \left| \{b' \in A' \setminus \{\gamma(a)\} \mid \gamma(a) \simeq_{F'}^{\theta_i} b'\} \right| \right) \\ &= B_{\Theta(F')}^\alpha(\gamma(a)) \end{aligned}$$

Aus der Definition der Borda $^\alpha$ -aggregierten Semantiken folgt für alle  $a, b \in A$ , dass  $a \succeq_{F'}^{\theta^\alpha} b$  gdw.  $\gamma(a) \succeq_{F'}^{\theta^\alpha} \gamma(b)$ , und damit folgt die Syntaxunabhängigkeit.  $\square$

Die Copeland $^\alpha$ -aggregierten, die Borda $^\alpha$ -aggregierten und die Pluralitäts-aggregierten Semantiken übertragen im Allgemeinen nicht die Komponentenunabhängigkeit für alle  $\alpha \in [0, 1]$ , dies haben wir bereits an den Gegenbeispielen 27, 28 und 29 aus Kapitel 3.4 gesehen.

Für Copeland $^\alpha$ -aggregierte und Borda $^\alpha$ -aggregierte Semantiken wurde bereits in Proposition 10 gezeigt, dass sie die Eigenschaft des Kardinalitätsvorrangs übertragen. Für pluralitäts-aggregierte rangbasierte Semantiken gilt dies im Allgemeinen nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.

**Beispiel 40** (Gegenbeispiel der Übertragbarkeit des Kardinalitätsvorrangs der pluralitäts-aggregierten Semantiken). Wir betrachten den Argumentationsgraphen  $F_3 = (\{a, a1, a2, b\}, \{(b, b), (a1, a), (a2, a)\})$  aus Abbildung 3. Sei  $\Theta$  eine endliche Menge rangbasierter Semantiken, so dass die rangbasierten Semantiken  $\theta \in \Theta$  die Eigenschaft des Leerheitsvorrangs und des Kardinalitätsvorrangs erfüllen, dann ergibt sich jeweils eine Rangfolge von  $a1 \simeq_{F_3}^{\theta} a2 \succ_{F_3}^{\theta} b \succ_{F_3}^{\theta} a$  für alle  $\theta \in \Theta$ . Die pluralitäts-aggregierte rangbasierte Semantik  $\theta_\Theta^{pl}$  berechnet sich zu  $a1 \simeq_{F_3}^{\theta^{pl}} a2 \succ_{F_3}^{\theta^{pl}} a \simeq_{F_3}^{\theta^{pl}} b$ . Da das Argument  $b$  gleich geordnet ist wie das Argument  $a$ , obwohl  $b$  im Vergleich seltener angegriffen wird, ist die Eigenschaft des Kardinalitätsvorrangs nicht erfüllt.

Gegentransitivität und Äquivalenz wird von der pluralitäts-aggregierten rangbasierten Semantik im Allgemeinen nicht übertragen wie das folgende Beispiel zeigt. Da die Eigenschaft der Gegentransitivität die Eigenschaft der Äquivalenz impliziert (siehe Proposition 2), werden diese zusammen behandelt.

**Beispiel 41** (Gegenbeispiel für die Übertragbarkeit der Eigenschaften der Äquivalenz und der Gegentransitivität für die pluralitäts-aggregierten Semantiken). Als

Beispiel für einen Argumentationsgraphen sei  $F_{19} = (\{a, b, c\}, \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c)\})$ , siehe Abbildung 19. Wir betrachten  $\Theta = \{\theta^{Cat}, \theta^{Dbs}\}$ . Für die rangbasierten Semantiken  $\theta \in \Theta$  ergeben sich jeweils die Rangfolgen  $c \succ_{F_{19}}^\theta a \succ_{F_{19}}^\theta b$ . Für die pluralitäts-aggregierte Semantik  $\theta_\Theta^{pl}$  ergibt sich die Rangfolge  $c \succ_{F_{19}}^{\theta_\Theta^{pl}} a \simeq_{F_{19}}^{\theta_\Theta^{pl}} b$ .

Es gilt  $|\{a\}^-| = 1$  und  $|\{c\}^-| = 1$  und die Angreifer der Argumente  $a$  und  $c$  sind äquivalent:  $a \simeq_{F_{19}}^{\theta_\Theta^{pl}} b$ . Da allerdings  $a \not\succeq_{F_{19}}^{\theta_\Theta^{pl}} c$ , erfüllt  $\theta_\Theta^{pl}$  die Eigenschaft der Äquivalenz nicht. Nach Proposition 2 folgt daraus bereits schon die Nichterfüllung der Gegentransitivität.

Trotzdem folgt hier nochmal die Begründung für die Gegentransitivität: Es gilt  $\{c\}^- \succeq_{F_{19}}^{\theta_\Theta^{pl}} \{a\}^-$ , da eine injektive Funktion  $f : \{a\}^- \rightarrow \{c\}^-$  existiert, mit  $f(a) = b$ , für die gilt  $f(a) \succeq_{F_{19}}^{\theta_\Theta^{pl}} a$ . Allerdings ist  $a \not\succeq_{F_{19}}^{\theta_\Theta^{pl}} c$ , weswegen  $\theta_\Theta^{pl}$  die Eigenschaft der Gegentransitivität nicht erfüllt.

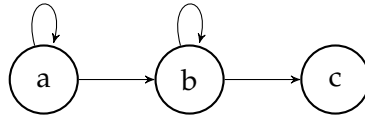


Abbildung 19: Der Argumentationsgraph  $F_{19}$ .

Für die Borda $^\alpha$ -aggregierten und die Copeland $^\alpha$ -aggregierten Semantiken ist noch ungewiss, ob sich die Eigenschaften der Gegentransitivität und der Äquivalenz im Allgemeinen übertragen lassen.

Die Eigenschaft der starken Gegentransitivität wird von den pluralitäts-aggregierten rangbasierten Semantiken im Allgemeinen nicht übertragen, wie das folgende Beispiel als Fortsetzung von Beispiel 13 zeigt.

**Beispiel 42** (Gegenbeispiel für die Übertragbarkeit der starken Gegentransitivität für die pluralitäts-aggregierten Semantiken). Wir betrachten den Argumentationsgraphen  $F_5 = (\{a, a1, a2, a3, a4, a5\}, \{(a, a1), (a1, a2), (a2, a3), (a3, a4), (a4, a5)\})$  aus Abbildung 5. Sei  $\Theta$  eine Menge rangbasierter Semantiken, welche die Eigenschaft der starken Gegentransitivität erfüllen. Wie in Beispiel 13 gezeigt, folgt durch die Eigenschaft der starken Gegentransitivität bereits die Rangfolge  $a \succ_{F_5}^\theta a2 \succ_{F_5}^\theta a4 \succ_{F_5}^\theta a5 \succ_{F_5}^\theta a3 \succ_{F_5}^\theta a1$  für alle  $\theta \in \Theta$ . Da  $a$  maximales Element dieser Rangfolge ist, ergibt sich für die pluralitäts-aggregierte Semantik  $\theta_\Theta^{pl}$  die Rangfolge  $a \succ_{F_5}^{\theta_\Theta^{pl}} a2 \simeq_{F_5}^{\theta_\Theta^{pl}} a4 \simeq_{F_5}^{\theta_\Theta^{pl}} a5 \simeq_{F_5}^{\theta_\Theta^{pl}} a3 \simeq_{F_5}^{\theta_\Theta^{pl}} a1$ . Weil beispielsweise  $a2 \not\succeq_{F_5}^{\theta_\Theta^{pl}} a4$  gilt, erfüllt  $\theta_\Theta^{pl}$  nicht die Eigenschaft der starken Gegentransitivität.

Auch die Borda $^\alpha$ -aggregierten und die Copeland $^\alpha$ -aggregierten Semantiken übertragen im Allgemeinen nicht die Eigenschaft der starken Gegentransitivität. Für ein Gegenbeispiel wird eine Familie rangbasierter Semantiken eingeführt, welche die

Eigenschaften der starken Gegen transitivität erfüllt. Die Idee ist, dass für eine eingeschränkte Menge Argumentationsgraphen verschiedene Experten ihre Informationen zu den unangegriffenen Argumenten mit einfließen lassen. Für jede Semantik dieser Familie stellt ein Experte eine totale Ordnung für die unangegriffenen Argumente einer Menge zur Verfügung. Falls dies nicht möglich ist, werden alle Argumente gleich geordnet. Anschließend werden die übrigen Argumente mittels Anwendung der Bedingung der starken Gegen transitivität geordnet.

**Definition 4.4** (Die rangbasierten Semantiken  $\theta^{xSCT}$ ). Sei  $F = (A, R)$  ein Argumentationsgraph. Die rangbasierte Semantik  $\theta_i^{xSCT}$  weist dem Argumentationsgraphen  $F$  wie folgt eine Präordnung zu:

- Falls  $A$  in zwei disjunkte Partitionen  $X \cup Y = A$ ,  $X \cap Y = \emptyset$ , aufgeteilt werden kann, so dass alle Angriffe  $(x, y) \in R$  von der Menge der Angreifer  $x \in X$  zu der Menge der Angegriffenen  $y \in Y$  gehen, gilt: Ein Experte  $i$  ordnet die Argumente aus der Menge  $X$  als totale Ordnung. Anschließend werden alle Argumente  $a, b \in A$  wie folgt untereinander geordnet: falls  $\{y_2\}^- \succ_F^{\theta_i^{xSCT}} \{y_1\}^-$  gilt, dann sei  $y_1 \succ_F^{\theta_i^{xSCT}} y_2$  für alle  $y_1, y_2 \in Y$ . Außerdem gelte für alle  $a \in A$ , dass  $a \succeq_F^{\theta_i^{xSCT}} a$ .
- Sonst werden alle Argumente gleich geordnet.

**Bemerkung.** Die so definierten Semantiken  $\theta^{xSCT}$  sind tatsächlich rangbasierte Semantiken. Im Spezialfall gilt: Für die Menge der Angreifer gelten die Eigenschaften der Präordnung untereinander bereits. Für die Menge der Angegriffenen untereinander überträgt sich die Transitivität durch die Transitivität von der Menge der Angreifer aufgrund der Definition der Bedingung der starken Gegen transitivität. Außerdem erfüllt die rangbasierte Semantik  $\theta^{xSCT}$  die Eigenschaft der starken Gegen transitivität nach Definition. Für die Präordnung gilt insbesondere, dass die Menge der angreifenden Argumente stärker als die der angegriffenen Argumente geordnet ist, weil die Eigenschaft der starken Gegen transitivität die Eigenschaft des Leerheitsvorrangs erfüllt.

Eine ähnliche Definition einer rangbasierten Semantik, welche Gegen transitivität oder die Äquivalenz erfüllen, ist nicht möglich. Die Ordnung der unangegriffenen Argumente durch Experten würden einen Widerspruch zu der Äquivalenz und der Gegen transitivität herbeiführen.

**Beispiel 43** (Gegenbeispiel für die Übertragbarkeit der starken Gegen transitivität der Copeland <sup>$\alpha$</sup>  und Borda <sup>$\alpha$</sup>  Semantiken). Wir betrachten den Argumentationsgraphen  $F_{20} = (\{a, b, c, d, e, x, y\}, \{(a, x), (e, x), (b, y), (c, y), (d, y)\})$  aus Abbildung 20 und als Menge rangbasierter Semantiken  $\Theta = \{\theta_1^{xSCT}, \theta_2^{xSCT}\}$  mit zwei rangbasierten Semantiken der Familie  $\theta^{xSCT}$ . In diesem Beispiel sei die Ordnung der jeweils unangegriffenen Partition  $X := \{a, b, c, d, e\}$  der beiden rangbasierten Semantiken gegeben durch:

- $a \succ_{F_{20}}^{\theta_1^{xSCT}} b \succ_{F_{20}}^{\theta_1^{xSCT}} c \succ_{F_{20}}^{\theta_1^{xSCT}} d \succ_{F_{20}}^{\theta_1^{xSCT}} e$ ,
- $e \succ_{F_{20}}^{\theta_2^{xSCT}} d \succ_{F_{20}}^{\theta_2^{xSCT}} c \succ_{F_{20}}^{\theta_2^{xSCT}} b \succ_{F_{20}}^{\theta_2^{xSCT}} a$ .

Alle anderen Argumente bleiben ungeordnet. Per Definition erfüllen die beiden Semantiken die Eigenschaft der starken Gegentransitivität.

Es gilt sowohl für die Copeland $^\alpha$ -aggregierten, als auch für die Borda $^\alpha$ -aggregierten Semantiken über  $\Theta$  für den Argumentationsgraphen  $F$ , dass die Argumente  $x$  und  $y$  gleich geordnet sind. Außerdem sind alle Argumente aus  $X$  gleich geordnet, insbesondere  $a$  und  $b$ , sowie  $e$  und  $c$ . Mit der Injektion  $f_1 : \{a, e\} \rightarrow \{b, c, d\}$ ,  $f_1(a) = b$ ,  $f_1(e) = c$  folgt für  $\theta \in \{\theta^{B^\alpha}, \theta^{C^\alpha}\}$ , mit  $\alpha \in [0, 1]$ , dass  $\{y\}^- \succeq_{F_{20}}^\theta \{x\}^-$  gilt. Da außerdem  $|\{y\}^-| > |\{x\}^-|$ , folgt  $\{y\}^- \succ_{F_{20}}^\theta \{x\}^-$ . Wenn die Eigenschaft der starken Gegentransitivität erfüllt wäre, müsste nun Argument  $x$  jeweils strikt besser geordnet sein als Argument  $y$ . Da diese allerdings gleich geordnet sind, ist die Eigenschaft der starken Gegentransitivität nicht erfüllt. Damit überträgt sich die Eigenschaft starke Gegentransitivität im Allgemeinen nicht auf Copeland $^\alpha$ - und Borda $^\alpha$ -aggregierte Semantiken.

