

Fakultät für Mathematik und Informatik
der FernUniversität Hagen

Bachelorarbeit
im Lehrgebiet Analysis

**Der Satz von Poincaré-Bendixson
und Anwendungen**

von

Juliane Lebert

Matrikelnummer: 8917132

am

17. April 2017

Erstgutachter: Prof. Dr. Delio Mugnolo

Zweitgutachterin: Dr. Hafida Laasri

Vorwort

Die hier vorliegende Arbeit ist in drei große Kapitel untergliedert. Im ersten Teil wird eine kurze, allgemeine Einführung in dynamische Systeme gegeben, um im zweiten Abschnitt den Satz von Poincaré-Bendixson erarbeiten zu können. Im Dritten wird dieser an zwei Beispielen aus der Ökologie angewendet.

Alle für den weiteren Verlauf der Ausarbeitung notwendigen Definitionen und Voraussetzungen – dynamisches und autonomes System, Orbit, Equilibrium – werden zu Beginn des ersten Abschnittes eingeführt und an einem Beispiel erläutert. Bei Bedarf können möglicherweise nicht aufgeführte Beweise unter anderem in den entsprechenden Kapiteln der Bücher von Gerald Teschl [1] und von Jan W. Prüss/Mathias Wilke [3] nachgelesen werden.

Im zweiten Abschnitt des ersten Kapitels werden zwei Möglichkeiten vorgestellt, mit welchen die Stabilität in speziellen Lösungen – den Equilibrien – untersucht werden kann. Zuerst wird das Prinzip der Linearisierten Stabilität erläutert, anschließend wird die direkte Methode von Ljapunov eingeführt, welche von dem russischen Mathematiker Alexander Michailowitsch Ljapunov (1857-1918) entwickelt wurde.

Im dritten Unterkapitel werden die Begriffe der Vollständigkeit und Invarianz definiert und die für den nachfolgenden Satz von Poincaré-Bendixson wichtige ω_{\pm} -Grenzmenge mit ihren Eigenschaften genauer betrachtet.

Als Literaturvorlagen dienen in diesem Kapitel vor allem die Bücher *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems* von Gerald Teschl [1] und *Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme* von Jan W. Prüss/Mathias Wilke [3]. Kapitel zwei ist ebenfalls in drei Unterkapitel aufgeteilt. Während im ersten Abschnitt wichtige Hilfsmittel wie die Transversale und die Poincaré-Abbildung eingeführt werden, folgt im zweiten Teil eine genaue Untersuchung von Trajektorien, Transversalen und Grenzmengen beziehungsweise der Schnittmengen, welche diese untereinander bilden können.

Abschnitt drei widmet sich anschließend ausführlich dem Satz von Poincaré-Bendixson, der das Verhalten von Bahnkurven in der Ebene beschreibt. Dabei wird sowohl die von dem Franzosen Jules Henri Poincaré (1854-1912) erstellte, aber nicht bewiesene, schwächere Form, als auch die von dem schwedischen Mathematiker Ivar Otto Bendixson (1861-1935) veröffentlichte allgemeinere Version aufgeführt.

Auch im zweiten Kapitel werden vor allem die Bücher von Teschl [1] und von Prüss/Wilke [3] als Literaturvorlagen verwendet. Die Abbildungen sind in weiten Teilen den Vorlagen von Teschl [1] nachempfunden.

Das letzte Kapitel zeigt eine Anwendung der erarbeiteten Theorie in der Ökologie. Hierbei wird zuerst das Zusammenspiel zweier verschiedener Populationen – hier Fische und Haie – untersucht, wobei angenommen wird, dass beide Bevölkerungen unendlich ansteigen könnten. Die Interaktion der beiden Spezies kann durch zwei nicht-lineare, autonome Differentialgleichungen ausgedrückt werden. Diese wurden zu Beginn des 20. Jahrhunderts von Vito Volterra (1860-1940) eingeführt. Unabhängig von diesem untersuchte auch Alfred James Lotka (1880-1949) die wechselseitige Beziehung zweier Spezies und gelangte zum selben Ergebnis. Daher werden die verwendeten Differentialgleichungen auch Lotka-Volterra-Gleichungen genannt.

Im abschließenden Abschnitt des dritten Kapitels wird das wesentlich realistischere, erweiterte Räuber-Beute-Modell, unter Annahme einer Wachstumsbeschränkung der Bevölkerungen, betrachtet.

Als Literaturvorlage dient in diesem Kapitel besonders das Buch *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra* von Morris W. Hirsch/Stephen Smale [2].

Inhaltsverzeichnis

1	Dynamische Systeme	4
1.1	Einführung und Definitionen	4
1.2	Stabilität der Equilibrien	8
1.3	Die ω_{\pm} -Grenzmenge	17
2	Der Satz von Poincaré-Bendixson	21
2.1	Poincaré-Abbildung	21
2.2	Schnittmengen von Orbit, Grenzmenge und Transversale	25
2.3	Poincaré-Bendixson-Theorem	28
3	Anwendung in der Ökologie	34
3.1	Räuber-Beute-Modell	34
3.2	Erweitertes Räuber-Beute-Modell	43
A	Anhang	53

1 Dynamische Systeme

Der Satz von Poincaré-Bendixson ist ein wichtiges Hilfsmittel, um die Existenz von periodischen Orbits oder Grenzyklen in ebenen dynamischen Systemen nachzuweisen. Im Folgenden werden zunächst alle nötigen Grundlagen und Definitionen für den Beweis und die Anwendung des Satzes von Poincaré-Bendixson eingeführt.

Hierbei werden vor allem die Bücher von Teschl [1], Prüss/Wilke [3] sowie von Grüne/Junge [4] und das *Taschenbuch der Mathematik* [9] zu Grunde gelegt.

1.1 Einführung und Definitionen

Ein dynamisches System ist ein mathematisches Modell, welches die zeitliche Entwicklung biologischer, physikalischer oder anderer real existierender Vorgänge mit Hilfe von gewöhnlichen Differentialgleichungen beschreibt.

Gewöhnliches Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{1}$$

Hierbei ist $x(t_0) = x_0$ die Anfangsbedingung zum Zeitpunkt $t_0 \in \Gamma$, die Funktion $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, der Zustand des Systems zum Zeitpunkt t und $f(t, x(t))$ eine k -mal stetig differenzierbare Abbildung $f: \Gamma \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$. Häufig schreibt man für (1) kurz

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

Wird der Zeitparameter $t \in \Gamma$ in der Menge $\Gamma = \mathbb{R}$ (oder \mathbb{R}_+) der (positiven) reellen Zahlen definiert, spricht man von einem **kontinuierlichen System**. Ist dagegen t aus der Menge $\Gamma = \mathbb{Z}$ (oder \mathbb{Z}_+) der (positiven) ganzen Zahlen, heißt das System **diskret**. Bis auf Weiteres sei das betrachtete System stets kontinuierlich, also $\Gamma = \mathbb{R}$ beziehungsweise $\Gamma = \mathbb{R}_+$.

Definition 1.1. Sei $x \in M$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge des n -dimensionalen euklidischen Raums \mathbb{R}^n und $\Phi(t, x)$ eine Abbildung

$$\Phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M, (t, x) \mapsto \Phi(t, x).$$

Dann heißt $\Phi(t, x)$ invertierbares **dynamisches System** (auch **Fluss**), falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $\Phi(0, x) = x$, für alle $x \in M$ (Identitätseigenschaft)
2. $\Phi(t + s, x) = \Phi(t, \Phi(s, x))$, für alle $t, s \in \mathbb{R}$, $x \in M$ (Gruppeneigenschaft)
3. Φ ist stetig in $(t, x) \in \mathbb{R} \times M$ (Stetigkeit)

In diesem Fall heißt M der **Phasenraum** des dynamischen Systems.

Ersetzt man \mathbb{R} durch \mathbb{R}_+ , so spricht man von einem **semidynamischen System** oder **Halbfluss** auf M und (2.) heißt Halbgruppeneigenschaft.

Ein wichtiger Spezialfall des wie in (1.1) definierten dynamischen Differentialgleichungssystems ist ein

Autonomes Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2}$$

mit $x \in M$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und einer k -mal stetig differenzierbaren Funktion $f \in C^k(M, \mathbb{R}^n)$, $k, n \in \mathbb{N}$, einem Vektorfeld.

Dies ist ein Gleichungssystem, bei dem $f(t, x) \equiv f(x)$ für alle $x \in M$ gilt, die Funktion f also zeitunabhängig ist.

Ein biologischer oder physikalischer Vorgang, der durch eine autonome Differentialgleichung beschrieben wird, ist aufgrund der (Halb-)Gruppeneigenschaft dynamischer Systeme **translationsinvariant**. Dies bedeutet, dass Prozesse, die bei gleichen Anfangsbedingungen $x_0 = x_1$ zu verschiedenen Anfangszeiten $t_0 \neq t_1$ gestartet werden, bis auf eine Zeitverschiebung identisch ablaufen. Aufgrund der Translationsinvarianz kann man bei autonomen Systemen ohne Einschränkung als Anfangszeitpunkt stets $t_0 = 0$ wählen.

Beispiel 1.2. Man betrachte als Beispiel für ein planares, autonomes Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t) + y(t) + \alpha x^3(t) & \alpha \in \mathbb{R} \\ \dot{y}(t) &= -y(t) + x(t) + \beta y^3(t) & \beta \in \mathbb{R} \\ x(0) &= x_0 \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

mit $(x, y)^T \in M$, der offenen Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ und einer stetig differenzierbaren Funktion $f \in C^1(M, \mathbb{R}^2)$.

Die Funktion

$$f(x(t), y(t)) := \begin{pmatrix} -x(t) + y(t) + \alpha x^3(t) \\ -y(t) + x(t) + \beta y^3(t) \end{pmatrix}$$

kann man als ein Vektorfeld in der Ebene \mathbb{R}^2 mit dem Vektor $(x(t), y(t))^T$ betrachten. Um ein Richtungsfeld in einem zweidimensionalen Koordinatensystem mit den Achsen x und y zu erstellen, setzt man die autonomen Gleichungen

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial x}{\partial t}(t) = -x(t) + y(t) + \alpha x^3(t)$$

und

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial y}{\partial t}(t) = -y(t) + x(t) + \beta y^3(t)$$

zueinander ins Verhältnis. So erhält man mit

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{-y + x + \beta y^3}{-x + y + \alpha x^3}$$

die Steigungen in den einzelnen Punkten. Diese werden als Richtungspfeile an den entsprechenden Stellen eines zweidimensionalen Koordinatensystems eingezeichnet.

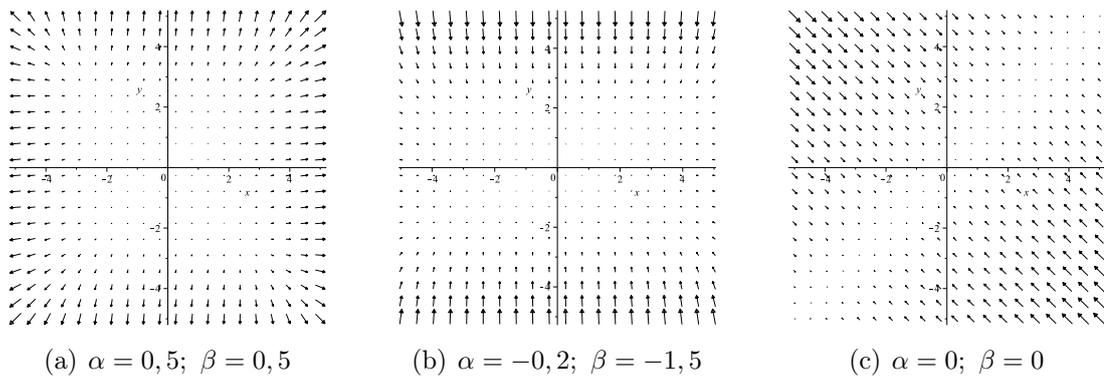


Abbildung 1: Richtungsfelder mit verschiedenen α und β

Mit Hilfe eines Computeralgebrasystems – hier mit Maple – lassen sich die Richtungsfelder für verschiedene $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ veranschaulichen (Abbildung 1). Hierbei kann man erkennen, dass die Vektoren für $\alpha, \beta > 0$ in hinreichend großer Entfernung vom Ursprung von diesem wegführen, während für $\alpha, \beta < 0$ die Richtungspfeile auf den Nullpunkt zulaufen. Für den Fall $\alpha = \beta = 0$ ergibt sich, dass sämtliche Richtungsvektoren gegen die Diagonale $y = x$ streben.

Anhand des Richtungsfeldes erhält man eine Aussage über den möglichen Verlauf der Lösungskurven eines wie in Definition 1.1 bestimmten, dynamischen Differentialgleichungssystems. Man kann erkennen, dass es Punkte (t, x) gibt, welche die gleiche Steigung c haben. Für sie gilt

$$\dot{x}(t) = f(t, x) = c$$

mit konstantem $c \in \mathbb{R}$. Verbindet man die Menge dieser Punkte zu einer Kurve, so erhält man eine **Isokline** zur Differentialgleichung $\dot{x} = f(t, x)$.

Gilt der Sonderfall $c = 0$, also

$$\dot{x}(t) = f(t, x) = 0,$$

dann heißt die Kurve **Nullkline**.

Beispiel 1.3. In Abbildung 2 sind die Nullklinen für $\dot{x}(t) = 0$ respektive $\dot{y}(t) = 0$ in die Richtungsfelder aus Beispiel 1.2 eingezeichnet.

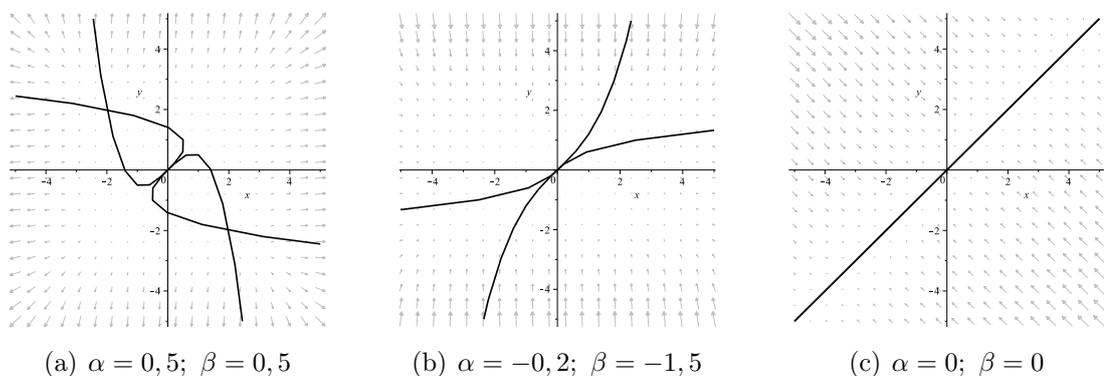


Abbildung 2: Richtungsfelder mit Nullklinen für $\dot{x} = 0$ und $\dot{y} = 0$

Die Lösungen eines wie in Definition 1.1 beschriebenen, dynamischen Systems, welche für $t_0 = 0$ die Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ erfüllen, lassen sich als Kurven im Phasenraum $M \subseteq \mathbb{R}^2$ darstellen. Sie liegen in jedem Punkt tangential zum Vektorfeld und können wie folgt beschrieben werden.

Definition 1.4. Sei $x_0 \in M$ beliebig, aber fixiert. Dann beschreibt die Abbildung

$$\gamma: t \mapsto \Phi(t, x_0), \quad t \in \Gamma$$

eine Bewegung des dynamischen Systems mit der Anfangsbedingung x_0 zum Zeitpunkt $t_0 = 0$. Das Bild $\gamma(x_0) := \Phi(t, x_0), t \in \Gamma$ nennt man **Orbit, Trajektorie, Bahn- oder Lösungskurve**.

Eine Trajektorie ist somit die gesuchte Lösung

$$x: t \mapsto \Phi(t, x_0), \quad t \in \Gamma$$

des **Anfangswertproblems** (auch **Cauchy-Problems**) eines wie in Definition 1.1 beschriebenen dynamischen Systems für einen gegebenen Anfangswert x_0 .

Analog zum Orbit wird die Menge

$$\gamma_+(x_0) := \{\Phi(t, x_0) \mid t > 0\}$$

als **positiver Semiorbit** oder **Vorwärtsorbit** von x_0 bezeichnet.

Falls das System invertierbar ist, also $t \in \mathbb{R}$ gilt, nennt man die Menge

$$\gamma_-(x_0) := \{\Phi(t, x_0) \mid t < 0\}$$

den **negativen Semiorbit** oder **Rückwärtsorbit** von x_0 .

Hieraus ergibt sich die vollständige Trajektorie

$$\gamma(x) = \gamma_-(x) \cup \{x\} \cup \gamma_+(x)$$

Beispiel 1.5. Man betrachte das bereits bekannte Beispiel

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + y + \alpha x^3 & \alpha &\in \mathbb{R} \\ \dot{y} &= -y + x + \beta y^3 & \beta &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

mit $f \in C^1(M, \mathbb{R}^2)$, $M \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $(x, y)^T \in M$.

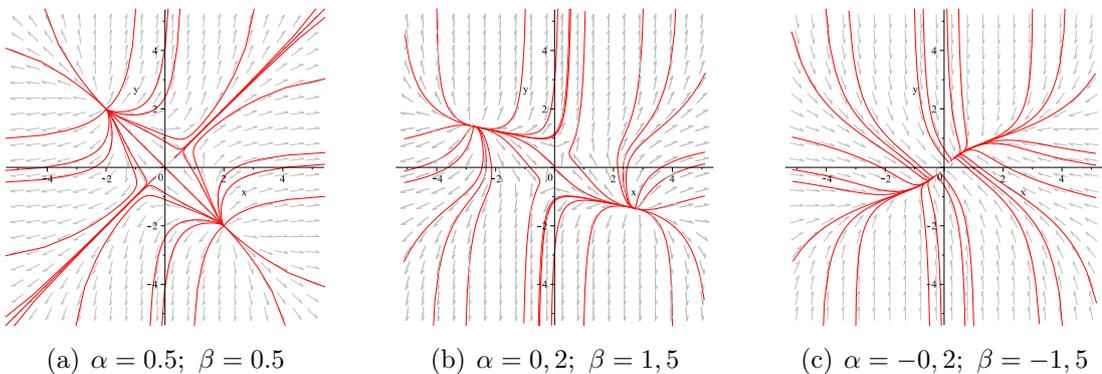


Abbildung 3: Phasenportraits mit verschiedenen α und β

Mit Hilfe von Maple lassen sich die Trajektorien (oder auch Phasenkurven) für unterschiedliche Anfangsbedingungen x_0, y_0 in das Richtungsfeld einzeichnen. So entstehen Phasenportraits, wie in Abbildung 3 für verschiedene Werte für α und β dargestellt. In diesen kann man erkennen, dass die meisten Lösungskurven für $\alpha, \beta > 0$ von zwei verschiedenen Punkten weg streben, einige wenige laufen auf den Ursprung zu. Für $\alpha, \beta < 0$ konvergieren die Orbits gegen den Ursprung.

Das Verhalten der Trajektorien für verschiedene Anfangsbedingungen wird im weiteren Verlauf untersucht. Hierfür werden Lösungen in speziellen Punkten betrachtet, welche zunächst definiert werden.

Einen Punkt $x \in M$ nennt man **T -periodisch**, wenn ein $T \in \Gamma, T > 0$, so existiert, dass $\Phi(0, x) = \Phi(T, x) = x$ gilt. Ist T die kleinste positive Zahl mit dieser Eigenschaft, so heißt T die **Periode** von x . Aufgrund der Eigenschaften eines wie in 1.1 definierten, dynamischen Systems folgt $\Phi(t, x) = \Phi(t + T, x)$ für alle $t \in \Gamma$. Insbesondere heißt ein Orbit **periodischer Orbit**, wenn ein Punkt – und damit auch alle anderen Punkte – des Orbits periodisch ist.

Die zu einem dynamischen System (1.1) zugehörigen Trajektorien lassen sich in drei Gruppen unterteilen:

- **Fester Orbit:** Besteht aus nur einem Punkt, also $\Phi(0, x) = \Phi(t, x) = x$ für alle $t \in \Gamma$.
- **Regulärer periodischer Orbit:** Ist periodisch mit $T > 0$ und daher geschlossen, es gilt $\gamma_+(x) \cap \gamma_-(x) \neq \emptyset$.
- **Nicht-geschlossener Orbit:** Es existiert kein T , die Kurve ist offen und doppelpunktfrei.

Ein Punkt x^* heißt **Ruhelage, Equilibrium** oder auch **Fixpunkt** von $\Phi(t, x)$, wenn $\gamma(x) = x^*$ für alle $t \in \Gamma$ gilt, $\gamma(x)$ also ein fester Orbit und die Lösung somit zeitlich konstant ist. Offensichtlich folgt hieraus, dass für jede Ruhelage

$$f(x^*) = 0$$

gilt. In der graphischen Darstellung erhält man einen Fixpunkt als Schnittpunkt der Nullklinen.

Die Menge der Equilibrien bezeichnet man mit

$$\mathcal{E} := f^{-1}(0) = \{x^* \in M \mid f(x^*) = 0\}.$$

Gilt $f(x) \neq 0$, so heißt x **regulärer Punkt**.

1.2 Stabilität der Equilibrien

Nicht immer ist es möglich, Lösungskurven für dynamische Systeme explizit zu berechnen. Um dennoch Aussagen über das Langzeitverhalten eines Flusses für $t \rightarrow \infty$ machen zu können, untersucht man die Stabilität des Systems in Equilibrien oder in periodischen Orbits. Die Stabilität beschreibt, ob sich ein Zustand unter einer gewissen Störung $u(t)$ stabil verhält, also wieder in die ursprüngliche Ausgangslage zurückkehrt, oder ob die Auslenkung eine große Veränderung des Systems bewirkt.

Gegeben sei bis auf Weiteres das Anfangswertproblem eines autonomen Differentialgleichungssystems der Form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3}$$

mit $x \in M$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(M, \mathbb{R}^n)$.

Bezeichnet $\|\cdot\|$ die euklidische Norm eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$, so wird die Stabilität in einem Equilibrium wie folgt definiert.

Definition 1.6. Sei $x^* \in M$ ein Equilibrium eines Differentialgleichungssystems(3). Dann heißt der Punkt x^*

- **stabil**, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so existiert, dass

$$\|\gamma(x) - x^*\| \leq \epsilon$$

für alle $t \geq 0$ und alle $x \in M$ mit $\|x - x^*\| \leq \delta$ gilt.

