Fernuniversität in Hagen

Fakultät für Mathematik und Informatik

Lehrgebiet Analysis

Aspekte zur Verteilung von Primzahlen

Bachelorarbeit

im Studiengang Mathematik

zur Erlangung des akademischen Grades Bachelor of Science (B.Sc.)

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10	**11**	12
13	14	15	16	**17**	18	**19**	20	21	22	**23**	24
25	26	27	28	**29**	30	**31**	32	33	34	35	36
37	38	39	40	**41**	42	**43**	44	45	46	**47**	48
49	50	51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70	**71**	72
73	74	75	76	77	78	**79**	80	81	82	**83**	84
85	86	87	88	**89**	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	**101**	102	**103**	104	105	106	**107**	108
109	110	111	112	**113**	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	**127**	128	129	130	**131**	132
133	134	135	136	**137**	138	**139**	140	141	142	143	144
145	146	147	148	**149**	150	**151**	152	153	154	155	156
157	158	159	160	161	162	**163**	164	165	166	**167**	168
169	170	171	172	**173**	174	175	176	177	178	**179**	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	**191**	192
193	194	195	196	**197**	198	**199**	200	201	202	203	204
205	206	207	208	209	210	**211**	212	213	214	215	216
217	218	219	220	221	222	**223**	224	225	226	**227**	228
229	230	231	232	**233**	234	235	236	237	238	**239**	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	**251**	252
253	254	255	256	**257**	258	259	260	261	262	**263**	264
265	266	267	268	**269**	270	**271**	272	273	274	275	276
277	278	279	280	**281**	282	**283**	284	285	286	287	288

vorgelegt von

Dan Blumenrath

19. Dezember 2025

Erstgutachter: PD Dr. habil. Joachim Kerner

Zweitgutachter: Dr. Silke Hartlieb

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Zielsetzung

In dieser Bachelorthesis wollen wir eine Ausflug in die Welt der Primzahlen nehmen und zeigen, dass die vermeintlich willkürliche Struktur der Primzahlen eben doch einem Muster folgt. Ziel der Bachelorthesis ist es, den *Satz von Dirichlet über Primzahlen in arithmetischen Progression* herzuleiten.

Satz 1.1 (**Satz von Dirichlet über Primzahlen in arithmetischen Progression**). *(vgl. S37 Gilbert 2018)*
Sei $a, m \in \mathbb{N}$ und sei a und m Teilerfremd zueinander. Dann gibt es auf der Menge $\{a, a+m, a+2m, a+3m, \dots\}$ unendlich viele Primzahlen.

Ein besondere Schwerpunkt soll sein, den Beweisvorgang möglichst einfach und kompakt darzustellen, sodass bereits grundlegende Kenntnisse in der Funktionentheorie, Zahlentheorie und Analysis ausreichend sind. Wir werden darüber hinaus den Satz von Dirichlet 1.1 in Zusammenhang mit dem allgemeinen Primzahlsatz 4.2 bringen. Der Primzahlsatz selbst ist eine Aussage über das Wachstum der Anzahl der Primzahlen auf $\mathbb{N}$. Das erlaubt uns eine Abschätzung zu der Anzahl der Primzahlen auf einer arithmetischen Progression. Die Genauigkeit der Abschätzung werden wir mit dem Satz von Siegel-Walfisz 4.10 diskutieren. Zum Schluss betrachten wir noch den Satz von Bombieri-Vinogradov 4.14 und seine Bedeutung zur Riemannschen Vermutung in Kapitel 4.1.

1.2 Motivation

Seit ihrer Entdeckung werden Primzahlen erforscht und Euklid gilt, mit seinen Beweisen über die Primzahlen, als Urvater der mathematischen Beweiskunst [siehe S. 51ff Sautoy 2004]. Seitdem sind sie ein zentrales Thema der mathematischen Forschung. Bevor man sich näher mit Primzahlen beschäftigt, ist es kaum vorstellbar, dass es in diesem Bereich noch offene Fragen gibt. Die ersten Resultate der Griechen sind schließlich allgemein bekannt.

Satz 1.2 (**Fundamentalsatz der Arithmetik**). *(Siehe S.1 Bürden 1995)*
Sei $p \in \mathbb{P} = \{p \in \mathbb{N} : p \text{ ist eine Primzahl}\}$. *Zu jedem* $n \in \mathbb{N}$ *existieren eindeutig bestimmte Zahlen* e *von* p *abhängig,* $e(p) \in \mathbb{N}_0$, *sodass gilt*

$$n = \prod_p p^{e(p)}$$

Insbesondere sind nur endlich viele $e(p)$ *von Null verschieden.*

Die Primzahlen sind die Bausteine aus denen alle Zahlen in $\mathbb{N}$ multiplikativ gebaut sind. Auf der suche nach allen Primzahlen stößt man unweigerlich auf die grundlegende Tatsache:

Satz 1.3. *(Siehe S.2 Bürden 1995)*
Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Primzahlen haben die Eigenschaft der Unteilbarkeit. Das macht es möglich Algorithmen zu entwickeln, Primzahlen systematisch zu finden. Das erste niedergeschriebene Verfahren ist das *Sieb von Eratosthenes* [vgl. S.35f Sautoy 2004]. Trägt man die Primzahlen jedoch in einer Tabelle auf, so kann es einem schwer fallen, ein Muster zu erkennen. Um dieser Antwort näher zu kommen, musste erst die Analytische Zahlentheorie entwickelt werden. Wegweisend war der Einsatz der Zetafunktion 1737 von Euler [Siehe S.2f Bürden 1995].

Definition 1.4. *(motiviert aus S.2 Bürden 1995)*

Die Funktion $\zeta : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *mit*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

nennen wir Zetafunktion.

Euler erkannte einen direkten Zusammenhang zwischen den Primzahlen und der Zetafunktion. Sei dazu $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen.

Satz 1.5. *(S.109 Werner 2009)*

Sei $s \in \mathbb{R}$ *und* $s > 1$*, so gilt für die Zetafunktion folgender Zusammenhang:*

$$\zeta(s) \cdot \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = 1$$

Das Produkt $\prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$ *nennen wir* ***Eulerprodukt****.*

Beweis. In der Bemerkung 3.3, werden wir zeigen, das die Zetafunktion für $s > 1$ konvergent ist. Daher gibt es zu einem $s > 1$ und $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < \epsilon$$

Nun ist

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

so dass

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \dots$$

$$\left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \dots$$

etc. [1] Man erkennt, dass in der Summe rechts immer weitere Terme fehlen, wir ordnen die Primzahlen ihrer Größe nach $p_1 < p_2 < ... < p_m < ...$ und betrachten den m-ten

[1] In dieser Teleskopsumme werden alle Terme deren Nenner durch 2 ,3 etc. teilbar sind, herausgestürzt.

Schritt. Die Summe sieht dann folgendermaßen aus

$$\left(1-\frac{1}{p_m^s}\right)\left(1-\frac{1}{p_{m-1}^s}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)=1+\frac{1}{p_{m+1}^s}+\cdots$$

Damit können wir folgende Abschätzung treffen

$$\left|\zeta(s)\cdot\prod_{j=1}^{m}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)-1\right|\leq\left|\frac{1}{p_{m+1}^s}\right|+\cdots\leq\sum_{n=p_{m+1}}^{\infty}\frac{1}{n^s}\leq\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^s}<\epsilon$$

falls $m\geq N$. Das war zu zeigen. □

Bemerkung 1.6. *Der Beweis von Satz 1.5 beruht wesentlich auf dem Fundamentalsatz 1.2. Da dieser Beweis umkehrbar ist, lässt sich aus Satz 1.5 der Fundamentalsatz wiederherstellen. Die in Satz 1.5 auftretende Identität kann daher als analytische Form des Fundamentalsatzes aufgefasst werden. Eine ausführlichere Darstellung findet sich in Bürden 1995, S. 2ff.*

Bemerkung 1.7. *(Vergleiche S.3f Schleicher 2012)*
Die Darstellung aus Satz 1.5 über das Eulerprodukt erlaubt uns Aussagen über Primzahlen zu beweisen. Aus $\lim_{s\to 1}\zeta(s)=\infty$ *folgt zwangsläufig* $\lim_{s\to 1}\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\infty$. *Das ist nur möglich wenn es unendlich viele Primzahlen gibt. Damit haben wir einen Beweis mit Techniken aus der Analysis für Satz 1.3 gefunden.*

Diese Identität der Bemerkung 1.6 gilt als Geburtsstunde der Analytische Zahlentheorie. Riemann erweiterte die Zetafunktion auf den komplexen Zahlenraum und verband schließlich die Analytische Zahlentheorie mit der Funktionentheorie. [vgl. S.105ff Sautoy 2004]

1.3 Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet

Wir folgen dem Inhalt aus Koch 1982.

Abbildung 1: Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet wurde am 1805 in Düren bei Aachen geboren. Er ging in Köln und Bonn aufs Gymnasium und studierte von Mai 1822 bis Herbst 1826 Mathematik in Paris. 1825 reichte Dirichlet seine erste mathematische Abhandlung *Sur l'impossibilité de quelques Équations indéterminées du cinquième degré* bei der französische Akademie ein. Der Titel kann übersetzt werden mit *Über die Unmöglichkeit einiger unbestimmter Gleichungen fünften Grades*. Legendre (1752-1833), einer der beiden Gutachter, konnte mit einer Ergänzung die Fermatsche Vermutung für den Exponenten 5 beweisen. Das bedeutet, dass die Gleichung $x^5 + y^5 = z^5$ keine Lösung von positiven ganzen Zahlen hat. Die Arbeit machte Dirichlet in wissenschaftlichen Kreisen von Paris sofort bekannt. 1827, auf Empfehlung von *A. von Humboldt*, tritt er in den preußischen Staatsdienst als Privatdozent in Breslau ein. Bereits 1828 ging dann Dirichlet an die Kriegsschule in Berlin und durfte dort an der Universität Vorlesungen halten. Am 5.5.1859 verstarb Dirichlet.

Die Bedeutung von Dirichlets Leben wird nicht nur über seine mathematischen Abhandlungen getragen, sondern auch über seine Lehrtätigkeit. Beginn des 19. Jahr-

hunderts war die Mathematik vorwiegend französisch. Er trugt einen wesentlich Teil zur Wende der Mathematik bei, die das Zentrum der Mathematik in das damalige Deutschland rückte. Unter seinen Schülern und Hörer waren u. a. Eisenstein (1823-1852), Kronecker (1823-1891), Riemann (1826-1866) und Dedekind (1831-1916).
Lengedre gab 1785 einen unvollständigen Beweis des Quadratischen Reziprozitätsgesetzes, wobei er eine unbewiesene Behauptung benutzte.
Zu zwei natürlichen Zahlen k und l, die keinen gemeinsamen Teiler haben, gibt es immer eine Zahl m, so dass $l + km$ eine Primzahl ist. Der Beweis dieser Aussage ist der Satz von Dirichlet über Primzahlen in arithmetischen Progressionen 1.1.

1.4 Vorausblick

Ohne auf die mathematischen Details einzugehen, soll hier skizziert werden, wie wir den Beweis von Satz 1.1 erbringen. Wir bezeichnen mit $p \equiv a(m)$ alle Primzahlen die den Rest a haben nach einer Teilung mit m. Die Zahlen a und m sollen Teilerfremd sein. Ziel ist es die Größenordnung von $\sum_{p \equiv a(m)} \frac{1}{p^s}$ für $s \searrow 1$ zu bestimmen. Dazu erarbeiten wir die L-Funktionen

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

für $s \in \mathbb{C}$ aus der Zetafunktion aus Definition 1.4. Die Funktion χ ist ein Homomorphismus $G_m = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$. Alle χ bilden zusammen eine multiplikative Gruppe $\hat{G}_m$, χ_0 ist hierbei das Einzelelement der Gruppe. Über die Verwandtschaft der L-Funktion mit der Zetafunktion zeigen wir, dass auch die L-Funktion eine Darstellung über das Eulerprodukt besitzt:

$$L(s, \chi) = \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \nmid m}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

Ein wichtiger Schritt wird es sein zu zeigen dass,

$$\ln\left(L(s,\chi)\right) = \ln\left(\prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\nmid m}}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}\right) = -\sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\nmid m}}\ln\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)$$

einen endlichen Grenzwert für $s \to 1$ hat. Damit können wir argumentieren, dass die Funktion $f_\chi(s) = \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\chi(p)}{p^s}$ auch für $s \to 1$ einen Grenzwert hat. Allerdings gilt das nicht für χ_0. Die Identität

$$\sum_{p\equiv a(m)} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{\varphi\left(m\right)}\left[f_{\chi_0}\left(s\right) + \sum_{\substack{\chi\in\hat{G}_m\\ \chi\neq\chi_0}} \chi\left(a^{-1}\right) f_\chi\left(s\right)\right]$$

gibt uns anschließend den Beweis. Die rechte Summe $\sum_{\chi\in\hat{G}_m,\chi\neq\chi_0} \chi\left(a^{-1}\right) f_\chi\left(s\right)$ konvergiert und $f_{\chi_0}(s)$ divergiert für $s \to 1$. $\varphi(m)$ ist hierbei die Eulerfunktion und konstant für ein festes $m \in \mathbb{N}$. Da die Summe $\sum_{p\equiv a(m)} \frac{1}{p}$ divergent und nicht endlich ist, muss es unendlich viele Primzahlen geben mit $p \equiv a(m)$. Damit ist er Beweis erbracht.

2 Grundlagen

Die arithmetischen Progressionen $a, a+m, a+2m, ...$ aus dem Satz von Dirichlet 1.1 haben eine starke Beziehung zu Kongruenzen und bilden **Restklassen**. Wir müssen uns daher einmal die Regeln der Kongruenzen und Restklassen in Kapitel 2.1 in Erinnerung rufen. Danach werden wir in Kapitel 2.2 Funktionen auf diese Restklassen, die sogenannten **Charaktere**, entwickeln und zeigen ihre wichtigsten Eigenschaften. Danach folgen noch weitere wichtige Definitionen und Sätze in Kapitel 2.3, die wir später brauchen werden. Wir verzichten hier auf Beweise.

2.1 Kongruenzen und Restklassen

Dieser Abschnitt orientiert sich an Kapitel 2 aus Chandrasekharan 1966.
Seien $a, b, m \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen mit (a, b) den größten gemeinsamen Teiler. Mit $m|a$ schreiben wir *"m teilt a"* und $a \bmod m$ gibt denn Rest von a beim Teilen mit m aus. Entsprechend ist $m \nmid a$, wenn m nicht a teilt. Gilt $a \bmod m = b \bmod m$, so sagen wir, a sei zu b kongruent modulo m und schreiben $a \equiv b \bmod m$. Andernfalls sagen wir a sei zu b inkongruent modulo m, und schreiben $a \not\equiv b \bmod m$.

Sei $a \bmod m = r$ mit $r \in \mathbb{N}$. Dann existieren unendlich viele Zahlen, die zu a modulo m kongruent sind. Die Zahlen $a + km$ mit $k \in \mathbb{Z}$ sind alle zueinander kongruent modulo m. Die Kongruenzen modulo m definiert eine Äquivalenzrelation.