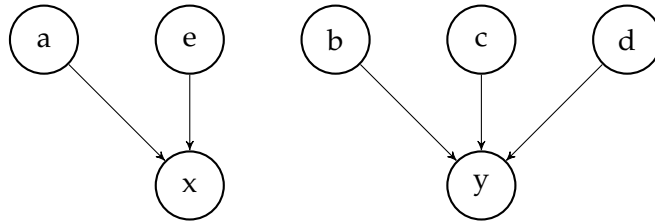


Abbildung 20: Der Argumentationsgraph  $F_{20}$ .

Auch  $\sigma$ -Kompatibilität für  $\sigma \in \{\text{co}, \text{pr}, \text{gr}, \text{st}\}$  wird von pluralitäts-aggregierten rangbasierten Semantiken im Allgemeinen nicht übertragen, während dies für die anderen beiden Familien aggregierter Semantiken gilt (siehe Proposition 10). Für ein Gegenbeispiel wird im Folgenden eine rangbasierte Semantik definiert, welche aus der  $\sigma$ -Kompatibilität und der Eigenschaft des Leerheitsvorrangs gebildet wird und damit insbesondere die Eigenschaft der  $\sigma$ -Kompatibilität erfüllt.

**Definition 4.5** (rangbasierte Semantik  $\theta^{\sigma\text{VP}}$ ). Sei  $\sigma \in \{\text{co}, \text{pr}, \text{gr}, \text{st}\}$ . Die rangbasierte Semantik  $\theta^{\sigma\text{VP}}$  sei für jeden beliebigen Argumentationsgraphen  $F = (A, R)$  und alle  $a, b \in A$  wie folgt definiert:

$$a \succ_F^{\theta^{\sigma\text{VP}}} b \quad \text{gdw.} \quad a \in \bigcup \sigma(F) \text{ und } b \notin \bigcup \sigma(F) \quad \text{oder} \quad \{a\}^- = \emptyset \text{ und } \{b\}^- \neq \emptyset,$$

$$a \simeq_F^{\theta^{\sigma\text{VP}}} b \quad \text{sonst.}$$

**Bemerkung.** Sei  $F = (A, R)$  ein Argumentationsgraph. Für die Extensionen  $\sigma \in \{\text{co}, \text{pr}, \text{gr}\}$  gilt für alle  $a \in A$ , mit  $\{a\}^- = \emptyset$ , dass  $a \in \bigcup \sigma(F)$ . Somit sind Argumente in der Rangordnung von  $\theta^{\sigma\text{VP}}(F)$ , die keine Angreifer haben, am stärksten,

danach folgen die übrigen Argumente, die in einer Extension vorkommen und am schlechtesten sind Argumente, die in keiner Extension vorkommen. Für die stabile Semantik gilt dies genauso, falls eine stabile Extension existiert. Falls für  $F$  keine stabile Extension existiert, so sind alle Argumente gleich stark bis auf unangegriffene Argumente, welche am stärksten sind.

**Beispiel 44.** Sei  $F_{21} = (A_{21}, R_{21})$  ein Argumentationsgraph mit den Argumenten  $A_{21} = \{a, b, c\}$  und Angriffen  $R_{21} = \{(a, b), (b, c)\}$  aus Abbildung 21. In diesem einfachen Beispiel ist  $\bigcup \text{co}(F_{21}) = \bigcup \text{pr}(F_{21}) = \bigcup \text{gr}(F_{21}) = \bigcup \text{st}(F_{21}) = \{a, c\}$  und  $\{a\}^- = \emptyset$ , wogegen  $\{b\}^- \neq \emptyset, \{c\}^- \neq \emptyset$ . Daher ergibt sich für alle rangbasierten Semantiken  $\theta^{\sigma \text{VP}}$  mit  $\sigma \in \{\text{co}, \text{pr}, \text{gr}, \text{st}\}$  die Rangfolge:

$$a \succ_{F_{21}}^{\theta^{\sigma \text{VP}}} c \succ_{F_{21}}^{\theta^{\sigma \text{VP}}} b.$$

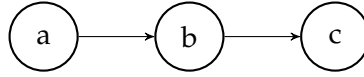


Abbildung 21: Der Argumentationsgraph  $F_{21}$ .

Der gleiche Argumentationsgraph dient als jeweiliges Gegenbeispiel für die  $\sigma$ -Kompatibilität für die pluralitäts-aggregierte Semantik für alle  $\sigma \in \{\text{co}, \text{pr}, \text{gr}, \text{st}\}$ .

**Beispiel 45** (Gegenbeispiel für die Übertragbarkeit der  $\sigma$ -Kompatibilität für die pluralitäts-aggregierte Semantik für  $\sigma \in \{\text{co}, \text{pr}, \text{gr}, \text{st}\}$ ). Für  $\sigma \in \{\text{co}, \text{pr}, \text{gr}, \text{st}\}$  sei  $\Theta^\sigma = \{\theta^{\sigma \text{VP}}\}$  bestehend aus nur der rangbasierte Semantik  $\theta^{\sigma \text{VP}}$ , welche die Eigenschaft der  $\sigma$ -Kompatibilität erfüllt. Wir betrachten den Argumentationsgraphen  $F_{21}$  aus Abbildung 21 aus obigem Beispiel mit  $a \succ_{F_{21}}^{\theta^{\sigma \text{VP}}} c \succ_{F_{21}}^{\theta^{\sigma \text{VP}}} b$ . Da  $\bigcup \text{co}(F_{21}) = \bigcup \text{pr}(F_{21}) = \bigcup \text{gr}(F_{21}) = \bigcup \text{st}(F_{21}) = \{a, c\}$ , müsste für die Erfüllung der  $\sigma$ -Kompatibilität in diesem Beispiel gelten, dass  $c$  strikt akzeptabler ist als  $b$ . Das Argument  $a$  ist als einziges ein maximales Argument, weswegen  $\text{Prio}_{\Theta^\sigma(F_{21})}^\oplus(a) = 1$  und  $\text{Prio}_{\Theta^\sigma(F_{21})}^\oplus(b) = \text{Prio}_{\Theta^\sigma(F_{21})}^\oplus(c) = 0$  und somit ergibt sich als Rangordnung  $a \succ_{F_{21}}^{\theta_{\Theta^\sigma}^{\text{pl}}} b \simeq_{F_{21}}^{\theta_{\Theta^\sigma}^{\text{pl}}} c$ . Da  $c \not\succeq_{F_{21}}^{\theta_{\Theta^\sigma}^{\text{pl}}} b$  für alle  $\sigma \in \{\text{co}, \text{pr}, \text{gr}, \text{st}\}$  erfüllt die pluralitäts-aggregierte Semantik im Allgemeinen nicht die Eigenschaft der  $\sigma$ -Kompatibilität für alle  $\sigma \in \{\text{co}, \text{pr}, \text{gr}, \text{st}\}$ .

Für Copeland $^\alpha$ -aggregierte und Borda $^\alpha$ -aggregierte Semantiken wurde bereits gezeigt, dass sie allgemein Leerheitsvorrang übertragen (siehe Proposition 10). Dies gilt für pluralitäts-aggregierte Semantiken im Allgemeinen nicht. Für ein Gegenbeispiel wird zunächst eine nicht-sinnvolle *rangbasierte Semantik* Syntaxsemantik definiert, deren Bezeichnung als Oxymoron bereits darauf hindeutet.

**Definition 4.6** (Syntaxsemantik  $\theta^{\text{syn}}$ ). Sei  $F = (A, R)$  ein Argumentationsgraph. Die *Syntaxsemantik*  $\theta^{\text{syn}}$  weist einem Argumentationsgraphen  $F$  wie folgt eine Präordnung  $\theta^{\text{syn}}(F)$  zu: für alle  $x, y \in A$  gilt  $x \succ_F^{\theta^{\text{syn}}} y$  gdw.  $x$  lexikographisch vor  $y$  liegt.

Auf der Syntaxsemantik aus Definition 4.6 aufbauend, wird nun eine Syntaxsemantik mit Leerheitsvorrang definiert.

**Definition 4.7.** Sei  $F = (A, R)$  ein Argumentationsgraph. Die *Syntaxsemantik mit Leerheitsvorrang*  $\theta^{synVP}$  weist einem Argumentationsgraphen  $F$  wie folgt eine Präordnung  $\theta^{synVP}(F)$  zu:

- für alle  $x, y \in A$ , mit  $\{x\}^- = \emptyset$  und  $\{y\}^- \neq \emptyset$  gilt  $x \succ_F^{\theta^{synVP}} y$ ,
- für alle  $x, y \in A$ , mit  $\{x\}^- = \{y\}^- = \emptyset$  gilt  $x \succ_F^{\theta^{synVP}} y$  gdw.  $x$  lexikographisch vor  $y$  liegt,
- für alle  $x, y \in A$ , mit  $\{x\}^- \neq \emptyset$  und  $\{y\}^- \neq \emptyset$  gilt  $x \succ_F^{\theta^{synVP}} y$  gdw.  $x$  lexikographisch vor  $y$  liegt.

Nach Definition erfüllt diese Semantik Leerheitsvorrang. Mit dieser rangbasierten Semantik wird ein Gegenbeispiel für die Übertragbarkeit des Leerheitsvorrangs der pluralitäts-aggregierten Semantiken gefunden.

**Beispiel 46** (Gegenbeispiel für die Übertragbarkeit des Leerheitsvorrangs für die pluralitäts-aggregierten Semantiken). Wir betrachten den Argumentationsgraphen  $F_{22} = (\{a, b, c\}, (b, a))$  mit den beiden unangegriffenen Argumenten  $b$  und  $c$  und dem einzigen angegriffenen Argument  $a$ . Die Syntaxsemantik mit Leerheitsvorrang ordnet die Argumente des Argumentationsgraphen wie folgt:  $b \succ_{F_{22}}^{\theta^{synVP}} c \succ_{F_{22}}^{\theta^{synVP}} a$ . Sei  $\Theta = \{\theta^{synVP}\}$  die Menge der zu aggregierenden Semantiken. Die pluralitäts-aggregierte Semantik vergibt nur Punkte für die maximalen Argumente, dies ist für dieses Beispiel nur das Argument  $b$ . Da insbesondere  $c \not\succeq_{F_{22}}^{\theta^{pl}} a$  gilt, überträgt die pluralitäts-aggregierte Semantik im Allgemeinen nicht die Eigenschaft des Leerheitsvorrangs.

Die pluralitäts-aggregierte Semantik überträgt die Eigenschaft der Selbstwiderspruchsvermeidung nicht, während Copeland $^\alpha$ - und Borda $^\alpha$ -aggregierte Semantiken die Eigenschaft übertragen (siehe Proposition 10). Dies kann anhand des folgenden Gegenbeispiels gezeigt werden.

**Beispiel 47** (Gegenbeispiel für die Übertragbarkeit der Selbstwiderspruchsvermeidung für pluralitäts-aggregierte Semantiken). Sei  $\Theta = \{\theta^{Strat}\}$  bestehend aus nur der strategiebasierten Semantik, welche die Eigenschaft der Selbstwiderspruchsvermeidung erfüllt. Wir betrachten den Argumentationsgraphen  $F_3 = (A_3, R_3)$  aus Abbildung 3 mit Argumenten  $A_3 = \{a, a1, a2, b\}$  und  $R_3 = \{(b, b), (a1, a), (a2, a)\}$ . Da sich das Argument  $b$  selbst angreift, gilt für rangbasierte Semantiken, welche Selbstwiderspruchsvermeidung erfüllen insbesondere  $a \succ_F^\theta b$ .

Da die strategiebasierte Semantik sowohl die Eigenschaft des Leerheitsvorrangs als auch die Eigenschaft der Selbstwiderspruchsvermeidung erfüllt, folgt bereits die

Rangfolge:  $a1 \simeq_{F_3}^{\theta^{Strat}} a2 \succ_{F_3}^{\theta^{Strat}} a \succ_{F_3}^{\theta^{Strat}} b$ . Die Argumente  $a$  und  $b$  sind keine maximalen Elemente bzgl.  $\theta_{F_3}^{Strat}$ , weswegen sich für die pluralitäts-aggregierte Semantik  $\theta_{\Theta(F_3)}^{pl}$  ergibt:

$$\text{Prio}_{\Theta(F_3)}^{\oplus}(a) = \text{Prio}_{\theta^{Strat}(F_3)}(a) = \text{Prio}_{\Theta(F_3)}^{\oplus}(b) = \text{Prio}_{\theta^{Strat}(F_3)}(b) = 0.$$

Es folgt  $a \not\succeq_{F_3}^{\theta_{\Theta(F_3)}^{pl}} b$ , wodurch die pluralitäts-aggregierte Semantik nicht die Eigenschaft der Selbstwiderspruchsvermeidung überträgt.

Für ein Gegenbeispiel für die Eigenschaft des Qualitätsvorrangs werden zunächst rangbasierte Semantiken benötigt, welche diese Eigenschaft erfüllen, da dies bei den bisher betrachteten Semantiken nicht der Fall ist. Amgoud et al. definieren für gewichtete Argumentationsgraphen eine Maximum-basierte Semantik (engl. *max-based semantics*, Mbs) und zeigen, dass sie die Eigenschaft des Qualitätsvorrangs erfüllt [3]. Im Folgenden wird die rangbasierte Semantik für ungewichtete Argumentationsgraphen definiert, indem die Gewichte auf den Wert 1 gesetzt werden.