- **instabil**, wenn x^* nicht stabil ist.
- **attraktiv**, wenn eine Umgebung $U(x^*) \subset M$ des Equilibriums so existiert, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\gamma(x) - x^*\| = 0$$

und alle $x \in U(x^*)$ gilt.

- **asymptotisch stabil**, wenn x^* stabil und attraktiv ist.

Um die Stabilität in den Ruhelagen zu untersuchen, bestehen verschiedene Methoden. Zwei von Ihnen werden im Folgenden genauer erläutert.

Prinzip der Linearisierten Stabilität

Eine Möglichkeit, die Menge der Equilibrien \mathcal{E} zu untersuchen, bietet das **Prinzip der Linearisierten Stabilität** (siehe [3], Seite 94). Hierbei entwickelt man die nicht-lineare Funktion f um die Ruhelage x^* nach Taylor und betrachtet anschließend das linearisierte System

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

mit der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ein lineares System lässt sich mit Hilfe der Eigenwerte der Matrix A vollständig charakterisieren.

Sei $x = x(t)$ eine Lösung und $x^* \in M$ ein Equilibrium von (3), es gelte also $f(x^*) = 0$. Um die Stabilität der speziellen Lösung x^* festzustellen, betrachtet man eine Störung der Ruhelage $u(t) := x(t) - x^*$. Mit Hilfe von $x(t) = u(t) + x^*$ erhält man die Ableitung von $u(t)$ nach t

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= \dot{x}(t) - \frac{\partial}{\partial t} x^* \\ &= f(x(t)) - \underbrace{f(x^*)}_{=0} \\ &= f(u(t) + x^*). \end{aligned}$$

Die Taylor-Entwicklung von $f(u(t) + x^*)$ im Equilibrium x^* ergibt die Linearisierung

$$f(u(t) + x^*) = \underbrace{f(x^*)}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*)u(t) + r(u(t))$$

mit der Jacobi-Matrix

$$Df(x) := \frac{\partial f}{\partial x}(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

und dem Restglied

$$r(u(t)) := f(u(t) + x^*) - Df(x^*)u(t).$$

Für $r(u)$ gilt $\frac{r(u)}{|u|} \rightarrow 0$ für $|u| \rightarrow 0$ (siehe [11], Seite 283).

Setzt man das Ergebnis in die Ableitung von $u(t)$ nach t ein, folgt

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= f(u(t) + x^*) \\ &= Df(x^*)u(t) + r(u(t)) \end{aligned}$$

und man erhält das äquivalente, semilineare System

$$\dot{u} = Au + r(u)$$

mit $A := Df(x^*)$.

Das weitere Vorgehen wird beispielhaft im euklidischen Raum \mathbb{R}^2 erläutert, folgt aber analog für $n > 2$. In hinreichend kleiner Umgebung von x^* geht die Störung u und damit auch das Restglied $r(u)$ gegen Null und man kann das linearisierte System

$$\dot{u} = Au, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

untersuchen.

Mit Hilfe des charakteristischen Polynoms der Jacobi-Matrix $Df(x^*) = A$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - p\lambda + q = 0$$

mit $p = \text{sp } A = a_{11} + a_{22}$ und $q = \det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ erhält man die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{sp } A}{2} \pm \sqrt{\frac{(\text{sp } A)^2}{4} - (\det A)}$$

der Matrix A in den Ruhelagen. Sind alle Eigenwerte λ_j , $j = \{1, 2\}$, von $Df(x^*)$ in einem Equilibrium im Realteil ungleich Null, also $\text{Re } \lambda_j \neq 0$, so nennt man x^* **hyperbolisch**.

Hyperbolische Equilibrien lassen sich weiter unterteilen in:

- **asymptotisch stabil:** Alle Realteile der Eigenwerte $\text{Re } \lambda_j$ sind negativ. Dieser Punkt wird **Senke** genannt, alle Richtungsvektoren in der Umgebung laufen auf x^* zu.
- **instabil:**
 - Alle Realteile der Eigenwerte $\text{Re } \lambda_j$ sind positiv. Der Fixpunkt heißt **Quelle**, die Richtungsvektoren zeigen von hier weg.
 - Mindestens ein Realteil der Eigenwerte $\text{Re } \lambda_j$ ist positiv und einer negativ. Diese Ruhelage ist ein **Sattel**, die Richtungsvektoren führen sowohl darauf zu, als auch davon weg.

In linearen Systemen sagt man, x^* ist **marginal stabil**, wenn für alle Realteile der Eigenwerte $Re \lambda_j \leq 0$ gilt und $Re \lambda_j = 0$ halb-einfach – die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes gleich der geometrischen Vielfachheit – ist. Für linearisierte Systeme kann man für Equilibrien mit mindestens einem verschwindenden Eigenwert auf diese Weise keine Aussage treffen.

Einen vollständigen Orbit, der für $t \rightarrow -\infty$ das Equilibrium x_1^* als Grenzwert besitzt und für $t \rightarrow +\infty$ die Ruhelage x_2^* (siehe Abbildung 4), nennt man

- **homoklin**, falls $x_1^* = x_2^*$ ist. In diesem Fall ist x^* ein Sattel.
- **heteroklin**, wenn $x_1^* \neq x_2^*$ gilt. Hier ist x_1^* entweder eine Quelle oder ein Sattel, x_2^* eine Senke oder ebenfalls ein Sattel.

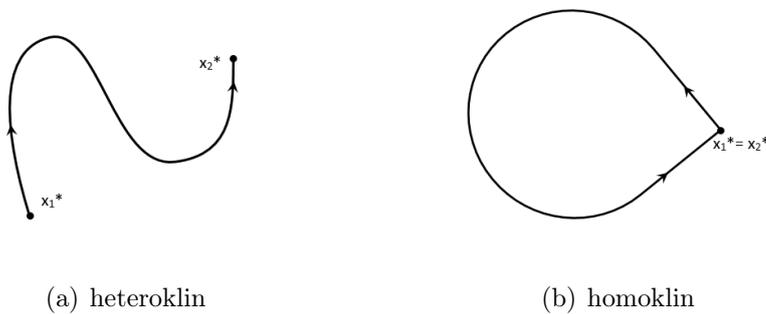


Abbildung 4: Beispiel für einen heteroklinen beziehungsweise homoklinen Orbit

Beispiel 1.7. Man betrachte wieder das Beispiel 1.2 des autonomen Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + y + \alpha x^3 & \alpha &\in \mathbb{R} \\ \dot{y} &= -y + x + \beta y^3 & \beta &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Setzt man

$$f(x, y) := \begin{pmatrix} -x + y + \alpha x^3 \\ -y + x + \beta y^3 \end{pmatrix} = 0,$$

so erhält man ein Equilibrium $z^* = (x^*, y^*)$ bei

$$z_1^* = (0, 0)$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Gilt $\alpha = \beta = 0$, dann gibt es weitere Fixpunkte bei

$$z_x^* = (x, x).$$

In diesem Fall bildet die Gerade $y = x$ die Menge der Equilibrien \mathcal{E} .

Für $\alpha, \beta > 0$ existieren neben $z_1^* = (0, 0)$ noch zwei zusätzliche Ruhelagen bei

$$z_{2,3}^* = \left(\pm \frac{\sqrt{\alpha^{1/3} + \beta^{1/3}}}{\sqrt{\alpha}\beta^{1/6}}, \mp \frac{\sqrt{\alpha^{1/3} + \beta^{1/3}}}{\sqrt{\beta}\alpha^{1/6}} \right).$$

Die Jacobi-Matrix $Df(x, y)$ für das autonome System lautet

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} -1 + 3\alpha x^2 & 1 \\ 1 & -1 + 3\beta y^2 \end{pmatrix}$$

Berechnet man die beiden Eigenwerte λ_j , $j = \{1, 2\}$, dieser Matrix in den Equilibrien, erhält man folgende Aussage:

- Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist

$$Df(z_1^*) = Df(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 0$, somit ist der Punkt z_1^* nicht hyperbolisch.

- Für $\alpha = \beta = 0$ ist

$$Df(z_x^*) = Df(x, x) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Auch hier erhält man für die Eigenwerte jeweils $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$ und daher sind die Ruhelagen z_x^* ebenfalls nicht hyperbolisch.

- Für $\alpha, \beta > 0$ ist

$$Df(z_{2,3}^*) = Df\left(\pm \frac{\sqrt{\alpha^{1/3} + \beta^{1/3}}}{\sqrt{\alpha}\beta^{1/6}}, \mp \frac{\sqrt{\alpha^{1/3} + \beta^{1/3}}}{\sqrt{\beta}\alpha^{1/3}}\right) = \begin{pmatrix} 2 + 3\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{3}} & 1 \\ 1 & 2 + 3\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}.$$

Man berechnet

$$p = \text{sp } A = 4 + 3 \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}} \right] > 0$$

sowie

$$q = \det A = 12 + 6 \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}} \right].$$

und erhält $p^2 > 4q$. Somit sind die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[4 + 3 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}} + 3 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{3}} \pm \sqrt{9 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} + 9 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}} - 14} \right]$$

für $\alpha, \beta > 0$ beide reell und positiv. Also sind die Equilibrien $z_{2,3}^*$ jeweils Quellen, folglich instabil. Dies bedeutet, dass alle Richtungsvektoren in genügend kleiner Umgebung von diesen Punkten wegführen.

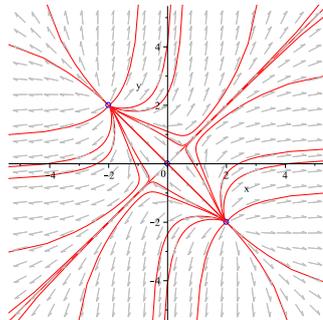


Abbildung 5: Phasenportrait mit Equilibrien für $\alpha = 0,5$ und $\beta = 0,5$

In Abbildung 5 sind in das Phasenportrait für $\alpha = \beta = 0,5$ die Equilibrien $z_1^* = (0, 0)$, $z_2^* = (2, -2)$ und $z_3^* = (-2, 2)$ eingezeichnet. Man erkennt, dass alle Orbits, welche in hinreichend kleiner Umgebung von z_2^* beziehungsweise z_3^* beginnen, von jeweils diesem Equilibrium wegführen. Zudem gibt es je einen heteroklinen Orbit, welcher von z_2^* respektive z_3^* nach z_1^* führt. Über den Punkt z_1^* kann man zum jetzigen Zeitpunkt keine Aussage bezüglich der Stabilität treffen.

Das Prinzip der Linearisierten Stabilität, auch indirekte Methode genannt, ist ungeeignet, um genauere Aussagen über nicht-hyperbolische Equilibrien zu machen. Es gibt jedoch eine zweite, direkte Möglichkeit, mit welcher man sowohl lineare als auch nicht-lineare Systeme auf Stabilität untersuchen kann. Diese Methode wurde von dem russischen Mathematiker Alexander Ljapunov entwickelt und wird im Folgenden beschrieben.

Ljapunov-Stabilität

Gegeben sei weiterhin das autonome Differentialgleichungssystem (3)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

mit $x \in M$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(M, \mathbb{R}^n)$.

Definition 1.8. Sei $x^* \in M$ ein Equilibrium von (3) und $U \subset M$ eine offene Umgebung von x^* . Eine stetige, auf $U \setminus \mathcal{E}$ differenzierbare Funktion

$$V: U \rightarrow \mathbb{R}$$

mit $V(x^*) = 0$ und $V(x) > 0$ für $x \neq x^*$ heißt

- **Ljapunov-Funktion**, falls V entlang der Lösungen $x(t)$ des autonomen Systems monoton fallend ist. Die Funktion $(V \circ x)(t)$ fällt daher für jedes beliebige $x(t)$ in t monoton.
- **strikte Ljapunov-Funktion**, falls V entlang der nicht-konstanten Lösungen $x(t)$ des autonomen Systems streng monoton fallend ist. Die Funktion $(V \circ x)(t)$ fällt somit für jede beliebige nicht konstante Lösung $x(t)$ in t streng monoton.

Bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt in \mathbb{R}^n und ∇ den Gradientenoperator, dann lässt sich mit Hilfe der Kettenregel die Funktion $(V \circ x)(t)$ nach t ableiten und man erhält

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(V \circ x)(t) &= \dot{V}(x(t)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} V(x(t)) \dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} V(x(t)) \dot{x}_n \\ &= \langle \nabla V(x(t)), \dot{x}(t) \rangle \\ &= \langle \nabla V(x(t)), f(x(t)) \rangle. \end{aligned}$$

\dot{V} ist die Richtungsableitung der Funktion V in Richtung f und wird **orbitale Ableitung** von V entlang der Bahnkurven des autonomen Systems (3) genannt.

Verschwindet die orbitale Ableitung auf ganz M , gilt also $\dot{V} = 0$ für alle $x \in M$, dann heißt V **erstes Integral** für f . Dieses ist entlang eines Orbits $\gamma(x)$ konstant. Mit Definition 1.8 folgt, dass die Funktion $V \in C^1(U, \mathbb{R})$ genau dann eine (strikte) Ljapunov-Funktion ist, wenn

$$\langle \nabla V(x(t)), f(x(t)) \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } x \in U$$

beziehungsweise

$$\langle \nabla V(x(t)), f(x(t)) \rangle < 0 \quad \text{für alle } x \in U \setminus \mathcal{E}$$

gilt.

Hieraus folgt der Satz über die Ljapunov-Stabilität (siehe [2], Seite 193).

Lemma 1.9. (Ljapunov-Stabilität)

Sei $x^* \in M$ ein Equilibrium des autonomen Differentialgleichungssystems (3). Gilt für die orbitale Ableitung \dot{V} einer Ljapunov-Funktion V mit $V(x^*) = 0$ und $V(x) > 0$ für $x \neq x^*$

- $\dot{V} \leq 0$ für $x \in U$, dann ist x^* stabil.
- $\dot{V} < 0$ für $x \in U \setminus \mathcal{E}$, dann ist x^* asymptotisch stabil.

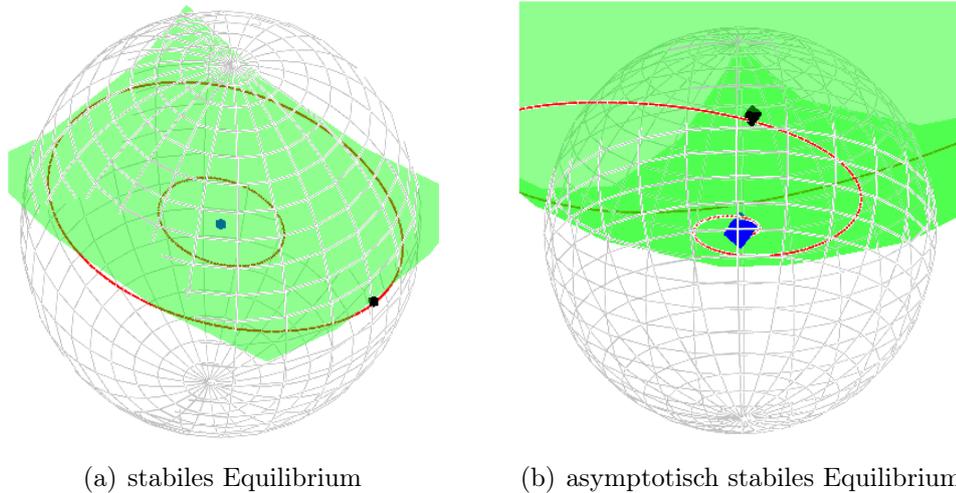


Abbildung 6: Ljapunov-Funktion mit Orbit und Equilibrium

Beweis. Sei $B_\delta(x^*) \subset U$ eine geschlossene Kugel um ein Equilibrium x^* (blau) mit Radius $\delta > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$, welche vollständig in U liegt, und die Sphäre $S_\delta(x^*)$ die Begrenzung der Kugel (Gitter). Mit $\alpha := \min V(x)$, $x \in S_\delta(x^*)$ (schwarz) bezeichne man den kleinsten Wert der Ljapunov-Funktion $V(x)$ (grün) auf der Sphäre (Abbildung 6(a)). Da $V(x) > 0$ für $x \neq x^*$ gilt, ist auch $\alpha > 0$. Sei $U_1 = \{x \in B_\delta(x^*) \mid V(x) < \alpha\}$ das Innere der Kugel. Dann kann eine Lösung $x(t)$ (rot), welche in U_1 beginnt, die Sphäre $S_\delta(x^*)$ nicht mehr kreuzen, da $\dot{V} \leq 0$, also auf der Trajektorie monoton fällt. Somit bleibt jede Lösung, die in U_1 startet, immer innerhalb der Kugel $B_\delta(x^*)$. Dies zeigt, dass x^* stabil ist.

Gilt nun die Annahme $\dot{V} < 0$ für $x \in U \setminus \mathcal{E}$ (Abbildung 6(b)), dann ist die Ljapunov-Funktion V auf den Lösungskurven in $U \setminus \mathcal{E}$ streng monoton fallend. Sei $x(t)$ eine

Bahnkurve, welche in $U_1 \setminus \mathcal{E}$ startet und gegen einen Punkt $z_0 \in B_\delta(x^*)$ im Inneren der Kugel konvergiert. Dann gibt es aufgrund der Kompaktheit – also Abgeschlossenheit und Beschränktheit – von $B_\delta(x^*)$ eine Folge $x(t_n)$ mit $x(t_n) \rightarrow z_0$ für $t_n \rightarrow \infty$ und es gilt $z_0 = x^*$.

Der Beweis erfolgt mittels Widerspruch. Zu beachten ist, dass $V(x(t)) > V(z_0)$ für alle $t \geq 0$, da $V(x(t))$ streng monoton fällt. Ebenso gilt $V(x(t_n)) \rightarrow V(z_0)$ aufgrund der Stetigkeit von V . Angenommen, es gelte $z_0 \neq x^*$. Sei $z(s)$, $s \in \mathbb{R}$ (\mathbb{R}_+), der Orbit, der bei z_0 startet, dann ist $V(z_0) > V(z(s))$ für jedes $s > 0$. Also gilt für jede Trajektorie $y(s) = \Phi(s, y)$, welche ausreichend nah an z_0 beginnt,

$$V(y(s)) < V(z_0).$$

Setzt man $y_0 = x(t_n) = \Phi(t_n, x)$, so ist mit der (Halb-)Gruppeneigenschaft dynamischer Systeme

$$\Phi(s, y_0) = \Phi(s, \Phi(t_n, x)) = \Phi(s + t_n, x)$$

und man erhält für genügend große n

$$V(x(t_n + s)) < V(z_0).$$

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. Also muss $z_0 = x^*$ gelten und alle Trajektorien $x(t) \in U \setminus \mathcal{E}$, für $t \geq 0$ gegen das Equilibrium x^* konvergieren. Daher ist x^* asymptotisch stabil. \square

Gilt die Bedingung $V(x^*) = 0$ nicht, kann man dies durch Transformation mit Hilfe einer Variablen $c \in \mathbb{R}$ erreichen. Denn es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} V(x(t)) = \frac{\partial}{\partial t} [V(x(t)) + c].$$

Für den Satz der Ljapunov-Stabilität 1.9 muss das Differentialgleichungssystem nicht explizit gelöst werden, da die Funktion f direkt verwendet wird. Daher nennt man diese Möglichkeit zur Untersuchung des Langzeitverhaltens in den Ruhelagen auch direkte Methode.

Beispiel 1.10. Man betrachte als Beispiel das autonome Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= |y(t) - x(t)|^{p-2} (y(t) - x(t)) \\ \dot{y}(t) &= |x(t) - y(t)|^{p-2} (x(t) - y(t)) \end{aligned} \tag{4}$$

mit $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ und $p \in (1; \infty)$, an welchem man die Ljapunov-Funktion genauer analysieren kann.

Das System hat Ruhelagen in allen Punkten $z_x^* = (x, x)$. Daher bildet die Gerade

$$y = x$$

die Menge der Equilibrien \mathcal{E} von (4).

Erstellt man mit Maple das Phasenportrait – zum Beispiel für $p = 3$ (Abbildung 7) – so liegt die Vermutung nahe, dass die Equilibrien z_x^* stabil sind, da alle Trajektorien auf die Gerade $y = x$, jedoch nicht auf einen isolierten Punkt, zustreben.

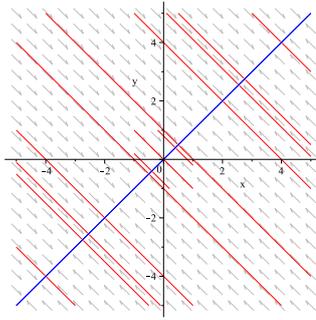


Abbildung 7: Phasenportrait für $p = 3$ mit Equilibrien bei $y = x$

Mit Hilfe der Methode der Variation des Gradienten nach Schultz und Gibson (siehe[13], Seite 233) kann man eine Funktion

$$V(x, y) = |x - y|^p = \begin{cases} (x - y)^p, & \text{wenn } x \geq y \\ (y - x)^p & \text{wenn } x < y \end{cases}$$

für $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ finden, für welche $V(z_x^*) = 0$ und $V(x, y) > 0$ mit $(x, y) \neq z_x^*$ gilt. Um zu zeigen, dass es sich bei $V(x, y)$ um eine Ljapunov-Funktion handelt, berechnet man zuerst den Gradienten und die Hesse-Matrix von V .

Der Gradient ∇V für $x \neq y$ ist

$$\nabla V(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{p|x-y|^{p-1}}{x-y} \\ -\frac{p|x-y|^{p-1}}{x-y} \end{pmatrix},$$

für den Punkt z_x^* gilt

$$\nabla V(x, x) = 0.$$

Berechnet man die Hesse-Matrix für $x \neq y$

$$H_V(x, y) = \begin{pmatrix} p(p-1)|x-y|^{p-2} & -p(p-1)|x-y|^{p-2} \\ -p(p-1)|x-y|^{p-2} & p(p-1)|x-y|^{p-2} \end{pmatrix},$$

so kann man erkennen, dass diese bei der Beurteilung der Extremwerte nicht weiter hilft. Betrachtet man jedoch die Steigung der Funktion V in der Umgebung der Equilibrien, so kommt man zu dem Ergebnis, dass V in den Ruhelagen z_x^* lokale Minima besitzt. Da die Menge der Equilibrien \mathcal{E} die Gerade $y = x$ bildet, ist das Minimum jedoch nicht strikt.