1. reflexiv: $a \equiv a \bmod m$
2. symmetrisch: aus $a \equiv b \bmod m$ folgt $b \equiv a \bmod m$
3. transitiv: aus $a \equiv b \bmod m$ und $b \equiv c \bmod m$ folgt $a \equiv c \bmod m$

Diese Relationen, Kongruenzrelationen, teilen die ganzen Zahlen in disjunkte Äquivalenzklassen ein. Diese Klassen nennen wir Restklassen modulo m Sei $0, 1, ..., m-1$ fest, dann lässt sich jede ganze Zahl n in der Form $n = qm + r$ mit $q \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq r \leq m-1$ darstellen. Entsprechend gibt es genau m Restklassen modulo m. Diese Restklassen sind die Elemente der Menge, $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$. Das führt uns zu der Definition.

Definition 2.1. *Sei* $[r] = \{a \equiv r \bmod m : a \in \mathbb{Z}\}$*, mit* $0 \leq r < m$*. Die Elemente* $[r]$ *bilden die Menge* $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$*. Es ist* $\{[0], [1], ..., [m-1]\} = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$*. Die einzelnen Elemente* $[0], [1], ..., [m-1]$ *bezeichnen wir als Restklasse modulo* m *und sind auch selbst Mengen aus Zahlen.*

Beispiel 2.2. *Sei* $m = 12$*, dann sind die Restklassen modulo* m *die Mengen:*

$$[0] = \{\dots 0, 12, 24, \dots\}$$
$$[1] = \{\dots 1, 13, 25, \dots\}$$
$$\dots$$
$$[m-1] = \{\dots 11, 23, 35, \dots\}$$

Sei $0 \leq r \leq m-1$ fest, es gilt $[r] = \{a \equiv r \bmod m : a \in \mathbb{Z}\} = [r+bm]$ mit $b \in \mathbb{Z}$. Die Zahlen $r + bm$ bezeichnen wir als **Repräsentanten**. Zwei Repräsentanten beschreiben die gleiche Menge, wenn natürlich gilt $[r] = [r + bm]$.
Rechnen wir mit Zahlen, die in Restklassen modulo m unterteilt sind, wird einem die Bedeutung der Repräsentanten deutlich. Bei Addition, Subtraktion und Multiplikation zweier Repräsentanten, ist die Wahl der Repräsentanten nicht entscheidend. Das Ergebnis landet immer in der gleichen Restklasse modulo m. Das heißt, solange sich die Restklassen der Repräsentanten nicht ändern, bleibt auch die Restklasse modulo m des Ergebnis unverändert. Daher genügt es, mit einem Repräsentanten einer Restklasse zu rechnen.

Sei $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Aus $a \equiv b \bmod m$ und $c \equiv d \bmod m$ folgt

$$a + c \equiv b + d \bmod m$$
$$a - c \equiv b - d \bmod m$$
$$ac \equiv bd \bmod m$$

Aus $m|(a-b)$ und $m|(c-d)$ folgt $m|\,(a-b) \pm (c-d)$. Ferner gilt $m|\,(a-b)\,c$, also $ac \equiv bc \bmod m$ und $m|\,(c-d)\,b$, das heißt $bc \equiv bd \bmod m$, und da die Kongruenzrelation transitiv ist folgt aus diesen beiden Kongruenzen, dass $ac \equiv bd \bmod m$.

Beispiel 2.3. *Sei wieder* $m = 12$ *wie in Beispiel 2.2. Wir nehmen 1 und 11 als Repräsentant aus den entsprechenden Restklassen. Offensichtlich ist* $11 - 1 \equiv 10 \bmod 12$. *Also das Ergebnis ist in der Restklasse* $\{\cdots -2, 10, 22, 34 \dots\}$. *Das gleiche gilt auch beispielsweise für* $35 - 1$. *Es ist* $34 \bmod 12 = 10 \bmod 12$.

Die Restklassen modulo m bilden eine additive abelsche Gruppe. Das Nullelement dieser Gruppe ist diejenige Klasse, welche die Vielfachen von m enthält, während das Inverse der Klasse $[r]$ diejenige Klasse $[r]$' ist, welche die Negativen der Elemente von $[r]$ enthält.

Nehmen wir nur die Einträge der Restklassen modulo m ab einen Startwert, bilden diese bereits arithmetische Progressionen.

Definition 2.4. *(vgl. S.173 Arens u. a. 2015)*
Eine arithmetische Progression ist eine Folge von Zahlen $(a_n) \in \mathbb{R}$ *mit*

$$a_n = a_0 + nd \quad \textit{mit } n \in \mathbb{N}_0 \textit{ und } d \in \mathbb{R}$$

Wenn man die Abbildung 2 weiter unten betrachtet, bilden die Spalten eine arithmetische Progressionen. Die Anzahl der Spalten ist 12, daher können wir auch in Restklassen modulo 12 denken. Es ist auffällig, dass die Spalten in denen sich die Primzahlen häufen (grün markiert), alle Einträge teilerfremd zu 12 sind. Dieser Zusammenhang wird mit dem Satz von Dirichlet 1.1 erklärt und diese Restklassen modulo m, die Teilerfremd zu m sind, haben eine besondere Bedeutung.

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10	**11**	12
13	14	15	16	**17**	18	**19**	20	21	22	**23**	24
25	26	27	28	**29**	30	**31**	32	33	34	35	36
37	38	39	40	**41**	42	**43**	44	45	46	**47**	48
49	50	51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70	**71**	72
73	74	75	76	77	78	**79**	80	81	82	**83**	84
85	86	87	88	**89**	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	**101**	102	**103**	104	105	106	**107**	108
109	110	111	112	**113**	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	**127**	128	129	130	**131**	132
133	134	135	136	**137**	138	**139**	140	141	142	143	144
145	146	147	148	**149**	150	**151**	152	153	154	155	156
157	158	159	160	161	162	**163**	164	165	166	**167**	168
169	170	171	172	**173**	174	175	176	177	178	**179**	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	**191**	192
193	194	195	196	**197**	198	**199**	200	201	202	203	204
205	206	207	208	209	210	**211**	212	213	214	215	216
217	218	219	220	221	222	**223**	224	225	226	**227**	228
229	230	231	232	**233**	234	235	236	237	238	**239**	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	**251**	252
253	254	255	256	**257**	258	259	260	261	262	**263**	264
265	266	267	268	**269**	270	**271**	272	273	274	275	276
277	278	279	280	**281**	282	**283**	284	285	286	287	288

Abbildung 2: Primzahltabelle mit 12 Spalten. (Eigene Darstellung)

Definition 2.5. *Diejenigen Restklassen modulo m, deren Elemente zu m teilerfremd sind, heißen* ***prime Restklassen*** *modulo m.*

Wir betrachten die additive abelsche Gruppe aller Restklassen modulo einer Primzahl p. Die Restklasse $[0]$ nennen wir **Nullklasse**, alle anderen Klassen sind *prime Restklassen*, und bilden somit auch eine multiplikative abelsche Gruppe. Jede prime Restklasse besitzt ein Inverses, denn aus $(a, m) = 1$ folgt, die Existenz einer ganzen Zahl a' derart, dass

$$aa' \equiv 1 \,(\mathrm{mod} m)\,.$$

Für $[a], [b], [c], [d] \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ ist das Distributivgesetz $[a]\,([b] + [c]) = [a][b] + [a][c]$ ist eine unmittelbare Folgerung des Distributivgesetzes für die ganzen Zahlen. Damit haben wir alle Voraussetzungen für einen Körper erfüllt.

Satz 2.6. *Die Restklassen der ganzen Zahlen modulo einer Primzahl p bilden einen Körper der Ordnung p.*

Ein vollständiges Restsystem modulo m besteht aus einem Repräsentant jeder Restklasse, also bilden m ganze Zahlen genau dann ein vollständiges Restsystem modulo m, wenn sie paarweise inkongruent modulo m sind. Hingegen besteht ein primes Restsystem modulo m aus einem Repräsentant jeder primen Restklasse modulo m. In diesem Zusammenhang ist die Eulersche Funktion φ von Bedeutung.

Definition 2.7. *Die Eulersche Funktion $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ ist für eine ganze Zahl m gleich der Anzahl der zu m teilerfremden Zahlen der Folge $1, 2, ..., m$.*

Aus dieser Definition folgt, das $\varphi(m)$ auch gleich der Anzahl der primen Restklassen modulo m ist. Die Funktion φ hat jetzt noch keine Rechenvorschrift, sondern wurde rein über das Ziel definiert.

2.2 Charaktere

Wir folgen der Struktur aus Gilbert 2018 Anhang Kapitel C.
Es werden jetzt Funktionen auf die Restklassen in $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ definiert, dabei beschränken wir uns auf die primen Restklassen von $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$. Zur Abgrenzung benutzen wir einen Stern *. Wir bezeichnen mit $G_m = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ die multiplikative Gruppe der primen Restklassen modulo m.

Ihre Ordnung ist $n_G = \varphi(m)$ und wird über die Eulersche φ-Funktion aus 2.7 bestimmt. e sei das Einzelelement von G_m, die Nullklasse aus $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$. Es ist $x^{n_G} = e$ für alle $x \in G_m$. Die Ordnung des Elementes x bezeichnen wir mit n_x und ist die kleinste Zahl auf $\mathbb{N}$ mit $x^{n_x} = 1$. Es sein noch angemerkt das $n_x | n_G$ für alle $x \in G_m$ gilt.

Bemerkung 2.8. *Das Einzelelement ist natürlich jeder Repräsentant aus der Restklasse modulo m, welches die 1 enthält. Es ist $a \cdot b \equiv a \mod m$ wenn $b \equiv 1 \mod m$ ist.*

Definition 2.9. *Ein **Charakter** χ von G_m ist ein Homomorphismus von G_m in die multiplikative Gruppe $\mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$ mit $\chi(x \cdot y) = \chi(x) \cdot \chi(y)$. χ nennen wir auch **Dirichlet-Charakter**.*

Definition 2.10. *Das Produkt zweier Charaktere χ_1 und χ_2, definiert durch $(\chi_1 \cdot \chi_2)(x) = \chi_1(x) \cdot \chi_2(x)$, ist wieder ein Charakter von G_m. Die Charaktere von G_m bilden also erneut eine multiplikative Gruppe, die wir mit $\hat{G}_m$ bezeichnen. Das Eins-Element dieser Gruppe $\hat{G}_m$ ist der* ***triviale Charakter*** *χ_0, der durch $\chi_0(x) = 1 \, \forall x \in G_m$ definiert ist.*

Bemerkung 2.11. *Aus der Definition eines Charakters erhalten wir folgende Resultate.*

1. *Sei $e \in G_m$ das Einzelelement von G_m, es gilt $\chi(e) = 1$*
2. *Aus $[\chi(x)]^{n_x} = 1$ folgt $\chi(x) = e^{2\pi \mathrm{i} k/n_x}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Der Charakter χ ordnet also jedem Element der Gruppe eine n_G-te Einheitswurzel zu.*
3. *Durch $\bar{\chi}(x) = \frac{1}{\chi(x)} = \chi(x^{-1}) = \chi^{-1}(x)$ ist der zu χ inverse Charakter χ^{-1} definiert.*

Wir brauchen noch folgenden Satz für später.

Satz 2.12. *Sei $\chi \in \hat{G}_m$ (siehe Definition 2.10), dann gilt:*

1. $\sum_{x \in G_m} \chi(x) = \begin{cases} n_G & \text{falls } \chi = \chi_0 \\ 0 & \text{falls } \chi \neq \chi_0 \end{cases}$
2. $\sum_{\chi \in \hat{G}_m} \chi(x) = \begin{cases} n_G & \text{falls } x = e \\ 0 & \text{falls } x \neq e \end{cases}$

Wir erweitern für $G_m = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ die Definition des Charakters χ, der zunächst nur auf den zu m teilerfremden Restklassen definiert ist, zu einer Funktion auf $\mathbb{Z}$.

Definition 2.13. *Für $n \in \mathbb{Z}$ ist* $\chi(n) = \begin{cases} \chi(x) & \text{falls } n \equiv x \in G_m \\ 0 & \text{falls } (n, m) > 1 \end{cases}$

Satz 2.14. *Die auf $\mathbb{Z}$ definierte Funktion χ ist stark multiplikativ und erfüllt für $\chi \neq \chi_0$ die Ungleichung $|\sum_{n=m}^{k} \chi(n)| \leq n_G$ für alle ganzen Zahlen $k \geq m$.*

2.3 Wichtige Sätze und Definitionen

Wir werden oft das Wachstum von Funktionen abschätzen müssen. Hier sind die Landausysmbole von unschätzbarem Wert. Im Folgenden beschränken wir uns auf die Symbole O und o.

Definition 2.15. *(vgl. Vorbemerkung zur Terminologie Gilbert 2018)*
Seien f und g Funktionen auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, für das x_0 ein Häufungspunkt ist. Sei $|f| \leq C \cdot |g|$ für $x \to x_0$, mit einer geeigneten Konstante $C \in \mathbb{R}^+$. So schreiben wir abkürzend $f = O(g)$. Die Aussage $f = o\,(g)$ für $x \to x_0$ bedeutet $\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$, was $f = O(g)$ für $x \to x_0$ impliziert.

In der Analytischen Zahlentheorie werden oft unendliche Reihen von Funktionen betrachtet. Auch wenn die Summe zweier analytische Funktion wieder analytisch ist, ist die Vererbung im Unendlichen nicht allgemein gültig. Unter bestimmten Voraussetzungen können wir das aber garantieren.

Satz 2.16. *(S. 85 Werner 2009)*
Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, und die analytischen Funktionen $f_n : G \to \mathbb{C}$ mögen auf allen Kompakta $K \subset G$ gleichmäßig gegen $f : G \to \mathbb{C}$ konvergieren, dann ist auch f analytisch. Ferner konvergieren alle Ableitungen $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von G.

Ähnlich zu einer unendlichen Reihe von analytischen Funktionen, müssen wir beim Umordnen einer Reihe im Unendlichen aufpassen. Obwohl der komplexe Zahlenraum **kommutativ** ist und damit die Summanden einer endlichen Summe beliebig umgeordnet werden kann. Muss bei einer konvergenten Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_n = c$ aufgepasst werden.

Satz 2.17. *(S.82 Gilbert 2018)*
*Umordnung der Glieder einer **absolut konvergenten** Reihe ändert ihre Summe nicht.*

Eine ähnliche Aussage erhält man auch für eine unendliche Reihe von holomorphen Funktionen.

Satz 2.18 (S. 101 Freitag und Busam 2000)**.** *Eine in einem Gebiet normal konvergente Reihe von holomorphen Funktionen konvergiert dort absolut und lokal gleichmäßig zu einer holomorphen Funktion und kann beliebig umgeordnet werden*

Ein unendliches Produkte der Form $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ mit Faktoren $a_n \in \mathbb{C}$ kann nur dann konvergieren, wenn mindestens $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ gilt. Wir setzen auch voraus, dass $a_n \neq -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Sonst folgt natürlich $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = 0$.