**Definition 4.8** (Maximum-basierte Semantik (Mbs) [3]). Sei  $F = (A, R)$  ein Argumentationsgraph. Die Funktion  $Mbs : A \rightarrow [0, 1]$  sei definiert durch:

$$Mbs(a) = \frac{1}{1 + \max_{b \in \{a\}^-} Mbs(b)}.$$

Für die *Maximum-basierte rangbasierte Semantik (Mbs)*  $\theta^{Mbs}$  gilt  $a \succeq_F^{\theta^{Mbs}} b$  gdw.  $Mbs(a) \geq Mbs(b)$  für alle  $a, b \in A$ .

Mit Hilfe der rangbasierten Semantik  $\theta^{Mbs}$  kann ein Gegenbeispiel für die Übertragbarkeit des Qualitätsvorrangs für pluralitäts-aggregierte Semantiken gefunden werden.

**Beispiel 48** (Gegenbeispiel für die Übertragbarkeit der pluralitäts-aggregierten Semantiken für Qualitätsvorrang). Wir betrachten den Argumentationsgraphen  $F_4 = (\{a, a1, a2, a3, a4, b, b1\}, \{(a1, a), (a2, a1), (a3, a), (a4, a3), (b1, b)\})$  aus den Beispielen 12 und 17, siehe Abbildung 4. Das Beispiel ist ein beliebtes Beispiel für die Eigenschaft des Qualitätsvorrangs und wurde für die rangbasierte Semantik  $Mbs$  bereits von Amgoud et al. berechnet [3]:

- $Mbs(a2) = Mbs(a4) = Mbs(b1) = 1$ , für Argumente ohne Angriffe;
- $Mbs(a1) = Mbs(a3) = Mbs(b) = 0.5$ ;
- $Mbs(a) = \frac{2}{3} = 0.\bar{6}$ .

Damit ist die Rangfolge  $a2 \simeq_{F_4}^{\theta^{Mbs}} a4 \simeq_{F_4}^{\theta^{Mbs}} b1 \succ_{F_4}^{\theta^{Mbs}} a \succ_{F_4}^{\theta^{Mbs}} a1 \simeq_{F_4}^{\theta^{Mbs}} a3 \simeq_{F_4}^{\theta^{Mbs}} b$  gegeben.  $Mbs$  erfüllt Qualitätsvorrang und auch im Beispiel sehen wir für  $\{b\}^- = \{b1\}$  und  $\{a\}^- = \{a1, a3\}$ , dass  $b1 \succ_{F_4}^{\theta^{Mbs}} a1$ ,  $b1 \succ_{F_4}^{\theta^{Mbs}} a3$  und  $a \succ_{F_4}^{\theta^{Mbs}} b$  gilt.

Sei nun  $\Theta = \{\theta^{Mbs}\}$  die Menge der zu aggregierenden rangbasierten Semantiken. Für die pluralitäts-aggregierende Semantik  $\theta_{\Theta}^{pl}$  ergibt sich:  $a2 \simeq_{F_4}^{\theta_{\Theta}^{pl}} a4 \simeq_{F_4}^{\theta_{\Theta}^{pl}} b1 \succ_{F_4}^{\theta_{\Theta}^{pl}} a1 \simeq_{F_4}^{\theta_{\Theta}^{pl}} a3 \simeq_{F_4}^{\theta_{\Theta}^{pl}} a \simeq_{F_4}^{\theta_{\Theta}^{pl}} b$ . Insbesondere ist  $a \not\succeq_{F_4}^{\theta_{\Theta}^{pl}} b$ , obwohl es einen Angreifer von  $b$  gibt, der stärker als die Angreifer von  $a$  ist, mit  $b1 \succ_{F_4}^{\theta_{\Theta}^{pl}} a1$  und  $b1 \succ_{F_4}^{\theta_{\Theta}^{pl}} a3$ . Pluralitätsaggregierende Semantiken übertragen damit im Allgemeinen nicht die Eigenschaft des Qualitätsvorrangs.

Um ein Gegenbeispiel für Borda<sup>α</sup>- und Copeland<sup>α</sup>-aggregierte Semantiken für die Eigenschaft des Qualitätsvorrangs aufzuzeigen, wird im Folgenden eine Familie rangbasierter Semantiken definiert. Die Idee ist ähnlich wie bei  $\theta^{xSCT}$ , dass für eine eingeschränkte Menge Argumentationsgraphen verschiedene Experten ihre Informationen zu den unangegriffenen Argumenten mit einfließen lassen. Für jede Semantik dieser Familie stellt ein Experte eine totale Ordnung für die unangegriffenen Argumente einer Menge zur Verfügung, falls möglich. Anschließend werden die übrigen Argumente mittels Anwendung der Bedingung des Qualitätsvorrangs geordnet. Für andere Argumentationsgraphen werden alle Argumente gleich geordnet.

**Definition 4.9** (Rangbasierte Semantiken  $\theta^{xQP}$ ). Sei  $F = (A, R)$  ein Argumentationsgraph. Die rangbasierte Semantik  $\theta_i^{xQP}$  weist dem Argumentationsgraphen  $F$  wie folgt eine Präordnung zu: Für alle  $a \in A$  gelte  $a \succeq_F^{\theta_i^{xQP}} a$ .

- Falls  $A$  in zwei disjunkte Partitionen  $X \cup Y = A$ ,  $X \cap Y = \emptyset$ , aufgeteilt werden kann, so dass alle Angriffe  $(x, y) \in R$  von der Menge der Angreifer  $x \in X$  zu der Menge der Angegriffenen  $y \in Y$  gehen, gilt: Ein Experte  $i$  ordnet die Argumente aus der Menge  $X$  als totale Ordnung. Alle Argumente aus der angegriffenen Menge  $y_1, y_2 \in Y$  werden anschließend wie folgt untereinander geordnet: falls es ein  $x_2 \in \{y_2\}^-$  gibt, so dass  $x_2 \succ_F^{\theta_i^{xQP}} x_1$  für alle  $x_1 \in \{y_1\}^-$ , dann folgt  $y_1 \succ_F^{\theta_i^{xQP}} y_2$ . Für alle noch ungeordneten Paare  $y'_1, y'_2$  aus der Menge der unangegriffenen Argumente  $Y$  sei  $y'_1 \simeq y'_2$  und weiterhin gelte  $x \succ_F^{\theta_i^{xQP}} y$  für alle  $x \in X$  und  $y \in Y$ .
- Sonst sei  $a \simeq_F^{\theta_i^{xQP}} b$  für alle  $a, b \in A$ .

Es handelt sich bei  $\theta^{xQP}$  tatsächlich um rangbasierte Semantiken, die trivialerweise die Eigenschaft des Qualitätsvorrangs erfüllen.

**Lemma 3.**  $\theta^{xQP}$  ist für beliebige Experten eine rangbasierte Semantik.

*Beweisskizze.* Sei  $F = (A, R)$  ein Argumentationsgraph, für den  $A$  in zwei disjunkte Partitionen  $X \cup Y = A$ ,  $X \cap Y = \emptyset$ , aufgeteilt werden kann mit den Angreifern  $X$  und den Angegriffenen  $Y$ , mit  $x, y \in R$  für alle  $x \in X$  und  $y \in Y$ . (Sonst ist nichts

zu zeigen, da alle Argumente gleich geordnet sind und bereits eine Präordnung gegeben ist.) Die Argumente aus  $X$  sind nach Definition untereinander total geordnet. Transitivität gilt innerhalb der Menge  $Y$  der angegriffenen Argumente, denn falls  $y_1 \succ_F^{\theta^{xQP}} y_2$  und  $y_2 \succ_F^{\theta^{xQP}} y_3$ , muss es laut Definition Argumente  $x_2 \in \{y_2\}^-$  und  $x_3 \in \{y_3\}^-$  aus der Menge der unangegriffenen Argumente  $X$  geben, für die gilt:  $x_2 \succ_F^{\theta^{xQP}} x'_1$  für alle  $x'_1 \in \{y_1\}^-$  und  $x_3 \succ_F^{\theta^{xQP}} x'_2$  für alle  $x'_2 \in \{y_2\}^-$ . Da für die Argumente aus  $X$  bezüglich  $\theta^{xQP}(F)$  Transitivität herrscht, gilt  $x_3 \succ_F^{\theta^{xQP}} x_2 \succ_F^{\theta^{xQP}} x'_1$  für alle  $x'_1 \in \{y_1\}^-$ . Es folgt nach Definition, dass auch  $y_1 \succ_F^{\theta^{xQP}} y_3$  gilt.  $\square$

**Beispiel 49** (Beispiel für  $\theta^{xQP}$ ). Sei  $F_{23} = (\{a, b, c, d, x, y\}, \{(a, x), (b, y), (c, y), (d, y)\})$ , siehe Abbildung 22. In diesem Beispiel ist die Menge unangegriffener Argumente  $X := \{a, b, c, d\}$  und es wird angenommen, dass diese Argumente wie folgt von einem Experten geordnet werden: Für  $\theta_1^{xQP}(F)$  gelte:  $b \succ_F^{\theta_1^{xQP}} a \succ_F^{\theta_1^{xQP}} c \succ_F^{\theta_1^{xQP}} d$ . Daraus ergibt sich nach der Definition:  $x \succ_F^{\theta_1^{xQP}} y$ . Insgesamt ergibt sich die totale Präordnung:

$$\theta_1^{xQP}(F) : b \succ_{F_{23}}^{\theta_1^{xQP}} a \succ_{F_{23}}^{\theta_1^{xQP}} c \succ_{F_{23}}^{\theta_1^{xQP}} d \succ_{F_{23}}^{\theta_1^{xQP}} x \succ_{F_{23}}^{\theta_1^{xQP}} y,$$

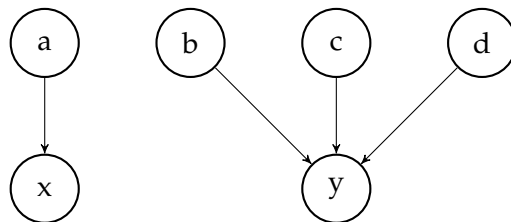


Abbildung 22: Der Argumentationsgraph  $F_{23}$ .

Mit Hilfe dieser Semantik lässt sich nun ein Gegenbeispiel für die Übertragbarkeit des Qualitätsvorrangs für Borda $^\alpha$ - und Copeland $^\alpha$ -aggregierte Semantiken finden.

**Beispiel 50** (Gegenbeispiele für die Übertragbarkeit des Qualitätsvorrangs für Borda $^\alpha$ - und Copeland $^\alpha$ -aggregierte Semantiken). Sei  $\Theta = \{\theta_1^{xQP}, \theta_2^{xQP}, \theta_3^{xQP}\}$  die Menge der zu aggregierenden Semantiken mit der rangbasierten Semantik aus Beispiel 49 und zwei weiteren rangbasierten Semantiken der Familie  $\theta^{xQP}$ . Wir betrachten wie im vorherigen Beispiel den Argumentationsgraphen  $F_{23} = (\{a, b, c, d, x, y\}, \{(a, x), (b, y), (c, y), (d, y)\})$ , siehe Abbildung 22. Die Präordnungen der drei rangbasierten Semantiken sind gegeben durch:

$$\theta_1^{xQP}(F) : b \succ_{F_{23}}^{\theta_1^{xQP}} a \succ_{F_{23}}^{\theta_1^{xQP}} c \succ_{F_{23}}^{\theta_1^{xQP}} d \succ_{F_{23}}^{\theta_1^{xQP}} x \succ_{F_{23}}^{\theta_1^{xQP}} y,$$

$$\theta_2^{xQP}(F) : c \succ_{F_{23}}^{\theta_2^{xQP}} a \succ_{F_{23}}^{\theta_2^{xQP}} d \succ_{F_{23}}^{\theta_2^{xQP}} b \succ_{F_{23}}^{\theta_2^{xQP}} x \succ_{F_{23}}^{\theta_2^{xQP}} y,$$

$$\theta_3^{xQP}(F) : d \succ_{F_{23}}^{\theta_3^{xQP}} a \succ_{F_{23}}^{\theta_3^{xQP}} b \succ_{F_{23}}^{\theta_3^{xQP}} c \succ_{F_{23}}^{\theta_3^{xQP}} x \succ_{F_{23}}^{\theta_3^{xQP}} y,$$

Dabei wurden die Argumente aus  $X = \{a, b, c, d\}$  von drei unterschiedlichen Experten geordnet und die Argumente aus  $Y = \{x, y\}$  mittels der Bedingung des Qualitätsvorrangs. Die Copeland $^\alpha$ -Werte sind wie folgt:  $\theta_{\Theta(F)}^{C^\alpha}(a) = 5, \theta_{\Theta(F)}^{C^\alpha}(b) = \theta_{\Theta(F)}^{C^\alpha}(c) = \theta_{\Theta(F)}^{C^\alpha}(d) = 3, \theta_{\Theta(F)}^{C^\alpha}(x) = 1, \theta_{\Theta(F)}^{C^\alpha}(y) = 0$ . Die Borda $^\alpha$ -Werte berechnen sich zu:  $\theta_{\Theta(F)}^{B^\alpha}(a) = 12, \theta_{\Theta(F)}^{B^\alpha}(b) = \theta_{\Theta(F)}^{B^\alpha}(c) = \theta_{\Theta(F)}^{B^\alpha}(d) = 10, \theta_{\Theta(F)}^{B^\alpha}(x) = 3$  und  $\theta_{\Theta(F)}^{B^\alpha}(y) = 0$ . Insgesamt erhalten wir für die Copeland $^\alpha$ - und die Borda $^\alpha$ -aggregierte Semantik jeweils die Präordnung  $a \succ_{F_\theta}^\theta b \simeq_{F_\theta}^\theta c \simeq_{F_\theta}^\theta d \succ_{F_\theta}^\theta x \succ_{F_\theta}^\theta y$ , für  $\theta \in \{\theta_\Theta^{C^\alpha}, \theta_\Theta^{B^\alpha}\}$  und  $\alpha \in [0, 1]$ . Da  $a \succ_{F_\theta}^\theta b, c, d$ , müsste für die Eigenschaft des Qualitätsvorrangs gelten, dass  $y$  strikt akzeptabler als  $x$  ist. Allerdings gilt  $x \succ_{F_\theta}^\theta y$ , für  $\theta \in \{\theta_\Theta^{C^\alpha}, \theta_\Theta^{B^\alpha}\}$  und  $\alpha \in [0, 1]$ . Deswegen übertragen die Copeland $^\alpha$ - und Borda $^\alpha$ -aggregierten Semantiken im Allgemeinen nicht die Eigenschaft des Qualitätsvorrangs.