Weiter berechnet man die orbitale Ableitung der Funktion V

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= \langle \nabla V(x, y), f(x, y) \rangle \\ &= \frac{\partial V}{\partial x}(x, y)(|x-y|^{p-2}(y-x)) + \frac{\partial V}{\partial y}(x, y)(|x-y|^{p-2}(x-y)) \\ &= \frac{p|x-y|^{p-1}}{x-y}(|x-y|^{p-2}(y-x)) + \frac{-p|x-y|^{p-1}}{x-y}(|x-y|^{p-2}(x-y)) \\ &= -2p|x-y|^{2p-2} \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $p \in (1; \infty)$, folgt hieraus für

$$\dot{V}(x, y) = -2p|x-y|^{2p-2} \leq 0.$$

Es ist somit gezeigt, dass $\dot{V} \leq 0$ für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ gilt. Da das Minimum nicht strikt ist, ist V eine Ljapunov-Funktion. Mit dem Satz der Ljapunov-Stabilität 1.9 folgt hieraus, dass die Ruhelagen z_x^* stabil, jedoch nicht asymptotisch stabil sind. Dies kann man auch daran erkennen, dass es in jeder beliebig kleinen Umgebung eines Punktes z_x^* Trajektorien gibt, welche nicht gegen z_x^* , sondern gegen eine benachbarte Ruhelage konvergieren.

Für den Fall $p = 1$ ist die Funktion

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} |y(t) - x(t)|^{-1} (y(t) - x(t)) \\ |x(t) - y(t)|^{-1} (x(t) - y(t)) \end{pmatrix}$$

in den Punkten (x, x) nicht stetig differenzierbar. Daher muss $p \in (1; \infty)$ gelten.

Gilt $p = 2$, so vereinfacht sich das autonome Differentialgleichungssystem (4) zu

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= y(t) - x(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) - y(t) \end{aligned}$$

und man kann die Lösungskurven

$$\gamma(x(t), y(t)) = (c_1 - c_2 e^{-2t}, c_1 + c_2 e^{-2t})$$

mit den Integrationskonstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ direkt berechnen.

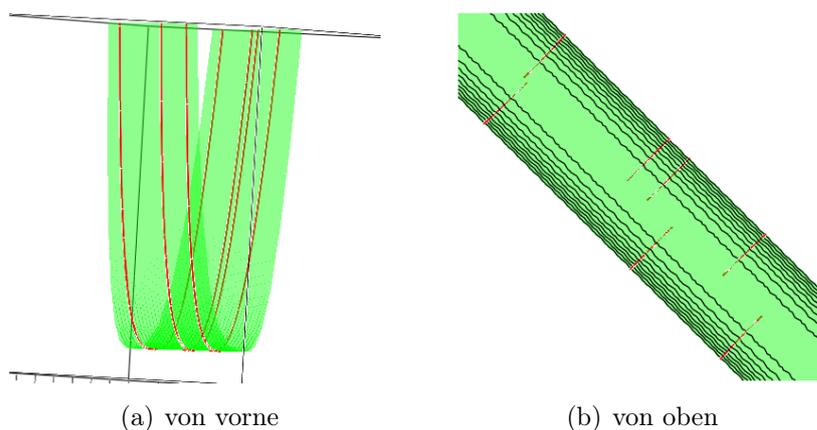


Abbildung 8: Ljapunov-Funktion für Beispiel 1.2 mit $p = 3$

In Abbildung 8 ist die erhaltene Ljapunov-Funktion mit $p = 3$ dargestellt, auf welcher die Lösungskurven des Beispiels für verschiedene Anfangsbedingungen streng monoton fallend jeweils gegen ein Equilibrium z_x^* konvergieren. Die benachbarte Trajektorie strebt jedoch gegen eine weitere Ruhelage, daher ist jedes Equilibrium nicht asymptotisch stabil.

1.3 Die ω_{\pm} -Grenzmenge

Bei der Analyse von dynamischen Systemen ist das Langzeitverhalten der Lösungskurven $x(t)$, also für $t \rightarrow \pm\infty$, von besonderem Interesse. Hierfür wird eine Grenzmenge definiert, der sich ein Orbit nach langer Zeit möglicherweise annähert. Sie spielt in dem Satz von Poincaré-Bendixson eine wichtige Rolle, weshalb sie im folgenden Abschnitt genauer untersucht wird. Vorher werden noch die im weiteren Verlauf auftretenden Begriffe der Vollständigkeit und Invarianz eingeführt.

Definition 1.11. Ein Punkt x ist \pm -vollständig, wenn $x \in M$ und der Orbit $\gamma_{\pm}(x)$ in einer kompakten – also abgeschlossenen und beschränkten – Untermenge C von M liegt. Sind alle Punkte vollständig, dann nennt man auch das Vektorfeld f **vollständig** und das dynamische System $\Phi(t, x)$ ist global definiert, also

$$\Phi : (\mathbb{R}, M) \rightarrow M, (t, x) \mapsto \Phi(t, x).$$

Eine Menge $U \subseteq M$ heißt \pm -invariant, wenn

$$\gamma_{\pm}(x) \subseteq U \quad \text{für alle } x \in U$$

und invariant, wenn

$$\gamma(x) \subseteq U \quad \text{für alle } x \in U$$

gilt.

Ist $C \subseteq M$ eine kompakte, \pm -invariante Menge, dann sind alle Punkte $x \in C$ \pm -vollständig.

Die für die Untersuchung des Langzeitverhaltens der Lösungen eines dynamischen Systems wichtige Menge der Häufungspunkte ist folgendermaßen definiert:

Definition 1.12. Die Menge aller Häufungspunkte des positiven Semiorbits $\gamma_+(x)$ eines Punktes $x \in M$

$$\omega_+ := \{y \in M \mid \exists \text{ eine Folge } (t_n) \rightarrow +\infty \text{ mit } \Phi(t_n, x) \rightarrow y\}$$

heißt **positive** oder ω_+ -**Grenzmeng**e (auch **Limesmenge**) von x .

Analog wird in einem invertierbaren dynamischen System die Menge aller Häufungspunkte des negativen Semiorbits $\gamma_-(x)$ eines Punktes $x \in M$

$$\omega_- := \{y \in M \mid \exists \text{ eine Folge } (t_n) \rightarrow -\infty \text{ mit } \Phi(t_n, x) \rightarrow y\}$$

negative oder ω_- -**Grenzmeng**e (auch **Limesmenge**) von x genannt.

Ist x nicht \pm -vollständig, dann gibt es nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß keine konvergente Teilfolge (siehe [10], Seite 156) und daher ist die Menge $\omega_{\pm}(x)$ leer.

Man beachte, dass

$$\omega_{\pm}(x) = \omega_{\pm}(y)$$

ist, wenn $y \in \gamma(x)$ gilt. Denn für $y = \Phi(t, x)$ ist mit der (Halb-)Gruppeneigenschaft eines dynamischen Systems

$$\Phi(t_n, y) = \Phi(t_n, \Phi(t, x)) = \Phi(t_n + t, x).$$

Folglich hängt $\omega_{\pm}(x)$ nur vom Orbit $\gamma(x)$ ab.

Lemma 1.13. Die Grenzmeng

e $\omega_{\pm}(x)$ besitzt die folgenden Eigenschaften:

- $\omega_{\pm}(x)$ ist abgeschlossen,
- $\omega_{\pm}(x)$ ist invariant.

Ist $\gamma_{\pm}(x)$ beschränkt in einer kompakten Menge C , dann gilt zudem:

- $\omega_{\pm}(x)$ ist nicht-leer,
- $\omega_{\pm}(x)$ ist kompakt,
- $\omega_{\pm}(x)$ ist zusammenhängend,
- $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} d(\Phi(t, x), \omega_{\pm}(x)) = 0$.

Beweis.

Abgeschlossenheit:

Ist die Limesmenge abgeschlossen, so muss die ω_{\pm} -Grenzmenge jeder konvergenten Folge $\gamma_{\pm}(x_n)$ für $n \rightarrow \pm\infty$, $n \in \mathbb{Z}$, wieder in $\omega_{\pm}(x)$ liegen. Angenommen, y liege im Abschluss der Grenzmenge – dies ist die Vereinigung der Menge mit ihrem Rand. Man wähle eine Folge $(y_n) \in \omega_{\pm}(x)$, welche von y höchstens den Abstand $\frac{1}{2n}$ hat, also

$$|y - y_n| \leq \frac{1}{2n}.$$

Weiter bestimme man für die konvergente Folge $\Phi(t_n, x)$ ein $t_n \rightarrow \pm\infty$ so, dass

$$|\Phi(t_n, x) - y_n| < \frac{1}{2n}$$

gilt. Dann ist

$$\begin{aligned} |\Phi(t_n, x) - y| &= |(\Phi(t_n, x) - y_n) + (y_n - y)| \\ &\leq |\Phi(t_n, x) - y_n| + |y_n - y| \\ &< \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \pm\infty. \end{aligned}$$

Somit konvergiert $\Phi(t_n, x) \rightarrow y$ für $(t_n) \rightarrow \pm\infty$ und es gilt $y \in \omega_{\pm}(x)$.

Invarianz:

Die Menge $\omega_{\pm}(x)$ ist invariant, denn aufgrund der Abgeschlossenheit gilt für die konvergente Folge $\Phi(t_n, x) \rightarrow y$, also $y \in \omega_{\pm}(x)$. Dann ist mit der (Halb-)Gruppeneigenschaft dynamischer Systeme

$$\Phi(t_n + t, x) = \Phi(t, \Phi(t_n, x)) \rightarrow \Phi(t, y)$$

für jedes $t \in \mathbb{R}$ (\mathbb{R}_+).

Man nehme zusätzlich an, $\gamma_{\pm}(x)$ sei beschränkt in einer kompakten Menge C , also $\gamma_{\pm}(x) \subseteq C$ für alle $x \in C$.

Nicht-leer:

Nach Definition (1.11) ist x \pm -vollständig.

Wählt man eine Folge $\Phi(t_n, x)$ mit $(t_n) \rightarrow \pm\infty$, dann existiert aufgrund der Beschränktheit des Orbits nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $\Phi(\tilde{t}_n, x)$ mit $(\tilde{t}_n) \rightarrow \pm\infty$. Daher ist $\omega_{\pm}(x)$ nicht-leer.

Kompaktheit:

Zudem ist $\omega_{\pm}(x)$ kompakt, da abgeschlossene Untermengen von kompakten Mengen ebenfalls kompakt sind.

Zusammenhang:

Man zeigt, dass $\omega_{\pm}(x)$ zusammenhängend ist. Wäre dies nicht so, dann gäbe es zwei kompakte, disjunkte Mengen $\omega_{1,2} \neq \emptyset$ mit $\omega_{\pm}(x) = \omega_1 \cup \omega_2$. Sei $y_1 \in \omega_1$, $y_2 \in \omega_2$ und sei

$$\delta = \inf|y_1 - y_2| > 0$$

der kleinste Abstand zwischen ω_1 und ω_2 . Dann existieren für alle Punkte, welche weniger als $\frac{\delta}{2}$ von $\omega_{1,2}$ entfernt liegen, die beiden disjunkten Umgebungen $U_{1,2}$ von $\omega_{1,2}$. Wählt man eine streng monotone Folge $(t_n) \rightarrow \pm\infty$ so, dass

$$\Phi(t_{2m+1}, x) \rightarrow y_1 \in U_1$$

und

$$\Phi(t_{2m}, x) \rightarrow y_2 \in U_2$$

mit $m \in \mathbb{Z}$ gilt. Da der Orbit $\Phi((t_{2m}, t_{2m+1}), x)$ zusammenhängend ist, gibt es eine Teilfolge

$$\Phi(\tilde{t}_m, x) \in C \setminus (U_1 \cup U_2)$$

mit $t_{2m} < \tilde{t}_m < t_{2m+1}$. Aufgrund der Kompaktheit von $C \setminus (U_1 \cup U_2)$ kann man annehmen, dass

$$\Phi(\tilde{t}_m, x) \rightarrow y \in C \setminus (U_1 \cup U_2),$$

also konvergent ist. Es muss aber auch $y \in \omega_{\pm}(x) = \omega_1 \cup \omega_2$ gelten. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass $\omega_{\pm}(x)$ aus zwei kompakten, disjunkten Mengen besteht.

Abstand:

Sei $d(\cdot, \cdot)$ der Abstand zweier Punkte im euklidischen Raum. Man weist nach, dass die Entfernung $d(\Phi(t, x), \omega_{\pm}(x))$ einer Bahnkurve zu ihrer Grenzmenge für $t \rightarrow \pm\infty$ gegen Null strebt. Hierfür genügt es zu zeigen, dass jede Folge $\Phi(t_n, x)$ mit $t_n \rightarrow \pm\infty$ eine konvergente Teilfolge besitzt mit

$$\Phi(\tilde{t}_n, x) \rightarrow y \in \omega_{\pm}(x).$$

Da $\gamma_{\pm}(x)$ beschränkt ist, gibt es mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß für jede Folge $\Phi(t_n, x)$ eine entsprechende Teilfolge. Aufgrund der Definition der ω_{\pm} -Grenzmenge muss $y \in \omega_{\pm}(x)$ wie gewünscht gelten. \square

Eine nicht-leere, kompakte, \pm -invariante Menge C wird **minimal** genannt, wenn sie keine weitere Untermenge mit diesen Eigenschaften enthält. Für eine minimale Menge gilt

$$C = \omega_+(x) = \omega_-(x) \quad \text{für alle } x \in C.$$

Als Beispiel für eine minimale Menge $C \subset \mathbb{R}^2$ ist ein periodischer Orbit zu nennen, der komplett in $\omega_{\pm}(x)$ enthalten ist, also $\gamma(x) \subset \omega_{\pm}(x)$ gilt. Dies wird im folgenden Kapitel, insbesondere in Korollar 2.6, begründet.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass ein begrenzter Orbit $\gamma(x)$ entweder gegen eine ω_{\pm} -Grenzmenge konvergiert oder ganz in ihr liegt.

2 Der Satz von Poincaré-Bendixson

Im folgenden Kapitel wird der Satz von Poincaré-Bendixson genau betrachtet und bewiesen. Dieser ist ein wichtiges Hilfsmittel für die Untersuchung von autonomen Systemen in der Ebene, da man mit ihm die Existenz von periodischen Orbits oder Grenzyklen nachweisen kann. Der Aufbau des Beweisganges folgt in weiten Teilen Kapitel 7.3 von Teschl [1] sowie Kapitel 9.2 von Prüss/Wilke [3].

Man betrachte im weiteren Verlauf das Anfangswertproblem des planaren, autonomen Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{5}$$

mit $x \in M$, $M \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f \in C^1(M, \mathbb{R}^2)$.

In der euklidischen Ebene, also in \mathbb{R}^2 , sind Flüsse relativ einfach zu untersuchen, da hier der **Jordansche Kurvensatz** gilt :

Jede geschlossene, stetige, doppeltpunktfreie Kurve (Jordankurve) zerlegt eine Ebene M in zwei disjunkte, offene, zusammenhängende Teilmengen - in ihr Inneres M_1 und in ihr Äußeres M_2 (siehe [1], Seite 220).

Zu beachten ist, dass es für Differentialgleichungen höherer Dimension, also in \mathbb{R}^n , $n > 2$, keine Verallgemeinerung für den Satz von Poincaré-Bendixson gibt.

2.1 Poincaré-Abbildung

Zunächst wird ein wichtiges Hilfsmittel vorgestellt, welches man für den Satz von Poincaré-Bendixson benötigt (siehe [1], Seite 197).

Unter einer (gerichteten) **Kurve** (auch **Bogen**) $\Sigma \in \mathbb{R}^2$ versteht man eine eindimensionale, glatte Hyperebene, welche durch

$$\Sigma = \{x \in U \mid S(x) = 0\}$$

in einer offenen Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ mit der Geradengleichung $S \in C^1(U, \mathbb{R})$ und dem Normalenvektor

$$\frac{\partial S}{\partial x} \neq 0$$

gegeben ist.

Eine Kurve ist **transversal** zu einem Vektorfeld f , wenn für das Skalarprodukt

$$\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, f(x) \right\rangle \neq 0$$

für alle $x \in \Sigma$ gilt. Das bedeutet, dass für jedes $x \in \Sigma$ die Richtung der Transversalen stets verschieden – also nicht parallel – zum Vektorfeld $f(x)$ ist. Daher überqueren alle Orbits, die eine Transversale treffen, diese nie in entgegengesetzter Richtung. Für jeden regulären Punkt $x \in M$, $f(x) \neq 0$, kann man eine **Transversale** Σ finden, die x enthält.

Angenommen, die Funktion $f \in C^1(M, \mathbb{R}^2)$ sei T -periodisch in t , es gelte also

$$f(t, x) = f(t + T, x) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \ (\mathbb{R}_+).$$

Gibt es dann auch T -periodische Lösungen des autonomen Differentialgleichungssystems (5)?

Um diese Frage zu beantworten, benötigt man zunächst das folgende Lemma. Hierin wird die Existenz einer glatten Funktion τ nachgewiesen.

Lemma 2.1. Sei $\gamma(x) = \{\Phi(t, x), t \in [0, T]\}$, $x \in M$, $T \in \mathbb{R} \ (\mathbb{R}_+)$, ein T -periodischer Orbit einer autonomen Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x)$$

und Σ eine eindimensionale, glatte, zu f transversale Hyperfläche, welche die Trajektorie $\gamma(x)$ in $\Phi(T, x)$ schneidet. Dann gibt es eine Umgebung U von x und eine glatte Funktion

$$\tau: U \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tau(x) = T$$

und es gilt

$$\Phi(\tau(y), y) \in \Sigma$$

für alle $y \in U$.

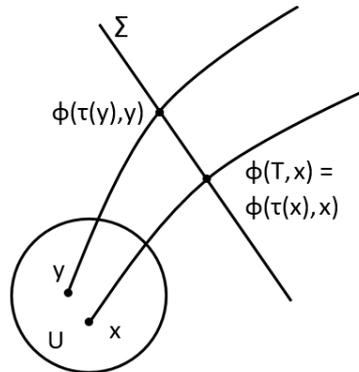


Abbildung 9: Beweis von Lemma 2.1

Beweis. Angenommen, der Orbit $\gamma(x)$ schneidet die Transversale Σ im Punkt $\Phi(T, x)$ (Abbildung 9). Dann gilt $S(\Phi(T, x)) = 0$.

Man betrachte die Gleichung

$$S(\Phi(t, y)) = 0$$

der Transversalen Σ . Leitet man S nach t ab, erhält man mit Hilfe der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} S(\Phi(t, y)) &= \frac{\partial S}{\partial x}(\Phi(t, y)) \frac{\partial}{\partial t}(\Phi(t, y)) \\ &= \frac{\partial S}{\partial x}(\Phi(t, y)) f(\Phi(t, y)) \end{aligned}$$

für eine Trajektorie $\gamma(y)$, die in einer Umgebung $\mathbb{R} \times U$ von $\Phi(T, x)$ liegt.

Da Σ eine zu f transversale Kurve ist, gilt für das Skalarprodukt

$$\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}(\Phi(t, y)), f(\Phi(t, y)) \right\rangle \neq 0,$$

also ist auch $f(\Phi(t, y)) \neq 0$.

Damit sind die Bedingungen für den Hauptsatz über implizite Funktionen (siehe [11], Seite 292) erfüllt und man kann diesen anwenden. In dem Satz wird gezeigt, dass in einer hinreichend kleinen Umgebung U eine Funktion $\tau \in C^k(U)$, $k \in \mathbb{N}$, existiert, für welche die Gleichung der Hyperebene

$$S(\Phi(\tau(y), y)) = 0$$

für alle $y \in U$ gilt. Dies bedeutet, dass der Orbit $\gamma(y)$ die Transversale Σ im Punkt $\Phi(\tau(y), y)$ schneidet, also

$$\Phi(\tau(y), y) \in \Sigma.$$

□

Unter Verwendung der Funktion $\tau(y)$ kann man eine Abbildung definieren und erhält so das gewünschte Ergebnis.

Definition 2.2. Sei $\gamma(x)$, $t \in [0, T]$, ein T -periodischer Orbit mit der Periode $T = \tau(x)$. Die Abbildung

$$P_\Sigma: U \cap \Sigma \rightarrow \Sigma, P_\Sigma(y) = \Phi(\tau(y), y)$$

heißt **Poincaré- oder Perioden-Abbildung** für $\gamma(x)$.

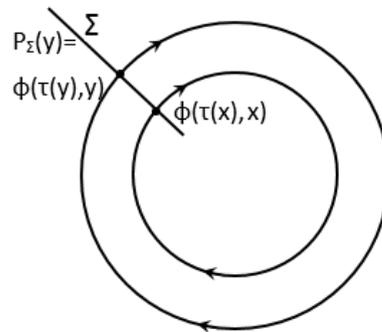


Abbildung 10: Poincaré-Abbildung

Diese bildet die Transversale Σ auf sich selbst ab. Ein Punkt x^* ist genau dann ein Equilibrium von P_Σ mit $P_\Sigma(x^*) = x^*$, wenn

$$x^* = \Phi(0, x^*) = \Phi(\tau(x^*), x^*)$$

gilt. Also entspricht jede Ruhelage einer Poincaré-Abbildung einem periodischen Orbit (siehe Abbildung (10)).

Hilfreich ist diese Abbildung, wenn man eine periodische Trajektorie auf Stabilität untersuchen möchte (siehe [1], Seite 317ff).

Man nennt einen Orbit $\gamma(x^*)$

- **stabil**, wenn für jede gegebene Umgebung $U(\gamma(x^*))$ eine weitere Umgebung $V(\gamma(x^*)) \subseteq U(\gamma(x^*))$ existiert, sodass jede Lösung, welche in $V(\gamma(x^*))$ startet, für alle $t \geq 0$ in der Umgebung $U(\gamma(x^*))$ bleibt.
- **asymptotisch stabil**, wenn $\gamma(x^*)$ stabil ist und es eine Umgebung $U(\gamma(x^*))$ gibt, für die

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\Phi(t, x), \gamma(x^*)) = 0$$

für alle $x \in U(x^*)$ gilt.

Die Frage, ob ein periodischer Orbit stabil ist, ist direkt äquivalent zur Frage, ob die jeweilige Ruhelage der Perioden-Abbildung stabil ist.

Lemma 2.3. Ein T -periodischer Orbit $\gamma(x^*)$ ist genau dann ein (asymptotisch) stabiler Orbit von $f(x)$, wenn x^* ein (asymptotisch) stabiles Equilibrium von P_Σ ist.