Satz 2.19. *(vgl. S.85 Gilbert 2018)*
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $a_n \in \mathbb{C}$ *und* $a_n \neq -1$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*. Dann existiert der von 0 verschiedene Grenzwert*

$$Q = \lim_{N\to\infty} Q_N = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N}(1+a_n) \neq 0$$

genau dann, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ *ein* $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ *gibt, mit der Eigenschaft, dass* $n \geq m \geq N_\epsilon$ *impliziert* $\left|\frac{Q_n}{Q_m} - 1\right| < \epsilon$*.*

In diesem Zusammenhang wir noch wichtig sein:

Satz 2.20. *(vgl. S.86 Gilbert 2018)*
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $a_n \in \mathbb{C}$*. Wenn gilt* $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < \infty$ *und* $a_n \neq -1$*, dann existiert das von 0 verschiedene unendliche Produkt* $Q = \prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$

Die Abel-Summation ist in der analytischen Zahlentheorie ein Standardwerkzeug. Im Allgemeinen kann man sie als das diskrete Gegenstück zur partiellen Integration ansehen.

Satz 2.21. *(S. 82 Gilbert 2018)*

Sei $\{\lambda_n \in \mathbb{R}^+\}_{n=1}^N$ *mit* $N \leq \infty$ *und* $\lambda_0 = 0$ *eine monoton wachsende Index-Folge.* $\{a_n\}_{n=1}^N$ *ist eine Folge komplexer Zahlen, für die* $A(x) = \sum_{\lambda_k \leq x} a_k$ *gesetzt wird, sodass* $A(\lambda_n) = \sum_{k=1}^n a_k$ *und* $a_n = A(\lambda_n) - A(\lambda_{n-1})$ *gilt. Auch hier wird* $a_0 = 0$ *und* $A(\lambda_0) = 0$ *gesetzt. Gegeben ist* ν *eine komplexwertige Funktion auf* $\mathbb{R}$*, dann gilt für alle* $N < \infty$*:*

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \nu(\lambda_n) = A(\lambda_N)\,\nu(\lambda_N) - \sum_{n=1}^{N-1} A(\lambda_n)\,[\nu(\lambda_{n+1}) - \nu(\lambda_n)]$$

Wir werden noch brauchen:

Satz 2.22. *(S. 93 Gilbert 2018)*

D sei ein Gebiet in $\mathbb{C}$ *und* $\infty \leq a < b \leq \infty$*. Die Funktion* $f(t,z)$ *und ihre partielle Ableitung* $\frac{\partial f}{\partial z}$ *seien in* $]a,b[\times D$ *stetig in* (t,z) *und das Integral* $\int_a^b f(t,z)\,dt$ *konvergiere gleichmäßig auf jeder abgeschlossenen Untermenge von D. Dann ist die Funktion* $w(z)$ *in D holomorph mit:*

$$w(z) = \int_a^b f(t,z)\,dt$$

3 Der Satz von Dirichlet über Primzahlen in arithmetische Progression

Im Folgenden sei p stets eine Primzahl, $p \in \mathbb{P}$. Ziel ist es, den Satz von Dirichlet über Primzahlen in arithmetische Progression 1.1 zu zeigen. Im Beweis von Satz 1.1 wird gezeigt, dass die Reihe $\sum_{p \equiv a \bmod m} \frac{1}{p}$, mit $(a, m) = 1$ und $a \in \mathbb{N}$, divergent ist. Woraus dann unweigerlich folgt, dass es unendlich viele Primzahlen mit $p \equiv a \bmod m$ geben muss. Entscheidend hierbei ist, das Wachstum von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ und $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$ zu kennen.

3.1 Divergenzen

Das die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent ist, ist ein bekanntes Resultat aus der Analysis. Überraschenderweise ist auch die Reihe $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$ divergent. Man könnte doch meinen, wenn man genügende Terme aus $\sum \frac{1}{n}$ weglässt, dass die Reihe konvergieren muss. Die Primzahlen müssen in einem gewissen Sinne dicht genug in $\mathbb{N}$ sein, sodass $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$ nicht konvergiert.

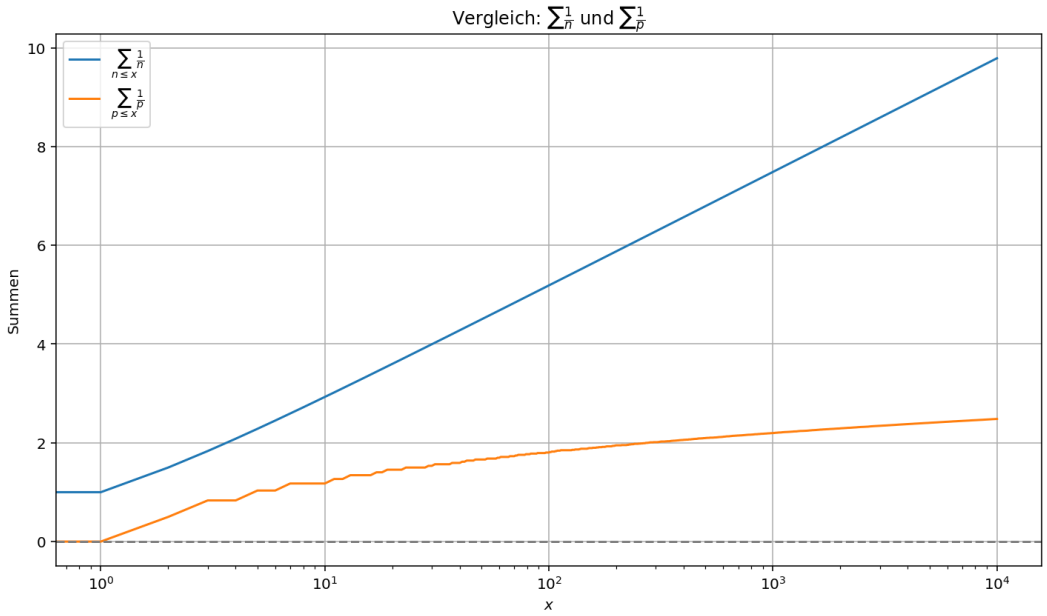

Abbildung 3: Wachstum von $\sum_{n \le x} \frac{1}{n}$ und $\sum_{p \le x} \frac{1}{p}$ auf einer logarithmischen x-Achse. (Eigene Darstellung)

Trägt man die Reihe $\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}$ auf einer logarithmischen x-Achse auf, verhält sich das Wachstum sehr nah zu der Funktion $a\ln(x)+c$ mit $a,c\in\mathbb{R}$ (zumindest für den dargestellten Bereich). Das erkennen wir daran, dass die blaue Kurve eine gerade Linie auf der Abbildung ist. Das Wachstum von $\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}$ und $a\ln x$ müssen recht ähnlich sein. Der nächste Satz bestätigt das.

Satz 3.1. *(S.1 Gilbert 2018)*
Es ist $\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}\sim\ln x$ *für* $x\to\infty$.

Beweis. Wir setzen $n,t\in\mathbb{N}$, so dass die Ungleichung $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{t}\leq\frac{1}{n}$ gilt. Integrieren wir $\frac{1}{t}$ von n nach $n+1$ erhalten wir die Abschätzung:

$$\frac{1}{n+1}<\int_n^{n+1}\frac{1}{t}dt<\frac{1}{n}$$

Diese Abschätzung kann man sich als eine Ober und Untersumme eines Riemannintegrals vorstellen. Wir benutzen das Integral von 1 bis $N+1$ und die Abschätzung von oben und erhalten folgenden Zusammenhang zum Logarithmus.

$$\int_1^{N+1}\frac{1}{t}dt=\ln(N+1)<\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}<1+\int_1^N\frac{1}{t}dt=1+\ln(N)$$

Die Summe $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$ ist vom Logarithmus bereits eingeschlossen. Wir verschärfen die Schranke jetzt noch und ersetzen formal N durch x.

$$\begin{aligned}\ln x<\ln(\lfloor x\rfloor+1)=\int_1^{\lfloor x\rfloor+1}\frac{1}{t}dt<\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\lfloor x\rfloor}\frac{1}{n}<1+\int_1^{\lfloor x\rfloor}\frac{1}{t}dt=1+\ln\lfloor x\rfloor\\ \leq 1+\ln(x)\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt:

$$\ln(x)<\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}<\ln(x)+1$$

Teilt man die Ungleichungskette schließlich durch $\ln(x)$, erhalten wir die ursprüngliche Aussage.

$$1 < \frac{\sum_{n\leq x} \frac{1}{n}}{\ln(x)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(x)} \to 1 \quad \text{für } x \to \infty$$

□

Im Beweis von Satz 3.1 zeigt sich auch, warum wir nicht $\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} = \ln x$ schreiben dürfen. Es ist stets $\ln x < \sum_{n\leq x} \frac{1}{n}$. Der Unterschied ist durch $\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} - \ln(x+1)$ beschränkt.

Bemerkung 3.2. *Die Zahl* $\gamma = \lim_{x\to\infty} \left(\sum_{n\leq x} - \ln(x+1)\right) \approx 0,57721$ *nennt man* ***Euler-Mascheroni-Konstante****.*

Bemerkung 3.3. *Man erkennt an Satz 3.1, dass die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *eher langsam divergiert. Eine Potenzierung der Reihenglieder mit jedem noch so kleinen Exponenten* $s > 1$ *bewirkt bereits eine Konvergenz der Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$*:*

$$\sum_{n\leq x} \frac{1}{n^s} < 1 + \int_1^x \frac{1}{t^s} dt = 1 + \frac{1}{s-1}\left(1 - x^{1-s}\right) \to \frac{1}{s-1} \quad \textit{für } x \to \infty$$

Wir wenden uns jetzt $\sum_{p\leq x} \frac{1}{p}$ zu und betrachten die Summe gegen die doppelte logarithmische x-Achse.

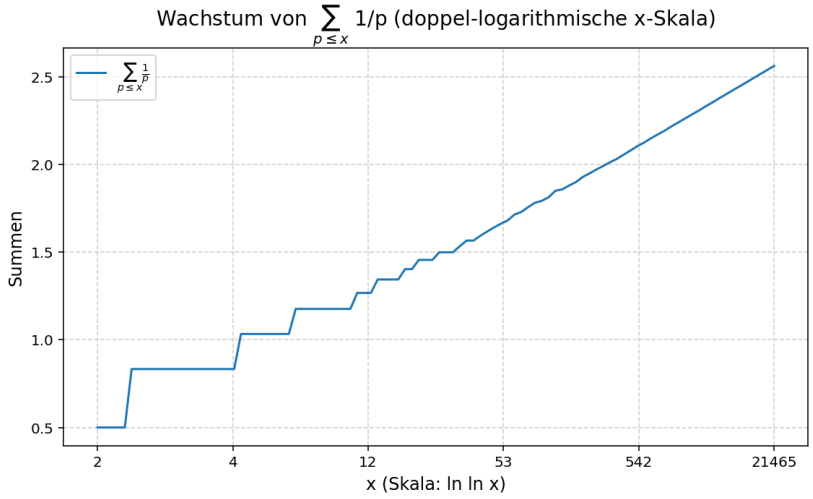

Abbildung 4: Wachstum von $\sum_{p\leq x} \frac{1}{p}$ auf einer doppelten logarithmischen x-Achse. (Eigene Darstellung)

Die blaue Kurve von $\sum_{p\leq x}\frac{1}{p}$ steigt im gezeigten Bereich nahezu linear. Das deutet darauf hin, wir haben eine Ähnlichkeit zu der Funktion $f(x) = a\ln\ln(x) + c$, mit $a, c \in \mathbb{R}$. Der nächste Satz macht das deutlich.

Satz 3.4. *(S.3 Gilbert 2018)*
Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 1$ gilt die Abschätzung $\sum_{p\leq x}\frac{1}{p} > \ln\ln x - \frac{1}{2}$.

Beweis. Wir setzen $S(x) := \sum_{p\leq x}\frac{1}{p}$ und $P(x) := \prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}$. Mit Hilfe der geometrischen Reihe erhalten wir die Umformung:

$$P(x) = \prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} = \prod_{p\leq x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p^k}$$

Jetzt schreiben wir die Umformung aus:

$$\begin{aligned}\prod_{p\leq x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p^k} &= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)\cdots \\ &= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)\end{aligned}$$

Ausmultiplizieren gibt uns die Summe $\sum_{n\leq x}\frac{1}{n} + R$ mit einem Rest R. Es folgt:

$$\prod_{p\leq x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p^k} = \sum_{n\leq x}\frac{1}{n} + R \geq \sum_{n\leq x}\frac{1}{n} > \ln x \quad \text{siehe Beweis im Satz 3.1}$$

Weiterhin erhalten wir über die logarithmische Betrachtung von $P(x)$ und der Taylorentwicklung von $\ln(1-y) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{y^k}{k}$ für $|y| < 1$ und $y = \frac{1}{p}$

$$\begin{aligned}\ln P(x) &= \sum_{p\leq x}\left(-\ln\left[1-\frac{1}{p}\right]\right) \\ &= \sum_{p\leq x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{kp^k} > \sum_{p\leq x}\frac{1}{p} = S(x)\end{aligned}$$

Wir erhalten die Aussage

$$\ln P(x) > S(x) \tag{1}$$

Wir betrachten jetzt die Differenz von $\ln P(x) - S(x)$ und schätzen den Rest weiter ab.

$$\begin{aligned} 0 < \ln P(x) - S(x) &= \sum_{p \le x} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{kp^k} = \sum_{p \le x} \frac{1}{p^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{kp^{k-2}} = \sum_{p \le x} \frac{1}{p^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)\,p^k} \\ &< \frac{1}{2} \sum_{p \le x} \frac{1}{p^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k} = \frac{1}{2} \sum_{p \le x} \frac{1}{p^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{1}{2} \sum_{p \le x} \frac{1}{p\,(p-1)} \\ &< \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Aus der Abschätzung und der Ungleichung (1) erhalten wir nach der Umstellung die gewünschte Aussage:

$$S(x) > \ln P(x) - \frac{1}{2} \ge \ln \ln x - \frac{1}{2} \tag{2}$$

□

Aus dem Satz folgt auch die Aussage aus der Einleitung des Kapitels.

Korollar 3.5. *Es gilt* $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} = \infty$

Beweis. Aus Gleichung (2) erhalten wir mit $x \to \infty$ die Aussage $S(x) = \sum_{p \le x} \frac{1}{p} > \ln \ln x - \frac{1}{2} \to \infty$. □

3.2 Zetafunktion

Wir orientieren uns in diesem Abschnitt an die Kapitel §5 und §8 aus Gilbert 2018
Die Zetafunktion hat eine bemerkenswerte und unerwartete Verwandtschaft zu den Primzahlen, wie wir es in Satz 1.5 gesehen haben. Dirichlet verallgemeinert die Zetafunktion zu den **Dirichlet-Reihen** und erweitert diese anschließend mit den Charakteren aus Definition 2.9 zu den **L-Funktionen**. Mit den L-Funktionen können wir schließlich den Satz von Dirichlet 1.1 beweisen. Viele der Eigenschaften der Zeta-Funktion lassen sich bis zu den L-Funktionen vererben.
In diesem Kapitel und darüber hinaus werden wir oft Halbebenen in $\mathbb{C}$ betrachten und führen hier eine kurze Notation zur Hilfe ein. Wir setzten für ein $\eta \in \mathbb{R}$ die Terminologie $\mathbb{C}_\eta = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > \eta\}$.