Auch die Eigenschaft von Angriff vs vollständige Verteidigung kann durch die pluralitäts-aggregierte Semantik nicht übertragen werden. Dies sehen wir an folgendem Gegenbeispiel.

**Beispiel 51** (Gegenbeispiel für die Übertragbarkeit von Angriff vs vollständige Verteidigung für pluralitäts-aggregierte Semantiken). Wir betrachten als zu aggregierende Semantiken die Menge  $\Theta = \{\theta^{Strat}\}$  bestehend aus nur der strategiebasierten Semantik, welche die Eigenschaft von Angriff vs vollständige Verteidigung erfüllt. Weiterhin betrachten wir den kreisfreien Argumentationsgraphen  $F_6 = (A, R)$  aus dem Beispiel 18 für Angriff vs vollständige Verteidigung, siehe Abbildung 6. Für eine rangbasierte Semantik  $\theta$  mit der Eigenschaft Angriff vs vollständige Verteidigung folgt:  $a \succ_{F_6}^\theta b$ . Da die strategiebasierte Semantik die Eigenschaften Leerheitsvorrang und Angriff vs vollständige Verteidigung erfüllt, ergibt sich:

$$a2 \simeq_{F_6}^{\theta^{Strat}} a4 \simeq_{F_6}^{\theta^{Strat}} a6 \simeq_{F_6}^{\theta^{Strat}} b1 \succ_{F_6}^{\theta^{Strat}} a \succ_{F_6}^{\theta^{Strat}} b.$$

Insbesondere sind  $a$  und  $b$  keine maximalen Elemente bzgl.  $\theta_{F_6}^{Strat}$  und somit ist

$$\text{Prio}_{\Theta(F_6)}^\oplus(a) = \text{Prio}_{\theta^{Strat}(F_6)}(a) = \text{Prio}_{\Theta(F_6)}^\oplus(b) = \text{Prio}_{\theta^{Strat}(F_6)}(b) = 0.$$

Es folgt  $a \not\succeq_{F_6}^{\theta_\Theta^{pl}} b$ , wodurch die pluralitäts-aggregierte Semantik nicht die Eigenschaft Angriff vs vollständige Verteidigung überträgt.

Mit den Ergebnissen aus diesem Kapitel kann die Tabelle 9 aus Kapitel 3.4 mit den Beispielen der Aggregationen der vier rangbasierten Semantiken ergänzt werden. Tabelle 10 fasst die gewonnenen Ergebnisse der Übertragbarkeit der betrachteten Eigenschaften zusammen. Noch offen sind die mit Fragezeichen gekennzeichneten Stellen, wobei die beiden Eigenschaften Gegentransitivität und Äquivalenz zusammen hängen (Gegentransitivität impliziert Äquivalenz).

	Pluralität	Borda	Copeland
Syntaxunabhängigkeit	✓	✓	✓
Komponentenunabhängigkeit	✗	✗	✗
Kardinalitätsvorrang	✗	✓	✓
Gegentransitivität	✗	?	?
starke Gegentransitivität	✗	✗	✗
$\sigma$ -Kompatibilität	✗*	✓	✓
Leerheitsvorrang	✗	✓	✓
Selbstwiderspruchsvermeidung	✗	✓	✓
Qualitätsvorrang	✗	✗	✗
Angriff vs vollständige Verteidigung	✗	✓	✓
Totalität	✓	✓	✓
Äquivalenz der Unangegriffenen	✓	✓	✓
Äquivalenz der Argumentation	✓	✓	✓
Äquivalenz	✗	?	?

Tabelle 10: (Nicht)-Erfüllung der eingeführten Eigenschaften der aggregierten Semantiken. Grün hinterlegt sind die  $\succ$ -erhaltenden Eigenschaften, gelb hinterlegt die  $\succeq$ -erhaltenden Eigenschaften und rot hinterlegt die  $\simeq$ -erhaltenden Eigenschaften. \*  $\sigma$ -Kompatibilität für  $\sigma = \{\text{co, pr, gr, st}\}$

#### 4.4. Untersuchung der aggregierten rangbasierten Semantiken auf Mehrheitsübertragbarkeit von Eigenschaften

Die Eigenschaft der Syntaxunabhängigkeit von rangbasierten Semantiken ist nicht nur eine sehr sinnvolle Eigenschaft, sondern auch eine weit verbreitete. Im Regelfall erfüllen ernsthafte Semantiken diese Eigenschaft. Für den Beweis, dass Syntaxunabhängigkeit für die definierten aggregierten Semantiken in der Theorie nicht mehrheitsübertragbar sind, wird deshalb im Folgenden mit einem Gegenbeispiel unter Verwendung der nicht sinnvollen Syntaxsemantik bewiesen. Die Eigenschaft der Syntaxunabhängigkeit ist für die Pluralitäts-aggregierten, die Borda <sup>$\alpha$</sup> -aggregierten und die Copeland <sup>$\alpha$</sup> -aggregierten Semantiken nicht mehrheitsübertragbar, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt.

**Beispiel 52** (Gegenbeispiel für die Mehrheitsübertragbarkeit der Syntaxunabhängigkeit). Sei  $F_{24} = (A_{24}, R_{24})$  ein Argumentationsgraph mit Argumenten  $A_{24} = \{a, b, c\}$  und Angriffen  $R_{24} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, c)\}$ . Wir betrachten  $F_{24}$  und den zu ihm isomorphen Argumentationsgraphen  $F'_{24} := (A'_{24}, R'_{24})$  mit Argumenten  $A'_{24} = \{x, y, z\}$  und Angriffen  $R'_{24} = \{(z, z), (z, x), (z, y), (x, y)\}$  mit Isomorphismus  $\gamma : A \rightarrow A'$ , mit  $\gamma(a) = z$ ,  $\gamma(b) = x$ ,  $\gamma(c) = y$ , siehe Abbildung 23.

Wir erhalten für die Syntaxsemantik, die diskussionsbasierte und die strategiebasierte Semantik die Präordnungen aus Tabelle 11 für die Argumentationsgraphen  $F_{24}$  und  $F'_{24}$ :

rangbasierte Semantik	Präordnung für $F_{24}$	Präordnung für $F'_{24}$
Kategorisierersemantik	$a \simeq_{F_{24}}^{\theta^{Cat}} b \succ_{F_{24}}^{\theta^{Cat}} c$	$z \simeq_{F'_{24}}^{\theta^{Cat}} x \succ_{F'_{24}}^{\theta^{Cat}} y$
Strategiebasierte Semantik	$b \succ_{F_{24}}^{\theta^{Strat}} c \succ_{F_{24}}^{\theta^{Strat}} a$	$x \succ_{F'_{24}}^{\theta^{Strat}} y \succ_{F'_{24}}^{\theta^{Strat}} z$
Syntaxsemantik	$a \succ_{F_{24}}^{\theta^{Syn}} b \succ_{F_{24}}^{\theta^{Syn}} c$	$x \succ_{F'_{24}}^{\theta^{Syn}} y \succ_{F'_{24}}^{\theta^{Syn}} z$

Tabelle 11: Präordnungen für die Kategorisierersemantik, die strategiebasierte Semantik und die Syntaxsemantik für die Argumentationsgraphen  $F_{24}$  und  $F'_{24}$ .

Für die aggregierten Semantiken erhalten wir die in Tabelle 12 angegebenen Präordnungen. Insbesondere gilt für die pluralitäts-aggregierte Semantik:  $b \simeq_{F_{24}}^{\theta^{pl}} a$ ,

Semantik	a	b	c	Präordnung für $F_{24}$	x	y	z	Präordnung für $F'_{24}$
Pluralität	2	2	0	$a \simeq b \succ c$	3	0	1	$x \succ z \succ y$
Copeland $^\alpha$	$1 + \alpha$	$1 + \alpha$	0	$a \simeq b \succ c$	2	1	0	$x \succ y \succ z$
Borda $^\alpha$ , $\alpha < 1$	$3 + \alpha$	$4 + \alpha$	1	$b \succ a \succ c$	$5 + \alpha$	2	$1 + \alpha$	$x \succ y \succ z$
Borda $^1$	4	5	1	$b \succ a \succ c$	6	2	2	$x \succ y \simeq z$

Tabelle 12: Präordnungen der aggregierten rangbasierten Semantiken für die Argumentationsgraphen  $F_{24}$  und  $F'_{24}$ .

während  $\gamma(b) = x \succ_{F'_{24}}^{\theta^{pl}} z = \gamma(a)$ . Dies gilt auch für die Copeland $^\alpha$ -aggregierte Semantik mit  $b \simeq_{F_{24}}^{\theta^{C\alpha}} a$ , während  $\gamma(b) = x \succ_{F_{24}}^{\theta^{C\alpha}} z = \gamma(a)$ . Für Borda $^\alpha$ -aggregierte Semantiken ist  $a \succ_{F_{24}}^{\theta^{B\alpha}} c$ , obwohl  $\gamma(c) = y \succ_{F'_{24}}^{\theta^{B\alpha}} z = \gamma(a)$  für  $\alpha < 1$  und  $\gamma(c) = y \simeq_{F'_{24}}^{\theta^{B1}} z = \gamma(a)$  für  $\alpha = 1$ . Damit ist die Eigenschaft der Syntaxunabhängigkeit für alle drei Familien aggregierter rangbasierter Semantiken nicht mehrheitsübertragbar.

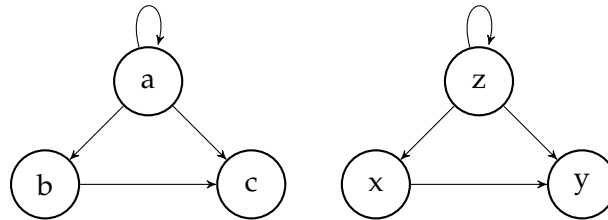


Abbildung 23: Die isomorphen Argumentationsgraphen  $F_{24}$  (links) und  $F'_{24}$  (rechts).

Eine Mehrheitsübertragbarkeit ist für die Komponentenunabhängigkeit für die pluralitäts-aggregierten, die Copeland $^\alpha$ -aggregierten und die Borda $^\alpha$ -aggregierten Semantiken ausgeschlossen, da jeweils bereits schon keine Übertragbarkeit gilt, siehe Beispiele 27, 28 und 29.

Die Eigenschaft des Kardinalitätsvorrangs war bereits für die Pluralitäts-aggregierte Semantik nicht übertragbar, weswegen sie auch nicht mehrheitsübertragbar sein kann, siehe Beispiel 40. Das folgende Gegenbeispiel zeigt, dass die Borda $^\alpha$ -aggregierten Semantiken im Allgemeinen nicht mehrheitsübertragbar sind für alle  $\alpha \in [0, 1]$ .

**Beispiel 53** (Kardinalitätsvorrang für die Borda $^\alpha$ -aggregierten Semantiken nicht mehrheitsübertragbar). Wir betrachten die Menge  $\Theta = \{\theta^{Dbs}, \theta^{Bbs}, \theta^{Strat}\}$  und den Argumentationsgraphen  $F_{14}$  aus Beispiel 31, siehe Abbildung 14. Während die diskussionsbasierte und die bürgenbasierte Semantik die Eigenschaft des Kardinalitätsvorrangs erfüllen, gilt dies für die strategiebasierte Semantik nicht. Die Präordnungen der rangbasierten Semantiken aus  $\Theta$  sind wie folgt:

$$\theta^{Dbs}(F_{14}): e \simeq f \simeq g \succ a \succ b \succ c \simeq d,$$

$$\theta^{Bbs}(F_{14}): e \simeq f \simeq g \succ a \succ b \succ c \simeq d,$$

$$\theta^{Strat}(F_{14}): e \simeq f \simeq g \succ b \succ c \simeq d \succ a.$$

Für die Borda $^\alpha$ -aggregierte Semantik über  $\Theta$  ergibt sich die folgende Rangordnung für alle  $\alpha \in [0, 1]$ :  $e \simeq_{F_{14}}^{\theta_{\Theta}^{B\alpha}} f \simeq_{F_{14}}^{\theta_{\Theta}^{B\alpha}} g \succ_{F_{14}}^{\theta_{\Theta}^{B\alpha}} b \succ_{F_{14}}^{\theta_{\Theta}^{B\alpha}} a \succ_{F_{14}}^{\theta_{\Theta}^{B\alpha}} c \simeq_{F_{14}}^{\theta_{\Theta}^{B\alpha}} d$ . Da insbesondere  $a \not\succeq_{F_{14}}^{\theta_{\Theta}^{B\alpha}} b$  gilt, obwohl  $|\{a\}^-| < |\{b\}^-|$  gilt, ist die Eigenschaft des Kardinalitätsvorrangs nicht erfüllt.

Im Gegensatz zu dem vorherigen Beispiel ist der Kardinalitätsvorrang für Copeland $^\alpha$ -aggregierte Semantiken mehrheitsübertragbar, wie der folgende Beweis zeigt.

**Proposition 12.** Die Eigenschaft des Kardinalitätsvorrangs ist für die Copeland $^\alpha$ -aggregierten Semantiken mehrheitsübertragbar.