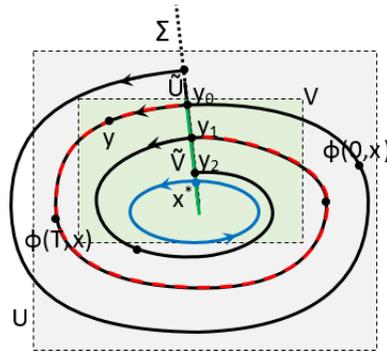


Abbildung 11: Asymptotisch stabiler, periodischer Orbit

Beweis. Angenommen, $x^* \in \Sigma$ sei eine Ruhelage der Poincaré-Abbildung P_Σ mit $P_\Sigma(x^*) = \Phi(\tau(x^*), x^*)$ und U sei eine Umgebung des T -periodischen Orbits $\gamma(x^*)$ mit $T = T(x^*)$.

Man wähle eine Umgebung \tilde{U} von x^* aus der Schnittmenge von U mit der Transversalen Σ , also $\tilde{U} \subseteq U \cap \Sigma$, so, dass die Trajektorien $\gamma(x)$ für alle $x \in \tilde{U}$ und $t \in [0, T]$ in der Umgebung U liegen. Es gilt also

$$\Phi([0, T], \tilde{U}) \subseteq U.$$

Wenn x^* eine stabile Equilibrium von P_Σ ist, dann existiert eine weitere Umgebung $\tilde{V} \subseteq \Sigma$ von x^* in der Art, dass die n -te Perioden-Abbildung, $n \in \mathbb{N}$,

$$P^n(x) = \underbrace{P(P \dots (P(x)))}_{n\text{-mal}}$$

für alle $x \in \tilde{V}$ auf \tilde{U} liegt, also $P^n(\tilde{V}) \subseteq \tilde{U}$ gilt.

Betrachtet man eine Umgebung V der Lösungskurve $\gamma(x^*)$, welche in den Teilstücken der Orbits $\gamma(\tilde{V})$ mit $t \in [0, T]$ enthalten ist, also $V \subseteq \Phi([0, T], \tilde{V})$.

Dann gibt es für einen beliebigen Punkt $y \in V$ einen minimalen Zeitpunkt $t_0 \geq 0$ so, dass y_0 auf der Transversalen \tilde{V} liegt. Es gilt daher

$$y_0 = \Phi(t_0, y) \in \tilde{V}.$$

Folglich liegen alle Schnittpunkte y_n der n -ten Poincaré-Abbildung $P_\Sigma^n(x_0)$ mit der Transversalen Σ in der Umgebung \tilde{U} , also

$$y_n = P_\Sigma^n(y_0) \in \tilde{U}.$$

Damit ist gezeigt, dass alle Trajektorien

$$\gamma(V) \subseteq U \text{ für alle } t \geq 0$$

in der Umgebung U liegen und diese nicht verlassen. Daher ist der Orbit $\gamma(x^*)$ stabil. Konvergieren die Punkte y_n für $t_n \rightarrow \infty$ zusätzlich noch gegen das Equilibrium x^* (Abbildung 11), dann gilt aufgrund der Stetigkeit von $\Phi(t, y)$ und der Kompaktheit des Intervalls $[0, T]$, dass der Orbit

$$\Phi(t, y) \rightarrow \gamma(x^*)$$

gegen den periodischen Orbit $\gamma(x^*)$ strebt. Der Beweis der Gegenrichtung ist trivial. Folglich ist gezeigt, dass die Trajektorie $\gamma(x^*)$ genau dann (asymptotisch) stabil ist, wenn der Punkt x^* (asymptotisch) stabil ist. \square

2.2 Schnittmengen von Orbit, Grenzmenge und Transversale

Untersucht man ein autonomes Differentialgleichungssystem in der Ebene, dann können auf verschiedene Weise Schnittpunkte entstehen, wenn ein Orbit, die entsprechende ω_\pm -Grenzmenge respektive eine Transversale aufeinandertreffen. Dieser Frage wird im folgenden Abschnitt nachgegangen.

Zuerst betrachtet man die Möglichkeit, dass eine Bahnkurve $\gamma(x)$ eine Transversale Σ kreuzt.

Lemma 2.4. Gegeben sei eine Trajektorie $\gamma_\pm(x_0)$ mit einem regulären Punkt $x_0 \in M$, $f(x) \neq 0$, sowie eine Transversale Σ , die x_0 enthält. Die Schnittpunkte von Σ mit dem Orbit $\gamma_\pm(x_0)$ bezeichnet man mit $x_n = \Phi(t_n, x_0)$, $n \in \mathbb{N}$. Ordnet man diese Punkte entsprechend ihrer Zeitpunkte t_n chronologisch an, so entsteht eine Folge der Kreuzungspunkte x_n , die unter Beachtung der Richtung von Σ , monoton ist.

Beweis. Zunächst betrachtet man lediglich den positiven Semiorbit $\gamma_+(x_0)$.

Seien x_0 und x_1 zwei Schnittpunkte, die entstehen, wenn sich die Bahnkurve $\gamma_+(x_0)$ und die Transversale Σ kreuzen.

Gilt $x_0 = x_1$, dann ist

$$\Phi(t_0, x_0) = \Phi(t_1, x_0) = \Phi(t_0 + T, x_0).$$

Somit ist $\gamma_+(x_0)$ periodisch und es folgt $x_0 = x_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Gelte also $x_0 \neq x_1$. Die Kurve J , die bei x_0 beginnt, entlang des Orbits $\gamma_+(x_0)$ nach x_1 führt und von dort über Σ wieder zurück nach x_0 , ist aufgrund der Eindeutigkeit der Lösungen einer Differentialgleichung eine geschlossene, stetige, doppeltpunktfreie

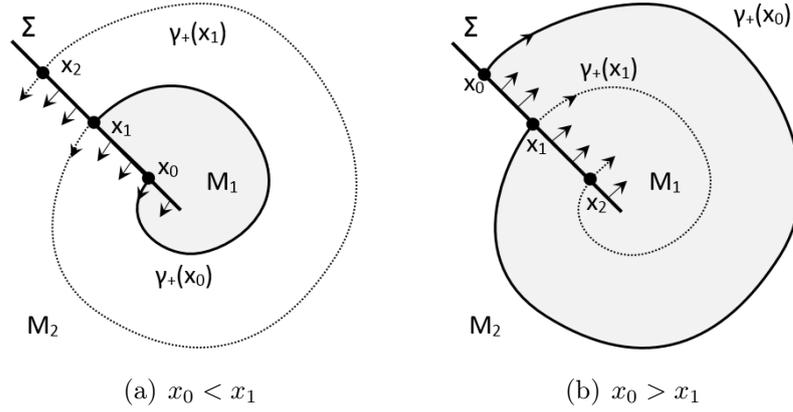


Abbildung 12: Monotone Folge der Schnittpunkte x_n von Orbit mit Transversale

Jordankurve. Mit Hilfe von J kann man die Menge M in ihr Inneres M_1 und ihr Äußeres M_2 unterteilen, es gilt also

$$M \setminus J = M_1 \cup M_2.$$

Den Abschnitt der Transversalen Σ von x_0 nach x_1 bezeichnet man mit $\tilde{\Sigma} \subset \Sigma$. Da das Vektorfeld f transversal zu Σ liegt, kann sich die Richtung von f auf Σ nicht umkehren, somit zeigt es an den beiden Schnittpunkten $x_0, x_1 \in \tilde{\Sigma} \cap \gamma_+(x_0)$ entweder immer in die Menge M_1 oder immer in die Menge M_2 .

Angenommen, es gelte $x_0 < x_1$ (Abbildung 12(a)). In diesem Fall führt der Orbit $\gamma_+(x_1)$ nach M_2 und bleibt in diesem Gebiet, denn er kann den Transversalenabschnitt $\tilde{\Sigma}$ nicht in entgegengesetzter Richtung kreuzen. Auch kann $\gamma_+(x_1)$ aufgrund der Eindeutigkeit der Lösungen die Trajektorie $\gamma_+(x_0)$ auf dem Abschnitt von x_0 nach x_1 nicht schneiden. Also gilt $\gamma_+(x_1) \subset M_2$ und damit liegt auch der Schnittpunkt $x_2 \in \Sigma$ in M_2 . Daher ist

$$x_1 < x_2.$$

Für $x_0 > x_1$ gilt, dass der Orbit $\gamma_+(x_1)$ in das Gebiet M_1 zeigt und dort bleibt, aus dem selben Grund wie zuvor aufgeführt (Abbildung 12(b)). Daher gilt in diesem Fall $\gamma_+(x_1) \subset M_1$ und der Schnittpunkt $x_2 \in \Sigma$ liegt in M_1 . Also ist

$$x_1 > x_2.$$

Durch Iterieren dieses Verfahrens erhält man

$$x_0 \geq x_1 \geq \dots \geq x_n$$

beziehungsweise

$$x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n.$$

Der Beweisgang für den negativen Semiorbit $\gamma_-(x_0)$ erfolgt analog. \square

Als nächstes folgt die eingehende Analyse der Schnittmenge von ω_{\pm} -Grenzmenge und Transversale Σ .

Lemma 2.5. Sei

$$y \in \Sigma \cap \omega_{\pm}(x)$$

ein Schnittpunkt der transversalen Kurve Σ mit der Grenzmenge $\omega_{\pm}(x)$ und sei

$$(x_n) \in \Sigma \cap \gamma_{\pm}(x)$$

eine Folge der Schnittpunkte von Σ mit dem Orbit $\gamma_{\pm}(x)$. Dann kann man y durch (x_n) approximieren.

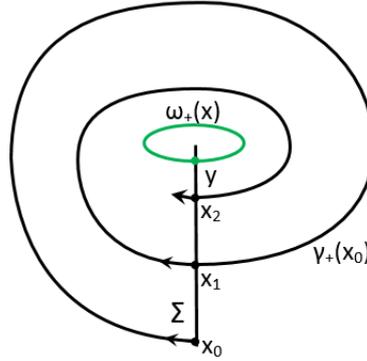


Abbildung 13: Approximation von y

Beweis. Man wähle eine Transversale Σ und die Folge der Punkte $(x_n) \in \Sigma$ mit $t_n \rightarrow +\infty$ so, dass (x_n) gegen den Punkt $y \in \omega_{\pm}(x)$ konvergiert (Abbildung 13), also

$$x_n = \Phi(t_n, x_0) \rightarrow y.$$

Benutzt man Lemma 2.1 und setzt für $T = \tau(y) = 0$ ein, dann ist

$$\Phi(t_n, y) = \Phi(t_n + T, y)$$

und man erhält mit Hilfe der Poincaré-Abbildung die gewünschte Folge

$$\Phi(t_n + \tau(x_n), x) = \Phi(\tilde{t}_n, x) \rightarrow y$$

für monoton steigende $\tilde{t}_n = t_n + \tau(x_n)$.

Analog verfährt man für $t_n \rightarrow -\infty$. □

Mit diesem Ergebnis erhält man folgende wichtige Aussage für die Schnittmenge $\omega_{\pm}(x) \cap \Sigma$.

Korollar 2.6. Die Grenzmenge $\omega_{\pm}(x)$ schneidet die Transversale Σ in höchstens einem Punkt.

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Widerspruch.

Angenommen, es gäbe zwei Schnittpunkte $y_1, y_2 \in \Sigma \cap \omega_{\pm}(x)$. Dann existiert mit Lemma 2.5 zu jedem y_1 und y_2 auch eine monotone Folge

$$(x_{1,n}) \in \Sigma \cap \gamma_{\pm}(x) \rightarrow y_1$$

beziehungsweise

$$(x_{2,n}) \in \Sigma \cap \gamma_{\pm}(x) \rightarrow y_2,$$

die nach y_1 respektive y_2 konvergiert. Aufgrund der Monotonie der Schnittpunkte x_n (Lemma 2.4) ist dies aber nicht möglich. Daher kann es nur höchstens einen Punkt $y \in \Sigma \cap \omega_{\pm}(x)$ geben. □

Zuletzt betrachtet man die Möglichkeit, dass die ω_{\pm} -Grenzmenge gemeinsame Punkte mit einem Orbit $\gamma_{\pm}(x)$ besitzt.

Korollar 2.7. Sei $\omega_{\pm}(x) \cap \gamma_{\pm}(x) \neq \emptyset$. Dann ist x periodisch und es gilt

$$\omega_+(x) = \omega_-(x) = \gamma(x).$$

Beweis. Sei x periodisch, dann ist auch der Orbit $\gamma(x)$ periodisch und es gilt $\omega_+(x) = \omega_-(x) = \gamma(x)$. Somit ist $\omega_{\pm}(x) \cap \gamma_{\pm}(x) \neq \emptyset$ nicht-leer.

Sei die Schnittmenge $\omega_{\pm}(x) \cap \gamma_{\pm}(x)$ nicht-leer. Dann existiert ein Punkt y , der in ebendieser Menge liegt, also

$$y \in \omega_{\pm}(x) \cap \gamma_{\pm}(x).$$

Da die Grenzmenge $\omega_{\pm}(x)$ invariant ist (Lemma 1.13), folgt weiter, dass der Orbit $\gamma(x)$ komplett in $\omega_{\pm}(x)$ enthalten sein muss. Aufgrund der Translationsinvarianz autonomer Systeme ergibt sich damit

$$\gamma(x) = \gamma(y) \subseteq \omega_{\pm}.$$

Angenommen, $x(t_0) = x_0 = x_* \in \gamma_{\pm}(x)$ sei ein Equilibrium, dann gilt $x(t) = x_*$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Somit ist $y = x_*$ und weiter $\omega_+(x) = \omega_-(x) = \gamma(x) = y$.

Sei x_0 keine Ruhelage und sei y der Schnittpunkt einer Transversalen Σ mit der ω_{\pm} -Grenzmenge, also

$$y \in \Sigma \cap \omega_{\pm}(x).$$

Dann gibt es nach Lemma 2.5 eine Folge $(x_n) = \Phi(t_n, x_0)$ mit $t_n \rightarrow +\infty$, welche gegen y konvergiert. Da die Schnittmenge $\omega_+(x) \cap \gamma_+(x)$ nicht-leer ist, gilt für die Folge

$$(x_n) \in \Sigma \cap \gamma_+(x) \subseteq \Sigma \cap \omega_+(x)$$

Analog folgt für $t_n \rightarrow -\infty$

$$(x_n) \in \Sigma \cap \gamma_-(x) \subseteq \Sigma \cap \omega_-(x).$$

Mit Korollar 2.6 gibt es nur einen Schnittpunkt der ω_{\pm} -Grenzmenge mit der Transversalen, daher muss $(x_n) = y$ gelten und der Orbit $\gamma(y) = \gamma(x)$ ist periodisch. \square

Am Ende dieses Abschnitts folgt eine wichtige Bemerkung über minimale Mengen.

Korollar 2.8. Eine minimale, kompakte, (positiv/negativ-)invariante Menge C ist ein periodischer Orbit.

Beweis. Sei C eine minimale, kompakte, \pm -invariante Menge. Wählt man einen Punkt $x \in C$, dann liegt der Orbit $\gamma(x)$ aufgrund der Invarianz komplett in C . Da C minimal ist, gilt nach Definition $\omega_{\pm}(x) = C$ und somit ist die Schnittmenge $\omega_{\pm}(x) \cap \gamma_{\pm}(x)$ nicht-leer. Daraus folgt, dass x mit Korollar 2.7 periodisch und $\gamma(x) = C$ ein periodischer Orbit ist. \square

2.3 Poincaré-Bendixson-Theorem

Mit den Ergebnissen des vorigen Abschnitts kann man sich der eigentlichen Betrachtung des Satzes von Poincaré-Bendixson zuwenden. Gleich zu Beginn wird ein Lemma bewiesen, das weitläufig als Satz von Poincaré-Bendixson bezeichnet wird, jedoch lediglich eine schwächere Form der Allgemeinversion darstellt.

Zuvor wird ein Begriff definiert, welcher im weiteren Verlauf benötigt wird. Man nennt einen geschlossenen Orbit $\gamma(y)$ einen **Grenzzzyklus**, wenn dieser in der ω_{\pm} -Grenzmenge liegt, welche für einige Punkte $x \notin \gamma(y)$ gilt, also

$$\gamma(y) \subseteq \omega_{\pm}(x).$$

Lemma 2.9. (Poincaré-Bendixson-Theorem)

Sei $\omega_{\pm}(x) \neq \emptyset$ kompakt und enthalte keine Equilibrien, das heißt $\omega_{\pm}(x) \cap \mathcal{E} = \emptyset$. Dann ist $\omega_{\pm}(x)$ ein regulärer, periodischer Orbit oder ein Grenzzzyklus.

Beweis. Nach Voraussetzung ist die Grenzmenge $\omega_{\pm}(x)$ nicht-leer und kompakt ist. Aufgrund der Invarianz von ω_{\pm} (Lemma 1.13) existiert ein Orbit $\gamma(y)$, der ganz in $\omega_{\pm}(x)$ liegt. Daher ist $\gamma(y)$ beschränkt und es folgt, dass auch die Grenzmenge $\omega_{\pm}(y) \neq \emptyset$ nicht-leer und kompakt ist.

Sei z ein beliebiger Punkt in $\omega_{\pm}(y) \subseteq \omega_{\pm}(x)$. Man wähle eine Transversale Σ , welche die Menge $\omega_{\pm}(y)$ in z schneidet und eine Folge $(y_n) \rightarrow z$ mit $(y_n) \in \Sigma \cap \gamma_{\pm}(y)$. Korollar 2.6 besagt, dass es höchstens einen Schnittpunkt einer ω_{\pm} -Grenzmenge mit einer Transversalen Σ geben kann. Daher gilt

$$\Sigma \cap \gamma_{\pm}(y) \subseteq \Sigma \cap \omega_{\pm}(x) = \{z\}$$

und es folgt $(y_n) = z$. Also ist z periodisch und mit Korollar 2.7 ist $\omega_{\pm}(x) = \gamma(y)$. Damit ist gezeigt, dass die Grenzmenge $\omega_{\pm}(x)$ ein regulärer periodischer Orbit ist. \square

Man kann den periodischen Orbit $\gamma(y)$, welcher in der Grenzmenge $\omega_{\pm}(x)$ liegt, noch weiter untersuchen.

Lemma 2.10. Sei $\omega_{\pm}(x)$ zusammenhängend und enthalte einen regulären periodischen Orbit $\gamma(y) \subseteq \omega_{\pm}(x)$. Dann ist $\omega_{\pm}(x) = \gamma(y)$.

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Widerspruch.

Angenommen, Grenzzzyklus $\omega_{\pm}(x)$ und Lösungskurve $\gamma(y)$ seien nicht identisch. Das heißt $\omega_{\pm}(x) \neq \gamma(y)$ und $\omega_{\pm}(x) \setminus \gamma(y)$ ist nicht-leer. Da die Grenzmenge nach Voraussetzung $\omega_{\pm}(x)$ zusammenhängend ist, kann man einen Punkt

$$z \in \omega_{\pm}(x) \setminus \gamma(y)$$

finden, der in einer willkürlich kleinen Umgebung von $\tilde{y} \in \gamma(y)$ liegt. Man wählt eine Transversale $\tilde{\Sigma}$, die \tilde{y} enthält. Nach Lemma 2.1, muss es ein $\tau(z)$ so geben, dass der Punkt

$$\tilde{z} := \Phi(\tau(z), z)$$

auf $\tilde{\Sigma}$ liegt. Da der Orbit $\gamma(y)$ in der Grenzmenge $\omega_{\pm}(x)$ liegt, also $\gamma(y) \subseteq \omega_{\pm}(x)$ ist, gilt auch für die Schnittpunkte $\tilde{\Sigma} \cap \gamma(y) \subseteq \tilde{\Sigma} \cap \omega_{\pm}(x)$. Da es mit Korollar 2.6 aber nur einen Schnittpunkt geben kann, folgt

$$\tilde{z} \in \tilde{\Sigma} \cap \omega_{\pm}(x) = \{\tilde{y}\}.$$

Somit ist $z \in \gamma(y)$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Annahme, dass $z \in \omega_{\pm}(x) \setminus \gamma(y)$. Also muss $\omega_{\pm}(x) = \gamma(y)$ gelten. \square

Es folgt der Beweis dafür, dass die Lösungskurve $\gamma(y)$ mit $\gamma(y) \subseteq \omega_{\pm}(x)$ eindeutig bestimmt ist.

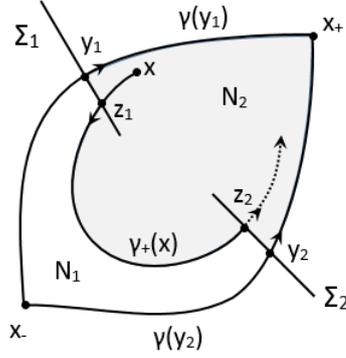


Abbildung 14: Eindeutigkeit des Orbits $\gamma(y) \subseteq \omega_{\pm}(x)$

Lemma 2.11. Sei $x \in M$ und die Grenzmenge $\omega_{\pm}(x)$ sei kompakt. Man nehme an, es gäbe zwei verschiedene, feste Punkte $x_{\pm} \in \omega_{\pm}(x)$ der Grenzmenge. Dann gibt es höchstens einen Orbit $\gamma(y) \subset \omega_{\pm}(x)$, welcher diese beiden Punkte als Grenzmenge besitzt, das heißt $\omega_{\pm}(y) = x_{\pm}$.

Beweis. Wieder erfolgt der Beweis durch Widerspruch.

Angenommen, es gäbe zwei Orbits $\gamma(y_1) = \Phi(t, y_1)$ und $\gamma(y_2) = \Phi(t, y_2)$. Da nach Voraussetzung

$$\Phi(t, y_{1,2}) \subset \omega_{\pm}(x)$$

gilt und die Orbits gegen die Punkte x_{\pm} konvergieren, also

$$\Phi(t, y_{1,2}) \rightarrow \omega_{\pm}(y) = x_{\pm} \text{ für } t \rightarrow \pm\infty,$$

kann man die Trajektorien $\gamma(y_{1,2})$ zu stetigen Funktionen auf $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ fortsetzen. Für diese gilt $\Phi(\pm\infty, y) = x_{\pm}$. Die beiden Punkte x_+ und x_- werden von den Orbits $\gamma(y_{1,2})$ zu einer geschlossenen Kurve J verbunden, welche aufgrund der Eindeutigkeit der Lösungen eine doppeltpunktfreie Jordankurve ist. Es gilt somit, wie bereits bekannt, $M \setminus J = M_1 \cup M_2$.