Die Zetafunktion aus Definition 1.4 wird jetzt auf den komplexen Zahlenraum erweitert. Hierbei müssen wir wegen der Divergenzen in der Nähe von $s = 1$ aufpassen.

Definition 3.6. *Für $\zeta : \mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}$ ist $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-s \ln n}$ die Riemannsche Zetafunktion.*

Bemerkung 3.7. *(vgl. S.108 Werner 2009)*
Für jedes $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 1\}$ ist die Reihe der Zetafunktion konvergent, und zwar gleichmäßig auf der abgeschlossenen Halbebene $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) \geq \sigma > 1\}$, denn mit Bemerkung 3.3 erhalten wir eine Majorante:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} < \infty$$

Daher ist ζ nach Satz 2.16 auf $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 1\}$ analytisch.

Die Zetafunktion besitzt auch eine Darstellung als Eulerprodukt für die Erweiterung in $\mathbb{C}_1$. Im Beweis von Satz 1.5 müsste nur das $z > 1$ durch $\mathrm{Re}(s) > 1$ ersetzt werden mit $s \in \mathbb{C}_1$. Der Beweis von Satz 1.5 lässt sich verallgemeinern auf Reihen stark multiplikativen Funktion. Damit können wir dann später zeigen, dass auch L-Funktionen eine Darstellung als Eulerprodukt haben.

Definition 3.8 (vgl. S.86 Gilbert 2018)**.** *Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ heißt multiplikativ, wenn*

$$(m, n) = 1 \longrightarrow f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$$

Wir bezeichnen eine Funktion als stark multiplikativ, wenn für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$$

Beispiel 3.9. *Sei $f(n) = \frac{1}{n^s}$. Es ist $f(n \cdot m) = \frac{1}{(m \cdot n)^s} = \frac{1}{n^s} \cdot \frac{1}{m^s} = f(n) \cdot f(m)$. Die Zetafunktion aus Definition 3.6 ist für $s \in \mathbb{N}$ eine Reihe stark multiplikativer Funktionen.*

Die Voraussetzungen im nächsten Satz wirken ungewöhnlich, sorgen aber dafür, dass das unendliche Produkt einen Grenzwert verschieden von 0 hat. Siehe dazu Satz 2.20.

Satz 3.10. *(vgl. S. 87 (Gilbert 2018))*
Es sei f eine multiplikative Funktion auf $\mathbb{N}$ mit $f(1) = 1, \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty$ und $\sum_{k=1}^{\infty} f\left(p^k\right) \neq -1 \, \forall p \in \mathbb{P}$. Wenn f stark multiplikativ ist, lässt sich die Summe der Reihe als sogenanntes Euler-Produkt darstellen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - f(p))^{-1}$$

Beweis. Wir setzen

$$P\left(x\right) := \prod_{p \leq x} \left(1 + f\left(p\right) + f\left(p^2\right) + \cdots\right) = \prod_{p \leq x} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} f\left(p^k\right)\right)$$

Es ist $P(x) \neq 0$, denn Fall $\sum_{k=1}^{\infty} f\left(p^k\right) = -1$ welcher sofort zu

$$P(x) = \prod_{p \leq x} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} f\left(p^k\right)\right) = \prod_{p \leq x} \left(1 - 1\right) = 0$$

führen würde, haben wir in der Voraussetzung ausgeschlossen.
Wegen $\sum_{k=0}^{\infty} \left|f(p)^k\right| < \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty$ ist $P(x)$ ein endliches Produkt absolut konvergenter Reihen. Da f multiplikativ ist, ist $P(x)$ die Summe aller Zahlen der Form $f(n)$ für Argumente n, die nur Primfaktoren kleiner oder gleich x enthalten. Daher ist

$$\left|P(x) - \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\right| \leq \sum_{n' \in \mathbb{N}} |f(n')|\,,$$

wobei die Folge der Argumente n' nur aus zahlen besteht, die einen Primfaktor größer als x enthalten, also auch selbst größer als x sind. Infolge der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |f\left(n\right)|$ geht $\sum_{n \geq x}^{\infty} |f(n)|$ für $x \to \infty$ gegen 0. Also existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \to \infty} P(x) = \lim_{x \to \infty} \prod_{p \leq x} \sum_{k=0}^{\infty} f(p^k) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

Aus der starken Multiplikativität von f folgt $f\left(p^k\right) = f\left(p\right)^k$, aus

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f\left(p\right)|^k = \sum_{k=0}^{\infty} |f\left(p^k\right)| < \sum_{n=1}^{\infty} |f\left(n\right)| < \infty$$

folgt $|f\left(p\right)| < 1$. Wir können $\sum_{k=0}^{\infty} f\left(p\right)^k$ als geometrische Reihe auffassen, da $|f\left(p\right)| < 1$ und $f(p^0) = f(1) = 1$ ist. Damit erhalten wir folgende Umformung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(n\right) = \lim_{x \to \infty} P\left(x\right) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(p\right)^k = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - f\left(p\right)\right)^{-1} \neq 0$$

□

Wir übertragen die Ergebnisse jetzt auf die Zetafunktion.

Satz 3.11. *(S.29 Gilbert 2018)*
Die Funktion $f(n) = \frac{1}{n^s}$ *ist stark multiplikativ und lässt sich nach Satz 3.10 auf der Halbebene* $\mathbb{C}_1$ *als Euler-Produkt darstellen*

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

Bemerkung 3.12. *(Vergleiche S.3f Schleicher 2012)*
Mit der Zetafunktion erhalten wir die Aussage $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} = \infty$ *aus 3.5 recht einfach. Sei* $s \in \mathbb{R}$ *mit* $s > 1$. *Es ist*

$$\ln \frac{1}{\zeta(s)} = \ln \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - p^{-s}\right) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \ln \left(1 - p^{-s}\right) \geq -2 \sum_{p \in \mathbb{P}} p^{-s}$$

Der letzte Schritt kommt aus der Ungleichung $\ln(1 - x) \geq -2x$ *für* $x < \frac{1}{2}$. *Lassen wir* $s \searrow 1$ *laufen, erhalten wir:*

$$-\infty = \lim_{s \searrow 1} \ln \frac{1}{\zeta(s)} \geq \lim_{s \searrow 1} -2 \sum_{p \in \mathbb{P}} p^{-s}$$

Es muss also $\lim_{s \searrow 1} \sum_{p \in \mathbb{P}} p^{-s} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} = \infty$ *sein.*

Aus der Satz 2.20 folgt $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \neq 0$. Diese Erkenntnis führt uns zum Korollar.

Korollar 3.13. *(vgl. S.29 Gilbert 2018)*
$\zeta(s) \neq 0$ *für* $s \in \mathbb{C}_1$

Wir können den Definitionsbereich der Zetafunktion auf die offene komplexe Halbebene $\mathbb{C}_0$ erweitern.

Satz 3.14. *(S.107f Werner 2009)*
$\zeta(s)$ *lässt sich zu einer auf* $\mathbb{C}_0$ *meromorphen Funktion fortsetzen, die als einzige Singularität in* $s = 1$ *einen Pol* 1. *Ordnung mit Residuum* 1 *besitzt.*

Beweis. Für $\mathrm{Re}(z) > 1$ ist

$$\zeta(z) - \frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} - \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^z} - \frac{1}{x^z} \right) dx$$

Die rechte Reihe konvergiert gleichmäßig auf der kompakten Halbebene $Re(z) \geq \sigma > 0$, denn

$$\frac{1}{n^z} - \frac{1}{x^z} = z \cdot \int_n^x \frac{du}{u^{z+1}}$$

und daher

$$\int_n^{n+1} \left| \frac{1}{n^z} - \frac{1}{x^z} \right| dx \leq |z| \sup_{n \leq u \leq n+1} \frac{1}{|u^{z+1}|} = \frac{|z|}{n^{Re(z)+1}} \leq \frac{|z|}{n^{\sigma+1}}$$

Es existiert also eine auf $z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0$ analytische Funktion h mit

$$\zeta(z) - \frac{1}{z-1} = h(z)$$

Wir können also $\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + h(z)$ als analytische Fortsetzung auf $z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0, z \neq 1$ schreiben. Der Identitätssatz [2] sichert uns die Eindeutigkeit. □

Ein weiterer Beweis wie die Zetafunktion mit den Primzahlen in Verbindung steht zeigt der nächste Satz. Wir werden eine Abschätzung für das Wachstum von $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^\sigma}$ für $\sigma \searrow 1$ aus der Zetafunktion erhalten. Diese Abschätzung wird im Beweis vom Satz von Dirichlet 1.1 eine tragende Rolle spielen.

Satz 3.15. *(S.32 und S.15f Gilbert 2018)*
Es gilt $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^\sigma} = \ln \frac{1}{\sigma - 1} + O(1)$ *für* $\sigma \searrow 1$.

Beweis. Wir verschaffen uns ein Bild vom Verhalten der Zetafunktion für $\sigma \to 1$. Wir benutzen die Abschätzungen, wie wir sie im Beweis von Satz 3.1 angewendet haben.

$$\frac{1}{\sigma - 1} = \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^\sigma} < \zeta(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^\sigma} = 1 + \frac{1}{\sigma - 1} \tag{3}$$

[2] Der Identitätssatzes ist bspw. zu finden in Werner 2009, S. 80f

Damit können wir jetzt die Zetafunktion zwischen 0 und 1 einschließen.

$$0 < \zeta(\sigma) - \frac{1}{\sigma - 1} < 1$$

Multipliziere die Ungleichung oben mit $(\sigma - 1)$. Dann ist

$$0 < (\sigma - 1)\zeta(\sigma) - 1 < \sigma - 1 \searrow 0 \quad \text{für } \sigma \searrow 1.$$

Damit erhalten wir die Aussage

$$\lim_{\sigma \searrow 1} (\sigma - 1)\zeta(\sigma) = 1 \tag{4}$$

Aus Satz 3.15 wissen wir, dass die Zetafunktion $\zeta(\sigma)$ eine Pol 1. Ordnung hat in $\sigma = 1$. Daher gibt es eine analytische Funktion $g : \mathbb{C}_0 \to \mathbb{C}$ mit $g(1) \neq 0$ und $\zeta(\sigma) = \frac{g(\sigma)}{\sigma - 1}$. [vgl. S.96 Satz II.4.3 Werner 2009]
Wegen (4) muss $g(1) = 1$ sein, wir erhalten als Aussage

$$\ln \zeta(\sigma) = \ln \frac{g(\sigma)}{\sigma - 1} = \ln \frac{1}{\sigma - 1} + \ln g(\sigma) = \ln \frac{1}{\sigma - 1} + o(1) \quad \text{für } \sigma \searrow 1 \tag{5}$$

Wir müssen noch für die Behauptung den Zusammenhang zwischen $\ln \zeta(\sigma)$ und $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^\sigma}$ zeigen. Wir betrachten die Zetafunktion als Euler-Produkt mit der Taylorentwicklung für $\ln\left(1 - \frac{1}{p^\sigma}\right)$:

$$\begin{aligned} \ln \zeta(\sigma) &= -\sum_{p \in \mathbb{P}} \ln\left(1 - \frac{1}{p^\sigma}\right) \\ &= \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k p^{k\sigma}} \\ &= \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^\sigma} + \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k p^{k\sigma}} \end{aligned}$$

Wir verzichten auf den Faktor k im Nenner der Reihenglieder und erhalten für $\sigma > 1$

$$0 < \ln \zeta(\sigma) - \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^\sigma} < \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^{2\sigma}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^\sigma} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^{2\sigma}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p^\sigma}} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^\sigma (p^\sigma - 1)}$$
$$< \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma (n^\sigma - 1)} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-s)} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1$$

Wir haben gezeigt

$$\ln(\zeta(\sigma)) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^\sigma} + O(1). \tag{6}$$

Die Behauptung folgt dann durch Subtraktion von (6) mit (5). □

3.3 Dirichlet-Reihen

In diesem Abschnitt orientieren wir uns an die Kapitel §6 und §7 aus Gilbert 2018.
In Definition 3.6 haben wir gezeigt dass sich die Zetafunktion als Reihe von e-Potenzen schreiben lässt.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-s \ln n}$$

Diese Darstellung lässt sich in sogenannten *Dirichlet-Reihen* verallgemeinern. Die Dirichlet-Reihen sollen für uns nur der Zwischenschritt zu den L-Funktionen sein. Daher halten wir das Thema sehr kurz und verweisen bei Interesse auf die Literatur [Bürden 1995].

Definition 3.16. *(vgl. S.23 Gilbert 2018)*
Eine Dirichlet-Reihe mit der Exponentenfolge $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(0 \leq \lambda_n \nearrow \infty)$ *und einer Folge von Faktoren* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *mit* $a_n \in \mathbb{C}$ *ist eine Reihe der Form*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} \quad (s \in \mathbb{C})$$

Besitzt die Reihe eine Zahl $\rho \in \mathbb{C}$ *für die gilt, für* $\mathrm{Re}(s) > \rho$*, konvergiert sie lokal gleichmäßig und für* $\mathrm{Re}(s) < \rho$ *divergiert sie. So nennen wir die Zahl* ***die Konvergenz-Abszisse*** ρ*.*

Wir werden uns später öfters in $\mathbb{C}_0$ bewegen, speziell für Dirichlet-Reihen der Form $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ können wir folgende Aussage treffen.