*Beweis.* Sei  $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  eine endliche Menge rangbasierter Semantiken, wobei eine Teilmenge  $\Theta_m \subseteq \Theta$  existiert, welche die Mehrheit bildet mit  $|\Theta_m| > \frac{n}{2}$ , deren Elemente  $\theta \in \Theta_m$  alle die Eigenschaft des Kardinalitätsvorrangs erfüllen. Angenommen, es gibt einen Argumentationsgraphen  $F = (A, R)$  für den die aggregierte rangbasierte Semantik  $\theta_{\Theta}^{C\alpha}$  die Eigenschaft des Kardinalitätsvorrangs nicht erfüllt. Dann gibt es Argumente  $a, b \in A$ , so dass o.B.d.a.  $|\{a\}^-| < |\{b\}^-|$  und gleichzeitig  $b \succeq_F^{\theta_{\Theta}^{C\alpha}} a$  gilt. Nun gilt für alle  $\theta \in \Theta_m$  wegen Kardinalitätsvorrang:  $a \succ_F^\theta b$ , und da dies die Mehrheit bildet, folgt auch  $a \succ_{\Theta(F)}^\mu b$ . Um  $C_{\Theta(F)}^\alpha(b) \geq C_{\Theta(F)}^\alpha(a)$  und damit die Annahme  $b \succeq_F^{\theta_{\Theta}^{C\alpha}} a$  erfüllen zu können, müsste es  $x \in A$  geben, so dass  $x \succeq_{\Theta(F)}^\mu a$  und  $b \succeq_{\Theta(F)}^\mu x$ . Wegen  $x \succeq_{\Theta(F)}^\mu a$  muss es auch ein  $\theta_1 \in \Theta_m$  geben mit  $x \succeq_F^{\theta_1} a$  (d.h.  $a \not\succeq_F^{\theta_1} x$ ). Genauso muss es wegen  $b \succeq_{\Theta(F)}^\mu x$  ein  $\theta_2 \in \Theta_m$  geben mit  $b \succeq_F^{\theta_2} x$  (d.h.  $x \not\succeq_F^{\theta_2} b$ ). Da die beiden rangbasierten Semantiken  $\theta_1, \theta_2 \in \Theta_m$  Kardinalitätsvorrang erfüllen, folgt durch Kontraposition  $|\{a\}^-| \not\leq |\{x\}^-|$  und  $|\{x\}^-| \not\leq |\{b\}^-|$ .

Zusammen ergibt sich  $|\{b\}^-| \leq |\{x\}^-| \leq |\{a\}^-|$ . Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass  $|\{a\}^-| < |\{b\}^-|$  gilt. Es folgt, dass aggregierte rangbasierte Semantiken  $\theta_{\Theta}^{C^\alpha}$  Kardinalitätsvorrang erfüllen für alle  $\alpha \in [0, 1]$ .  $\square$

Gegentransitivität und starke Gegentransitivität sind für alle behandelten aggregierten rangbasierten Semantiken im Allgemeinen nicht mehrheitsübertragbar. Dies wurde bereits durch die beiden Beispiele 32 und 33 gezeigt, in welchen die Mehrheit der rangbasierten Semantiken, die aggregiert wurden, (starke) Gegentransitivität erfüllten, jedoch trotzdem die aggregierten Rangfolgen der Beispiele die Eigenschaft jeweils nicht erfüllten.

Die Eigenschaft der  $\sigma$ -Kompatibilität unterscheidet sich bzgl. Mehrheitsübertragbarkeit für die behandelten aggregierten Semantiken. So ist  $\sigma$ -Kompatibilität für  $\sigma \in \{\text{co}, \text{pr}, \text{gr}, \text{st}\}$  für die pluralitäts-aggregierten Semantiken im Allgemeinen nicht mehrheitsübertragbar. Dies wurde bereits mit dem Gegenbeispiel 45 für die Übertragbarkeit gezeigt, weswegen sie für die behandelten  $\sigma$  auch nicht mehrheitsübertragbar sind. Im Gegensatz dazu ist die Eigenschaft der  $\sigma$ -Kompatibilität ohne Einschränkung für Copeland $^\alpha$ -aggregierte Semantiken mehrheitsübertragbar.

**Proposition 13.** Für Copeland $^\alpha$ -aggregierte Semantiken ist die Eigenschaft der  $\sigma$ -Kompatibilität mehrheitsübertragbar.

*Beweis.* Sei  $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  eine endliche Menge rangbasierter Semantiken, wobei eine Teilmenge  $\Theta_m \subseteq \Theta$  existiert, welche die Mehrheit bildet mit  $|\Theta_m| > \frac{n}{2}$ , deren Elemente  $\theta \in \Theta_m$  alle die Eigenschaft der  $\sigma$ -Kompatibilität erfüllen und sei  $F = (A, R)$  ein beliebiger Argumentationsgraph. Die rangbasierten Semantiken  $\theta \in \Theta_m$  teilen nach Definition unabhängig von der Semantik selbst die Menge der Argumente  $A$  in genau zwei Mengen  $A_1 := \bigcup \sigma(F)$  und  $A_2 := A \setminus \bigcup \sigma(F)$  auf, mit  $A_1 \cup A_2 = A$  und  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ , wobei die Elemente der einen Menge  $A_1$  strikt akzeptabler als die Elemente der anderen Menge  $A_2$  sind: für alle  $a \in A_1$  und alle  $b \in A_2$  gilt  $a \succ_F^\theta b$ . Da dies laut Voraussetzung für alle  $\theta \in \Theta_m$  und damit für die Mehrheit der rangbasierten Semantiken gilt, folgt auch  $a \succ_{\Theta(F)}^\mu b$  für alle  $a \in A_1$  und alle  $b \in A_2$ . Ein Argument  $a \in A_1$  erhält also mindestens  $|A_2|$  Punkte in der Copeland-Wertung, weil es im paarweisen Vergleich gegen alle Argumente aus  $A_2$  *gewinnt*, während ein Argument  $b \in A_2$  maximal  $|A_2| - 1$  Punkte erhalten kann. Es folgt  $C_{\Theta(F)}^\alpha(a) > C_{\Theta(F)}^\alpha(b)$  und damit  $a \succ_F^{\theta_{\Theta}^{C^\alpha}} b$  für alle  $a \in A_1$  und alle  $b \in A_2$ . Somit erfüllen Copeland $^\alpha$ -aggregierte Semantiken  $\theta_{\Theta}^{C^\alpha}$  die Eigenschaft der  $\sigma$ -Kompatibilität und die Behauptung der Mehrheitsübertragbarkeit folgt.  $\square$

Für die Borda $^\alpha$ -aggregierten Semantiken ist im Allgemeinen die  $\sigma$ -Kompatibilität nicht mehrheitsübertragbar. Für ein Gegenbeispiel werden weitere  $\sigma$ -kompatible rangbasierte Semantik benötigt. Dafür werden zunächst die aus der Literatur bekannten mit den extensionsbasierten Semantiken kompatiblen rangbasierten Semantiken  $\theta^\sigma$  genutzt.

**Definition 4.10** (Rangbasierte Semantik  $\theta^\sigma$ ). Sei  $F = (A, R)$  ein Argumentationsgraph. Die rangbasierte Semantik  $\theta^\sigma$  ist für jeden beliebigen Argumentationsgraphen  $F = (A, R)$  und alle  $a, b \in A$  wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} a \succ_F^{\theta^\sigma} b & \text{ gdw. } a \in \bigcup \sigma(F) \text{ und } b \notin \bigcup \sigma(F), \\ a \simeq_F^{\theta^\sigma} b & \text{ sonst.} \end{aligned}$$

**Beispiel 54.** Im Argumentationsgraphen  $F = (\{a, b, c, d, e, f, \}, \{(d, c), (c, e), (e, b), (b, f), (f, a)\})$  aus Abbildung 24 ist jeweils für  $\sigma \in \{\text{co, pr, gr, st}\}$  die Präordnung gegeben durch  $d \simeq_F^{\theta^\sigma} e \simeq_F^{\theta^\sigma} f \succ_F^{\theta^\sigma} a \simeq_F^{\theta^\sigma} b \simeq_F^{\theta^\sigma} c$ , da die Menge  $\{d, e, f\}$  sowohl vollständig, präferiert, grundiert und stabil ist.

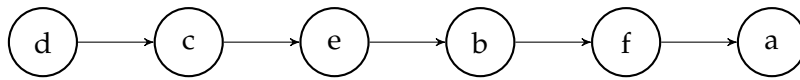


Abbildung 24: Der Argumentationsgraph  $F_{25}$ .

Als nächstes werden mit den  $\sigma$ -Syntax Semantiken Abwandlungen der  $\theta^\sigma$  Semantiken eingeführt, welche  $\sigma$ -Kompatibilität einhalten und alle in der entsprechenden  $\theta^\sigma$  Semantik gleich geordneten Elemente noch zusätzlich nach ihrer Syntax ordnen.

**Definition 4.11** (rangbasierte Semantik  $\theta^{\sigma^{syn}}$ ). Sei  $F = (A, R)$  ein Argumentationsgraph. Die  $\sigma$ -Syntax Semantik  $\theta^{\sigma^{syn}}$  weist einem Argumentationsgraphen  $F$  wie folgt die Präordnung  $\succeq_F^{\theta^{\sigma^{syn}}}$  zu:

- $a \succ_F^{\theta^{\sigma^{syn}}} b$ , falls  $a \in \bigcup \sigma(F)$  und  $b \notin \bigcup \sigma(F)$ ,
- $a \succ_F^{\theta^{\sigma^{syn}}} b$ , falls  $a, b \in \bigcup \sigma(F)$  und  $a$  liegt lexikographisch vor  $b$ ,
- $a \succ_F^{\theta^{\sigma^{syn}}} b$ , falls  $a, b \notin \bigcup \sigma(F)$  und  $a$  liegt lexikographisch vor  $b$ .

**Beispiel 55** (Fortsetzung von Beispiel 54). Im Argumentationsgraphen  $F = (\{a, b, c, d, e, f, \}, \{(d, c), (c, e), (e, b), (b, f), (f, a)\})$  aus Abbildung 24 sind die Präordnungen  $\theta^{\sigma^{syn}}(F)$  gegeben durch  $d \succ_F^{\theta^{\sigma^{syn}}} e \succ_F^{\theta^{\sigma^{syn}}} f \succ_F^{\theta^{\sigma^{syn}}} a \succ_F^{\theta^{\sigma^{syn}}} b \succ_F^{\theta^{\sigma^{syn}}} c$  für alle  $\sigma \in \{\text{co, pr, gr, st}\}$ .

Mit den beiden rangbasierten Semantiken  $\theta^\sigma$  und  $\theta^{\sigma^{syn}}$ , welche die Eigenschaft der  $\sigma$ -Kompatibilität erfüllen, und zusätzlich der Syntaxsemantik  $\theta^{\sigma^{syn}}$  kann ein Gegenbeispiel für die Mehrheitsübertragbarkeit der  $\sigma$ -Kompatibilität für die Borda $^\alpha$ -aggregierten Semantiken konstruiert werden.

**Beispiel 56** (Gegenbeispiel für Borda $^\alpha$ -aggregierte Semantiken für die Mehrheitsübertragbarkeit von  $\sigma$ -Kompatibilität für  $\sigma \in \{\text{co, pr, gr, st}\}$ ). Sei  $\Theta = \{\theta^\sigma, \theta^{\sigma^{syn}}, \theta^{syn}\}$  die Menge der zu aggregierenden rangbasierten Semantiken. Wir betrachten den Argumentationsgraphen  $F = (\{a, b, c, d, e, f, \}, \{(d, c), (c, e), (e, b), (b, f), (f, a)\})$  mit

der vollständigen, präferierten, grundierten und stabilen Menge  $\{d, e, f\}$  aus den beiden vorherigen Beispielen, siehe Abbildung 24. Die Semantiken  $\theta^\sigma$  und  $\theta^{\sigma^{syn}}$  erfüllen nach Definition die Eigenschaft der  $\sigma$ -Kompatibilität und haben die Rangfolgen  $d \simeq_F^{\theta^\sigma} e \simeq_F^{\theta^\sigma} f \succ_F^{\theta^\sigma} a \simeq_F^{\theta^\sigma} b \simeq_F^{\theta^\sigma} c$  und  $d \succ_F^{\theta^{\sigma^{syn}}} e \succ_F^{\theta^{\sigma^{syn}}} f \succ_F^{\theta^{\sigma^{syn}}} a \succ_F^{\theta^{\sigma^{syn}}} b \succ_F^{\theta^{\sigma^{syn}}} c$ . Es gilt insbesondere  $f \succ_F^\theta a$ , für  $\theta \in \{\theta^\sigma, \theta^{\sigma^{syn}}\}$ . Die Syntaxsemantik hat dagegen die Präordnung  $a \succ_F^{\theta^{\sigma^{syn}}} b \succ_F^{\theta^{\sigma^{syn}}} c \succ_F^{\theta^{\sigma^{syn}}} d \succ_F^{\theta^{\sigma^{syn}}} e \succ_F^{\theta^{\sigma^{syn}}} f$  und es gilt insbesondere  $f \not\succeq_F^{\theta^{\sigma^{syn}}} a$ . Für die Borda $^\alpha$ -aggregierten Semantiken  $\theta_\Theta^{B^\alpha}$  berechnen sich die Borda $^\alpha$ -Wertungen zu  $B_{\Theta(F)}^\alpha(a) = 7 + 2\alpha$  und  $B_{\Theta(F)}^\alpha(f) = 6 + 2\alpha$ , weswegen sich  $f \not\succeq_F^{\theta_\Theta^{B^\alpha}} a$  ergibt. Die Eigenschaft  $\sigma$ -Kompatibilität ist damit nicht mehrheitsübertragbar.