Sei $x \in M$. Da x_+ und x_- zwei verschiedene Punkte der Grenzmenge $\omega_{\pm}(x)$ sind, gilt

$$\omega_+(y_{1,2}) = x_+ \neq x_- = \omega_-(y_{1,2})$$

und somit ist x kein periodischer Punkt, liegt daher mit Korollar 2.7 nicht auf J . Ohne Einschränkung kann man also annehmen, dass $x \in M_1$ gilt. Wählt man zwei Transversalen Σ_1 und Σ_2 , welche y_1 bzw. y_2 enthalten (Abbildung 14), dann schneidet der Orbit $\gamma_{\pm}(x)$ die Transversalen $\Sigma_{1,2}$ in den Punkten $z_{1,2}$. Betrachtet man die Jordankurve \tilde{J} , welche entsteht, wenn man von y_1 über Σ_1 nach z_1 , von da über $\gamma_{\pm}(x)$ nach z_2 weiter über Σ_2 nach y_2 , von hier über $\gamma(y_2)$ nach x_{\pm} und über $\gamma(y_1)$ wieder zurück nach y_1 geht. Dann unterteilt die Kurve \tilde{J} wie zuvor M in zwei disjunkte Gebiete N_1 und N_2 , es gilt also

$$M \setminus \tilde{J} = N_1 \cup N_2.$$

Somit führt entweder der Orbit $\gamma_{\pm}(z_1)$ oder aber $\gamma_{\pm}(z_2)$ in eines dieser Gebiete. In der Abbildung zeigt $\gamma_+(z_2)$ nach N_2 und kann dieses – aus den selben Gründen wie im Beweis von Lemma 2.4 – nicht mehr verlassen. Jetzt kann sich aber der Orbit $\gamma_{\pm}(x)$ den Punkten von $\gamma(y_{1,2}) \cap N_1$ nicht mehr beliebig annähern und es gilt

$$\gamma(y_{1,2}) \cap N_1 \not\subseteq \omega_{\pm}(x).$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Annahme, dass $\gamma(y) \subset \omega_{\pm}(x)$ gilt. Daher kann es höchstens einen Orbit $\gamma(y)$ geben. \square

Nach diesen Vorüberlegungen ist man in der Lage, den Satz von Poincaré-Bendixson in seiner allgemeinen Form zu beweisen.

Satz 2.12. (Allgemeines Poincaré-Bendixson-Theorem)

Sei M eine offene Teilmenge aus \mathbb{R}^2 und $f \in C^1(M, \mathbb{R}^2)$. Sei $x \in M$ beliebig gewählt und sei die Grenzmenge $\omega_{\pm}(x) \neq \emptyset$ kompakt, zusammenhängend und enthalte höchstens endlich viele Equilibrien. Dann trifft genau einer der folgenden drei Fälle zu:

1. $\omega_{\pm}(x)$ ist ein regulärer periodischer Orbit oder ein Grenzyklus.
2. $\omega_{\pm}(x)$ ist ein fester Orbit – ein Equilibrium.
3. $\omega_{\pm}(x)$ besteht aus endlich vielen Equilibrien x_n^* und aus nicht-geschlossenen homoklinen oder heteroklinen Orbits $\gamma(y)$ mit $\omega_{\pm}(y) \in \{x_n^*\}$.

Beweis. Der Beweis erfolgt getrennt nach der Anzahl der enthaltenen Equilibrien beziehungsweise regulären Punkten.

1. Enthält $\omega_{\pm}(x)$ keine Equilibrien, gilt also $\omega_{\pm}(x) \cap \mathcal{E} = \emptyset$, dann ist die Grenzmenge $\omega_{\pm}(x)$ nach Lemma 2.9 ein regulärer periodischer Orbit.
2. Wenn $\omega_{\pm}(x)$ mindestens eine Ruhelage x^* , aber keine regulären Punkte enthält, dann ist $\omega_{\pm}(x) = \{x^*\}$ ein fester Orbit, besteht also nur aus einem Punkt. Denn Equilibrien sind isoliert und $\omega_{\pm}(x)$ ist zusammenhängend.
3. Angenommen, $\omega_{\pm}(x)$ enthalte sowohl Equilibrien als auch reguläre Punkte. Dann existiert ein regulärer Punkt $y \in \omega_{\pm}(x)$ und für die Trajektorie $\gamma(y)$ gilt

$$\gamma(y) \subseteq \omega_{\pm}(x).$$

Um nachzuweisen, dass der Orbit $\gamma(y)$ nicht-geschlossen ist, muss man zeigen, dass die Grenzmenge $\omega_{\pm}(y)$ aus nur einer Ruhelage besteht. Hierfür genügt es zu prüfen, ob $\omega_{\pm}(y)$ reguläre Punkte enthält.

Sei also $z \in \omega_{\pm}(y)$ regulär. Wählt man eine Transversale Σ , die z enthält, und eine Folge (y_n) , die aus den Schnittpunkten $\gamma(y) \cap \Sigma$ besteht und die für $t_n \rightarrow \pm\infty$ gegen z konvergiert. Wie in Korollar 2.6 gezeigt, kann der Orbit $\gamma(y) \subseteq \omega_{\pm}(x)$ die Transversale Σ nur in dem Punkt z schneiden. Also gilt $(y_n) = z$ und die Bahnkurve $\gamma(y)$ ist mit Hilfe von Korollar 2.7 regulär periodisch.

Mit Lemma 2.10 folgt, dass $\gamma(y) = \omega_{\pm}(x)$ gilt. Nach Voraussetzung enthält $\omega_{\pm}(x)$ aber auch Equilibrien. Dies ist ein Widerspruch, daher kann $\omega_{\pm}(y)$ keine regulären Punkte beinhalten, sondern besteht aus nur einer Ruhelage. Somit ist der Orbit $\gamma(y)$ nicht-geschlossen. \square

Beispiel 2.13. Untersucht man das Beispiel des autonomen Systems

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -x(t) + y(t) + \alpha x^3(t) \\ \dot{y}(t) &= -y(t) + x(t) + \beta y^3(t) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ x(0) &= x_0 \\ y(0) &= y_0\end{aligned}$$

mit $(x, y)^T \in M$ der offenen Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ und einer stetig differenzierbaren Funktion $f \in C^1(M, \mathbb{R}^2)$ auf Grenzmengen, so stellt man fest, dass man aufgrund der Parameter α, β verschiedene Fälle unterscheiden muss.

Im Folgenden werden nur die Grenzmengen für $\alpha, \beta < 0$ und $\alpha, \beta > 0$ betrachtet.

- $\alpha, \beta < 0$:

Mit Hilfe der Ljapunov-Funktion

$$V(x, y) = x^2 - \frac{\alpha}{4}x^4 + xy + y^2 - \frac{\beta}{4}y^4$$

kann man feststellen, dass das Equilibrium $z^* = (0, 0)$ ein striktes Minimum von $V(x, y)$ ist. Mit dem Satz der Ljapunov-Stabilität 1.9 folgt, dass z^* für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{z^*\}$ asymptotisch stabil ist. Also gilt für die positive Grenzmenge

$$\omega_+(x, y) = \{(0, 0)\}$$

für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$. Da

$$\lim_{(x, y) \rightarrow \pm\infty} V(x, y) = +\infty$$

gilt, erkennt man weiter, dass alle Trajektorien $\gamma(x, y)$ mit $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{z^*\}$ für $t \rightarrow -\infty$ unendlich ansteigen, also unbeschränkt sind. Daher kann man den Satz von Poincaré-Bendixson 2.12 für die ω_- -Grenzmenge nicht anwenden.

- $\alpha, \beta > 0$:

Für diesen Fall hat man in Beispiel 1.7 die Stabilität in den Equilibrien berechnet. Die Punkte z_2^* und z_3^* sind Quellen, also streben alle Orbits $\gamma(x, y)$ mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{E}$ von jeweils einem dieser Punkte weg. Die Ruhelage $z_1^* = (0, 0)$ ist nicht hyperbolisch. Daher kann man auf diese Weise keine Aussage bezüglich der Stabilität machen. Betrachtet man jedoch das Richtungsfeld und zeichnet dort wie in Beispiel 1.3 die Nullklinen ein, so kann man erkennen, dass es sowohl Richtungsvektoren gibt, die auf z_1^* zulaufen, als auch welche, die von dort weg zeigen.

Für den Fall, dass der Orbit $\gamma(x, y)$ auf z_1^* zustrebt, ist $g(x, y)$ ein heterokliner Orbit, da er von der instabilen Grenzmenge $\omega_-(x, y) = \{z_2^*\}$ respektive $\omega_-(x, y) = \{z_3^*\}$ zu der stabilen Grenzmenge $\omega_+(x, y) = \{z_1^*\}$ führt (siehe Abbildung 15).

Da sich in Abhängigkeit der Parameter α und β das qualitative Verhalten des autonomen Systems ändert, spricht man von einer Verzweigung beziehungsweise Bifurkation des Systems. Hiermit beschäftigt sich die sogenannte **Verzweigungs- oder Bifurkationstheorie**, auf welche jedoch hier nicht weiter eingegangen werden soll.

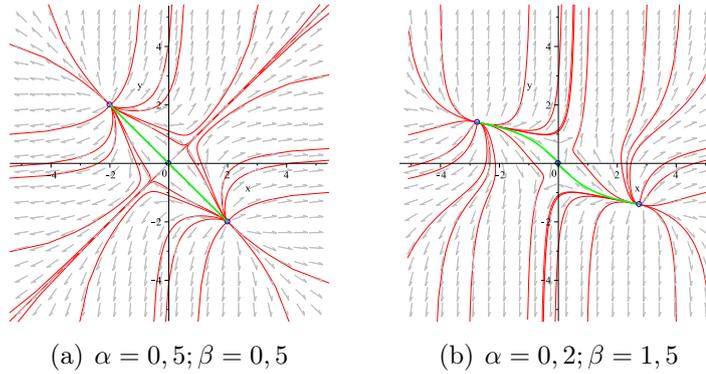


Abbildung 15: Phasenportrait mit heteroklinen Orbits (grün)

Beispiel 2.14. Man betrachte das planare autonome System aus Beispiel 1.10

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= |y(t) - x(t)|^{p-2}(y(t) - x(t)) \\ \dot{y}(t) &= |x(t) - y(t)|^{p-2}(x(t) - y(t))\end{aligned}$$

mit $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ und $p \in (1; \infty)$.

Anhand des Richtungsfeldes kann man erkennen, dass alle Trajektorien $\gamma(x, y)$ mit $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus z_x^*$ für $t \rightarrow -\infty$ unbeschränkt sind. Daher trifft der Satz von Poincaré-Bendixson 2.12 für die ω_- -Grenzmenge nicht zu.

Mit dem Satz der Ljapunov-Stabilität 1.9 wurde bereits gezeigt, dass die Equilibrien z_x^* jeweils stabil, jedoch nicht asymptotisch stabil sind. Da alle Orbits auf die Menge der Equilibrien \mathcal{E} – also auf die Gerade $y = x$ – zustreben, besitzt jede einzelne Trajektorie eine ω_+ -Grenzmenge. Diese besteht nach dem Satz von Poincaré-Bendixson 2.12 aus genau einem Equilibrium z_x^* .

Am Ende dieses Kapitels wird ein Lemma aufgeführt, welches eine Aussage über das Innere eines periodischen Orbits macht.

Lemma 2.15. Das Innere jedes periodischen Orbits muss ein Equilibrium enthalten.

Beweis. Auf den Beweis des Lemmas wird hier verzichtet. Dieser findet sich zum Beispiel in dem Buch *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems* von Gerald Teschl [1] auf Seite 226. \square

3 Anwendung in der Ökologie

In diesem Kapitel wird das Augenmerk auf die Anwendung des Satzes von Poincaré-Bendixson 2.12 in der Praxis gelegt.

Ein berühmtes Beispiel aus der Ökologie wurde zu Beginn des 20. Jahrhunderts von Vito Volterra untersucht:

In der Zeit von 1914 bis 1923 wurden in italienischen Häfen genaue Aufzeichnungen über die Anzahl der gefangenen Fische gemacht. Hierbei konnte man feststellen, dass sich das Verhältnis von Beutefischen zu Raubfischen – insbesondere zu Haien – veränderte. In den Kriegsjahren fiel der Anteil der Beutetiere ab, während er in der Nachkriegszeit wieder anstieg.

Ein Erklärung für diese Beobachtung ist, dass während des Krieges weniger Fischfang betrieben wurde und aufgrund des größeren Nahrungsangebotes sich Raubfische prozentual stärker vermehren konnten. Nachdem die Fischerei wieder aufgenommen wurde, ging auch der Anteil der Haie zurück.

Volterra fasste die Ergebnisse in zwei nichtlinearen, autonomen Differentialgleichungen zusammen. Da unabhängig von ihm auch Alfred J. Lotka die wechselseitige Beziehung zweier Räuber- beziehungsweise Beute- Populationen untersuchte und mathematisch begründete, werden diese **Lotka-Volterra-Gleichungen** genannt (siehe [8], Seite 104).

Bei der Analyse des beschriebenen ökologischen Modells kommt der Satz von Poincaré-Bendixson zur Anwendung. Dies wird unter anderem in dem Buch *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra* von Hirsch/Smale [2] gezeigt, welches im weiteren Verlauf als Vorlage dient.

3.1 Räuber-Beute-Modell

Betrachtet man zu einem bestimmten Zeitpunkt t die Anzahl einer Bevölkerung $y(t)$ – in diesem Fall seien dies Haie – so stellt man fest, dass sich die Anzahl der Tiere aufgrund von Fortpflanzung beziehungsweise Absterben innerhalb eines bestimmten Zeitraums $[t, t + \Delta t]$ auf den Wert

$$y(t) + \Delta y(t)$$

erhöht oder vermindert. Hierbei ist Δt die Länge der vergangenen Zeit und $\Delta y(t)$ die absolute Zu- oder Abnahme der beobachteten Größe in Δt .

Setzt man die Änderung der Bevölkerungsanzahl $\Delta y(t)$ pro Zeiteinheit Δt zur Gesamtmenge $y(t)$ ins Verhältnis, so erhält man die **durchschnittliche Wachstumsrate** der Population

$$\frac{\Delta y(t)}{y(t)\Delta t}.$$

Führt man eine Grenzwertbetrachtung für $\Delta t \rightarrow 0$ durch, verkleinert also den betrachteten Zeitraum immer weiter, so ergibt sich mit

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y(t)}{y(t)\Delta t} = \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \alpha(t)$$

die **Wachstumsrate** $\alpha(t)$ der Bevölkerung zum Zeitpunkt t .

Vereinfachend nimmt man an, die Wachstumsrate α sei konstant. Dies bedeutet, dass die Anzahl der Geburten und Todesfälle der Haie im Zeitraum Δt in einem festen Verhältnis zur Gesamtpopulation $y(t)$ steht. Damit ist die Wachstumsrate unabhängig von der Anzahl der Individuen und der Zeit, folglich ist

$$\alpha = \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \frac{d}{dt} \ln y(t).$$

Auf diese Weise ergibt sich eine autonome Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = \alpha y(t),$$

welche das Bevölkerungswachstum der betrachteten Population beschreibt. Für diese Differentialgleichung berechnet man durch Integration die Lösungskurve

$$y(t) = y_0 e^{\alpha t}$$

und mit bekannter Anfangsbevölkerung y_0 erlangt man eine Lösung für **unbegrenzt** **Wachstum** der Haie.

Die Wachstumsrate α hängt von verschiedenen Faktoren ab, zum Beispiel vom Nahrungsangebot pro Kopf σ . Man nimmt vorerst an, dass $\sigma \geq 0$ konstant sei. Mit σ_0 , $\sigma_0 > 0$, wird die minimale Menge an Nahrung bezeichnet, die nötig ist, um die Bevölkerungszahl konstant zu halten. Folglich ist

- die Wachstumsrate α positiv, wenn $\sigma > \sigma_0$,
- die Wachstumsrate α negativ, wenn $\sigma < \sigma_0$,
- die Wachstumsrate $\alpha = 0$, wenn $\sigma = \sigma_0$.

Stellt man α als lineare Funktion $\alpha = \beta(\sigma - \sigma_0)$ mit $\beta > 0$ konstant dar, erhält man eine autonome Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = \beta(\sigma - \sigma_0)y(t)$$

für das unbegrenzte Wachstum der Raubfische, welche sich ausschließlich von der Beute σ ernähren. Die entsprechende Lösungskurve ist

$$y(t) = y_0 e^{\beta(\sigma - \sigma_0)t}.$$

Weitet man die Betrachtung auf eine zweite Bevölkerung $x(t)$ – die Fische – zum Zeitpunkt t aus, welche das Nahrungsangebot der Haie $y(t)$ zur selben Zeit darstellt. Angenommen, die Jagdtiere ernähren sich ausschließlich von dieser Beute.

Treffen beide Tierarten aufeinander, so werden die Fische mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit gefressen, während sich die Haie durch die Nahrungsaufnahme vermehren. Die Anzahl dieser Begegnungen sei proportional zu $x(t)y(t)$, also $\delta \cdot x(t)y(t)$ mit konstantem $\delta > 0$. Der Nahrungsverbrauch der Jäger pro Zeiteinheit sei wiederum proportional zur Menge des Zusammentreffens von Räuber und Beute, etwa $\epsilon \cdot \delta \cdot x(t)y(t)$, $\epsilon > 0$ konstant. Damit ist das Nahrungsangebot pro Hai zum Zeitpunkt t proportional zu $x(t)$.

Setzt man in die autonome Differentialgleichung für unbegrenzt Wachstum als Nahrungsangebot $x(t)$ anstelle von σ ein, so erhält man mit $\beta := \epsilon\delta$ eine Gleichung für das Wachstum der Jäger

$$\dot{y}(t) = \beta(x(t) - \sigma_0)y(t),$$

mit konstanten $\beta, \sigma_0 > 0$.

Definiert man $c := \beta$ und $d := \beta\sigma_0$, dann ergibt sich mit

$$\dot{y}(t) = (cx(t) - d)y(t), \quad c, d > 0. \quad (6)$$

die Wachstumsrate $(cx(t) - d)$ der Haie in Abhängigkeit vom Nahrungsangebot $x(t)$.

Betrachtet man die Wachstumsrate der Beute $x(t)$, so stellt man fest, dass in jedem Zeitraum Δt eine bestimmte Menge der Fische gefressen wird. Diese Anzahl sei nur abhängig von den beiden Populationen und proportional zu Δt , also

$$g(x, y)\Delta t.$$

Die Proportionalität von $g(x, y)$ folgt aus der Überlegung, dass doppelt so viele Haie auch doppelt so viele Fische fressen. Ebenso wird ein Hai seiner Beute zweimal so häufig begegnen, wenn die Bevölkerung der Fische doppelt so groß ist. Daher ist $g(x, y)$ sowohl zu y , als auch zu x proportional. Man kann somit

$$g(x, y) = \kappa \cdot x(t)y(t)$$

mit konstantem $\kappa > 0$ schreiben. Angenommen, zu jedem Zeitpunkt sei ausreichend Nahrung für die Fische vorhanden ist, dann ergibt sich mit $a > 0$ und $b := \kappa$ das Wachstum der Beutepopulation

$$\dot{x}(t) = (a - by(t))x(t) \quad (7)$$

und hieraus die Wachstumsrate $(a - by(t))$ der Fische. Aus den Gleichungen (6) und (7) erhält man die

Räuber-Beute-Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (a - by)x \\ \dot{y} &= (cx - d)y, \end{aligned} \quad (8)$$

mit $a, b, c, d > 0$ konstant,

ein autonomes Differentialgleichungssystem, welches auch als **einfache Lotka-Volterra-Gleichung** bezeichnet wird und das unbegrenzte Wachstum zweier Spezies – in diesem Fall der Fische und der Haie – beschreibt.

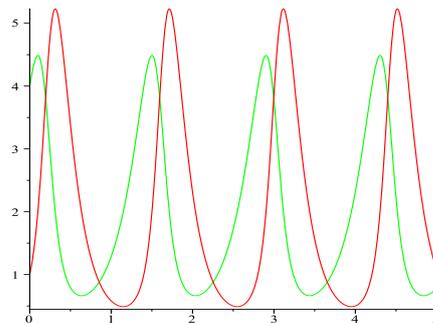


Abbildung 16: Lösungskurve einer Räuber-Beute-Gleichung

Stellt man die Lösungskurven der beiden Gleichungen exemplarisch mit $a = 4$, $b = 3$, $c = 3$, $d = 6$ in Abhängigkeit von der Zeit dar, erkennt man, dass sowohl die Anzahl der Jäger (rot), als auch die der Beute (grün) periodisch schwankt (Abbildung 16). Hierbei verläuft die Bahn der Jäger stets zeitverzögert zur Kurve der Beute.

Eine explizite Lösung der Räuber-Beute-Gleichung (8) ist auf rechnerische Weise nicht zu erhalten. Daher untersucht man das Langzeitverhalten der beiden Populationen durch eine Analyse des Phasenraums.

Hierfür bestimmt man zuerst die Stabilität der Equilibrien mit Hilfe des Prinzips der Linearisierten Stabilität aus Abschnitt 1.2. Setzt man

$$f(x, y) := \begin{pmatrix} (a - by)x \\ (cx - d)y \end{pmatrix}$$

und löst die Gleichung $f(x, y) = 0$, so erhält man die beiden Ruhelagen $z_{1,2}^* = (x_{1,2}^*, y_{1,2}^*)$ bei $z_1^* = (0, 0)$ und $z_2^* = (\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$. Unter Verwendung der Jacobi-Matrix des Räuber-Beute-Modells (8)

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ cy & cx - d \end{pmatrix}$$

bestimmt man die Eigenwerte des charakteristischen Polynoms in den Equilibrien.

- Equilibrium $z_1^* = (0, 0)$:

$$Df(z_1^*) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$$

Die entsprechenden Eigenwerte sind $\lambda_1 = a > 0$ und $\lambda_2 = -d < 0$, daher ist z_1^* ein Sattel und somit instabil. Es gibt sowohl Richtungsvektoren, die auf z_1^* zuführen, als auch welche, die von dort weg zeigen.

- Equilibrium $z_2^* = (\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$:

$$Df(z_2^*) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ac}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

Die zugehörigen Eigenwerte sind $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{ad}$, haben also beide den Realwert $Re \lambda_1 = Re \lambda_2 = 0$. Das Prinzip der Linearisierten Stabilität führt für das Equilibrium z_2^* zu keinem Ergebnis.

Um Aussagen über die Stabilität von z_2^* machen zu können, betrachtet man den Phasenraum des Räuber-Beute-Modells.

Hierfür verwendet man die in Abschnitt 1.1 eingeführten Nullklinen K, L mit

- $\dot{x} = 0$: $K := y = \frac{a}{b}$
- $\dot{y} = 0$: $L := x = \frac{d}{c}$.