Satz 3.17. *(S.28 Gilbert 2018)*
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$ *und* $\left|\sum_{n=m}^{k} a_n\right| \leq H$ *für alle* $(k,m) \in \mathbb{N}^2$ *mit der Eigenschaft* $k \geq m$. *Dann konvergiert* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ *in der offenen Halbebene* $\mathbb{C}_0$ *zu einer holomorphen Funktion.*

Beweis. Eine Dirichlet-Reihe mit Konvergenzabszisse ρ konvergiert nach Definition 3.16 für jede komplexe Zahl $s = \sigma + \mathrm{i}\tau$ mit $\sigma > \rho$. Es genügt also zu zeigen, dass die Dirichlet-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ für alle $s = \sigma > 0$ konvergiert. Wir weisen dies mittels Abel-Summation nach. Für $j \geq m$ setzen wir $A_{m,j} = \sum_{n=m}^{j} a_n$ und $\nu(j) = \frac{1}{j^\sigma}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\sum_{n=m}^{k} a_n \nu(n) &= A_{m,k}\nu(k) - \sum_{j=m}^{k-1} A_{m,j}\left(\nu(j+1) - \nu(j)\right) \\ &= A_{m,k}\frac{1}{k^\sigma} - \sum_{j=m}^{k-1} A_{m,j}\left(\frac{1}{(j+1)^\sigma} - \frac{1}{j^\sigma}\right)\end{aligned}$$

Wir setzen jetzt die Abschätzung aus der Prämisse ein, $\left|\sum_{n=m}^{k} a_n\right| \leq H$ und erhalten

$$\left|\sum_{n=m}^{k} \frac{a_n}{n^\sigma}\right| \leq \frac{H}{k^\sigma} + H\sum_{j=m}^{k-1}\left(\frac{1}{j^\sigma} - \frac{1}{(j+1)^\sigma}\right)$$

In einer Teleskopsumme bleiben nur der erste und letzte Term übrig.

$$\frac{H}{k^\sigma} + H\sum_{j=m}^{k-1}\left(\frac{1}{j^\sigma} - \frac{1}{(j+1)^\sigma}\right) = \frac{H}{m^\sigma} \leq \epsilon \quad \text{für } m \geq \sqrt[\sigma]{\frac{H}{\epsilon}}$$

Die Reihe $\sum_{n=m}^{k} \frac{a_n}{n^s}$ ist damit gleichmäßig konvergent auf $\mathbb{C}_0$. Die Holomorphie folgt dann schließlich aus dem Konvergenzsatz von Weierstraß 2.16. □

3.4 L-Funktionen

Dieses Unterkapitel orientiert sich an Kapitel §9 aus Gilbert 2018.
Im nächsten Kapitel werden wir zeigen, dass bei beliebigen teilerfremden natürlichen Zahlen a und m, die Menge $\{a + km : k \in \mathbb{Z}\}$ unendlich viele Primzahlen enthält. Da diese Menge die Restklasse von a modulo m ist, werden wir die kommutative multiplikative Gruppe $G_m = (\mathbb{Z} / m\mathbb{Z})^*$ mit der Ordnung $\varphi(m) = n_G$ als Verbindung benutzten, siehe Kapitel 2.2. Wir schreiben $n \equiv a(m)$ für n liegt in der durch a gegeben Restklasse modulo m.

Definition 3.18. *(vgl. S.35 Gilbert 2018)*
Es sei χ ein Charakter der Gruppe G_m. Über die Definition 2.13, wird χ zu einer Funktion auf $\mathbb{N}$. Dann ist für $\mathrm{Re}(s) > 1$ die L-Funktion $L(s, \chi)$ die Dirichlet-Reihe, definiert durch

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \quad \textit{mit } s \in \mathbb{C}_1$$

Bei den $\zeta(s)$ Funktion mussten wir für $s = 1$ wegen der Divergenz aufpassen. Die Dirichlet-Reihen hatten eine Konvergenzabsizze ρ. Ob die L-Funktionen in gewissen Bereichen divergent sind, hängt von den Charakteren χ ab. Wir schauen uns aber zum Verständnis erst einmal ein Rechenbeispiel an:

Beispiel 3.19. *Sei $n, m \in \mathbb{N}$, $\chi(n)$ wird für $(n, m) > 1$ gleich 0 sein. Ist n ein Element eines der Repräsentanten aus $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$, wird χ ein Wert im Einheitskreis annehmen und es gilt $|\chi(n)| = 1$. Sei $m = 12$ beispielsweise, dann ist $\varphi(12) = 4$. Die primen Restklassen sehen dann folgendermaßen aus:*

$$\{1, 13, 25, ...\}$$
$$\{5, 17, 29, ...\}$$
$$\{7, 19, 31, ...\}$$
$$\{11, 25, 35, ...\}$$

Es fällt auf, das in jedem 12*er Schritt ein Charakter* χ *nur* $\varphi(12) = 4$ *mal einen Wert* $\neq 0$ *annimmt. Aus 2.12 folgt, das sich* χ *mit* $\chi \neq \chi_0$ *im jedem* 12*er Schritt in gewisser Weise alternierend verhält, denn es ist* $\sum_{x \in G_m} \chi(x) = 0$ *und damit* $\sum_{n=1+12\cdot m}^{12+12\cdot m} \chi(n) = 0$ *für alle* $m \in \mathbb{N}_0$.

Auch die L-Funktion hat eine Darstellung, die zu dem Eulerprodukt sehr ähnlich ist. Diese wird uns auch zu einigen Aussagen verhelfen.

Satz 3.20. *(vgl. S.35 Gilbert 2018)*
Sei χ *ein Charakter der Gruppe* G_m*, dann gilt für alle* $s \in \mathbb{C}_1$

$$L(s, \chi) = \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \nmid m}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

Beweis. Sei $s \in \mathbb{C}_1$ mit $s = \sigma + i\tau$. Für $\mathrm{Re}(s) > \sigma > 1$ wissen wir mit Bemerkung 3.3:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\chi(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} < \infty. \tag{7}$$

Die Konvergenzabsizze ist daher $\rho_L \leq 1$. Für $\chi \neq \chi_0$ gilt sogar wegen Satz 2.14

$$\left| \sum_{n=k}^{l} \chi(n) \right| \leq \varphi(m) \quad \text{für alle } k, l \in \mathbb{N}$$

Damit können wir 3.17 anwenden und erhalten sogar $\rho_L \leq 0$. Die Funktion

$$f(n) = \frac{\chi(n)}{n^s}$$

ist stark multiplikativ in $n \in \mathbb{N}$ und erfüllt $f(n) = 0$ für $(n, m) \neq 1$. Es ist $f(p) = 0$ für $p \mid m$ und $f(p) \notin \{0, 1\}$ für $p \nmid m$. Es gilt mit $\chi(1) = 1$ dass $f(1) = \frac{\chi(1)}{s^s} = 1$ ist. Zusammen mit der Abschätzung aus den Ungleichungen (7) haben wir alle Voraussetzungen für Satz 3.10 erfüllt und erhalten eine Darstellung von $L(s, \chi)$ als Euler-Produkt. □

Für $\chi = \chi_0$ (siehe 2.11) ist $L(s, \chi)$ zu $\zeta(s)$ recht ähnlich. Auch wenn viele Glieder von $\zeta(s)$ fehlen, so erlaubt uns das Euler-Produkt eine recht einfache Transformation.

Satz 3.21. *(vgl. S.35 Gilbert 2018)*
Sei χ_0 der triviale Charakter aus der Gruppe G_m. Die Funktion $L(s, \chi_0)$ ist analytisch fortsetzbar zu einer in $\mathbb{C}_0$ meromorphen Funktion, die als einzige Singularität in $s = 1$ einen einfachen Pol mit dem Residuum $\prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ besitzt.

Beweis. Wir setzten $\chi = \chi_0$ und erhalten mit Satz 3.20 eine Darstellung als Eulerprodukt

$$L(s, \chi) = \prod_{p \nmid m} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Wir ergänzen das Produkt mit allen Primzahlen $p \mid m$,

$$L(s, \chi) = \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Der rechte Teil des Produkts ist das Eulerprodukt der ζ Funktion aus Satz 3.11. Also haben wir

$$L(s, \chi) = \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \cdot \zeta(s)$$

Die Behauptung folgt dann aus den Eigenschaften der ζ Funktion aus Satz 3.14. □

Für $\chi \neq \chi_0$ können wir die Sätze 3.17 und 2.14 anwenden und erhalten

Satz 3.22. *(vgl. S.35 Gilbert 2018)*
Für $\chi \neq \chi_0$ ist $L(s, \chi)$ eine in $\mathbb{C}_0$ holomorphe Funktion.

Wir verallgemeinern die Zeta-Funktion mit Hilfe der L-Funktionen. Wir setzen die Gruppe $G_m = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ und teilen die Zetafunktion wie folgt auf:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_0(n)}{n^s} + \sum_{(n,m)>1} \frac{1}{n^s} = L(s, \chi_0) + \sum_{(n,m)>1} \frac{1}{n^s}$$

Für das gleiche $m \in \mathbb{N}$ aus G_m^* definieren wir

Definition 3.23. *(vgl. S.36 Gilbert 2018)*
Sei $\hat{G}_m$ die Menge der Charaktere auf $G_m = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$, dann setzen wir $\zeta_m : \mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}$ mit

$$\zeta_m(s) := \prod_{\chi \in \hat{G}_m} L(s, \chi).$$

Bemerkung 3.24. *Jeder komplexwertige Charakter χ in $\hat{G}_m$, hat auch einen zu χ konjugiert komplexen Charakter $\overline{\chi} = \chi^{-1}$. Ausgenommen ist hier der triviale Charakter χ_0. Für $\sigma + \mathrm{i}\tau = s \in \mathbb{C}_0$ und $\chi \neq \chi_0$ ist $L(s, \chi) \in \mathbb{C}$, siehe Satz 3.22. Wenn $s = \sigma$ ist, ist das Produkt $L(\sigma, \chi) \cdot L(\sigma, \chi^{-1})$ reel und ≥ 0. Wir machen uns das wie folgt klar,*

$$L(\sigma, \chi) \cdot L\left(\sigma, \chi^{-1}\right) = \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \nmid m}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^\sigma}\right)^{-1} \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \nmid m}} \left(1 - \frac{\overline{\chi}(p)}{p^\sigma}\right)^{-1}.$$

Wir führen die passenden $\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^\sigma}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\overline{\chi}(p)}{p^\sigma}\right)^{-1}$ mit dem gleichen p zusammen:

$$\left(\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^\sigma}\right)\left(1 - \frac{\overline{\chi}(p)}{p^\sigma}\right)\right)^{-1} = \left(1 - \frac{\chi(p) + \chi(p)^{-1}}{p^\sigma} + \frac{\chi(p) \cdot \chi(p)^{-1}}{p^\sigma}\right)$$

Bei $\chi(p) + \chi(p)^{-1}$ und $\chi(p) \cdot \chi(p)^{-1}$ verschwindet der komplexe Anteil. Der positive Anteil ist ≥ 0.
Das Produkt $\prod_{\chi \in \hat{G}_m \setminus \{\chi_0\}} L(s, \chi)$ ist holomorph für $s \in \mathbb{C}_0$, der restliche Faktor $L(s, \chi_0) = \zeta(s) \cdot \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$ von ζ_m hat einen Pol der Ordnung 1 in $s = 1$. Die Funktion ζ_m hat deshalb entweder einen Pol in $s = 1$ oder sie ist (wenn der Faktor $L(s, \chi_0) = \zeta(s) \cdot \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$ von ζ_m in $s = 1$ verschwindet) holomorph in $\mathbb{C}_0$.

Satz 3.25. *(vgl. S.36 Gilbert 2018)*

Sei $\sigma + \mathrm{i}\tau = s \in \mathbb{C}_0$. Die Funktion $\zeta_m(s) = \prod_{\chi \in \hat{G}_m} L(s, \chi)$ ist meromorph fortsetzbar in $\mathbb{C}_0$. ζ_m hat dort genau eine Singularität in $s = 1$, einen Pol 1. Ordnung mit Residuum $\prod_{\chi \neq \chi_0} L(1, \chi) \cdot \prod_{p \mid m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

Beweis. Angenommen, die Funktion ζ_m wäre in $\mathbb{C}_0$ holomorph. Für $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 0$ können wir schreiben:

$$\begin{aligned} \ln \zeta_m(\sigma) &= \sum_{\chi \in \hat{G}_m} \ln \prod_{p \nmid m} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^\sigma}} = \sum_{\chi \in \hat{G}_m} \sum_{p \nmid m} -\ln\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^\sigma}\right) \\ &= \sum_{\chi \in \hat{G}_m} \sum_{p \nmid m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(p)^k}{k p^{k\sigma}} \end{aligned}$$

Die Doppelsumme $\sum_{p \nmid m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(p)^k}{k p^{k\sigma}} = \ln \prod_{p \nmid m} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^\sigma}\right)^{-1}$ ist nach Satz 3.20 für jeden Charakter $\chi \in \hat{G}_m$ absolut konvergent, da die entsprechende Reihe der Absolutbeträge majorisiert wird durch

$$\sum_{p \nmid m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k p^{k\sigma}} = \ln \prod_{p \nmid m} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^\sigma}} = \ln L(\sigma, \chi_0) < \infty \quad \text{siehe Satz 3.20.}$$

Daher können wir die Mehrfachreihe also beliebig umordnen

$$\begin{aligned} \ln \zeta_m(\sigma) &= \sum_{p \nmid m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k p^{k\sigma}} \sum_{\chi \in \hat{G}_m} \chi\left(p^k\right) \\ &\text{mit } \sum_{\chi \in \hat{G}_m} \chi\left(p^k\right) = \begin{cases} \varphi(m) & \text{falls } p^k \equiv 1 \bmod m \quad \text{Satz 2.12} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p^k \equiv 1(m)} \frac{\frac{\varphi(m)}{k}}{k p^\sigma} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\sigma} \end{aligned}$$

Es ist $a_n = \begin{cases} \frac{\varphi(m)}{k} & \text{falls } n = p^k \equiv 1\,(m) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Die Funktion $\ln \zeta_m$ ist damit gegeben durch die Dirichlet-Reihe, die jedenfalls in $\mathbb{C}_1$ konvergiert. Wir fragen nach deren Konvergenzabszisse $\rho \leq 1$ und setzen zu diesem

Zweck $s = \sigma > 0$. Dann erhalten wir

$$\ln \zeta(\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p^k \equiv 1(m)} \frac{\frac{\varphi(m)}{k}}{p^{k\sigma}} \geq \sum_{p \nmid m} \frac{1}{p^{\varphi(m)\sigma}}$$

wir wählen $k = \varphi(m)$ und beachten, dass $p^{\varphi(m)} \equiv 1$ für alle $p \nmid m$

$$\ln \zeta_m \left(\frac{1}{\varphi(m)} \right) \geq \sum_{p \nmid m} \frac{1}{p} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} - \sum_{p \mid m} \frac{1}{p} = \infty$$

Also ist $\zeta_m \left(\frac{1}{\varphi(m)} \right) = \infty$ und somit $\rho \geq \frac{1}{\varphi(m)}$. Weil die Funktion ζ_m in $\mathbb{C}_0$ nur eine in $s = 1$ Singularität haben kann, muss $\rho = 1$ und $s = 1$ ein Pol von ζ_m mit dem genannten Residuum sein. □

Weil ζ_m einen Pol 1. Ordnung in $s = 1$ hat, muss $L(1, \chi) \neq 0$ für $\chi \neq \chi_0$ gelten. Da eine Nullstellen in $s = 1$ $\zeta_m(s)$ zu einem regulären Punkt machen würde. Es folgt:

Satz 3.26. *(vgl. S. 37 Gilbert 2018)*
Sei $\chi \in \hat{G}_m$ und $\chi \neq \chi_0$, dann ist ist $L(1, \chi) \neq 0$

Beweis. Wir nehmen an, für den Charakter $\chi \neq \chi_0$ aus $\hat{G}_m$ wäre $L(1, \chi) = 0$. Wir zerlegen ζ_m in ein Produkt der Form

$$\zeta_m(s) = (s-1) L(s, \chi_0) \frac{L(s, \chi_1)}{s-1} \prod_{\chi \in \hat{G}_m, \chi \neq \chi_0, \chi \neq \chi_1} L(s, \chi)$$