Während für die pluralitäts-aggregierte Semantik die Eigenschaft des Leerheitsvorrangs nicht übertragbar ist, siehe Beispiel 46, und deswegen auch nicht mehrheitsübertragbar sein kann, gilt für Copeland $^\alpha$ -aggregierte Semantiken für die Eigenschaft des Leerheitsvorrangs Mehrheitsübertragbarkeit.

**Proposition 14.** Für die Copeland $^\alpha$ -aggregierten Semantiken ist die Eigenschaft des Leerheitsvorrangs mehrheitsübertragbar.

*Beweis.* Sei  $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_k, \dots, \theta_n\}$  eine Menge rangbasierter Semantiken, von denen die Mehrheit  $\{\theta_1, \dots, \theta_k\}$ ,  $k > \frac{n}{2}$ , die Eigenschaft des Leerheitsvorrangs erfüllt, und  $F = (A, R)$  ein beliebiger Argumentationsgraph. Für die Copeland $^\alpha$ -aggregierten Semantiken gilt für alle unangegriffenen Argumente  $a \in A$ ,  $\{a\}^- = \emptyset$ , im paarweisen Vergleich mit den übrigen Argumenten  $b \in A$ ,  $\{b\}^- \neq \emptyset$ , dass  $a \succ_{\Theta(F)}^\mu b$ , da die Mehrheit der rangbasierten Semantiken Leerheitsvorrang erfüllt. Argumente  $\{b\}^- \neq \emptyset$  können nun nur noch im paarweisen Vergleich untereinander gewinnen. Somit gilt die Abschätzung:

$$C_{\Theta(F)}^\alpha(a) \geq |\{b \in A : \{b\}^- \neq \emptyset\}| > |\{x \in A \setminus \{b\} : \{x\}^- \neq \emptyset\}| \geq C_{\Theta(F)}^\alpha(b).$$

Es folgt für die Präordnung der Copeland $^\alpha$ -aggregierten Semantik  $a \succ_F^{\theta_\Theta^{C^\alpha}} b$  für alle unangegriffenen  $a \in A$  mit  $\{a\}^- = \emptyset$  und alle angegriffenen  $b \in A$  mit  $\{b\}^- \neq \emptyset$  und alle  $\alpha \in [0, 1]$ .  $\square$

Im Gegensatz dazu kann für die Borda $^\alpha$ -aggregierten Semantiken mit Hilfe der Syntaxsemantik zumindest theoretisch ein Gegenbeispiel für die Mehrheitsübertragbarkeit des Leerheitsvorrangs gefunden werden.

**Beispiel 57.** Wir betrachten den Argumentationsgraphen  $F_{25} = (\{a, b, c\}, \{(b, b), (c, a), (c, b)\})$ , siehe Abbildung 25. Die rangbasierten Semantiken  $\theta \in \{\theta^{Cat}, \theta^{Dbs}\}$ , welche Leerheitsvorrang erfüllen, erhalten jeweils die Präordnung  $c \succ_{F_{25}}^\theta a \succ_{F_{25}}^\theta b$ , wogegen die Syntaxsemantik die Präordnung  $a \succ_{F_{25}}^{\theta^{Syn}} b \succ_{F_{25}}^{\theta^{Syn}} c$  hat. Da insbesondere  $a \succ_{F_{25}}^{\theta^{Syn}} c$  für das unangegriffene Argument  $c$  und das angegriffene Argument  $a$  gilt, erfüllt die Syntaxsemantik nicht die Eigenschaft des Leerheitsvorrangs. Bei

der Aggregation der Menge dieser drei Semantiken  $\Theta := \{\theta^{Cat}, \theta^{Dbs}, \theta^{Syn}\}$  erhalten wir für die Borda $^\alpha$ -aggregierten Semantiken  $B_{\Theta(F)}^\alpha(a) = B_{\Theta(F)}^\alpha(c) = 4, B_{\Theta(F)}^\alpha(b) = 1$  und somit die Präordnung  $a \simeq_F^{B_\Theta^\alpha} c \succ_F^{B_\Theta^\alpha} b$  für alle  $\alpha \in [0, 1]$ . Da  $c \not\succeq_F^{B_\Theta^\alpha} a$  gilt, ist eine Mehrheitsübertragbarkeit der Eigenschaft des Leerheitsvorrangs für Borda $^\alpha$ -aggregierte Semantiken nicht gegeben.

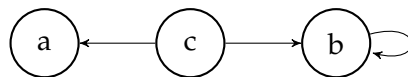


Abbildung 25: Der Argumentationsgraph  $F_{25}$ .

Die Selbstwiderspruchsvermeidung ist für pluralitäts-aggregierte Semantiken bereits nicht übertragbar (siehe Beispiel 47), weswegen sie auch nicht mehrheitsübertragbar ist. Dagegen kann gezeigt werden, dass die Selbstwiderspruchsvermeidung für die Copeland $^\alpha$ -aggregierten Semantiken mehrheitsübertragbar ist.

**Proposition 15.** Selbstwiderspruchsvermeidung ist für die Copeland $^\alpha$ -aggregierten Semantiken mehrheitsübertragbar.

*Beweis.* Sei  $\Theta$  eine Menge rangbasierter Semantiken, dessen Mehrheit  $\Theta' \subset \Theta$  die Selbstwiderspruchsvermeidung erfüllt, und  $F = (A, R)$  ein beliebiger Argumentationsgraph. Dann gilt für die rangbasierten Semantiken  $\theta \in \Theta'$  für alle sich nicht selbstangreifenden Argumente  $a \in A$ , mit  $(a, a) \notin R$ , und alle selbstangreifenden Argumente  $b \in A$ , mit  $(b, b) \in R$ , dass  $a \succ_F^\theta b$ . Da es sich um die Mehrheit der rangbasierten Semantiken handelt, verlieren jeweils die selbstangreifenden Argumente gegen die nicht-selbstangreifenden Argumente im paarweisen Majoritätsvergleich, weswegen die folgende Abschätzung folgt.

$$C_{\Theta(F)}^\alpha(a) \geq |\{x \in A : (x, x) \in R\}| > |\{x \in A \setminus \{b\} : (x, x) \in R\}| \geq C_{\Theta(F)}^\alpha(b).$$

Daher gilt nach Definition der Copeland $^\alpha$ -aggregierten Semantiken, dass  $a \succ_F^{\theta_{\Theta}^\alpha} b$  für alle  $a \in A$ , mit  $(a, a) \notin R$ , und alle selbstangreifenden Argumente  $b \in A$ , mit  $(b, b) \in R$ . Damit ist gezeigt, dass die Eigenschaft der Selbstwiderspruchsvermeidung für Copeland $^\alpha$ -aggregierte Semantiken für alle  $\alpha \in [0, 1]$  mehrheitsübertragbar ist.  $\square$

Selbstwiderspruchsvermeidung ist für Borda $^\alpha$ -aggregierte Semantiken im Allgemeinen nicht mehrheitsübertragbar. Für ein Gegenbeispiel für Mehrheitsübertragbarkeit wird allerdings noch eine andere rangbasierte Semantik benötigt, welche diese Eigenschaft erfüllt. Neben der strategiebasierte Semantik, welche die Eigenschaft der Selbstwiderspruchsvermeidung erfüllt, haben Beuselinck et al. die Nicht-Selbstangreifende Kategorisierersemantik (engl. *No Self-Attack h-categorizer Semantics*, nsa) als bewertete Semantik definiert [7]. Diese greift die Kategorisierersemantik

auf und gibt ihr noch einen Zusatz, damit die Eigenschaft der Selbstwiderspruchsvermeidung erfüllt ist. Im Folgenden wird die nicht selbst-angreifende Kategorisiererfunktion als rangbasierte Semantik definiert.

**Definition 4.12** (Nicht selbst-angreifende Kategorisiererfunktion und nicht selbst-angreifende Kategorisierersemantik). Sei  $F = (A, R)$  ein Argumentationsgraph. Die nicht selbst-angreifende Kategorisiererfunktion sei gegeben durch  $nsa : A \rightarrow (0, 1]$ .

$$nsa(a) = \begin{cases} 0, & \text{falls } (a, a) \in R, \\ \frac{1}{1 + \sum_{b \in \{a\}^-} nsa(b)}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei  $nsa^*$  die eindeutige Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems der nicht selbst-angreifenden Kategorisiererfunktion. Mittels dieser weist die nicht selbst-angreifende Kategorisierersemantik  $\theta^{nsa}$  dem Argumentationsgraphen  $F$  wie folgt eine Präordnung zu:  $a \succeq_F^{\theta^{nsa}} b$  gdw.  $nsa^*(a) \geq nsa^*(b)$  für alle  $a, b \in A$ .

**Bemerkung.** In ihren Arbeiten konnten Beuselinck et al. zeigen, dass ihre Nicht-Selbstangreifende Kategorisierersemantik die gleichen Ergebnisse wie die Kategorisierersemantik liefert, wenn der Argumentationsgraph ohne selbstangreifende Argumente berechnet wird [7]. Für eine Berechnung kann damit die Kategorisierersemantik ohne die selbstangreifenden Argumente verwendet werden und alle selbst-angreifenden Argumente werden dann noch als schwächste Argumente zu der Rangfolge hinzugefügt.

Mit Hilfe dieser rangbasierten Semantik kann das folgende Gegenbeispiel für die Eigenschaft der Selbstwiderspruchsvermeidung für Borda $^\alpha$ -aggregierte Semantiken gefunden werden.

**Beispiel 58** (Gegenbeispiel für die Selbstwiderspruchsvermeidung für Mehrheitsübertragbarkeit für  $\theta^{B^\alpha}$ ). Wir betrachten den Argumentationsgraphen  $F_{26} = (\{a, b, c, d\}, \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, d), (c, b), (c, d)\})$ , siehe Abbildung 26 und die Menge der rangbasierten Semantiken  $\Theta = \{\theta^{Strat}, \theta^{nsa}, \theta^{Cat}\}$ . Wenden wir die strategiebasierte und die nicht-selbstangreifende Kategorisierersemantik auf  $F_{26}$  an, so erhalten wir jeweils eine Rangfolge von  $c \succ_{F_{26}}^\theta b \succ_{F_{26}}^\theta d \succ_{F_{26}}^\theta a$ ,  $\theta \in \{\theta^{Strat}, \theta^{nsa}\}$ . Beide Semantiken erfüllen die Eigenschaft des Leerheitsvorrangs. Die übliche Kategorisierersemantik erfüllt nicht die Eigenschaft des Leerheitsvorrangs und wir erhalten eine Rangfolge von  $c \succ_{F_{26}}^{\theta^{Cat}} a \succ_{F_{26}}^{\theta^{Cat}} b \succ_{F_{26}}^{\theta^{Cat}} d$ . Insgesamt ergibt sich die Rangfolge der Borda $^\alpha$ -aggregierten rangbasierten Semantik  $\theta_\Theta^{B^\alpha}$  durch:  $c \succ_{F_{26}}^{\theta_\Theta^{B^\alpha}} b \succ_{F_{26}}^{\theta_\Theta^{B^\alpha}} a \simeq_{F_{26}}^{\theta_\Theta^{B^\alpha}} d$ . Da insbesondere  $d \not\succeq_{F_{26}}^{\theta_\Theta^{B^\alpha}} a$  gilt, ist Selbstwiderspruchsvermeidung nicht erfüllt und damit auch im Allgemeinen nicht mehrheitsübertragbar für Borda $^\alpha$ -aggregierte Semantiken.

Da bereits Gegenbeispiele für die Übertragbarkeit gefunden wurden, ist die Eigenschaft des Qualitätsvorrangs für pluralitäts-aggregierte, Borda $^\alpha$ -aggregierte und

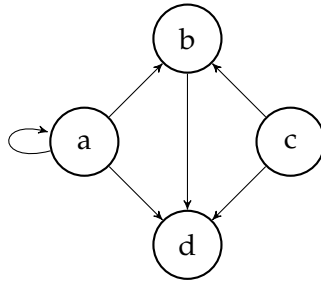


Abbildung 26: Der Argumentationsgraph  $F_{26}$ .

die Copeland $^\alpha$ -aggregierte rangbasierte Semantiken nicht mehrheitsübertragbar, siehe Beispiele 48 und 50 aus Kapitel 4.3.

Für Gegenbeispiele für die Eigenschaft Angriff vs vollständige Verteidigung werden weitere Semantiken benötigt, welche diese Eigenschaft erfüllen, da wir bisher nur die strategiebasierte Semantik behandelt haben, welche die Eigenschaft erfüllt. Die grundierte Semantik  $\theta^{gr}$  aus Definition 4.10 erfüllt die Eigenschaft Angriff vs vollständige Verteidigung [11]. Als nächstes werden rangbasierte Semantiken aufbauend auf einer beliebigen rangbasierten Semantik mittels Abwandlung der Idee der Syntax-Semantik aus Definition 4.6 definiert. Zunächst wird für einen Argumentationsgraphen die existierende Semantik berechnet und anschließend alle gleich geordneten Argumente mittels der Syntax geordnet.

**Definition 4.13** (Familie rangbasierter *rank*-Syntax Semantiken  $\theta^{rank^{syn}}$ ). Sei  $F = (A, R)$  ein Argumentationsgraph und  $\theta^{rank}$  eine rangbasierte Semantik mit Bezeichnung *rank*. Die rangbasierte Semantik  $\theta^{rank^{syn}}$  weist einem Argumentationsgraphen  $F$  wie folgt die Präordnung  $\succeq_F^{\theta^{rank^{syn}}}$  zu:

- $a \succ_F^{\theta^{rank^{syn}}} b$ , falls  $a \succ_F^{\theta^{rank}} b$ ,
- $a \succ_F^{\theta^{rank^{syn}}} b$ , falls  $a \simeq_F^{\theta^{rank}} b$  und  $a$  liegt lexikographisch vor  $b$ .