Diese werden in das Richtungsfeld des autonomen Differentialgleichungssystems (8) eingezeichnet (Abbildung 17). Auf K ändert sich die Anzahl der Beute nicht, entlang L bleibt die Menge der Räuber konstant.

Die Geraden K und L unterteilen den I. Quadranten Q_1 des Koordinatensystems mit $x > 0$, $y > 0$ in vier Gebiete M_i , $i = \{1, 2, 3, 4\}$. In jedem Gebiet M_i sind die Vorzeichen von \dot{x} und \dot{y} jeweils konstant – oberhalb von K ist $\dot{x} < 0$, unterhalb $\dot{x} > 0$ respektive auf der linken Seite von L gilt $\dot{y} < 0$, auf der Rechten $\dot{y} > 0$.

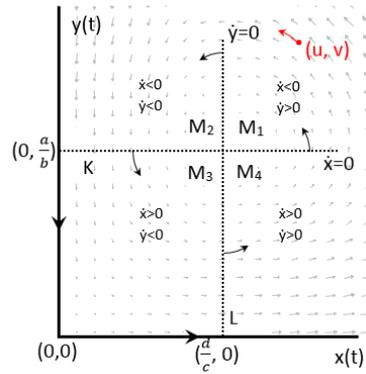


Abbildung 17: Richtungsfeld einer Räuber-Beute-Gleichung

Gilt für die Anfangsbedingung $x_0 \neq 0$, $y_0 = 0$ – sind keine Haie vorhanden – so folgt für das Wachstum der Populationen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax > 0 \\ \dot{y} &= 0,\end{aligned}$$

und der Orbit

$$\Phi(t, (x_0, 0)) = (x_0 e^{at}, 0)$$

beschreibt das ungestörte Wachstum der Fische. Also ist die positive x -Achse ein Orbit der Räuber-Beute-Gleichung (8) und invariant. Sie beschreibt die instabile Mannigfaltigkeit der Ruhelage z_1^* .

Analog gilt für die Anfangsbedingung $x_0 = 0$, $y_0 \neq 0$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 0 \\ \dot{y} &= -dy < 0\end{aligned}$$

und die Lösungskurve

$$\Phi(t, (0, y_0)) = (0, y e^{dt})$$

zeigt, dass die Raubtiere aussterben werden. Auch die positive y -Achse ist invariant und stellt einen Orbit der Lotka-Volterra-Gleichung (8) dar. Da sie die stabile Mannigfaltigkeit für das Equilibrium z_1^* beschreibt, ist auch gezeigt, dass z_1^* ein Sattel ist.

Betrachtet man das Richtungsfeld der Räuber-Beute-Gleichung (8), so erkennt man, dass sich jede Trajektorie $\gamma((x_0, y_0)) = (x(t), y(t))$ für $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$ gegen den Uhrzeigersinn um die Ruhelage z_2^* bewegt – von einem Gebiet M_i zum Nächsten. Dies wird im Folgenden gezeigt.

Um den Satz von Poincaré-Bendixson 2.12 anwenden und eine mögliche ω_+ -Grenzmenge bestimmen zu können, muss man zeigen, dass jede Trajektorie $(x(t), y(t))$ in einer kompakten Menge beschränkt ist. Hierfür wähle man einen Orbit, dessen Anfangswert $w = (u, v) \in Q_1$ exemplarisch in M_1 liegt (Abbildung 17). Es ist also

$$\begin{aligned}x_0 &= u > \frac{d}{c} > 0 \\ y_0 &= v > \frac{a}{b} > 0.\end{aligned}$$

Dann gilt für die Wachstumsraten $(a - by)$ beziehungsweise $(cx - d)$ der beiden Spezies zum Startzeitpunkt t_0

$$\begin{aligned} -r &:= a - by_0 = a - bv < 0 \\ s &:= cx_0 - d = cu - d > 0. \end{aligned}$$

Da $y(t)$ in M_1 monoton steigt und $x(t)$ monoton fällt, ist weiter

$$\begin{aligned} -r &\geq a - by(t) \\ s &\geq cx(t) - d. \end{aligned}$$

für $t \geq t_0$. Damit erhält man für das Wachstum von Räuber und Beute

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (a - by(t))x(t) \leq -rx(t) \\ \dot{y}(t) &= (cx(t) - d)y(t) \leq sy(t). \end{aligned}$$

Hieran kann man zum Einen erkennen, dass die Anzahl der Fische sinkt, während die Haifisch-Bevölkerung wächst, solange sich der Orbit in dem Gebiet M_1 befindet. Es gilt somit $x(t) < u$ und $y(t) > v$ für $\gamma(w) \in M_1$.

Zum Anderen folgt daraus, dass es ein maximales Zeitintervall $I = [0, \tau)$ mit $0 \leq t < \tau$ geben muss, in dem der Orbit $\gamma(w)$ in dem Gebiet M_1 liegt. Hierbei könnte auch $\tau = \infty$ gelten, die Lösungskurve würde in diesem Fall M_1 nicht verlassen.

Betrachtet man die Wachstumsraten der beiden Spezies zum Zeitpunkt $t \in I$, so erkennt man, dass

$$\begin{aligned} -r &\geq (a - by(t)) = \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = \frac{d}{dt} \ln x(t) \\ s &\geq (cx(t) - d) = \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \frac{d}{dt} \ln y(t), \end{aligned}$$

gilt. Da für den Anfangswert $w \in M_1$ gilt, sind die unteren Grenzen für $x(t)$ und $y(t)$ festgelegt. Durch Integration erhält man aus den beiden vorigen Ungleichungen mit

$$\begin{aligned} \frac{d}{c} &\leq x(t) \leq u e^{-rt} \\ \frac{a}{b} &\leq y(t) \leq v e^{st} \end{aligned}$$

ein Intervall der Werte für $x(t)$ und $y(t)$ solange $t \in I$, $I = [0, \tau)$.

Aufgrund von $e^{-rt} \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$, kann man erkennen, dass $ue^{-rt} \leq u$ für $t \in I$ und somit $\tau \neq \infty$, also endlich sein muss. Daher ist $ve^{st} < ve^{s\tau}$ für $t \in I$ und der Orbit $\gamma(w)$ ist in dem kompakten Gebiet

$$\begin{aligned} \frac{d}{c} &\leq x(t) \leq u \\ \frac{a}{b} &\leq y(t) < ve^{s\tau} \end{aligned}$$

beschränkt. Da $x(t)$ fällt, gilt $x(\tau) = \frac{d}{c}$ und die Trajektorie betritt M_2 zum Zeitpunkt τ . Analog folgert man für die Gebiete M_2 , M_3 , M_4 .

Damit ist gezeigt, dass sich alle Trajektorien der Räuber-Beute-Gleichung (8) gegen den Uhrzeigersinn um das Equilibrium z_2^* in einem kompakten Gebiet bewegen

und man kann den Satz von Poincaré-Bendixson 2.12 verwenden. Nach diesem ist es möglich, dass sich ein Orbit dem Equilibrium z_2^* nähert oder gegen einen Grenzyklus konvergiert. Auch könnte eine Lösungskurve gegen die Koordinatenachsen streben. Um hierzu genauere Angaben machen zu können, untersucht man mit Hilfe einer Ljapunov-Funktion die Stabilität in z_2^* , wie in Abschnitt 1.2 gezeigt.

Eine Variante, um möglicherweise eine Ljapunov-Funktion zu erhalten, ist ähnlich der Variablen-Separation partieller Differentialgleichungen. Sie wird zum Beispiel von Hirsch/Smale verwendet (siehe [2], Seite 261). Man versucht eine monoton fallende Funktion V der Form

$$V(x, y) = F(x) + G(y)$$

mit der gewünschten Eigenschaft $\dot{V} \leq 0$ zu finden. Leitet man V mit Hilfe der Kettenregel nach t ab, erhält man

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= \frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) \\ &= \frac{d}{dx} F(x(t)) \dot{x}(t) + \frac{d}{dy} G(y(t)) \dot{y}(t) \\ &= \frac{d}{dx} F(x(t)) (a - by(t)) x(t) + \frac{d}{dy} G(y(t)) (cx(t) - d) y(t). \end{aligned}$$

Man kann versuchen, ein erstes Integral der Räuber-Beute-Gleichung zu finden. Hierfür nimmt man an, dass V konstant sei und somit $\dot{V} = 0$ gelte. Unter diesen Voraussetzungen erhält man durch Einsetzen

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dx} F(a - by)x + \frac{d}{dy} G(cx - d)y &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dx} F(by - a)x = \frac{d}{dy} G(cx - d)y \\ \Leftrightarrow \frac{x \frac{d}{dx} F}{(cx - d)} &= \frac{y \frac{d}{dy} G}{(by - a)} \end{aligned}$$

die Trennung der Variablen. Da x und y unabhängig voneinander sind, gilt

$$\frac{x \frac{d}{dx} F}{(cx - d)} = \frac{y \frac{d}{dy} G}{(by - a)} = \delta,$$

für ein konstantes δ . Setzt man $\delta = 1$, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F &= c - \frac{d}{x} \\ \frac{d}{dy} G &= b - \frac{a}{y} \end{aligned}$$

und weiter durch Integration

$$\begin{aligned} F(x) &= cx - d \ln x \\ G(y) &= by - a \ln y. \end{aligned}$$

Mit dem Equilibrium $z_2^* = (x_2^*, y_2^*) = (\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$ gilt $d = cx_2^*$ und $a = by_2^*$ und man erhält auf diese Weise die Funktion

$$\begin{aligned} V(x, y) &= F(x) + G(y) \\ &= cx - d \ln x + by - a \ln y \\ &= c(x - x_2^* \ln x) + b(y - y_2^* \ln y) \end{aligned} \tag{9}$$

Nach Voraussetzung ist $\dot{V}(x, y) = 0$ und somit $V(x, y)$ für $x, y > 0$ konstant auf den Trajektorien der Räuber-Beute-Gleichung (8).

Um zu zeigen, dass es sich bei V um eine Ljapunov-Funktion handelt, berechnet man den Gradienten ∇V und die Hesse-Matrix H_V von V jeweils im Equilibrium z_2^* . Es gilt für den Gradienten

$$\nabla V(z_2^*) = \begin{pmatrix} c - \frac{cx_2^*}{x_2^*} \\ b - \frac{by_2^*}{y_2^*} \end{pmatrix} = 0.$$

Für die Hesse-Matrix erhält man

$$\begin{aligned} H_V(z_2^*) &= \begin{pmatrix} \frac{d}{(x_2^*)^2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{(y_2^*)^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} dc^2 & 0 \\ 0 & ab^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diese ist positiv definit, da mit $a, b, c, d > 0$ für beide Eigenwerte $\lambda_{1,2} > 0$ gilt. Folglich ist das Equilibrium $z_2^* = (\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$ ein absolutes Minimum von V (siehe [11], Seite 312). Damit sind alle Bedingungen für den Satz der Ljapunov-Stabilität 1.9 erfüllt und ist V eine konstante Ljapunov-Funktion mit $\dot{V} = 0$ für alle $(x, y)^T \in U \setminus z_2^*$. Somit ist die Ruhelage z_2^* stabil, jedoch nicht asymptotisch stabil.

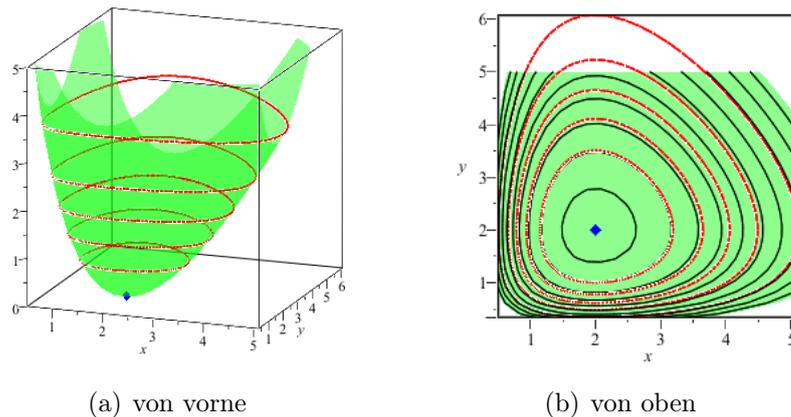


Abbildung 18: Ljapunov-Funktion für die Räuber-Beute-Gleichung

In Abbildung 18 wurde die Ljapunov-Funktion so transformiert, dass $V(z_2^*) = 0$ und $V(x, y) \neq 0$ für $(x, y) \neq z_2^*$ gilt. Auf der linken Seite (a) ist zu erkennen, dass auf $V(x, y)$ periodische Bahnkurven für verschiedene Anfangsbedingungen liegen. Ebenso kann man sehen, dass sich das Equilibrium z_2^* an der Stelle des absoluten Minimums von V befindet, also ist z_2^* stabil. Auf der rechten Darstellung (b) bilden sich die Trajektorien auf den Höhenlinien der Funktion V ab und sind somit dort konstant. Da kein Orbit gegen z_2^* strebt, ist diese Ruhelage nicht asymptotisch stabil.

Mit Hilfe der soeben erhaltenen Ljapunov-Funktion V kann man zeigen, dass es für das einfache Lotka-Volterra-Modell keinen Grenzzyklus gibt.

Es gilt nach Voraussetzung $\dot{V}(x, y) = 0$ auf allen Trajektorien der Räuber-Beute-Gleichung (8). Angenommen, es würde ein Grenzzyklus existieren. Dann gäbe es einen Orbit $\gamma(w)$, der gegen den Grenzzyklus konvergieren würde und es wäre $\dot{V}(w) = 0$. Dies ist jedoch nicht möglich, da V nicht auf jeder offenen Menge konstant ist.

Mit dem Ergebnis, dass die Ruhelage z_2^* stabil ist, kann man eine Aussage über den Verlauf der Orbits eines autonomen Differentialgleichungssystems (8) machen.

Satz 3.1. Jede Trajektorie der einfachen Lotka-Volterra-Gleichung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (a - by)x \\ \dot{y} &= (cx - d)y\end{aligned}$$

mit $a, b, c, d > 0$ ist ein geschlossener Orbit, abgesehen vom Equilibrium z_2^* und den positiven Koordinatenachsen.

Beweis. Man betrachte einen Punkt $w = (u, v) \in Q_1, w \neq z_2^*$, welcher kein Equilibrium ist. Dann gibt es eine doppelt unbegrenzte Folge $(t_n) \rightarrow \pm\infty, n \in \mathbb{Z}$, mit

$$\dots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \dots$$

so, dass die Punkte $\Phi(t_n, w)$ auf der Transversalen $\Sigma \subset L$ liegen.

Angenommen $\gamma(w)$ sei ein nicht-geschlossener Orbit. Dann sind die Punkte $\Phi(t_n, w)$ mit Lemma 2.4 monoton entlang der Transversalen Σ (Abbildung 19).

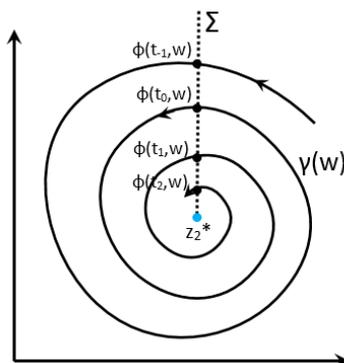


Abbildung 19: Nachweis von periodischen Orbits der Räuber-Beute-Gleichung

Da es keinen Grenzyklen geben kann, gilt entweder

$$\Phi(t_n, w) \rightarrow z_2^* \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

oder

$$\Phi(t_n, w) \rightarrow z_2^* \quad \text{für } n \rightarrow -\infty.$$

Nachdem V auf der Trajektorie von w konstant ist, folgt daraus $V(w) = V(z_2^*)$. Dies aber widerspricht der Voraussetzung, dass $V(z_2^*)$ ein absolutes Minimum ist. Somit ist $\gamma(w)$ ein geschlossener, also regulärer periodischer Orbit. \square

Nachfolgend ist das Phasenportrait einer einfachen Volterra-Lotka-Gleichung (8) exemplarisch mit $a = 4, b = 2, c = 3, d = 6$ dargestellt.

Zu sehen sind periodische Trajektorien, welche für verschiedene Anfangsbevölkerungen (x_0, y_0) mit $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$ – abgesehen vom Equilibrium z_2^* – um dieses oszillieren. Dies bedeutet, dass, unabhängig von der Anzahl der Haie und Fische, weder eine oder sogar beide Arten aussterben werden. Noch wird keine der beiden Spezies unbegrenzt anwachsen. Mit Ausnahme des Equilibriums z_2^* , in welchem sich Jagdtiere und Beute im Gleichgewicht befinden, wird folglich keine der Bevölkerungen konstant bleiben.

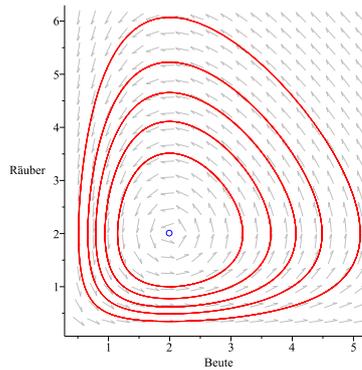


Abbildung 20: Phasenportrait einer Räuber-Beute-Gleichung

3.2 Erweitertes Räuber-Beute-Modell

In der Realität ist es unrealistisch, ein unbegrenztes Wachstum der Populationen anzunehmen. Jede Bevölkerung wird in ihrer Ausbreitung durch verschiedene Faktoren, wie zum Beispiel Nahrungs- und Platzangebot, beschränkt. Diese Einflüsse nennt man **soziale Phänomene**. Überschreitet zum Beispiel die Menge der Raubfische einen bestimmten Wert η , dann gibt es für die einzelnen Tiere nicht mehr genug zu fressen. Daher nimmt die Anzahl der Haie wieder ab und die Wachstumsrate wird negativ. Der Wert η heißt die **Begrenzung der Bevölkerung**.

Angenommen, die Wachstumsrate α sei proportional zur Differenz $\eta - y$, $\eta > 0$, aus Bevölkerungsbegrenzung und der Anzahl der Räuber zum Zeitpunkt t , also

$$\alpha = \rho(\eta - y(t))$$

mit konstantem $\rho > 0$, dann gilt für das Wachstum der Haie die **logistische Gleichung**

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \rho[\eta - y(t)]y(t) \\ &= \rho\eta y(t) - \rho y^2(t). \end{aligned}$$

Die Zahl $\rho y^2(t)$ drückt hier die Konkurrenz der Tiere um Nahrung untereinander aus, die sogenannte **soziale Reibung**. Diese sei proportional zur durchschnittlichen Anzahl der Begegnungen zwischen den Individuen dieser Bevölkerung.

Ergänzt man beide Gleichungen des Räuber-Beute-Modells (8) mit den Beobachtungen zur Begrenzung der Populationen, so erhält man die

Räuber-Beute-Gleichung für limitiertes Wachstum

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (a - by - ex)x \\ \dot{y} &= (cx - d - fy)y \end{aligned} \tag{10}$$

mit $a, b, c, d, e, f > 0$ konstant.

Visualisiert man die Lösungskurven von Räuber und Beute wie bereits im vorigen Kapitel für eine bestimmte Anfangsgröße (zum Beispiel $x_0 = 5$, $y_0 = 1$), so stellt man fest, dass sich die Diagramme in zwei Gruppen unterteilen lassen (Abbildung 21).

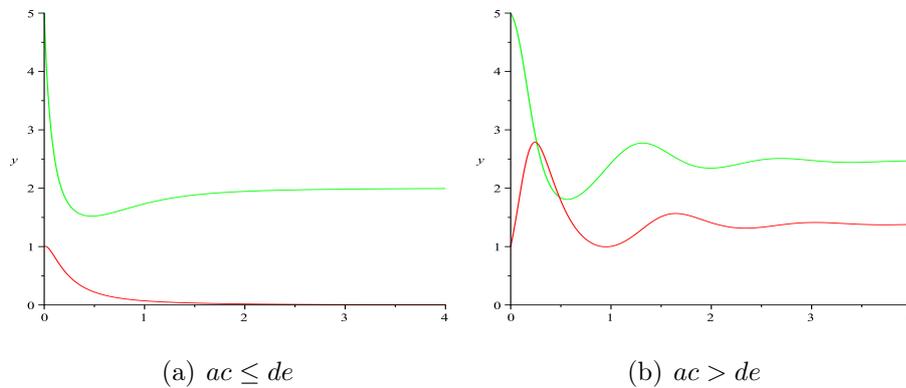


Abbildung 21: Lösungskurven von limitierten Räuber-Beute-Gleichungen

In Abhängigkeit der Variablen a , c , d und e lässt die linke Darstellung (a) vermuten, dass sich die Beute auf eine bestimmte Anzahl einstellt, während die Räuber aussterben. Auf der rechten Seite (b) scheinen sich dagegen sowohl Haie als auch Fische auf jeweils eine konstante Anzahl einzupendeln.

Diese Beobachtungen sollen im weiteren Verlauf ausführlich untersucht und begründet werden.

Da eine explizite Lösung des erweiterten Lotka-Volterra-Modells (10) nicht zu erlangen ist, analysiert man das Langzeitverhalten des Systems in speziellen Lösungen und erhält so, analog zu Abschnitt 3.1 einen Einblick in den Verlauf der Trajektorien.

Man beginnt mit der Untersuchung der Stabilität in den Ruhelagen. Die Equilibrien $z_n^* = (x_n^*, y_n^*)$ ergeben sich aus dem Gleichungssystem

$$f(x, y) := \begin{pmatrix} (a - by - ex)x \\ (cx - d - fy)y \end{pmatrix} = 0$$

und man erhält $z_1^* = (0, 0)$, $z_2^* = (\frac{a}{e}, 0)$.

Ist $ac > de$, so erhält man einen dritten Punkt bei

$$z_3^* = \left(\frac{af + bd}{bc + ef}, \frac{ac - de}{bc + ef} \right).$$

Wäre $ac < de$, ergäbe sich in z_3^* eine negative Anzahl an Räubern. Dies ist jedoch in einem Öko-System nicht möglich. Die Jacobi-Matrix des Systems (10) lautet

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} a - by - 2ex & -bx \\ cy & cx - d - 2fy \end{pmatrix}$$

und liefert die Eigenwerte des charakteristischen Polynoms in den Ruhelagen, mit deren Hilfe man die Stabilität in diesen Punkten bestimmen kann.

- Equilibrium $z_1^* = (0, 0)$:

$$Df(z_1^*) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$$

Die zugehörigen Eigenwerte sind $\lambda_1 = a > 0$ und $\lambda_2 = -d < 0$. Somit ist z_1^* ein Sattel, es gibt sowohl Orbits, die von z_1^* wegführen als auch Orbits, die darauf zuführen.