Wir lassen nun s gegen 1 gehen. $(s-1) L(s, \chi_0)$ geht dabei gegen $\prod_{p \mid m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$, weil $L(s, \chi_0)$ in $s = 1$ einen Pol 1. Ordnung mit Residuum $\prod_{p \mid m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ hat (Satz 3.21). Der Ausdruck $\frac{L(s,\chi_1)}{s-1}$ geht gegen die Ableitung $L'(1, \chi_1) = \frac{d}{ds} \frac{L(1,\chi_1)}{s-1}$, weil nach Satz 3.22 $L(s, \chi_1)$ in $s = 1$ holomorph und nach unserer Voraussetzung $L(1, \chi_1) = 0$ ist. Der letzte Ausdruck $\prod_{\chi \in \hat{G}_m, \chi \neq \chi_0, \chi \neq \chi_1} L(s, \chi)$ geht wegen der Stetigkeit der L-Funktion für von χ_0 verschiedene Charaktere auf $\mathbb{C}_0$ gegen $\prod_{\chi \neq \chi_0, \chi \neq \chi_1} L(1, \chi) \in \mathbb{C}$. Das steht aber im Widerspruch zu der Tatsache, dass ζ_m in $s = 1$ eine Singularität hat. □

3.5 Satz von Dirichlet über Primzahlen in arithmetischen Progressionen

Der letzte Abschnitt des Kapitels orientiert sich an Kapitel 10 aus Gilbert 2018.
Wir arbeiten mit der Gruppe $G_m = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$, deren Ordnung $n_G = \varphi(m)$ ist. Sei wieder $\sigma + \mathrm{i}\tau = s$. Mit $\ln(z)$ in der komplexen Ebene ist immer der Wert der Logarithmus-Funktion im Streifen $\{s \in \mathbb{C} : -\pi \leq \mathrm{Im}(s) < \pi\}$ gemeint.
Ziel ist es, den Satz von Dirichlet 1.1 herzuleiten. Dafür nehmen uns eine neue Funktion zur Hilfe:

Definition 3.27. *(vgl. S.38 Gilbert 2018)*
Für $\chi \in \hat{G}_m$ definieren wir die Funktion $f_\chi : \mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}$ mit $f_\chi(s) = \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\chi(p)}{p^s} = \sum_{p\nmid m} \frac{\chi(p)}{p^s}$.

Zum Unterschied zu der Funktion $L(s,\chi)$ wird in der Definition von f nur über Primzahlen summiert. Mit $L(s,\chi)$ als Majorante können wir sagen, dass die Reihe der Funktion f_χ absolut konvergiert für $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 1$. Mit den nächsten Sätzen werden wir die Größenordnung von $\sum_{p\equiv a(m)} \frac{1}{p^\sigma}$ für $\sigma \searrow 1$ bestimmen. Wir beginnen mit folgender Identität:

Satz 3.28. *(vgl. S. 39 Gilbert 2018)*
Für $s \in \mathbb{C}_1$ und $a \in G_m$ gilt

$$\sum_{p\equiv a(m)} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\chi\in\hat{G}_m} \chi\left(a^{-1}\right) f_\chi(s)$$

Beweis. Sei $a \in G_m = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ ein Repräsentant aus Restklasse modulo m. Wir betrachten die inverse Restklasse zum Repräsentanten a. Bezeichne ihn mit a^{-1}. Es gilt

$$\chi\left(a^{-1}\right) f_\chi(s) = \sum_{p\nmid m} \frac{\chi(a^{-1}p)}{p^s}$$

Wir summieren über alle Funktionen f_χ

$$\sum_{\chi\in\hat{G}_m}\chi\left(a^{-1}\right)f_\chi\left(s\right)=\sum_{p\nmid m}\frac{\sum_{\chi\in\hat{G}_m}\chi\left(a^{-1}p\right)}{p^s}$$

Mit der Anwendung von Satz 2.12

$$\text{wonach }\sum_{\chi\in\hat{G}_m}\chi\left(a^{-1}p\right)=\begin{cases}\varphi\left(m\right) & p\equiv a\left(m\right)\\ 0 & p\not\equiv a\left(m\right)\end{cases}$$

ist. Folgt schlussendlich

$$\sum_{\chi\in\hat{G}_m}\chi\left(a^{-1}\right)f_\chi\left(s\right)=\sum_{p\equiv a(m)}\frac{\varphi\left(m\right)}{p^s}=\varphi\left(m\right)\sum_{p\equiv a(m)}\frac{1}{p^s}.$$

Durch umstellen erhalten wir wie Behauptung. □

Für eine spätere Anwendung schreiben wir $s=\sigma$ und trennen aus $\sum_{\chi\in\hat{G}_m}\chi\left(a^{-1}\right)f_\chi\left(s\right)$ den trivialen Charakter χ_0 raus.

$$\sum_{p\equiv a(m)}\frac{1}{p^\sigma}=\frac{1}{\varphi\left(m\right)}\left[f_{\chi_0}\left(\sigma\right)+\sum_{\chi\in\hat{G}_m,\chi\neq\chi_0}\chi\left(a^{-1}\right)f_\chi\left(\sigma\right)\right]\tag{8}$$

Weiter bekommen wir aus Satz 3.15, da m nur endlich viele Primfaktoren hat,

$$f_{\chi_0}\left(\sigma\right)=\sum_{p\nmid m}\frac{1}{p^\sigma}=\ln\frac{1}{\sigma-1}+O\left(1\right)\text{ für }\sigma\searrow 1\tag{9}$$

Entscheiden ist, jetzt die Größenordnung von $f_\chi\left(\sigma\right)$ für $\chi\neq\chi_0$ abzuschätzen. Wenn $f_\chi\left(\sigma\right)$ endlich ist für $\sigma\searrow 1$, wäre der Satz von Dirichlet 1.1 bewiesen.

Satz 3.29. *(vgl. S.40 Gilbert 2018)*
Für $\chi \neq \chi_0$ ist $f_\chi(\sigma) = O(1)$ für $\sigma \searrow 1$.

Beweis. Für $\chi \neq \chi_0$ und für $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 1$ prüfen wir das Verhalten von $f_\chi(\sigma)$, wenn σ von oben gegen 1 geht. Zu diesem Zweck untersuchen wir die logarithmische L-Funktion:

$$\ln L(\sigma, \chi) = \ln \prod_{p \nmid m} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^\sigma}\right)^{-1} = -\sum_{p \nmid m} \ln\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^\sigma}\right) = \sum_{p \nmid m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(p)^k}{k p^\sigma}$$

In der rechten Doppelsumme spalten wir den Term mit $k = 1$ ab und erhalten die Funktion $f_\chi(\sigma)$. Den übrig geblieben Teil können wir mit $O(1)$ abschätzen. Die Begründung folgt weiter unten.

$$\sum_{p \nmid m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(p)^k}{k p^\sigma} = \underbrace{\sum_{p \nmid m} \frac{\chi(p)}{p^\sigma}}_{f_\chi(\sigma)} + \underbrace{\sum_{p \nmid m} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\chi(p)^k}{k p^\sigma}}_{O(1) \cdots \text{für } \sigma \searrow 1} \tag{10}$$

Der Betrag eines Charakters ist $|\chi| = 1$. Das folgt aus der Bemerkung 2.11. Das erlaubt uns im Betrag folgende Ungleichung zu stellen.

$$\left| \sum_{p \nmid m} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\chi(p)^k}{k p^\sigma} \right| < \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{2p^{2\sigma}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^{k\sigma}}$$

Wir nutzen noch aus, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^{k\sigma}}$ als geometrische Reihe einen Grenzwert hat.

$$\begin{aligned}
\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{2p^{2\sigma}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^{k\sigma}} &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{2p^{2\sigma}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^\sigma}} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^\sigma (p^\sigma - 1)} \\
&< \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{11}$$

Die Funktion $L(s, \chi)$ ist nach Satz 3.22 in $s = 1$ differenzierbar, also auch stetig,

und konvergiert für $s \to 1$ gegen eine von 0 verschiedene komplexe Zahl, siehe Satz 3.26. Da die Logarithmus-Funktion in jedem passend aufgeschnittenen Streifen der Breite 2πi (in dem sie eindeutig ist) auch stetig ist, konvergiert der Logarithmus von $L(s, \chi)$ für $s \to 1$ auch gegen einen endlichen Grenzwert und ist deshalb beschränkt. Unter Berücksichtigung von (10) und (11) ergibt sich, dass auch $f_\chi(s)$ für $s \to 1$ beschränkt ist. Damit folgt die Behauptung. □

Der Beweis von Satz von Dirichlet über Primzahlen in arithmetischen Progressionen 1.1 folgt jetzt:

Beweis. Wir berufen uns jetzt auf (8),(9) und erhalten

$$\sum_{p \equiv a(m)} \frac{1}{p^\sigma} = \frac{1}{\varphi(m)} [-\ln(\sigma - 1) + O(1)] \quad (\sigma \searrow 1)$$

Die Summe strebt gegen unendlich für $\sigma \searrow 1$. Daher kann $\sum_{p \equiv a(m)} \frac{1}{p}$ nicht endlich sein, es muss unendlich viele Primzahlen geben mit $p \equiv a(m)$. □

Wir können die Verteilung der Primzahlen auf arithmetischen Progressionen in einem gewissen Sinne als Dichte angeben. Abgesehen von den endlich vielen Primfaktoren von m, verteilen sich die Primzahlen auf $\varphi(m)$ Teilmengen

$$Q(m, a) := \{p \in \mathbb{P} : p \equiv a(m)\}$$

Um diese Menge zu messen, setzen wir folgendes *Maß* ein.

Definition 3.30. *(vgl. S.39 Gilbert 2018)*
Sei $\sigma > 1$ und $\mathcal{P}$ die Potenzmenge von $\mathbb{P}$. Wir setzen $\mu : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ mit $\mu_\sigma(X) = \sum_{p \in X} \frac{1}{p^\sigma}$ für $X \in \mathcal{P}$

In Satz 3.15 wurde bereits gezeigt

$$\mu_\sigma(\mathbb{P}) = \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^\sigma} = -\log(\sigma-1) + O(1) \text{ für } \sigma \searrow 1$$

Definition 3.31. *(vgl. S.39 Gilbert 2018)*
Eine Menge $Q \subset \mathbb{P}$ hat die Dichte $d(Q)$, wenn

$$\lim_{\sigma\searrow 1} \frac{\sum_{p\in Q} \frac{1}{p^\sigma}}{\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^\sigma}} = d(Q)$$

existiert.

Damit können wir folgende Aussage zu der Dichte der Primzahlen in arithmetischen Progressionen treffen.

Satz 3.32. *(vgl. S.40 Gilbert 2018)*
Für die Dichte der Menge der Primzahlen $p \equiv a(m)$, $(a,m) = 1$ in $\mathbb{P}$ gilt:

$$d(\{p \equiv a(m), (a,m) = 1\}) = \lim_{\sigma\searrow 1} \left(\sum_{p\equiv a(m)} \frac{1}{p^\sigma}\right) \Big/ \left(\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^\sigma}\right) = \frac{1}{\varphi(m)}$$

Beweis. Aus Satz 3.15 wissen wir $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^\sigma} = -\ln(\sigma-1) + O(1)$ für $\sigma \searrow 1$. Damit folgt:

$$\left(\sum_{p\equiv a(m)} \frac{1}{p^\sigma}\right) \Big/ \left(\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^\sigma}\right) = \frac{1}{\varphi(m)} \cdot \frac{-\ln(\sigma-1) + O(1)}{-\ln(\sigma-1) + O(1)} \to \frac{1}{\varphi(m)} \quad (\sigma \searrow 1)$$

□

Die hier verwendete Dichte ist analytisch definiert und entspricht nicht dem, was man sich intuitiv unter einer gleichmäßigen Verteilung von Primzahlen vorstellt. Aus der Aussage

$$d(\{p \equiv a(m), (a,m)\}) = \frac{1}{\varphi(m)}$$

folgt nicht, dass sich die Primzahlen gleichmäßig unter den verschiedenen arithmetischen Progression mit $(a, m) = 1$ aufteilen. Es bedeutet nur, dass die Summen

$$\sum_{p \equiv a(m)} \frac{1}{p^\sigma}$$

in etwa gleich groß sind. Man könnte natürlich vermuten, dass auch die tatsächliche Verteilung der Primzahlen in den Progressionen gleichmäßig sein muss. Wir werden im nächsten Kapitel mit dem Satz von Siegel-Walfisz 4.10 und dem Satz von Bombieri-Vinogradov 4.14 darüber diskutieren.

4 Mit dem allgemeinen Primzahlsatz zum Satz von Siegel-Walfisz und Satz von Bombieri-Vinogradov

Wir wissen mit dem Primzahlsatz von Dirichlet 1.1, dass auf jeder arithmetischen Progression mit $(a, m) = 1$ unendlich viele Primzahlen liegen. Zudem ist sogar $\sum_{p \equiv a(m)} \frac{1}{p}$ divergent. Die Divergenz der Summe bleibt erhalten, für jedes m mit $(a, m) = 1$. Andererseits bewirkt jeder noch so kleine Exponent $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ die Konvergenz, siehe Bemerkung 3.3. Man erwartet, dass Primzahlen auch auf einer arithmetischen Progression einer gewissen Regelmäßigkeit folgen. Um die Verteilung der Primzahlen in arithmetischen Progressionen heuristisch zu verstehen, betrachten wir die harmonische Reihe. Wir nehmen von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nur jede k-te Zahl, $k \in \mathbb{N}$, in die Summe auf und erkennen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{kn} = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{k} \cdot \infty = \infty.$$

Solange die Auswahl der Terme regelmäßig erfolgt, bleibt die Divergenz bestehen. Diese Überlegung liefert zumindest eine grobe Intuition für die Verteilung der Primzahlen. Tatsächlich wissen wir aus dem klassischen Primzahlsatz (Satz 4.2), dass die Primzahlen im Mittel immer größere Abstände besitzen. Doch dieses Wachstum reicht nicht aus, um die Divergenz aufzuhalten. Um die Verteilung der Primzahlen auf arithmetischen Progressionen zu verstehen, wäre ein naheliegender Ansatz, die Dichte aus Satz 3.32 mit dem klassischen Primzahlsatz 4.2 zu verbinden. Der Satz von Siegel-Walfisz 4.10 und der Satz von Bombieri-Vinogradov 4.14 liefern tiefergehende Resultate in diese Richtung. Diese beiden Sätze zeigen, dass Primzahlen bis zu einem gewissen Grad gleichmäßig auf arithmetische Progressionen verteilt sind, und sie quantifizieren die Größe möglicher Fehlerterme.

Um den Primzahlsatz zu formulieren, brauchen wir die Definition der Zählfunktion für Primzahlen.