Auch für die Copeland $^\alpha$ -aggregierten und die Borda $^\alpha$ -aggregierten Semantiken kann ein Gegenbeispiel für die Mehrheitsübertragbarkeit für die Eigenschaft Angriff vs vollständige Verteidigung gefunden werden. Dafür werden zwei rangbasierte Semantiken, die *AvsFD* $_1^*$ -Semantik und die *AvsFD* $_2^*$ -Semantik, so konstruiert, dass sie die Eigenschaft Angriff vs vollständige Verteidigung erfüllen und sich in gewissen Argumenten unterscheiden, welche die Eigenschaft nicht berücksichtigt.

**Definition 4.14** (*AvsFD* $_1^*$ -Semantik). Sei  $F = (A, R)$  ein Argumentationsgraph. Sei  $f : A \rightarrow [0, 1]$  eine Funktion, die wie folgt definiert ist.

- In kreisfreien Argumentationsgraphen gilt:
  - $f(a) = 1$  für Argumente  $a \in A$ , die nicht angegriffen werden,

- $f(a) = 0.5$  für Argumente  $a \in A$ , die vollständig verteidigt werden,
- $f(a) = 0.25$  für Argumente  $a \in A$  mit genau einem Angreifer  $c \in A$ , der nicht angegriffen wird,
- $f(a) = 0.75$  sonst.

- In Argumentationsgraphen mit Kreisen sei  $f(a) = 1$  für alle Argumente  $a \in A$ .

Die AvsFD<sub>1</sub>\*-Semantik  $\theta^{AvsFD_1^*}$  bildet wie folgt eine Präordnung über  $F$ : für alle  $a, b \in A$  ist  $a \succeq_F^{\theta^{AvsFD_1^*}} b$  gdw.  $f(a) \geq f(b)$ .

**Definition 4.15** (AvsFD<sub>2</sub>\*-Semantik). Sei  $F = (A, R)$  ein Argumentationsgraph. Sei  $f : A \rightarrow [0, 1]$  eine Funktion, die wie folgt definiert ist.

- In kreisfreien Argumentationsgraphen gilt:
  - $f(a) = 1$  für Argumente  $a \in A$ , die nicht angegriffen werden,
  - $f(a) = 0.5$  für Argumente  $a \in A$ , die vollständig verteidigt werden,
  - $f(a) = 0.25$  für Argumente  $a \in A$  mit genau einem Angreifer  $c \in A$ , der nicht angegriffen wird,
  - $f(a) = 0$  sonst.
- In Argumentationsgraphen mit Kreisen sei  $f(a) = 1$  für alle Argumente  $a \in A$ .

Die AvsFD<sub>2</sub>\*-Semantik  $\theta^{AvsFD_2^*}$  bildet wie folgt eine Präordnung über  $F$ : für alle  $a, b \in A$  ist  $a \succeq_F^{\theta^{AvsFD_2^*}} b$  gdw.  $f(a) \geq f(b)$ .

Zwar berücksichtigen die beiden Semantiken die Eigenschaft Angriff vs vollständige Verteidigung, bewerten aber alle übrigen Argumente, die von mehr als einem Argument angegriffen werden und nicht vollständig verteidigt werden, unterschiedlich. Mit Hilfe der AvsFD<sub>1</sub>\*-Syntax Semantik und der AvsFD<sub>2</sub>\*-Syntax Semantik, welche noch den Zusatz haben, dass die in den entsprechenden AvsFD-Semantiken gleich geordneten Argumente nach der Syntax geordnet sind, kann ein Gegenbeispiel für Copeland<sup>α</sup>-aggregierte rangbasierte Semantiken gefunden werden.

**Bemerkung.** Genau wie die AvsFD<sub>*i*</sub>\*-Semantiken, erfüllen auch die AvsFD<sub>*i*</sub>\*-Syntax Semantiken, für  $i = 1, 2$ , die Eigenschaft Angriff vs vollständige Verteidigung. Denn strikt geordnete Argumente aus der ursprünglichen Semantik bleiben auch in der Syntax-Variante strikt geordnet.

**Beispiel 59** (Angriff vs vollständige Verteidigung ist für Copeland<sup>α</sup>-aggregierte und Borda<sup>α</sup>-aggregierte rangbasierte Semantiken nicht mehrheitsübertragbar). Wir betrachten den Argumentationsgraphen  $F_{27} = (\{a, b, c, d, e, f, h, i, j\}, \{(b, a), (c, e), (d, f), (e, z), (f, z), (i, h), (j, h)\})$  aus Abbildung 27. Die Menge der rangbasierten Semantiken, die aggregiert werden soll, sei  $\Theta = \{\theta^{Syn}, \theta^{AvsFD_1^{*syn}}, \theta^{AvsFD_2^{*syn}}\}$ . Die Rangordnungen aus  $\Theta$  für  $F_{27}$  sind wie folgt:

$$\begin{aligned}
\theta^{Syn}(F_{27}) &: a \succ b \succ c \succ d \succ e \succ f \succ h \succ i \succ j \succ z, \\
\theta^{AvsFD_1^{*syn}}(F_{27}) &: b \succ c \succ d \succ i \succ j \succ h \succ z \succ a \succ e \succ f, \\
\theta^{AvsFD_2^{*syn}}(F_{27}) &: b \succ c \succ d \succ i \succ j \succ z \succ a \succ e \succ f \succ h.
\end{aligned}$$

Die beiden relevanten Copeland $^\alpha$ -Werte sind:  $C_{\Theta(F_{27})}^\alpha(a) = 3 = C_{\Theta(F_{27})}^\alpha(z)$ , da  $a$  im Majoritätsvergleich gegen die Argumente  $i, j$  und  $h$  gewinnt und  $z$  gegen  $i, j$  und  $a$  gewinnt und es keinen Gleichstand gibt. Es folgt  $a \simeq_{\Theta}^{\theta_{\Theta}^{C^\alpha}} z$ , obwohl Argument  $a$  genau einen unangegriffenen Angreifer hat und Argument  $z$  vollständig verteidigt wird. Die relevanten Borda $^\alpha$ -Werte sind  $B_{\Theta(F_{27})}^\alpha(a) = 14$  und  $B_{\Theta(F_{27})}^\alpha(z) = 7$ , weswegen sogar  $a \succ_{\Theta}^{\theta_{\Theta}^{C^\alpha}} z$  folgt. Damit erfüllen die Copeland $^\alpha$ -aggregierten und die Borda $^\alpha$ -aggregierten Semantiken im Allgemeinen nicht die Mehrheitsübertragbarkeit der Eigenschaft Angriff vs vollständige Verteidigung.

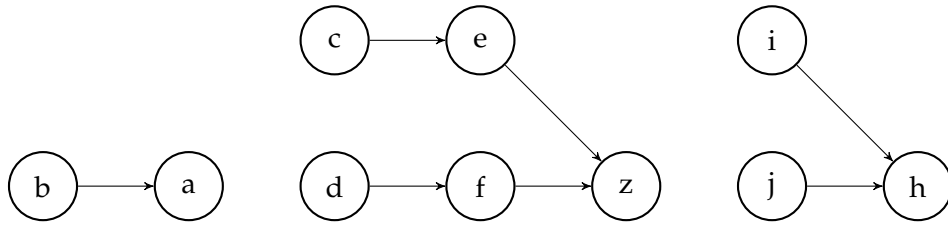


Abbildung 27: Der Argumentationsgraph  $F_{27}$ .

Auch die Äquivalenz der Unangegriffenen ist für keine der aggregierten rangbasierten Semantiken mehrheitsübertragbar.

**Beispiel 60** (Gegenbeispiel für die Mehrheitsübertragbarkeit der Äquivalenz der Unangegriffenen für  $\theta_{\Theta}^{pl}, \theta_{\Theta}^{C^\alpha}, \theta_{\Theta}^{B^\alpha}$ ). Sei  $F_{28} = (\{a, b\}, \{\})$  bestehend aus den beiden unangegriffenen Argumenten  $a$  und  $b$ . Für alle rangbasierten Semantiken  $\theta$ , welche die Eigenschaft der Äquivalenz der Unangegriffenen erfüllen, gilt  $a \simeq_{F_{28}}^{\theta} b$ . Für die Syntaxsemantik gilt allerdings  $a \succ_{F_{28}}^{\theta^{syn}} b$ . Sei  $\Theta := \{\theta^{syn}, \theta^{Cat}, \theta^{Dbs}, \theta^{Bbs}, \theta^{Strat}\}$  die zu aggregierende Menge rangbasierter Semantiken. Das Gleichgewicht in den Rangfolgen zwischen  $a$  und  $b$  wird in jeder unserer zu aggregierenden Semantiken alleine durch die Syntaxsemantik gestört und es ergibt sich jeweils  $a \succ_{F_{28}}^{\theta_{\Theta}} b$  für alle  $\theta_{\Theta} \in \{\theta_{\Theta}^{pl}, \theta_{\Theta}^{C^\alpha}, \theta_{\Theta}^{B^\alpha}\}$  und alle  $\alpha \in [0, 1]$ .

Die Gegenbeispiele für die Äquivalenz der Argumentation und für die Äquivalenz aus den Beispielen 38 und 39 aus Kapitel 3.4 zeigen bereits, dass die pluralitätsaggregierten, die Copeland $^\alpha$ -aggregierten und die Borda $^\alpha$ -aggregierten Semantiken im Allgemeinen nicht mehrheitsübertragbar sind.

**Bemerkung.** Es lässt sich zeigen, dass  $\simeq$ -erhaltende Eigenschaften nicht mehrheitsübertragbar sein können, da das Gleichgewicht durch nur eine rangsemantik Semantik, welche die Eigenschaft nicht erfüllt, gestört wird.

Abschließend werden die Ergebnisse dieses Kapitels über die Mehrheitsübertragbarkeit in Tabelle 13 zusammengefasst.

	Aggregierte rangbasierte Semantiken		
	Pluralität	Borda	Copeland
Syntaxunabhängigkeit	X	X	X
Komponentenunabhängigkeit	X	X	X
Kardinalitätsvorrang	X	X	✓
Gegentransitivität	X	X	X
starke Gegentransitivität	X	X	X
$\sigma$ -Kompatibilität	X*	X*	✓
Leerheitsvorrang	X	X	✓
Selbstwiderspruchsvermeidung	X	X	✓
Qualitätsvorrang	X	X	X
Angriff vs vollständige Verteidigung	X	X	X
Totalität	✓	✓	✓
Äquivalenz der Unangegriffenen	X	X	X
Äquivalenz der Argumentation	X	X	X
Äquivalenz	X	X	X

Tabelle 13: (Nicht)-Erfüllung der Mehrheitsübertragbarkeit von Eigenschaften der pluralitäts-aggregierten, der Borda <sup>$\alpha$</sup> -aggregierten und der Copeland <sup>$\alpha$</sup> -aggregierten Semantiken. \*  $\sigma$ -Kompatibilität für  $\sigma = \{\text{co, pr, gr, st}\}$

## 5. Diskussion

In dieser Arbeit wurden drei Familien aggregierter rangbasierter Semantiken angelehnt an unterschiedliche Wahlregeln aus der Sozialwahltheorie definiert und auf die Erfüllung einiger Eigenschaften hin untersucht. Es ist nichts Neues in der Argumentationstheorie Ideen zu einer Aggregation aus der Sozialwahltheorie zu nutzen. Sie werden beispielsweise bei der Aggregation von Argumentationsgraphen eingesetzt [30, 15, 20]. Bernreiter et al. nutzen Argumentationsgraphen und Wahltheorie um online Diskussionen zu analysieren [4]. Allerdings wurde noch nicht versucht, rangbasierte Semantiken zu aggregieren und mit Ideen aus der Wahltheorie Präordnungen zu bilden, die auch zulassen, dass zwei Argumente gleich geordnet werden oder sogar unvergleichbar bleiben. Dies wird erstmals in dieser Arbeit getan.

Zunächst wurde der Begriff der aggregierten rangbasierten Semantik bezüglich einer Menge an zu aggregierenden rangbasierten Semantiken allgemein definiert. Anschließend wurden Familien aggregierter rangbasierter Semantiken mit Hilfe der pluralitäts-Wahlregel, der Copeland Wahlregel und der Borda Wahlregel definiert. Dabei gab es Spielraum zur Interpretation und es wurden die verallgemeinerten Wahlregeln Copeland <sup>$\alpha$</sup>  und Borda <sup>$\alpha$</sup>  [24, 12] mit Parameter  $\alpha \in [0, 1]$  betrachtet um einen Gleichstand unterschiedlich bewerten zu können. An einem Beispiel wurden vier ausgewählte rangbasierte Semantiken zu jeweils einer aggregierten Semantik aggregiert und auf die Eigenschaften untersucht. Anschließend fand eine allgemei-

ne Untersuchung auf die Eigenschaften statt. Gegenbeispiele und Beweise für die Übertragbarkeiten und Mehrheitsübertragbarkeiten von Eigenschaften auf die aggregierte Semantik wurden aufgezeigt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 14 zusammengefasst.

Die Untersuchung der beispielhaften Aggregationen der vier rangbasierten Semantiken zeigte bereits, dass die Eigenschaften der rangbasierten Semantiken eine Rolle spielen. Wenn nur eine der rangbasierten Semantiken eine Eigenschaft nicht erfüllte, so führte dies bereits dazu, dass die Eigenschaft von der aggregierten Semantik nicht erfüllt werden konnte und ein Gegenbeispiel gefunden werden konnte. Nur für Eigenschaften, die von allen rangbasierten Semantiken erfüllt waren, konnten mit einer Ausnahme keine Gegenbeispiele gefunden werden. Diese Eigenschaften sind die Syntaxunabhängigkeit, der Leerheitsvorrang, die Totalität und die Äquivalenz der Unangegriffenen. Für die Komponentenunabhängigkeit wurde für alle drei aggregierte Semantiken ein Gegenbeispiel gefunden, obwohl sie von den vier rangbasierten Semantiken erfüllt ist.