- Equilibrium $z_2^* = (\frac{a}{e}, 0)$:

$$Df(z_2^*) = \begin{pmatrix} -a & -\frac{ab}{e} \\ 0 & \frac{ac}{e} - d \end{pmatrix}$$

Hier ergeben sich die entsprechenden Eigenwerte $\lambda_1 = -a < 0$ und $\lambda_2 = \frac{ac-de}{e}$. Für $ac > de$ ist der Eigenwert λ_2 positiv, in diesem Fall ist z_2^* ein Sattel, also instabil. Gilt $ac < de$, dann ist $\lambda_2 < 0$, z_2^* ist eine Senke und asymptotisch stabil. Für $ac = de$ kann man auf diese Weise keine Aussage machen, da $\lambda_2 = 0$ gilt, das Equilibrium z_2^* somit nicht hyperbolisch ist.

- Equilibrium $z_3^* = (\frac{af+bd}{bc+ef}, \frac{ac-de}{bc+ef})$ für $ac > de$:

$$Df(z_3^*) = \begin{pmatrix} -e\frac{af+bd}{bc+ef} & -b\frac{af+bd}{bc+ef} \\ c\frac{ac-de}{bc+ef} & -f\frac{ac-de}{bc+ef} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ex_3^* & -bx_3^* \\ cy_3^* & -fy_3^* \end{pmatrix}$$

Um die Eigenwerte nicht explizit zu bestimmen, betrachtet man die Vorzeichen von p und q . Es ist

$$p = sp \begin{pmatrix} -ex_3^* & -bx_3^* \\ cy_3^* & -fy_3^* \end{pmatrix} = -ex_3^* - fy_3^* < 0$$

und

$$q = \det \begin{pmatrix} -ex_3^* & -bx_3^* \\ cy_3^* & -fy_3^* \end{pmatrix} = ef x_3^* y_3^* + bc x_3^* y_3^* > 0.$$

Somit gilt für die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \underbrace{\frac{p}{2}}_{<0} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}_{<p}$$

Die Realteile der Eigenwerte sind in diesem Punkt negativ, also $Re \lambda_{1,2} < 0$, und das Equilibrium z_3^* ist asymptotisch stabil. Ein Orbit, der in geeignet kleiner Umgebung von z_3^* beginnt, wird daher auf diesen Punkt zulaufen.

Hat man die Stabilität in den Equilibrien bestimmt, stellt sich die Frage, ob alle Orbits auf die asymptotisch stabilen Ruhelagen z_2^* für $ac < de$ respektive z_3^* für $ac > de$ zulaufen. Oder gilt dies nur für Orbits, welche in hinreichend kleiner Umgebung U von $z_{2,3}^*$ beginnen, und es existieren zusätzlich Grenzyklen?

Durch eine Phasenraumanalyse kann man, ähnlich wie in Abschnitt 3.1, genauere Angaben zum Verlauf der Lösungskurven erhalten.

Man unterteilt den rechten oberen Quadranten Q_1 (mit $x > 0, y > 0$) eines Koordinatensystems durch die beiden Nullklinen

$$K := a - by - ex = 0 \quad \Rightarrow y = -\frac{e}{b}x + \frac{a}{b}$$

$$L := cx - d - fy = 0 \quad \Rightarrow y = \frac{c}{f}x - \frac{d}{f}$$

in mehrere Gebiete. Entlang K ist die Beute-Population konstant, also $\dot{x} = 0$, während auf L die Anzahl der Räuber gleich bleibt, somit gilt hier $\dot{y} = 0$. Die beiden Kurven K und L schneiden sich in dem Punkt

$$z = \left(\frac{af + bd}{bc + ef}, \frac{ac - de}{bc + ef} \right).$$

Ist $ac > de$, so liegt der Schnittpunkt z innerhalb des I. Quadranten und es ist $z = z_3^*$ ein Equilibrium. Für $ac \leq de$ gilt $z \notin Q_1$.

Die beiden Fälle werden getrennt voneinander betrachtet.

1. Fall: $ac \leq de$

Angenommen, es gilt $ac < de$. Hier existieren die beiden Equilibrien $z_1^* = (0, 0)$ – ein Sattel – und $z_2^* = (\frac{a}{e}, 0)$. z_2^* ist eine Senke für $ac < de$ respektive hat einen verschwindenden Eigenwert für $ac = de$. Weiter folgt, dass der Schnittpunkt z von K und L außerhalb von Q_1 liegt.

Anhand der Lösungskurven (Abbildung 21 (a)) kann man erkennen, dass die Räuber aussterben werden und die Beute-Population sich dem Grenzwert $\frac{a}{e}$ annähert. Dies ist die Stelle, an der die Kurve K die x -Achse schneidet, also die (asymptotisch stabile) Ruhelage z_2^* (Abbildung 22).

Dies wird im weiteren Verlauf gezeigt.

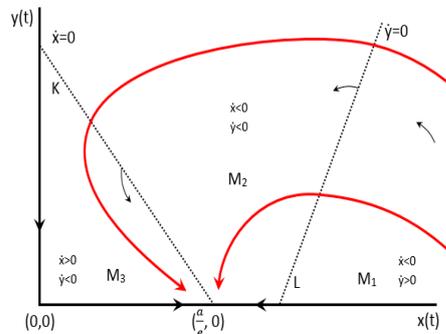


Abbildung 22: Richtungsfeld einer limitierten Räuber-Beute-Gleichung ($ac < de$)

Der I. Quadrant wird von den beiden Kurven K und L in drei Gebiete M_1, M_2 und M_3 unterteilt. Analog zum Räuber-Beute-Modell (8) sind die Vorzeichen von \dot{x} und \dot{y} innerhalb eines Gebietes jeweils konstant. Da der Schnittpunkt z nicht in Q_1 liegt, gibt es kein Gebiet M_4 mit $\dot{x} > 0$ und $\dot{y} > 0$. Somit ist es nicht möglich, dass sich sowohl Raubtiere als auch Fische gleichzeitig vermehren.

Gilt für die Anfangsbedingung $x_0 \neq 0, y_0 = 0$ – gibt es also zum Zeitpunkt t_0 keine Haie bei vorhandener Beute – dann gilt

$$\dot{x} = (ax - ex^2)$$

$$\dot{y} = 0.$$

Hierfür berechnet man die Lösungskurve

$$\Phi(t, (x_0, 0)) = \left(\frac{a}{e + x_0 a e^{-at}}, 0 \right)$$

und diese strebt gegen den Grenzwert $\frac{a}{e}$ für $t \rightarrow \infty$. Somit werden sich die Fische auf den Wert $\frac{a}{e}$ stabilisieren.

Gilt $x_0 = 0, y_0 \neq 0$ – finden die Räuber also keine Nahrung – dann ist

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0 \\ \dot{y} &= (-dy - fy^2). \end{aligned}$$

Hier ergibt sich die Trajektorie

$$\Phi(t, (0, y_0)) = \left(0, \frac{d}{-f + y_0 d e^{dt}} \right)$$

mit dem Grenzwert 0 für $t \rightarrow \infty$ – die Haie werden aussterben.

Bevor man Fall (1) für die Anfangswerte $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$ betrachtet, stellt man eine für die weitere Analyse des Systems hilfreiche Überlegung an.

Sei $\gamma(w)$ ein Orbit mit Anfangswert $w = (u, v) \in Q_1$.

Angenommen, die Kurve K schneidet die x -Achse an der Stelle $(\frac{a}{e}, 0)$ und die y -Achse an der Stelle $(0, \frac{a}{b})$. Dann gibt es ein Rechteck Λ mit den Ecken

$$\begin{array}{ll} (0, q) & (p, q) \\ (0, 0) & (p, 0), \end{array}$$

für welches $p > \frac{a}{e}, q > \frac{a}{b}$ gilt und die Ecke (p, q) auf L liegt, also $(p, q) \in L$ ist. (Abbildung 23).

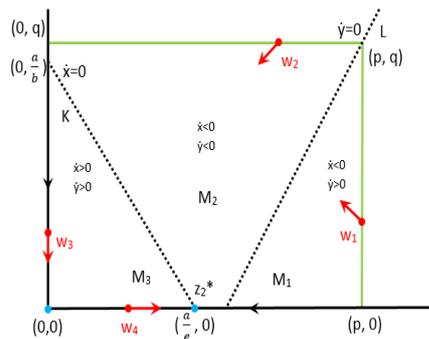


Abbildung 23: Richtungsfeld mit Rechteck Λ (grün) für $ac < de$

Die Vorzeichen von \dot{x} und \dot{y} für $ac \leq de$ innerhalb eines Gebietes $M_i, i = \{1, 2, 3\}$, sind jeweils konstant. Daher führt jeder Orbit, der in einem Punkt $w = (u, v) \in \bar{\Lambda}$ auf der Begrenzung von Λ beginnt, entweder in Λ hinein – in der Abbildung ist dies der Fall für $\gamma(w_1)$ beziehungsweise $\gamma(w_2)$. Oder der Orbit ist Teil der Begrenzung $\bar{\Lambda}$. Dies trifft zu, falls $w \in \bar{\Lambda}$ entweder auf der x -Achse oder auf der y -Achse liegt – im Schaubild gilt dies für $\gamma(w_4)$ respektive $\gamma(w_3)$. Somit kann ein Orbit, der in das Rechteck hinein führt, dieses aufgrund der Eindeutigkeit der

Lösungskurven und der Invarianz der Koordinatenachsen nicht mehr verlassen. Damit ist die Invarianz von Λ gezeigt.

Für jeden beliebigen Punkt $w \in Q_1$ lässt sich ein Rechteck Λ so finden, dass $w \in \Lambda$ gilt.

Sei $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$. Liegt die Beute über ihrer Grenzbevölkerung, dann befindet sich der Anfangswert $w = (u, v)$ entweder in M_1 oder in M_2 , da $\dot{x} < 0$ sein muss. Sei $w \in M_1$, dann ist die Wachstumsrate für die Fische negativ, während sich die Raubtiere weiter vermehren. Analog zum unbegrenzten Wachstum ist dies so lange der Fall, bis der Orbit $\gamma(w)$ die Kurve L schneidet. Da L transversal zu $\gamma(w)$ ist und der Punkt z nicht in Q_1 liegt, kann die Lösungskurve $\gamma(w)$ ab diesem Zeitpunkt nicht mehr in das Gebiet M_1 zurückkehren, denn es gibt kein Gebiet M_4 mit $\dot{x} > 0$ und $\dot{y} > 0$. Sobald sich die Trajektorie in M_2 befindet, wird die Anzahl der Haie sinken. Auch die Beute-Population vermindert sich weiter. Aufgrund der Invarianz des Gebietes Λ strebt die Menge der Fische entweder gegen den Grenzwert $\frac{a}{e}$ und die Haie sterben aus oder der Orbit $\gamma(w)$ kreuzt die Kurve K . Ist dies der Fall, so steigt die Wachstumsrate der Beute wieder an – jedoch nicht über $\frac{a}{e}$ – während die Raubfische weiter aussterben. Da der Orbit die Transversale K nicht in umgekehrter Richtung schneiden kann, werden für $t \rightarrow \infty$ die Haie verschwinden und die Beutetier-Population stabilisiert sich auf den Wert $\frac{a}{e}$.

Dies ist im folgenden Phasenportrait (Abbildung 24) mit $a = 4$, $b = 4$, $c = 2$, $d = 5$, $e = 2$, $f = 4$ für verschiedene Anfangsbedingungen dargestellt.

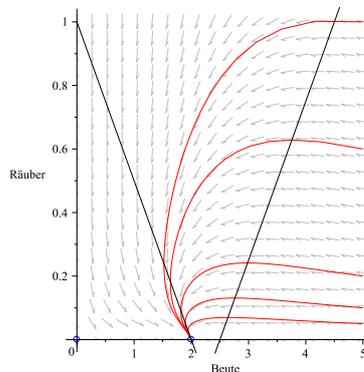


Abbildung 24: Phasenportrait einer limitierten Räuber-Beute-Gleichung ($ac < de$)

2. Fall: $ac > de$

Gilt $ac > de$, dann liegt der Schnittpunkt $z = z_3^*$ von K und L im Quadranten Q_1 und $z = z_3^* = (x_3^*, y_3^*)$ ist ein weiteres Equilibrium. Die Ruhelagen $z_1^* = (0, 0)$ und $z_2^* = (\frac{a}{e}, 0)$ sind beide instabil – Sattel – da sie jeweils einen positiven und einen negativen Eigenwert besitzen. Der Schnittpunkt z ist asymptotisch stabil – eine Senke.

Betrachtet man das Richtungsfeld der Räuber-Beute-Gleichung mit limitiertem Wachstum (10) für $ac > de$, so wird der I. Quadrant Q_1 des Koordinatensystems durch die beiden Nullklinen K und L in vier Gebiete M_i , $i = \{1, \dots, 4\}$, unterteilt (Abbildung 25).

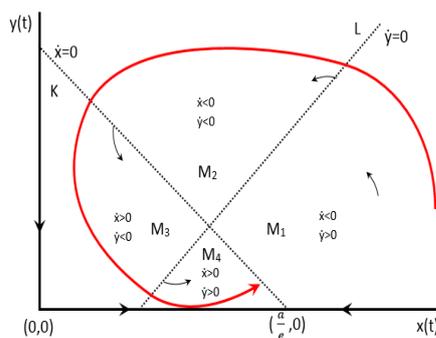


Abbildung 25: Richtungsfeld einer limitierten Räuber-Beute-Gleichung ($ac > de$)

Für die Anfangswerte $x_0 \neq 0, y_0 = 0$ respektive $x_0 = 0, y_0 \neq 0$ ergeben sich wie für den Fall $ac \leq de$ die Lösungskurven

$$\gamma(x_0, 0) = \left(\frac{a}{e + x_0 a e^{-at}}, 0 \right)$$

$$\gamma(0, y_0) = \left(0, \frac{d}{-f + x_0 d e^{dt}} \right).$$

Sei $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$. Da das Equilibrium z_3^* asymptotisch stabil ist, stellt sich die Frage, ob alle Trajektorien gegen z_3^* konvergieren oder ob möglicherweise ein Grenzzyklus existiert.

Nach dem Satz von Poincaré-Bendixson 2.12 muss die ω_{\pm} -Grenzmenge jedes begrenzten Orbits $\gamma((x, y)) \in \Lambda$, mit $x > 0, y > 0$, entweder aus

- (a) einem regulären, periodischen Orbit,
- (b) einem der drei Equilibrien $z_1^* = (0, 0), z_2^* = (\frac{a}{e}, 0), z_3^* = z$ oder
- (c) aus endlich vielen Equilibrien z_n^* und aus nicht-geschlossenen Orbits $\gamma(w), w \in Q_1$ mit $\omega_{\pm}(w) \in \{z_n^*\}$

bestehen.

Für das erweiterte Lotka-Volterra-Modell (10) ist man nur an der ω_+ -Grenzmenge interessiert.

Die Equilibrien z_1^* und z_2^* sind Sattel. In der Nähe der Ruhelage $z_1^* = (0, 0)$ ist die Steigung $\dot{x} > 0$ – die Menge der Fische nimmt zu. In hinreichend kleiner Umgebung von $z_2^* = (\frac{a}{e}, 0)$ gilt $\dot{y} > 0$ – die Bevölkerung der Haie wird ansteigen. Somit kann man die Punkte z_1^* und z_2^* aus der ω_+ -Grenzmenge ausschließen und die Grenzmenge $\omega_+(x, y)$ besteht entweder aus dem Equilibrium z oder aus einem Grenzzyklus, der in dem Rechteck Λ liegt.

Als Folge des Satzes von Poincaré-Bendixson 2.12 wurde in Lemma 2.15 gezeigt, dass im Inneren jedes periodischen Orbits ein Equilibrium, in diesem Fall z , enthalten sein muss.

Um gegen einen Grenzzyklus zu konvergieren, muss ein Orbit $\gamma(w)$ in ein wie in Fall (1) definiertes Rechteck Λ hineinführen und in diesem positiv invarianten Gebiet bleiben (Abbildung 26).

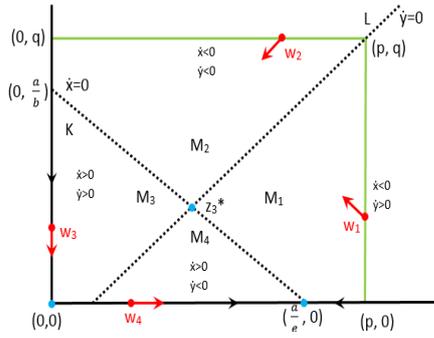


Abbildung 26: Richtungsfeld mit Rechteck Λ (grün) für $ac > de$

Sei $(p, q) \in L$ eine Ecke dieses Rechtecks Λ . Dann existiert für jeden Anfangswert (x_0, y_0) ein Zeitpunkt $t_1 > 0$ so, dass die Lösungskurve zu jedem Zeitpunkt innerhalb von Λ liegt. Es gilt also

$$x(t) < p, \quad y(t) < q, \quad \text{für alle } t \geq t_1.$$

Auf die gleiche Weise lassen sich untere Grenzen für $x(t)$ und $y(t)$ finden und man erhält mit

$$\begin{aligned} 0 < x(t) < p \\ 0 < y(t) < q \end{aligned}$$

für alle $t \geq t_0$ eine Begrenzung der Lösungskurven.

Folglich nähert sich die Trajektorie nach langer Zeit entweder dem Equilibrium z oder einem Grenzyklus an.

Mit Hilfe einer strikten Ljapunov-Funktion $V(x, y)$ für das erweiterte Räuber-Beute-Modell (10) mit $ac > de$ kann man periodische Orbits oder Grenzyklen ausschließen. $V(x, y)$ erhält man, indem man in das erste Integral (9) des einfachen Lotka-Volterra-Modells das Equilibrium $z = z^*_3$ einsetzt. Es ergibt sich die folgende Funktion

$$V(x, y) = c(x - x^*_3 \ln x) + b(y - y^*_3 \ln y)$$

(siehe [5], Seite 81). Der Gradient ∇V von V in der Ruhelage z ist

$$\nabla V(z) = \begin{pmatrix} c(1 - \frac{x^*_3}{x^*_3}) \\ b(1 - \frac{y^*_3}{y^*_3}) \end{pmatrix} = 0$$

und für die Hesse-Matrix H_V in z ergibt sich

$$\begin{aligned} H_V(z) &= \begin{pmatrix} \frac{cx^*_3}{(x^*_3)^2} & 0 \\ 0 & \frac{by^*_3}{(y^*_3)^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{c}{x^*_3} & 0 \\ 0 & \frac{b}{y^*_3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diese ist positiv definit, da die Eigenwerte positiv sind, und die Ljapunov-Funktion V besitzt im Equilibrium ein striktes globales Minimum.

Berechnet man die orbitale Ableitung der Funktion V und verwendet hierbei $(a - by_3^* - ex_3^*) = 0$ beziehungsweise $(cx_3^* - d - fy_3^*) = 0$, so erhält man

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x, y) &= \frac{\partial V}{\partial x}(x, y)(a - by - ex)x + \frac{\partial V}{\partial y}(x, y)(cx - d - fy)y \\
&= c\left(1 - \frac{x_3^*}{x}\right)(a - by - ex)x + b\left(1 - \frac{y_3^*}{y}\right)(cx - d - fy)y \\
&= c\left(1 - \frac{x_3^*}{x}\right)(a - by - ex - (a - by_3^* - ex_3^*))x \\
&\quad + b\left(1 - \frac{y_3^*}{y}\right)(cx - d - fy - (cx_3^* - d - fy_3^*))y \\
&= c(x - x_3^*)(-b(y - y_3^*) - e(x - x_3^*)) \\
&\quad + b(y - y_3^*)(c(x - x_3^*) - f(y - y_3^*)) \\
&= -ce(x - x_3^*)^2 - bf(y - y_3^*)^2
\end{aligned}$$

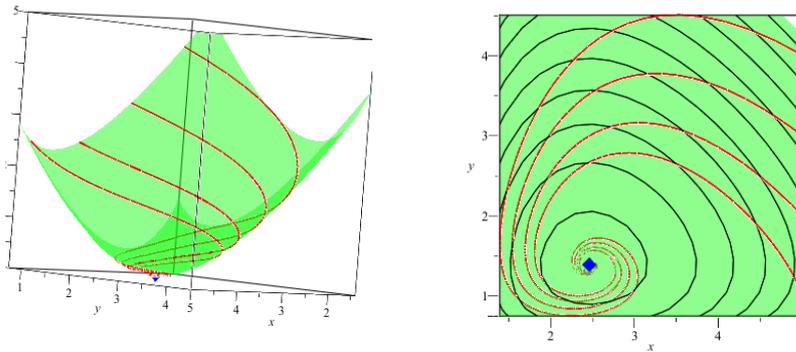
Da für die Variablen $a, b, c, d, e, f > 0$ gilt, ist die orbitale Ableitung von V

$$\dot{V}(x, y) < 0$$

für alle $(x, y) \in ((0, \infty) \times (0, \infty)) \setminus \{z_3^*\}$.

Mit dem Satz der Ljapunov-Stabilität 1.9 folgt, dass das limitierte Räuber-Beute-Modell (10) im Equilibrium z für alle $(x, y) \in ((0, \infty) \times (0, \infty)) \setminus \{z_3^*\}$ asymptotisch stabil ist.

Somit konvergieren alle Trajektorien $\gamma(w)$ mit $w \in Q_1$, mit Ausnahme des Equilibriums selbst, gegen z .



(a) von vorne

(b) von oben

Abbildung 27: Ljapunov-Funktion der limitierten Räuber-Beute-Gleichung ($ac > de$)

In Abbildung 27 wurde die strikte Ljapunov-Funktion V so transformiert, dass $V((x_3^*, y_3^*)) = 0$ und $V((x, y)) > 0$ für $(x_3^*, y_3^*) \neq (x, y)$ gilt. Man erkennt, dass auf der Funktion V , welche in x_3^* ein globales Minimum besitzt, die Lösungskurven der erweiterten Lotka-Volterra-Gleichung (10) für $ac > de$ streng monoton fallend verlaufen (Abbildung 27(a)). Betrachtet man das Schaubild von oben (Abbildung 27(b)), so sieht man, dass alle Orbits gegen das Equilibrium z_3^* konvergieren und dieses somit für alle $(x, y) \in Q_1$ asymptotisch stabil ist.