Definition 4.1. *(vgl. S. 73 Sautoy 2004)*
Wir setzen $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ *mit*

$$\pi(x) = \#\{p \in \mathbb{P} | \, p < x\}$$

Ende des 18. Jahrhunderts hatte Gauß bereits vermutet, dass sich die Anzahl der Primzahlen $\pi(x)$ wie $\frac{x}{\ln x}$ verhalten mussten. Zum ersten Mal wurde der Primzahlsatz unabhängig voneinander durch Hadamard und de la Vallée-Poussin 1896 bewiesen. [S.106 Werner 2009]

Satz 4.2 (Der Primzahlsatz)**.** *(S. 106 Werner 2009)*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1$$

Man beachte, dass hier nur der Quotient gegen 1 für $x \to \infty$ gilt, der Unterschied zwischen Zähler und Nenner kann absolut immer noch sehr groß sein. Der Fehler der Aussage kann auf folgendes abgeschätzt werden:

Satz 4.3. *(siehe S.2 Aßing 2023)*

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x}{(\ln x)^2}\right)$$

Den Primzahlsatz gibt es in mehreren Varianten. Einer der berühmtesten ist der Primzahlsatz mittels **Integrallogarithmus**

Definition 4.4. *(vgl. S.119 Werner 2009)*

$$\mathrm{Li}\,(x) = \int_2^x \frac{dy}{\ln y}$$

Auch für diesen gilt.

Satz 4.5. *(vgl. S.119 Werner 2009)*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\mathrm{Li}(x)} = 1$$

Damit reduziert sich der Wachstumsterm aus der O-Notation auf:

Satz 4.6. *(Siehe S.2 Aßing 2023)*
Es gibt ein konstantes $c > 0$, sodass gilt

$$\pi\left(x\right) = \mathrm{Li}\left(x\right) + O\left(x \cdot e^{-c\sqrt{\ln x}}\right)$$

Nummerisch kann man sich das mit folgender Tabelle aus S.118 Werner 2009, einmal klar machen.

x	$\pi(x)$	$\frac{\pi(x)}{Li(x)}$	$\frac{\pi(x)}{x/\ln x}$
10^4	1 229	0.987	1.131
10^6	78 498	0.988	1.084
10^8	5 761 455	0.999 986	1.061
10^{10}	455 052 511	0.999 993	1.047
10^{12}	37 607 912 018	0.999 998	1.039

Die Funktion $\frac{x}{\ln x}$ steigt langsamer als eine einfache Gerade $f(x) = x$. Durch den Term $\ln x$ flacht die Gerade auch immer weiter ab. Der mittlere Abstand zwischen den Primzahlen wird immer größer. Damit auch im Mittel auf den arithmetischen Progressionen $p \equiv a(m)$ mit $(a, m) = 1$. Das machen wir uns noch einmal deutlich. Wir erweitern das $\pi(x)$ jetzt auf Primzahlen in arithmetischen Progressionen.

Definition 4.7. *(S.2 Aßing 2023)*
Sei $x, a, m \in \mathbb{N}$ und $(a, m) = 1$, dann ist

$$\pi\left(x; a, m\right) = \#\left\{p \leq x : p \equiv a \bmod m\right\}$$

die Anzahl der Primzahlen auf einer arithmetischen Progression.

Bemerkung 4.8. *Die Dichte aus der Definition 3.31 ist rein über die Summen* $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$ *definiert und gibt keine Aussage über die Verteilung der* ***Anzahl*** *der Primzahlen. Nehmen wir an, dass die Primzahlen sich gleichmäßig auf die möglichen Restklassen* $\varphi(m)$ *mit* $(a, m) = 1$ *verteilen, so erwartet man:*

$$\pi(x; a, m) \approx \frac{1}{\varphi(m)} \operatorname{Li}(x).$$

Diese Heuristik ist jedoch nicht exakt, da sowohl die Verwendung von $\operatorname{Li}(x)$ als Approximation von $\pi(x)$ als auch die angenommene Gleichverteilung Fehler verursachen können. Um die Abweichung zu erfassen, führen wir einen Funktion $R(x, m, a)$ ein.

Definition 4.9. *Sei* $(a, m) = 1$ *und* $\pi(x; a, m)$ *aus 4.7, dann ist*

$$\pi\left(x; a, m\right) = \frac{1}{\varphi\left(m\right)} \operatorname{Li}(x) + R(x; a, m)$$

mit einer Fehlerfunktion $R(x; a, m)$

Ziel ist es jetzt, die Fehlerfunktion zu verstehen. Intuitiv sollten aus dem Verhältnis der Summen aus dem Satz 3.32 keine zu großen Abweichungen zu der Anzahl der Primzahlen geben. Wir schauen uns dazu den Satz von **Siegel-Walfisz** an.

Satz 4.10 (Siegel-Walfisz)**.** *(S.2 Aßing 2023)*
Sei $A > 0$ *fest gewählt. Dann gibt es eine Konstante* $C > 0$ *von* $A > 0$ *abhängig* $C = C\left(A\right) > 0$*, sodass*

$$\pi\left(x; a, m\right) = \frac{1}{\varphi\left(m\right)} \operatorname{Li}(x) + O\left(x \cdot e^{-C\sqrt{\ln x}}\right)$$

für alle $m \leq \ln(x)^A$ *und alle* a *mit* $(a, m) = 1$.

Der Fehler ist mit $O\left(x \cdot e^{-C\sqrt{\ln x}}\right)$ angegeben und nicht abhängig von der arithmetischen Progression gegeben durch a und m, gilt aber nur für alle $x \in \mathbb{N}$ mit $m \leq \ln(x)^A$. Es ist $\lim_{x\to\infty} x \cdot e^{-C\sqrt{\ln x}} = \infty$. Der Term $C = C(A)$ ist schwer abzuschätzen. Wir haben hier keine Rechenvorschrift, um ihn zu bestimmen [vgl. S.114 Bürden 1995].

Beispiel 4.11. *Wir setzen $m = 4$, damit gibt es $\varphi(4) = 2$ arithmetische Progressionen, deren Glieder in primen Restklassen modulo 4 einteilen lassen. Solche mit $a = 1$ und $a = 3$. Die grüne Linie des untere Graph zeigt die Primzahlen auf der arithmetische Progressionen $\{n \equiv 3(4) : n \in \mathbb{N}\}$ an. Man erkennt, dass leicht treppenförmige Muster für das Aufkommen der Primzahlen. Die gestrichelte blaue Linie ist unsere heuristische Schätzung $\frac{\mathrm{Li}(x)}{\varphi(x)}$. Die rote Kurve entspricht der Differenz beider Kurven.*

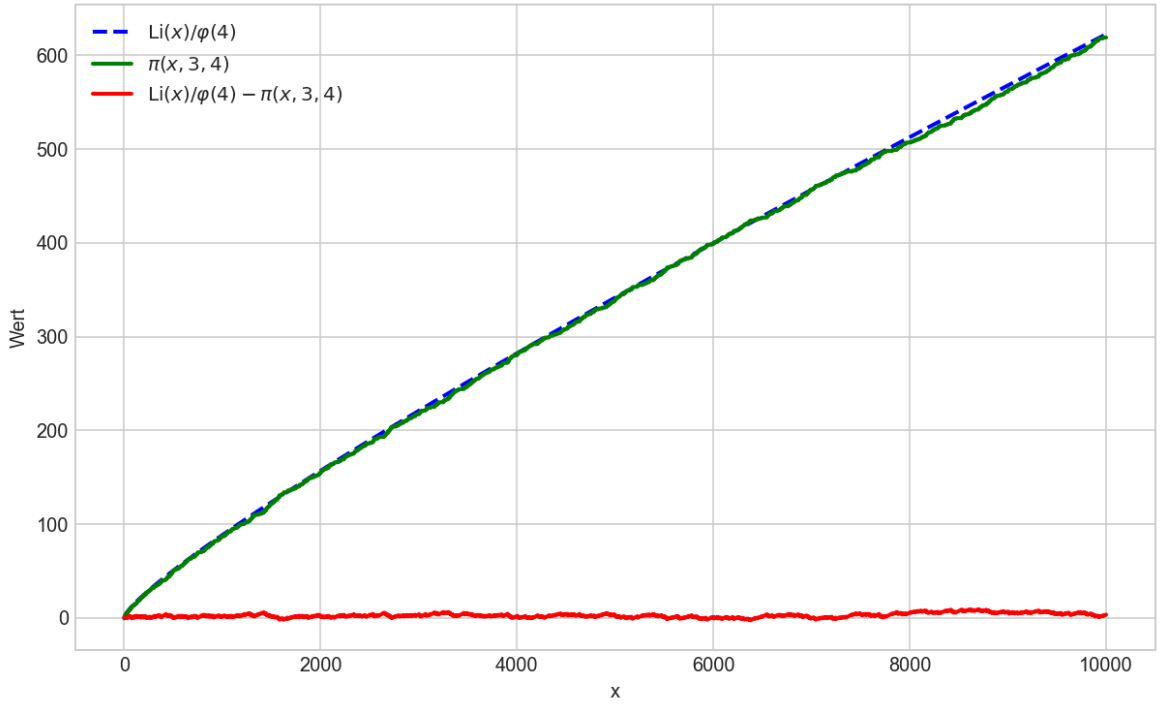

Abbildung 5: Anzahl der Primzahlen mit $\{p \equiv 3 \bmod 4\}$. (Eigene Darstellung)

Wir sollten uns noch die andere arithmetische Progression $\{n \equiv 1(4) : n \in \mathbb{N}\}$ *anschauen. Die Kurven behalten ihre Farben.*

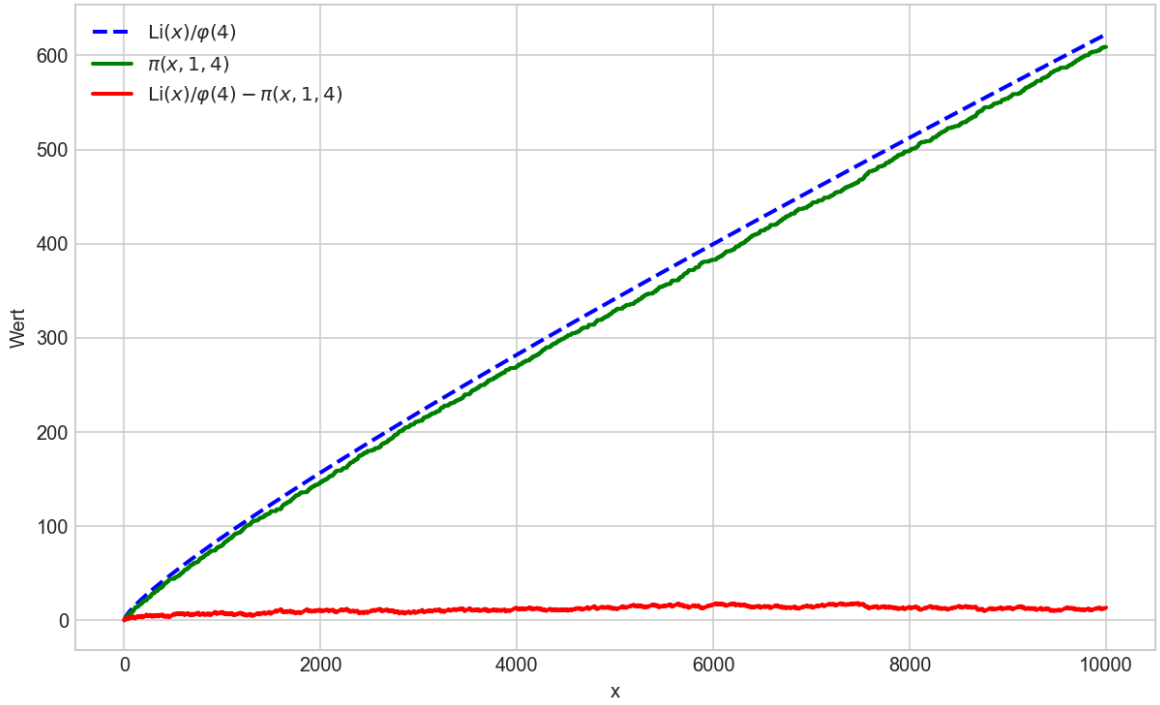

Abbildung 6: Anzahl der Primzahlen mit $\{p \equiv 1 \bmod 4\}$. (Eigene Darstellung)

Es ist zu sehen, dass die zweite arithmetische Progression $\{n \equiv 1(4) : n \in \mathbb{N}\}$ *einen deutlichen größeren Fehler aufweist. Setzen wir der Einfachheit* $A = 1$ *für die Abschätzung von Siegel-Walfisz 4.10 ein, gilt der Fehlerterm für alle* $x > e^4 \approx 54,6$. *Wir wissen nicht wie sich die Differenz für* $x > 10000$ *in diesem Beispiel verhält.*

Für die Fehlerfunktion aus Definition 4.9 gilt

$$R(x; a, m) = O(x \cdot e^{-C\sqrt{\ln x}}).$$

für alle x mit $m \leq \ln(x)^A$ und alle a mit $(a, m) = 1$. Auch wenn nominal $R(x; a, m)$ sehr groß wird, so verhält sich der allgemeine Abstand zu $\pi(x; a, m)$ über den Quotienten sehr gering, wie wir in der nächsten Bemerkung sehen werden.

Bemerkung 4.12. *Wir setzen* $R(x;a,m) = R(x) = x \cdot e^{-C\sqrt{\ln x}}$ *für feste* $a, m \in \mathbb{N}$ *mit* $(a,m) = 1$ *und* $C > 0$. *Wir vergleichen das Wachstum mit* $\frac{x}{\ln x}$. *Es ist*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{R(x)}{\frac{x}{\ln x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^{C\sqrt{\ln x}}}$$

Wir wenden die Regel von L'Hospital[3] *an und erhalten*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^{C\sqrt{\ln x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}\cdot 2}{e^{C\sqrt{\ln x}} \cdot C \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{\ln x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{\ln x}}{e^{C\sqrt{\ln x}} \cdot C}$$

Ein zweites mal L'Hospital führt uns zum Grenzwert.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{\ln x}}{e^{C\sqrt{\ln x}} \cdot C} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\ln x}}\frac{1}{x}}{e^{C\sqrt{\ln x}} \cdot C^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{\ln x}}\frac{1}{2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^{C\sqrt{\ln x}} \cdot C^2} = 0$$

Aufgrund der Beziehung $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1$ *aus dem Primzahlsatz 4.2 können wir zeigen*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{R(x)}{\pi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{R(x)}{\frac{x}{\ln x}} \frac{\frac{x}{\ln x}}{\pi(x)} = 0 \cdot 1 = 0$$

Der Fehler $R(x;a,m) = O(x \cdot e^{-C\sqrt{\ln x}})$ wird relativ zur Gesamtzahl der Primzahlen verschwindend gering. Mit Satz 4.5 und dem Satz von Siegel-Walfisz 4.10 folgt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x;a,m)}{\pi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\varphi(m)}\operatorname{Li}(x) + O\left(x \cdot e^{-C\sqrt{\ln x}}\right)}{\pi(x)} = \frac{1}{\varphi(m)}$$

Die heuristische Aussage aus der Bemerkung 4.8 ist für $x \to \infty$ zutreffend.