Bei der allgemeinen Untersuchung auf Gegenbeispiele und Beweise der Übertragbarkeit fielen erstmals Unterschiede zwischen der Erfüllung und Nichterfüllung der Eigenschaften zwischen den unterschiedlichen Arten der Aggregationen auf. Für die pluralitäts-aggregierte Semantik konnten oft einfache Gegenbeispiele für die Übertragbarkeit gefunden werden und nur für vier der Eigenschaften konnte eine Übertragbarkeit bewiesen werden. Während die Suche nach Gegenbeispielen bei den Borda<sup>α</sup> und Copeland<sup>α</sup> oft schwieriger war und Spezialfälle erforderte und mehr Beweise für eine Erfüllung der Eigenschaften gefunden wurden. Die Betrachtung mit allgemeinen  $\alpha$ -Werten für die Copeland<sup>α</sup>-Werte und die Borda<sup>α</sup>-aggregierten Semantiken führte in einigen Beispielen dazu, dass sich die berechneten Rangordnungen für verschiedene Werte von  $\alpha$  unterscheiden und es mussten für verschiedene Werte von  $\alpha$  teils unterschiedliche Gegenbeispiele gesucht werden. Allerdings wurde keine Unterscheidung zur Erfüllung oder Nichterfüllung einer Eigenschaft im Allgemeinen festgestellt. Für jeweils die gleichen neun Eigenschaften konnte eine Übertragbarkeit von den rangbasierten Semantiken auf die Borda<sup>α</sup>- und Copeland<sup>α</sup>-aggregierten Semantiken gefunden werden. Bei der Untersuchung der Mehrheitsübertragbarkeit wurden die Unterschiede zwischen den aggregierten Semantiken Borda<sup>α</sup> und Copeland<sup>α</sup> deutlich. Während für Copeland<sup>α</sup> immerhin noch eine Mehrheitsübertragbarkeit von 5 Eigenschaften gezeigt werden konnte, erfüllen Borda<sup>α</sup>-aggregierte Semantiken nur für die Totalität eine Mehrheitsübertragbarkeit. Damit sind sowohl die Wahl der rangbasierten Semantiken und ihren intrinsischen Eigenschaften als auch die Wahlregel entscheidend für eine Erfüllung von gewissen Eigenschaften. Nur für die Eigenschaft der Totalität ist die Wahlregel nicht entscheidend, solange die aggregierten rangbasierten Semantiken als bewertete Semantiken definiert sind. Dies wurde durch die Anlehnung an die Sozialwahltheorie, in der Punktzahlen vergeben und verglichen werden, automatisch erfüllt.

	Aggregierte rangbasierte Semantiken					
	Pluralität		Borda		Copeland	
	Ü	MÜ	Ü	MÜ	Ü	MÜ
Syntaxunabhängigkeit	✓	✗	✓	✗	✓	✗
Komponentenunabhängigkeit	✗	✗	✗	✗	✗	✗
Kardinalitätsvorrang	✗	✗	✓	✗	✓	✓
Gegentransitivität	✗	✗	?	✗	?	✗
starke Gegentransitivität	✗	✗	✗	✗	✗	✗
$\sigma$ -Kompatibilität*	✗	✗	✓	✗	✓	✓
Leerheitsvorrang	✗	✗	✓	✗	✓	✓
Selbstwiderspruchsvermeidung	✗	✗	✓	✗	✓	✓
Qualitätsvorrang	✗	✗	✗	✗	✗	✗
Angriff vs vollständige Verteidigung	✗	✗	✓	✗	✓	✗
Totalität	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Äquivalenz der Unangegriffenen	✓	✗	✓	✗	✓	✗
Äquivalenz der Argumentation	✓	✗	✓	✗	✓	✗
Äquivalenz	✗	✗	?	✗	?	✗

Tabelle 14: (Nicht)-Erfüllung der Übertragbarkeiten (Ü) und Mehrheitsübertragbarkeiten (MÜ) von Eigenschaften der pluralitäts-aggregierten, der Borda<sup>α</sup>-aggregierten und der Copeland<sup>α</sup>-aggregierten Semantiken. \*  $\sigma$ -Kompatibilität für  $\sigma = \{\text{co, pr, gr, st}\}$

## 6. Fazit

In dieser Arbeit wurden drei Familien aggregierter rangbasierter Semantiken angelehnt an unterschiedliche Wahlregeln aus der Sozialwahltheorie definiert und auf die Erfüllung einiger Eigenschaften hin untersucht. Die Begriffe der Übertragbarkeit und der Erhaltung wurden eingeführt und ein Zusammenhang zwischen ihnen bewiesen. Die Übertragbarkeit einiger Eigenschaften folgen bereits aus der Erhaltung. Sie werden von den rangbasierten Semantiken, welche die Eigenschaft erfüllen, auf die aggregierte rangbasierte Semantik übertragen, falls die aggregierte rangbasierte Semantik eine gewisse Erhaltung der Präordnungen der rangbasierten Semantiken erfüllen. Dabei wurde festgestellt, dass sich nur gewisse Eigenschaften auf die aggregierten rangbasierten Semantiken übertragen lassen und dass die gewählte Wahlregel bei der Definition der aggregierten rangbasierten Semantik eine Rolle spielt. Während pluralitäts-aggregierte Semantiken fast keine der Eigenschaften übertragen, übertragen Borda und Copeland-aggregierte Semantiken viele Eigenschaften. Nur für Copeland-aggregierte Semantiken konnte eine Mehrheitsübertragbarkeit von einigen Eigenschaften gezeigt werden. Noch offen sind die Übertragbarkeiten von Copeland und Borda-aggregierten Semantiken von den Eigenschaften Gegentransitivität und Äquivalenz.

## A. Tabellen

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
Copeland <sup>1</sup> :	2	3	0	3	5	5							
							4	1	4	6	2	6	0
	5	7	1	8	12	12	8	2	8	12	3	12	0
Copeland <sup>1/2</sup> :	1.5	2	0	2.5	4.5	4.5							
							3.5	1	3.5	5.5	2	5.5	0
	4.5	5.5	1	6.5	10.5	10.5	7	2	6.5	10.5	3	10.5	0
Copeland <sup>0</sup> :	1	1	0	2	4	4							
							3	1	3	5	2	5	0
	4	4	1	5	9	9	6	2	5	9	3	9	0
Copeland <sup>α</sup> :	1 + α	1 + 2α	0	2 + α	4 + α	4 + α							
							3 + α	1	3 + α	5 + α	2	5 + α	0
	4 + α	4 + 3α	1	5 + 3α	9 + 3α	9 + 3α	6 + 2α	2	5 + 3α	9 + 3α	3	9 + 3α	0

Tabelle 15: Copeland<sup>α</sup>-Werte für die Argumentationsgraphen  $F_{10}$  und seine Zusammenhangskomponenten  $F'_{10}$  und  $F''_{10}$  aus Beispiel 27 für  $\alpha \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$  und allgemeine  $\alpha$ .



## Literatur

- [1] Leila Amgoud and Jonathan Ben-Naim. Ranking-based semantics for argumentation frameworks. In *International Conference on Scalable Uncertainty Management*, pages 134–147. Springer, 2013.
- [2] Leila Amgoud and Jonathan Ben-Naim. Axiomatic foundations of acceptability semantics. In *Fifteenth International Conference on the Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, 2016.
- [3] Leila Amgoud, Jonathan Ben-Naim, Dragan Doder, and Srdjan Vesic. Acceptability semantics for weighted argumentation frameworks. In *Proceedings of the Twenty-Sixth International Joint Conference on Artificial Intelligence, IJCAI-17*, pages 56–62, 2017.
- [4] Michael Bernreiter, Jan Maly, Oliviero Nardi, and Stefan Woltran. Combining voting and abstract argumentation to understand online discussions. 2 2024.
- [5] Philippe Besnard, Victor David, Sylvie Doutre, and Dominique Longin. Subsumption and incompatibility between principles in ranking-based argumentation. In *Proceedings - International Conference on Tools with Artificial Intelligence, ICTAI*, volume 2017-November, pages 853–859. IEEE Computer Society, 7 2017.
- [6] Philippe Besnard and Anthony Hunter. A logic-based theory of deductive arguments. *Artificial Intelligence*, 128:203–235, 2001.
- [7] Vivien Beuselinck, Jérôme Delobelle, and Srdjan Vesic. A principle-based account of self-attacking arguments in gradual semantics. *Journal of Logic and Computation*, 33:230–256, 3 2023.
- [8] Stefano Bistarelli, Paolo Giuliadori, Francesco Santini, and Carlo Taticchi. A Cooperative-game Approach to Share Acceptability and Rank Arguments. In *Proceedings of the 2nd Workshop on Advances in Argumentation in Artificial Intelligence, AI3@AI\*IA*, pages 86–90, 2018.
- [9] Lydia Blümel and Matthias Thimm. A ranking semantics for abstract argumentation based on serialisability. In *Frontiers in Artificial Intelligence and Applications*, volume 353, pages 104–115. IOS Press BV, 9 2022.
- [10] Elise Bonzon, Jérôme Delobelle, Sébastien Konieczny, and Nicolas Maudet. A Comparative Study of Ranking-based Semantics for Abstract Argumentation. In *Proceedings of the AAI Conference on Artificial Intelligence*, volume 30, 2016.
- [11] Elise Bonzon, Jérôme Delobelle, Sébastien Konieczny, and Nicolas Maudet. An empirical and axiomatic comparison of ranking-based semantics for abstract argumentation. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 33:328–386, 2023.

- [12] Felix Brandt, Vincent Conitzer, Ulle Endriss, Jérôme Lang, and Ariel D. Procaccia, editors. *Handbook of Computational Social Choice*. Cambridge University Press, 2016.
- [13] Claudette Cayrol and Marie-Christine Lagasquie-Schiex. Gradual acceptability in argumentation systems. In *International Workshop on Computational Models of Natural Argument (CMNA@IJCAI 2003)*, 2003.
- [14] Claudette Cayrol and Marie-Christine Lagasquie-Schiex. Graduality in argumentation. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 23:245–297, 2005.
- [15] Weiwei Chen and Ulle Endriss. Preservation of semantic properties in collective argumentation: The case of aggregating abstract argumentation frameworks. *Artificial Intelligence*, 269:27–48, 4 2019.
- [16] Jérôme Delobelle. *Ranking-based Semantics for Abstract Argumentation*. Theses, Université d’Artois, December 2017.
- [17] Phan Minh Dung. On the acceptability of arguments and its fundamental role in nonmonotonic reasoning, logic programming and n-person games. *Artificial Intelligence*, 77:321–357, 1995.
- [18] João Leite and João Martins. Social abstract argumentation. pages 2287–2292, 01 2011.
- [19] Paul-Amaury Matt and Francesca Toni. A game-theoretic measure of argument strength for abstract argumentation. In *Proceedings of the 11th European Conference on Logics in Artificial Intelligence, (JELIA’08)*, pages 285–297. Springer, 2008.
- [20] Michael A. Müller, Blaž Istenič Urh, Teodor Ștefan Zotescu, and Ulle Endriss. *Breaking the Cycle. Preference-Based Aggregation for Cyclic Argumentation Frameworks*. 8 2024.
- [21] Henry Prakken and Giovanni Sartor. Law and logic: A review from an argumentation perspective. *Artificial Intelligence*, 227:214–245, 2015.
- [22] Fuan Pu, Jian Luo, Yulai Zhang, and Guiming Luo. Argument ranking with categoriser function. In Robert Buchmann, Claudiu Vasile Kifor, and Jian Yu, editors, *Knowledge Science, Engineering and Management - 7th International Conference, KSEM 2014*, pages 290–301. Springer International Publishing, 2014.
- [23] Jordan Robinson, Katie Atkinson, Simon Maskell, and Chris Reed. On diagnostic arguments in abstract argumentation. In *CEUR Workshop Proceedings*, volume 3757, pages 27–40. CEUR-WS, 2024.
- [24] Jörg Rothe. *Economics and Computation, An Introduction to Algorithmic Game Theory, Computational Social Choice, and Fair Division*. Springer Berlin Heidelberg, 2016.

- [25] Bernd Schröder. *Ordered Sets*. Springer International Publishing, 2016.
- [26] Jordan Thieyre, Aurélie Beynier, Nicolas Maudet, and Srdjan Vesic. Reassessing the impact of reading behaviour in online debates under the lens of gradual semantics. In *Fifth International Workshop on Systems and Algorithms for Formal Argumentation (SAFA-24)*, volume 3757, pages 119–133, 2024.
- [27] Matthias Thimm. Tweety - A Comprehensive Collection of Java Libraries for Logical Aspects of Artificial Intelligence and Knowledge Representation. In *Proceedings of the 14th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'14)*, July 2014.
- [28] Matthias Thimm. The Tweety Library Collection for Logical Aspects of Artificial Intelligence and Knowledge Representation. *Künstliche Intelligenz*, 31(1):93–97, March 2017.
- [29] Matthias Thimm and Gabriele Kern-Isberner. On controversiality of arguments and stratified labelings. In *Proceedings of the Fifth International Conference on Computational Models of Argumentation (COMMA'14)*, September 2014.
- [30] Fernando A. Tohmé, Gustavo A. Bodanza, and Guillermo R. Simari. Aggregation of attack relations: A social-choice theoretical analysis of defeasibility criteria. In Sven Hartmann and Gabriele Kern-Isberner, editors, *Foundations of Information and Knowledge Systems*, pages 8–23, Berlin, Heidelberg, 2008. Springer Berlin Heidelberg.