Stellt man das zugehörige Phasenportrait mit $a = 4$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 6$, $e = \frac{1}{2}$, $f = 1$ (Abbildung 28) dar, so erkennt man, dass alle Orbits, deren Anfangsbedingungen in Q_1 liegen, gegen die Ruhelage z_3^* konvergieren – mit Ausnahme des Equilibriums selbst. Somit wird sich sowohl die Anzahl der Haie, als auch die Populationsdichte der Fische dauerhaft auf einen konstanten Wert einpendeln.

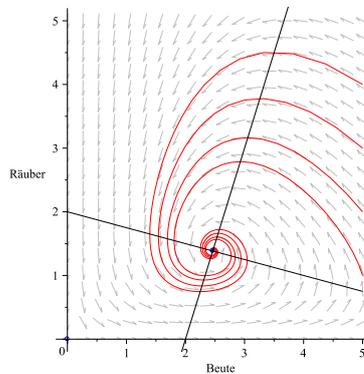


Abbildung 28: Phasenportrait einer limitierten Räuber-Beute-Gleichung ($ac > de$)

Zusammenfassend kann man feststellen, dass sich in jedem Ökologischen Modell – wie hier das Zusammenspiel zwischen Haien und Fischen – welches die Räuber-Beute-Gleichungen (8) oder (10) als Grundlage besitzt, die Populationsdichten entweder einer Konstanten annähern oder periodisch schwanken.

Es gibt für jede der beiden Populationen eine maximale Bevölkerungszahl η , welche auf Dauer nicht überschritten werden kann. D wird keine Population unendlich ansteigen.

In der Realität existieren in einem Ökosystem verschiedene andere Versionen des Lotka-Volterra-Modells.

Es ist möglich, dass zwei Populationen um das gleiche Nahrungsangebot konkurrieren. Dies lässt sich durch das **Konkurrenzmodell mit limitiertem Wachstum**

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (a - by - ex)x \\ \dot{y} &= (-cx + d - fy)y\end{aligned}$$

mit $a, b, c, d, e, f > 0$ beschreiben.

Auch gibt es natürlich sehr viel mehr als nur zwei Populationen, welche miteinander konkurrieren beziehungsweise voneinander leben können. Um das Zusammenspiel von n verschiedenen Bevölkerungen untersuchen zu können, kann man eine **verallgemeinerte Lotka-Volterra-Gleichung** der Art

$$\dot{x}_i = \left(a_i + \sum_{j=1}^n b_{ij}x_j \right) x_i$$

für $x_i \geq 0$, $i = \{1, \dots, n\}$ mit den reellen Konstanten a_i, b_{ij} verwenden.

Diese verschiedenen weiteren Möglichkeiten, die es in einem ökologischen System geben kann, können bei Interesse unter anderem in *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra* von Hirsch/Smale [2] und *Volterra Integral and Differential Equations* von Burton [8] nachgelesen werden.

A Anhang

Eingabefile für Maple

Sämtliche in der Arbeit verwendeten Abbildungen wurden entweder mit **Microsoft Office Word 2013** (Abbildungen 4, 9-14, 17, 19, 22, 23, 25, 26) oder mit **Maple 15** (Abbildungen 1-3, 5-8, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 27, 28) erstellt. Im folgenden Anhang werden die Eingabefiles angegeben, welche für die Maple-Plots verwendet wurden.

Beispiel Kapitel 1

Zuerst wird das in Kapitel 1 verwendete Beispiel bearbeitet. Man beginnt mit der Festlegung der Equilibrien in Abhängigkeit der Variablen.

Beispielhaft wird hier $\alpha := a = 0,5$ und $\beta := b = 0,5$ verwendet:

```
> restart:with(DEtools):with(plots):with(RealDomain):
  f(x,y) := -x + y + a * x^3 :
  g(x,y) := -y + x + b * y^3 :
  AS := [f(x,y),g(x,y)] :
  a := 0.5 : b := 0.5 : S := AS;
  GS := [f(x,y) = 0, g(x,y) = 0] :
  EQ := (solve(GS, [x, y]));
  EQW := evalf(EQ) :
  E1 := map(rhs, EQW[1]);
  E2 := map(rhs, EQW[2]);
  E3 := map(rhs, EQW[3]);

  S := [-x + y + 0.5x, -y + x + 0.5y]
  EQ := [[x = 0., y = 0.], [x = 2., y = -2.], [x = -2., y = 2.]]
  E1 := [0., 0.]
  E2 := [2., -2.]
  E3 := [-2., 2.]
```

Es folgt der Code für das Richtungsfeld einschließlich der Nullklinen (Abbildung 2). Möchte man nur das Richtungsfeld erzeugen (Abbildung 1), kann man dies im Befehl `display([FPlot])` ändern.

```
> FPlot := fieldplot(S, x = -5..5, y = -5..5, arrows = slim, clipping = false,
    grid = [20, 20], color = grey, fieldstrength = maximal) :
EQPlot := implicitplot([-x + y + a * x^3 = 0, -y + x + b * y^3 = 0], x = -5..5,
    y = -5..5, color = black, thickness = 2) :
display([FPlot, EQPlot]);
```

Zuletzt wird die Eingabe für das Phasenportrait mit Equilibrien (Abbildung 5) für verschiedene Anfangsbedingungen dargestellt.

```
> DE1 := diff(x(t), t) = (-x(t) + y(t) + a * x(t)^3) :
DE2 := diff(y(t), t) = (-y(t) + x(t) + b * y(t)^3) :
DPlot := DEplot([DE1, DE2], [x(t), y(t)], t = -10..10, [[0, 1, -1], [0, -1, 1], [0, 4, 4],
    [0, -4, -4], [0, 5, 0.1], [0, 0.1, 5], [0, -0.1, -5], [0, -5, -0.1], [0, 5, 0.5],
    [0, -5, -0.5], [0, 0.5, 5], [0, -0.5, -5], [0, 5, -1], [0, -5, 1], [0, 1, -5],
    [0, -1, 5], [0, 5, 3], [0, -5, -3], [0, 3, 5], [0, -3, -5], [0, 0.2, -1], [0, -0.2, 1],
    [0, 1, -0.2], [0, -1, 0.2], [0, 5, -4], [0, -5, 4], [0, 5, -4], [0, 4, -5],
    [0, -4, 5]], x = -5..5, y = -5..5, numpoints = 500, color = grey,
    thickness = 1, linecolor = red) :
PPlot := pointplot([E1, E2, E3], color = blue, symbol = circle,
    symbolsize = 15) :
display([DPlot, PPlot]);
```

$$S2 := \frac{d}{dt}x(t) = -x(t) + y(t) + 0.5 * x(t)^3,$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = -y(t) + x(t) + 0.5 * y(t)^3$$

Ljapunov-Stabilität

Mit Hilfe der Ljapunov-Funktion der Räuber-Beute-Gleichung wurden die Abbildungen 6 für den Beweis der (asymptotischen) Ljapunov-Stabilität wie folgt erzeugt.

```

> restart : with(DEtools) : with(plots) : with(plottools) :
  f(x, y) := (a - b * y - e * x) * x : f(x, y) :
  g(x, y) := (c * x - d - f * y) * y : g(x, y) :
  a := 4 : b := 2 : c := 3 : d := 6 : e := 1/2 : f := 1 :
  xE := (a * f + b * d)/(e * f + c * b) :
  yE := (a * c - d * e)/(e * f + c * b) : E2 := [xE, yE];
  DE1 := diff(x(t), t) = (a - b * y(t) - e * x(t)) * x(t) : DE1;
  DE2 := diff(y(t), t) = (c * x(t) - d - f * y(t)) * y(t) : DE2;
  DE3 := diff(z(t), t) = c * (x(t) - xE) * (a - b * y(t) - e * x(t)) +
        b * (y(t) - yE) * (c * x(t) - d - f * y(t)) : DE3;
  PPlot := pointplot([E2], color = blue, symbol = circle, symbolsize = 15) :
  V := (x, y) -> c * (x - xE * ln(x)) + b * (y - yE * ln(y));
  VE := (x, y) -> c * (x - xE * ln(x)) + b * (y - yE * ln(y)) - V(xE, yE);
  z1 := evalf(VE(5, 2)) :
  Pt := plot3d(VE(x, y), x = 0..5, y = 0..5, color = green, style = patchnograd,
              transparency = 0.75) :
  SPt := pointplot3d([2.7, 1.55, 0.06], color = black, symbolsize = 3, style = point) :
  PPt := pointplot3d([xE, yE, 0], color = blue, symbolsize = 5) :
  DPt := DEplot3d([DE1, DE2, DE3], [x(t), y(t), z(t)], t = 0..5, [[0, 5, 2, z1],
              z(t) = -3..3, numpoints = 500, linecolor = red, thickness = 4,
              axes = none) :
  c := sphere([xE, yE, 0], 0.3) :
  display(c, Pt, PPt, color = grey, style = patchnograd, scaling = constrained,
          style = line, orientation = [-148, 68, 175], DPt, SPt);

```

$$E2 := \left[\frac{32}{13}, \frac{18}{13} \right]$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = \left(4 - 2y(t) - \frac{1}{2}x(t)\right)x(t)$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = (3x(t) - 6 - y(t))y(t)$$

$$\frac{d}{dt}z(t) = 3\left(x(t) - \frac{32}{13}\right)\left(4 - 2y(t) - \frac{1}{2}x(t)\right) + 2\left(y(t) - \frac{18}{13}\right)(3x(t) - 6 - y(t))$$

$$V := (x, y) \rightarrow c(x - xE \ln(x)) + b(y - yE \ln(y))$$

$$VE := (x, y) \rightarrow c(x - xE \ln(x)) + b(y - yE \ln(y)) - V(xE, yE)$$

Räuber-Beute-Gleichung

Nun folgt die Eingabe für die Untersuchung des Lotka-Volterra-Modells exemplarisch anhand der Räuber-Beute-Gleichung für limitiertes Wachstum mit $ac > de$. Analog kann man die Analyse für $ac < de$ respektive für ein unbegrenztes Wachstum durchführen.

Auch hier werden zu Beginn die Equilibrien bestimmt und zugeordnet:

```
> restart:with(DEtools):with(plots):
  f(x,y) := (a - b*y - e*x)*x : f(x,y) :
  g(x,y) := (c*x - d - f*y)*y : g(x,y) :
  AS := [f(x,y),g(x,y)] :
  AGS := [f(x,y) = 0, g(x,y) = 0] :
  AEQ := solve(AGS,[x,y]);
  AE1 := map(rhs,AEQ[1]) :
  AE2 := map(rhs,AEQ[2]) :
  AE3 := map(rhs,AEQ[3]) :
  AE4 := map(rhs,AEQ[4]) :
  a := 4 : b := 2 : c := 3 : d := 6 : e := 1/2 : f := 1 :
  c*a - e*d;
  S1 := AS;GS1 := AGS : EQ1 := AEQ;E11 := AE1;E12 := AE2;
  E13 := AE3;E14 := AE4;
```

$$AEQ := [[x = 0, y = 0], [x = \frac{a}{e}, y = 0], \\ [x = 0, y = -\frac{d}{f}], [x = \frac{af + bd}{ef + cb}, y = \frac{-ed + ca}{ef + cb}]]$$

9

$$S1 := [(4 - 2y - \frac{1}{2}x)x, (3x - 6 - y)y]$$

$$EQ1 := [[x = 0, y = 0], [x = 8, y = 0], [x = 0, y = -6], \\ [x = \frac{32}{13}, y = \frac{18}{13}]]$$

$$E11 := [0, 0]$$

$$E12 := [8, 0]$$

$$E13 := [0, -6]$$

$$E14 := [\frac{32}{13}, \frac{18}{13}]$$

Es folgt die Erstellung der Ljapunov-Funktion, zuerst frontal und anschließend von oben betrachtet (Abbildung 27). Hier wurde die Funktion so bearbeitet, dass $V(z^*) = 0$ gilt.

```

> DE1 := diff(x(t), t) = (a - b * y(t) - e * x(t)) * x(t) : DE1;
DE2 := diff(y(t), t) = (c * x(t) - d - f * y(t)) * y(t) : DE2;
DE3 := diff(z(t), t) = c * (x(t) - xE) * (a - b * y(t) - e * x(t))
      + b * (y(t) - yE) * (c * x(t) - d - f * y(t)) : DE3;
xE := (a * f + b * d) / (e * f + b * c); yE := (c * a - d * e) / (e * f + b * c);
V := (x, y) -> c * (x - xE * ln(x)) + b * (y - yE * ln(y));
VE := (x, y) -> c * (x - xE * ln(x)) + b * (y - yE * ln(y)) - V(xE, yE);
z1 := evalf(VE(5, 2)) : z2 := evalf(VE(5, 3)) : z3 := evalf(VE(5, 4)) :
z4 := evalf(VE(5, 1)) :
Pt := plot3d(VE(x, y), x = 0..5, y = 0..5, color = green, transparency = 0.75) :
PPt := pointplot3d([xE, yE, 0], symbolsize = 25) :
DPt := DEplot3d([DE1, DE2, DE3], [x(t), y(t), z(t)], t = 0..5, [[0, 5, 2, z1],
[0, 5, 3, z2], [0, 5, 4, z3], [0, 5, 1, z4]], z(t) = 0..5, numpoints = 500,
color = grey, thickness = 2, linecolor = red) :
display([Pt, PPt, DPt], orientation = [107, 85, 65], style = patchnogrid);
display([Pt, PPt, DPt], orientation = [-90, 0, 0], style = patchcontour);

```

$$\frac{d}{dt}x(t) = (4 - 2y(t) - x(t))x(t)$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = (3x(t) - 6 - y(t))y(t)$$

$$\frac{d}{dt}z(t) = 3(x(t) - xE)(4 - 2y(t) - \frac{1}{2}x(t)) + 2(y(t) - yE)(3x(t) - 6 - y(t))$$

$$xE := \frac{32}{13}$$

$$yE := \frac{32}{13}$$

$$V := (x, y) \rightarrow c(x - xE \ln(x)) + b(y - yE \ln(y))$$

$$VE := (x, y) \rightarrow c(x - xE \ln(x)) + b(y - yE \ln(y)) - (xE, yE)$$

Das Maplefile für ein Phasenportrait der limitierten Räuber-Beute-Gleichung inklusive der Equilibrien und Nullklinen (Abbildung 28) lautet:

```
> x0 := -e/b * x + a/b; y0 := c/f * x - d/f;
  KPlot := plot([x0, y0], x = 0..5, color = black) :
  DPlot := DEplot([DE1, DE2], [x(t), y(t)], t = 0..10, [[0, 5, 2], [0, 5, 3], [0, 5, 4],
    [0, 5, 1]], x = 0..5, y = 0..5, numpoints = 500, color = grey,
    thickness = 1, linecolor = red) :
  PPlot := pointplot([E11, E12, E13, E14], color = blue, symbol = circle,
    symbolsize = 10) :
  display([DPlot, PPlot, KPlot]);
```

$$x0 := -\frac{1}{4}x + 2$$

$$y0 := 3x - 6$$

Abschließend folgt die Eingabe, um die Lösungskurve (Abbildung 21) zu erzeugen.

```
> Ab := x(0) = 5, y(0) = 1;
  Lsg := dsolve(S2, Ab, x(t), y(t), type = numeric, output = listprocedure);
  assign(subs(x(t) = fx, y(t) = fy, Lsg));
  plot(fx, fy, 0..4, y = 0..5, labels = ["t", "Räuber und Beute"],
    color = [green, red]);
```

```
Ab := x(0) = 5, y(0) = 1
Lsg := [t = proc(t)...end; , x(t) = proc(t)...end; , y(t) = proc(t)...end; ]
```

Abbildungsverzeichnis

1	Richtungsfelder mit verschiedenen α und β	6
2	Richtungsfelder mit Nullklinen für $\dot{x} = 0$ und $\dot{y} = 0$	6
3	Phasenportraits mit verschiedenen α und β	7
4	Beispiel für einen heteroklinen beziehungsweise homoklinen Orbit	11
5	Phasenportrait mit Equilibrien für $\alpha = 0,5$ und $\beta = 0,5$	12
6	Ljapunov-Funktion mit Orbit und Equilibrium	14
7	Phasenportrait für $p = 3$ mit Equilibrien bei $y = x$	16
8	Ljapunov-Funktion für Beispiel 1.2 mit $p = 3$	17
9	Beweis von Lemma 2.1	22
10	Poincaré-Abbildung	23
11	Asymptotisch stabiler, periodischer Orbit	24
12	Monotone Folge der Schnittpunkte x_n von Orbit mit Transversale	26
13	Approximation von y	27
14	Eindeutigkeit des Orbits $\gamma(y) \subseteq \omega_{\pm}(x)$	30
15	Phasenportrait mit heteroklinen Orbits (grün)	33
16	Lösungskurve einer Räuber-Beute-Gleichung	36
17	Richtungsfeld einer Räuber-Beute-Gleichung	38
18	Ljapunov-Funktion für die Räuber-Beute-Gleichung	41
19	Nachweis von periodischen Orbits der Räuber-Beute-Gleichung	42
20	Phasenportrait einer Räuber-Beute-Gleichung	43
21	Lösungskurven von limitierten Räuber-Beute-Gleichungen	44
22	Richtungsfeld einer limitierten Räuber-Beute-Gleichung ($ac < de$)	46
23	Richtungsfeld mit Rechteck Λ (grün) für $ac < de$	47
24	Phasenportrait einer limitierten Räuber-Beute-Gleichung ($ac < de$)	48
25	Richtungsfeld einer limitierten Räuber-Beute-Gleichung ($ac > de$)	49
26	Richtungsfeld mit Rechteck Λ (grün) für $ac > de$	50
27	Ljapunov-Funktion der limitierten Räuber-Beute-Gleichung ($ac > de$)	51
28	Phasenportrait einer limitierten Räuber-Beute-Gleichung ($ac > de$)	52

Symbolverzeichnis

\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen ohne Null
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen
\mathbb{Z}_+	Menge der positiven ganzen Zahlen inklusive Null
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{R}_+	Menge der positiven reellen Zahlen inklusive Null
\mathbb{R}^n	n -dimensionaler reeller euklidischer Raum
C^k	Menge der k -mal stetig differenzierbaren Funktionen
\mathcal{E}	Menge der Equilibrien
k, n	Variablen für beliebige natürliche Zahlen
\exists	es existiert
\equiv	identisch gleich
M	Phasenraum
C	kompakte Untermenge von M
U	Umgebung eines Punktes
Γ	Zeitraum
t, s	Zeitpunkte in Γ
t_0	Anfangszeitpunkt
(t_n)	Folge von Zeitpunkten t_n für $n \rightarrow \infty$
$x(t)$	Lösungskurve eines Cauchyproblems
$\dot{x}(t)$	Ableitung der Lösungskurve nach t
x_0	Anfangsbedingung zum Zeitpunkt t_0
x^*	Equilibrium
$f(t, x)$	Vektorfeld
$f(x)$	autonomes Vektorfeld
$\Phi(t, x)$	(semi-)dynamisches System oder (Halb-)Fluss
$\gamma(x_0)$	Orbit für einen Anfangswert x_0
$\gamma_+(x_0)$	positiver Semiorbit für $t > 0$
$\gamma_-(x_0)$	negativer Semiorbit für $t < 0$
$\omega_{\pm}(x)$	positive/negative Grenzmenge
$u(t)$	Störung des Equilibriums x^*
$r(u)$	Restglied der Taylor-Entwicklung
$Df(x)$	Jacobi-Matrix der Funktion $f(x)$
$\text{sp } A$	Spur der Matrix A
$\det A$	Determinante der Matrix A
λ	Eigenwert der Matrix A
$V(x)$	Ljapunov-Funktion
$\ \cdot\ $	euklidische Norm
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Skalarprodukt
∇	Gradientenoperator
$d(\cdot, \cdot)$	Abstand zweier Punkte im euklidischen Raum
$S(x)$	eindimensionale, glatte Hyperebene
Σ	Transversale
T	Periode von x
$\tau(x)$	glatte Funktion
P_{Σ}	Poincaré-Abbildung
P_{Σ}^n	n -te Poincaré-Abbildung
Λ	invariantes Rechteck
$\bar{\Lambda}$	Begrenzung des Rechtecks Λ

Literatur

- [1] Teschl, Gerald: *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*, American Mathematical Society, 2010.
- [2] Hirsch, Morris W.; Smale, Stephen: *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, Inc., 1974.
- [3] Prüss, Jan W.; Wilke, Mathias: *Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme*, Birkhäuser | Springer, 2010.
- [4] Grüne, Lars; Junge, Oliver: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Vieweg+Teubner | Springer, 1. Auflage, 2009.
- [5] Wirsching, Günther J.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Vieweg+Teubner | Springer, 2006.
- [6] Marx, Bernd; Vogt, Werner: *Dynamische Systeme - Theorie und Numerik*, Spektrum Akademischer Verlag, 2011.
- [7] Einsiedler, Manfred; Schmidt, Klaus: *Dynamische Systeme*, Birkhäuser | Springer, 2014.
- [8] Burton, T.A.: *Volterra Integral and Differential Equations*, Elsevier B.V., 2. Edition, 2005.
- [9] Bronstein, I. N. ; Semendjajew, K. A.; Musiol, G. ; Mühlig, H.: *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Europa-Lehrmittel, 9., korrigierte Auflage, 2013.
- [10] Heuser, Harro: *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*, Vieweg+Teubner | Springer, 17., akt. Auflage, 2009.
- [11] Heuser, Harro: *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*, Vieweg+Teubner | Springer, 14. Auflage, 2008.
- [12] Braun, Rüdiger; Meise, Reinhold: *Analysis mit Maple*, Vieweg+Teubner | Springer, 2. Auflage, 2012.
- [13] Unbehauen, Heinz: *Regelungstechnik II*, Vieweg+Teubner | Springer, 8. Auflage, 2000.



Erklärung

Name: Juliane Lebert

Matrikel-Nr.: 8917132

Fach: Mathematik

Modul: Bachelorarbeit

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Abschlussarbeit mit dem Thema

Der Satz von Poincaré-Bendixson und Anwendungen

selbstständig und ohne unzulässige Inanspruchnahme Dritter verfasst habe. Ich habe dabei nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet und die aus diesen wörtlich, inhaltlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche den wissenschaftlichen Anforderungen entsprechend kenntlich gemacht. Die Versicherung selbstständiger Arbeit gilt auch für Zeichnungen, Skizzen oder graphische Darstellungen. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form weder derselben noch einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht. Mit der Abgabe der elektronischen Fassung der endgültigen Version der Arbeit nehme ich zur Kenntnis, dass diese mit Hilfe eines Plagiatserkennungsdienstes auf enthaltene Plagiate überprüft und ausschließlich für Prüfungszwecke gespeichert wird.

Datum: _____ Unterschrift: _____