[3] Die Regel von L'Hospital kann auf Seite 352 in Arens u. a. 2015 beispielsweise nachgelesen werden.

4.1 Der Satz von Bombieri-Vinogradov

Wir haben mit dem Satz von Siegel-Walfisz 4.10 bereits gesehen, dass der Fehlerterm der heuristische Abschätzung

$$\pi(x;a,m) \approx \frac{1}{\varphi(m)} \operatorname{Li}(x)$$

schwer zu kontrollieren ist. Wir Konnten aber die heuristische Aussage für $x \to \infty$ zeigen. Ein großes Problem ist, dass wir für kleine x, solche nahe m, keinen Fehlerterm angeben können. Wünschenswert wäre, wenn wir eine Aussage für alle x mit $x \geq m$, treffen könnten. Diese Überlegung motiviert das Verteilungsniveau θ.

Definition 4.13. *(vgl. S.14 Aßing 2023)*
Sei $m \in \mathbb{N}$. Wir sagen, die Primzahlen haben ein Verteilungsniveau $\theta > 0$, wenn für jedes $A > 0$ eine konstante $C_A > 0$ gibt, sodass für alle $x \geq 2$ gilt:

$$\sum_{m \leq x^\theta} \max_{a:(a,m)=1} \left| \pi\left(x;a,m\right) - \frac{\pi\left(x\right)}{\varphi\left(m\right)} \right| \leq C_A \frac{x}{\ln(x)^A}$$

Zu einem gegeben $x \geq 2$ wird die größte Abweichung in den Restklassen modulo m gesucht in $\max_{(a,m)=1} \left| \pi\left(x;a,m\right) - \frac{\pi(x)}{\varphi(m)} \right|$. Dabei wird der Fehler alle Restklassen modulo m mit $m \leq x^\theta$ aufsummiert. Es sei angemerkt, dass der Fehler aus der heuristischen Verteilungsannahme $\frac{1}{\varphi(m)}$ kommt, im Gegensatz zum Satz von Sigel-Walfisz 4.10. Dort war die logarithmische Integral-Funktion $\operatorname{Li}(x)$ eine weitere Unsicherheit, da sie auch nur eine Annäherung an $\pi(x)$ ist.
Die Definition des Verteilungsniveau θ macht erst dann Sinn, wenn es solche θ überhaupt gibt. Die Vermutung von Elliot und Halberstam besagt, dass die Primzahlen jedes Verteilungsniveau θ haben mit $0 < \theta < 1$. Der Satz von Bombieri-Vinogradov sichert die Existenz aller Verteilungsniveaus θ mit $\theta < \frac{1}{2}$. [vgl. S.14 Aßing 2023]

Satz 4.14 (Bombieri-Vinogradov)**.** *(vgl. S.14 Aßing 2023)*

Die Primzahlen haben jedes θ mit $\theta < \frac{1}{2}$. Genauer, sei $m \in \mathbb{N}$, dann gibt es für alle $A \geq 0$ ein von A Abhängiges $B_A > 0$ und $C_A > 0$, so dass für alle $x \geq 2$ gilt:

$$\sum_{m \leq Q} \max_{a:(a,m)=1} \left| \pi(x; a, m) - \frac{\pi(x)}{\varphi(m)} \right| \leq C_A \frac{x}{\ln(x)^A}$$

für alle $Q \leq x^{\frac{1}{2}} \ln(x)^{-B_A}$.

Das Verteilungsniveau θ ist wegen $x^{\frac{1}{2}} \ln(x)^{-B_A} < x^{\frac{1}{2}}$ angegeben mit $\theta < \frac{1}{2}$. Die Konstanten C_A und B_A sind theoretisch aus dem Beweis von Satz 4.14 ableitbar. Womit wir einen Unterschied zum Satz von Siegel-Walfisz 4.10 haben, wo die Konstante C_A nicht bestimmbar ist. Die Kraft des Resultates wird erst mit der Riemannsche Vermutung deutlich.

Der Satz von Bombieri-Vinogradov 4.14 ist eng mit der Riemannsche Vermutung verwandt. Diese besagt, dass die meromorphe Fortsetzung der Zetafunktion aus Satz 3.14 alle Nullstellen auf dem Streifen $\{s : 0 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$ einen Realteil von $\frac{1}{2}$ haben. Alle nummerischen Berechnungen stützen die Vermutung. [vgl. S.61 Werner 2009]
Im Jahr 1900 hatte der Mathematik-Professor David Hilbert in Paris einen Vortrag gehalten. In diesem hatte er 23 ungelöste Fragen der Mathematik festgelegt. Er wollte damit den Mathematikern ein Ziel für das zwanzigste Jahrhundert vorgeben. Das achte Problem, die Riemannsche Vermutung, hat bis heute überlebt. [vgl. S.9f Sautoy 2004] Stellt sich die Vermutung als richtig heraus, kann zum Beispiel der Abstand benachbarter Primzahlen abgeschätzt werden

$$p_{n+1} - p_n = O\left(p_n^{\frac{1}{2}} \ln(p_n)^2\right)^{2+\epsilon} \qquad \text{mit } \epsilon > 0$$

[vgl. S.217 Bürden 1995]

Es lassen sich zahlreiche weitere Aussagen unter der Annahme der Richtigkeit der Riemannschen Vermutung herleiten. Der Satz von Bombieri-Vinogradov 4.14 kann die Riemannsche Vermutung teilweise ersetzen. Wir schauen uns folgendes Beispiel aus der *Teilerstatistik* an. Dazu definieren wir:

Definition 4.15. *(vgl. S.10 Bürden 1995)*
Die ***Teilerstatistik*** $d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *gibt die Anzahl der positiven Teiler von* n *an.*

Bemerkung 4.16. *(vgl. S.15 Bürden 1995)*
Es kann gezeigt werden das folgende Ungleichungen gilt. Sei $\epsilon > 0$*, dann gilt für fast alle* n*:*[4]

$$\ln(n)^{\ln 2-\epsilon} < d(n) < \ln(n)^{\ln 2+\epsilon}$$

Für Primzahlen trifft das zum Beispiel nicht zu. Die meisten Zahlen haben damit einen Teiler von etwa $\ln(n)^{\ln 2}$*.*

Man könnte sich die Frage stellen, ob die positiven Teiler von $p + 1$ Besonderheiten aufweisen. Hierzu untersucht man die Summe von Teiler $\sum_{n\leq x} d(n)$. Das hebt die Unterschiede im Vergleich zu einer einzelnen Betrachtung wie in Bemerkung 4.16 stärker hervor. Die Summe von $\sum_{p\leq x} d(p + 1)$ wurde zuerst von Titchmarsh untersucht. Unter Annahme der Richtigkeit, der Riemannschen Vermutung, hat er folgenden Satz gefunden.

Satz 4.17. *(vgl. S.203 Bürden 1995)*
Mit $C_x = \prod_{p\leq x} \left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right)$ *folgt,*

$$\sum_{p\leq x} d(p + 1) = C_x + O\left(x\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right)$$

Dieser Satz kann aus dem Satz von Bombieri-Vinogradov 4.14 hergeleitet werden und ist damit frei von der Riemannschen Vermutung und in jedem Fall richtig. [vgl. S.203 Bürden 1995]

[4]Mit der Aussage „für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \in B$“ ist gemeint, dass die Menge B natürliche Dichte 1 besitzt, daher $\lim_{x\to\infty} \frac{\#\{\, n\leq x : n\in B \,\}}{x} = 1$. Für eine ausführliche Begründung siehe Bürden 1995, S. 14.

5 Schlusswort

Zum Abschluss möchten wir zur eingangs formulierten Fragestellung zurückkehren und die zentralen Ergebnisse dieser Arbeit zusammenfassen. Ziel war es den Satz von Dirichlet über Primzahlen in arithmetischer Progression 1.1 zu beweisen. Dieser wurde schließlich in Kapitel 3.5 erbracht. Dabei lag der Fokus darauf, den Beweis möglichst elementar darzustellen. Aus diesem Grund wurde auf viele weiterführende Inhalte verzichtet, die in der Literatur üblicherweise eine große Rolle spielen. Insbesondere vertiefende Aspekte rund um die Zetafunktion, Dirichlet-Reihen und L-Funktionen.

Im zweiten Teil der Arbeit haben wir uns der Frage gewidmet, wie gleichmäßig die Primzahlen auf die einzelnen arithmetischen Progressionen verteilt sind. Ausgehend über die Definition 3.31 konnten wir die Dichte der Primzahlen in Satz 3.32 bestimmen. Diese führt uns zur Heuristik in Bemerkung 4.8. In dieser nahmen wir an, dass die Dichte auch eine direkte Aussage über die Verteilung der Primzahlen auf arithmetische Progressionen ist. Diese Annahme führt uns direkt zum zweiten Teil der Bachelorarbeit. Wir wollten über die Genauigkeit dieser Annahme diskutieren. Dazu analysierten wir den Satz von Siegel-Walfisz 4.10. Um den Satz diskutieren zu können, brauchten wir noch weitere Resultate aus der Analytischen Zahlentheorie. Wir zeigten den Primzahlsatz in der ursprünglichen Form in Satz 4.2 und in der Form des Integrallogarithmus in Satz 4.5. Diese halfen uns zu zeigen, dass die heuristische Annahme für $x \to \infty$ zutreffend ist. Der Fehler ist im Satz von Siegel-Walfisz nominell schwer anzugeben.

Zum Schluss betrachteten wir den Satz von Bombieri-Vinogradov 4.14. Dieser betrachtet nicht den Fehler einer einzelnen arithmetischen Progression, sondern summiert den größten Fehler mehrere arithmetischen Progressionen modulo m aufeinander. Die Bedeutung dieses Satzes geht jedoch weit über die reine Fehleranalyse hinaus. Der Satz von Bombieri-Vinogradov hat die Kraft, die Riemannsche Vermutung in gewissen Fragefällen auszuhebeln. Ein Beispiel hierfür wurde in dieser Arbeit demonstriert.

Insgesamt zeigt sich, dass die Verteilung der Primzahlen sehr klaren Mustern folgt

und im Mittel, sogar recht vorhersehbar ist. Wie bereits in der Einleitung erwähnt, sind Primzahlen bis heute Gegenstand der Forschung. Jede neue Erkenntnis trägt dazu bei, die Struktur der ganzen Zahlen besser zu verstehen – jenes Fundament, auf dem große Teile der Mathematik aufbauen.

Symbolverzeichnis

$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ Menge von Restklassen modulo m

(a, m) Größter gemeinsamer Teiler von a und m

χ Der Dirichlet-Charakter, Homomorphismus von $G_m \to \mathbb{C}^*$.

$\hat{G}_m$ Menge der Dirichlet-Charaktere auf G_m

$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ Menge der primen Restklassen modulo m

$\lfloor \cdot \rfloor$ Gaußklammer

ln natürliche Logarithmus

ln natürlicher Logarithmus

$\mathbb{C}^*$ Die Menge der Komplexen Zahlen ohne 0

$\mathbb{C}_\eta$ $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > \eta\}$

$\mathbb{N}$ Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{N}_0$ Die Menge der natürlichen Zahlen mit 0 zusätzlich, $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{P}$ Menge der Primzahlen

$\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen

$\mathbb{Z}$ Menge der ganzen Zahlen $\{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

$\mathcal{P}$ Potenzmenge von der Menge der Primzahlen $\mathbb{P}$

φ Eulerfunktion

$\zeta(\cdot)$ Zetafunktion

$a \bmod m$ Rest von a bei Division durch m

$a \equiv b \bmod m$ a und b haben den gleichen Rest beim teilen mit m

$a \not\equiv b \bmod m$ a und b haben nicht den gleichen Rest beim teilen mit m

G_m	Menge der primen Restklassen modulo m
$m \nmid a$	m teilt a nicht
$m \mid a$	m teilt a
O	Landausymbol
o	Landausymbol

Abbildungsverzeichnis

Literatur

Arens, Tilo u. a. (2015). *Mathematik*. Berlin: Springer. ISBN: 978-3-642-44919-5.

Aßing, Alexander (2023). *Gaps between primes*. `https://www.math.uni-bonn.de/people/assing/lectures/gaps_in_primes.pdf`. Lecture notes, University of Bonn.

Bürden, Jörg (1995). *Einführung in die analytische Zahlentheorie*. Berlin[u.a.]: Springer. ISBN: 9783540588214.

Chandrasekharan, Komaravolu (1966). *Einführung in die analytische Zahlentheorie*. Berlin: Springer. ISBN: 3540036113.

Freitag, Eberhard und Rolf Busam (2000). *Funktionentheorie, 1. Mit Lösungshinweisen zu 420 Übungsaufgaben*. 3., neu bearb. und erw. Aufl. Berlin [u.a.]: Springer. ISBN: 3540676414.

Gilbert, Helmberg (2018). *Analytische Zahlentheorie: rund um den Primzahlsatz*. Berlin: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG. ISBN: 3110495139.

Koch Helmut und Lejeune Dirichlet, Johann P. (1982). *Über das Leben und Werk Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlets: Zu seinem 175. Geburtstag*. Bd. 17. Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften der DDR: Mathematik, Naturwissenschaften, Technik. Berlin: Akademie-Verlag.

Peter Gustav Lejeune Dirichlet (19. Nov. 2025). Public Domain. Wikimedia Commons. URL: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Peter_Gustav_Lejeune_Dirichlet.jpg`.

Sautoy, Marcus du (2004). *Die Musik der Primzahlen: auf den Spuren des größten Rätsels der Mathematik*. München: Beck. ISBN: 340652320X.

Schleicher Dierk., Malte LACKMANN. und Bertram ARNOLD (2012). *Eine Einladung in die Mathematik : Einblicke in aktuelle Forschung*. Berlin: Springer. ISBN: 978-3-642-25798-8.

Werner, Dirk (2009). *Einführung in die höhere Analysis: topologische Räume, Funktionentheorie, gewöhnliche Differentialgleichungen, Maß- und Integrationstheorie, Funktionalanalysis*. 2., korrigierte Aufl. Berlin [u.a.]: Springer. ISBN: 9783540795995.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre, dass ich die Bachelor selbstständig und ohne unzulässige Inanspruchnahme Dritter verfasst habe. Ich habe dabei nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet und die aus diesen wörtlich, inhaltlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche den wissenschaftlichen Anforderungen entsprechend kenntlich gemacht. Die Versicherung selbstständiger Arbeit gilt auch für Zeichnungen, Skizzen oder graphische Darstellungen. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form weder derselben noch einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht. Mit der Abgabe der elektronischen Fassung der endgültigen Version der Arbeit nehme ich zur Kenntnis, dass diese mit Hilfe eines Plagiatserkennungsdienstes auf enthaltene Plagiate überprüft und ausschließlich für Prüfungszwecke gespeichert wird.

Ort, Datum:	**Unterschrift:**
Riedstadt 19.12.2025	Dan Blumenrath